Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

Rodrigo Ribeiro dos Santos

Uma proposta para introdução da Lógica Fuzzy no Ensino Médio

Vitória da Conquista
Setembro de 2022

RODRIGO RIBEIRO DOS SANTOS

Uma proposta para introdução da Lógica Fuzzy no Ensino Médio

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UESB como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Flaulles Boone Bergamaschi.

Vitória da Conquista
Setembro de 2022

S238u Santos, Rodrigo Ribeiro.
Uma proposta para introdução da Lógica Fuzzy no ensino médio. / Rodrigo Ribeiro Santos, 2022.
55f. il.
Orientador (a): Dr. Flaulles Boone Berga-maschi.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista - BA, 2022.
Inclui referências. 54 - 55.
1. Fuzzy - Matemática. 2. Ensino - Matemática. 3. Aplicações. I. Berga-maschi, Flaulles Boone. II. Universidade Estadual Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista, III. T.

CDD: 510

Catalogação na fonte: Juliana Teixeira de Assunção-CRB 5/1890
UESB – Campus Vitória da Conquista – BA

Rodrigo Ribeiro dos Santos

Uma proposta para introdução da Lógica Fuzzy no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Flaulles Boone Bergamaschi
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Profª. Drª. Clênia Andrade Oliveira de Melo
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Prof. Dr. Ronildo Pinheiro de Araujo Moura
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Vitória da Conquista – Ba, 30 de Setembro de 2022

Agradecimentos

Primeiramente quero agradecer a Deus por me dar vida e saúde para que eu possa realizar meus projetos, pois sem ele nada disso seria possível.

Aos meus filhos Ian e Isabella que sempre me servem de incentivo e inspiração, que muitas vezes ficavam sem a devida atenção e companhia para brincar. Obrigado filhos por ser minha fonte de energia para concluir mais essa etapa.

Minha esposa Daniela que é minha companheira em todos os momentos da vida e incentivadora, que por muitas vezes me ajudou possibilitando a conclusão desse trabalho.

Aos meus pais: minha mãe Terezinha que sempre foi e será a pessoa que ora e torce por mim a cada minuto, ao meu pai Silvânio por sempre me encorajar a prosseguir em meus objetivos.

Minhas irmãs Danielle e Hellen por sempre desejarem o meu sucesso.

Ao meu Professor Dr. Flaulles Boone Bergamaschi, que aceitou me orientar e que com muita atenção, zelo e amizade me acompanhou nessa etapa, obrigado pela confiança.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) pela concepção do programa que oportuniza o sonho de pós-graduação a muitos professores de Matemática.

À coordenação nacional e local do PROFMAT pela dedicação e comprometimento.

Aos professores do programa do PROFMAT - UESB, em especial aos que foram meus professores; agradeço pelos ensinamentos e atenção.

Aos colegas de mestrado por tornarem os dias de estudo mais leves e agradáveis. Enfim, foram muitos os envolvidos nesse processo, fica meu muito obrigado a todos.

Resumo

A Matemática clássica tem como seu principal pilar a lógica clássica, e assim trata problemas envolvendo imprecisão ou subjetividade com modelos baseados em dois valores, verdadeiro ou falso. Baseada em um lógica de infinitos valores que generaliza a lógica clássica, a Matemática Fuzzy se apresenta como um modelo mais eficiente para tratar casos onde imprecisão ou subjetividade aparecem em problemas propostos. O presente trabalho tem como principal objetivo abordar a Matemática Fuzzy em um contexto voltado para o ensino de Matemática na educação básica. Para isso, é apresentado uma introdução à Teoria Fuzzy, que dá a base necessária para a discussão e resolução das aplicações propostas nesse trabalho. Com o intuito de trabalhar lógica fuzzy com os alunos, é proposto atividades que discutem, por exemplo, quando chamar uma via de rua ou avenida? Como determinar matematicamente se uma janela está um pouco aberta ou um pouco fechada? É apresentado também o problema "Como escolher um bom jogador de basquete?", que permite mostrar a lógica fuzzy como ferramenta para a tomada de decisões. Ainda é proposto um problema sobre matemática intervalar que traz a reflexão sobre como pensar matematicamente as operações aritméticas com valores incertos. Por fim, realizou-se uma prática em sala, apresentando o tema aos educandos. A aplicação de um questionário sobre assuntos incertos, como o que seria um jogador de altura baixa, média, alta e muita alta, possibilitou perceber como os alunos resolvem problemas de aspectos subjetivos.

Palavras-chave: Fuzzy; Ensino; Aplicações

Abstract

Classical Mathematics has classical logic as its main pillar, and thus treats problems involving imprecision or subjectivity with models based on two values, true or false. Based on a logic of infinite values that generalizes classical logic, Fuzzy Mathematics presents itself as a more efficient model to deal with cases where imprecision or subjectivity appear in proposed problems. The main objective of this work is to approach Fuzzy Mathematics in a context aimed at teaching Mathematics in basic education. For this, we made an introduction to the Fuzzy Theory, which provides the necessary basis for the discussion and resolution of the applications proposed in this work. In order to introduce fuzzy logic to students, we propose activities that discuss, for example, when to call a street or avenue? How to mathematically determine if a window is a little open or a little closed? We also present the problem "How to choose a good basketball player?", which allows us to show fuzzy logic as a tool for decision making. We also propose a problem on interval mathematics that brings us to think about how to think mathematically arithmetic operations with uncertain values. Finally, we carried out a practice in the classroom, presenting the topic to the students. The application of a questionnaire on uncertain subjects, such as what a low, medium, high and very tall player would be, made it possible to understand how students solve problems with uncertain aspects.

Keywords: Fuzzy; Teaching; Applications

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

A teoria fuzzy foi apresentada em 1965 por Lotfi A. Zadeh, professor no departamento de engenharia elétrica e ciências da computação da Universidade da Califórnia, em Berkeley. O termo em inglês "fuzzy" significa coisas que não são muito claras.

Na vida real depara-se com situações onde não é possível decidir se uma afirmação é verdadeira ou falsa. Sempre que tal cenário chega, a lógica fuzzy fornece flexibilidade valiosa para o raciocínio, considerando as incertezas da situação. O método da lógica fuzzy emula a forma humana de tomada de decisão, que na maioria das vezes não é bivalente, 0 ou 1, sim ou não, falso ou verdadeiro etc.

No estudo da teoria clássica dos conjuntos classificamos com facilidade elementos como pertencentes ou não a um dado conjunto clássico. Por exemplo, dado um x de um conjunto universo U, e um conjunto A, escrevemos que $x \in A$ ou $x \notin A$. Podemos afirmar com clareza que o número 2 pertence ao conjuntos dos números naturais mas -2 não pertence a esse mesmo conjunto. Nessas situações a lógica booleana é perfeitamente aplicável. Agora, se pensamos no conjuntos dos números próximos de 10, o que dizer sobre a pertinência de 9,5 a esse conjunto? A resposta será subjetiva. Nesse caso precisamos informar qual é o grau de pertencimento que o 9,5 tem com o conjunto dos números próximos de 10. Para isso na teoria dos Conjuntos Fuzzy, considera-se o intervalo real fechado $[0, 1]$ para determinar o quanto um número pertence ao conjunto dos números próximos de 10, podendo, por exemplo, o número 9,5 ter grau de pertencimento igual a 0,8 enquanto o número 9,8 ter grau de pertencimento igual a 0,9.

Diversas situações envolvem subjetividade e não podem ser modeladas a partir dos conjuntos clássicos. Por exemplo, não é possível saber o exato momento que um iogurte estará impróprio para o consumo ou determinar com precisão quando uma pessoa passa a ser idosa . Diante disso, o objetivo desse trabalho é apresentar conceitos da lógica e conjuntos fuzzy para alunos do Ensino Médio e analisar como os estudantes resolvem problemas envolvendo subjetividade. Para isso o primeiro capítulo dessa pesquisa, apresenta um resumo da lógica proposicional e noções da lógica fuzzy. O capítulo seguinte, resume os principais tópicos da teoria dos conjuntos clássicos, em seguida, desenvolve-se a definição e conceitos fundamentais da teoria dos conjuntos fuzzy. O terceiro capítulo apresenta-se problemas e suas possíveis soluções que podem ser propostos no Ensino Médio. Por fim, no último capítulo, desenvolveu-se uma prática com alunos da 3ª série, que foi dividida em duas etapas, na primeira, apresenta-se o que é a lógica fuzzy e os conjuntos fuzzy, na segunda, um questionário envolvendo questões de aspectos incertos que possibilitou perceber como os alunos analisam e resolvem problemas subjetivos.

Capítulo 1

Noções de lógica fuzzy

Este capítulo é uma breve introdução à lógica fuzzy e está baseado no Capítulo 2 de [4]. Para mostrar como a lógica fuzzy estende e generaliza a lógica clássica, a próxima seção inicia-se com a lógica proposicional. A lógica proposicional trata de encontrar os valores de verdade de fórmulas contendo proposições atômicas, cujo valor de verdade é zero ou um, conectado pelos operadores "e"($\wedge$), "ou"($\vee$), "implicação"($\rightarrow$), etc.

A primeira seção, revisa os resultados básicos da teoria dos conjuntos clássicos. Na segunda seção inicia o conceito de lógica fuzzy, onde os valores não assumirão apenas valores de verdade 0 e 1, mas qualquer número no intervalo [0, 1]. Os valores verdade serão determinados usando *min* para ($\wedge$) e *max* para ($\vee$).

1.1 Lógica proposicional

A lógica é a análise dos métodos de raciocínio. A lógica proposicional é uma lógica que lida com proposições. Uma proposição é uma sentença que seja verdadeira ou falsa. O "verdadeiro"e o "falso"são chamados de valores de verdade. Vamos denotar esses valores por 1 e 0, respectivamente. Frases simples ou proposições atômicas são denotadas por $p, q, \ldots$ ou $P_1, P_2, \ldots$ As proposições atômicas são combinadas para formar proposições mais complexas onde a verdade ou falsidade das novas sentenças são determinadas pela verdade ou falsidade de suas proposições atômicas.

A negação, denotada por $\sim$, é uma operação sobre proposições. Ou seja, se p é uma proposição, então $\sim p$ também é uma proposição, cujos valores verdade são mostrados na seguinte tabela verdade:

p	$\sim p$
0	1
1	0

Figura 1.1: Tabela verdade da negação

Outra operação comum é a conjunção "e". A conjunção das proposições p e q é denotada por $p \wedge q$ e tem a seguinte tabela verdade:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Figura 1.2: Tabela verdade da conjunção

A conjunção $p \wedge q$ será verdade, se e somente se, tanto p como q são verdadeiros.

Existe um operador nas proposições correspondentes a "ou", chamado disjunção. A disjunção da proposição p e q é denotada por $p \vee q$. Sua tabela verdade é a seguinte:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Figura 1.3: Tabela verdade da disjunção

Assim, $p \vee q$ é falso se, e somente se, tanto p quanto q são falsos.

Outra operação de verdade sobre proposições é chamada de condicional: se p, então q. "Se p, então q" é falso quando o antecedente p é verdadeiro e o consequente q é falso, caso contrário é verdadeiro. Denotamos "Se p, então q" por $p \to q$ e dizemos que p implica q. Assim $p \to q$ tem a seguinte tabela verdade:

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Figura 1.4: Tabela verdade da implicação

Vamos denotar "p e somente se q" por p $\leftrightarrow$ q. Tal expressão é chamada de bicondicional. Claramente p $\leftrightarrow$ q é verdadeiro quando, e somente quando, p e q têm os mesmos valores de verdade. Duas proposições que têm os mesmos valores de verdade são ditas equivalentes. Sua tabela verdade é dada abaixo:

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Figura 1.5: Tabela verdade da bicondicional

Os símbolos $\sim, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$ são chamados conectivos proposicionais. Qualquer proposição construída pela aplicação desses conectivos tem um valor de verdade 1 ou 0 que depende dos valores de verdade das proposições constituintes. Usamos o nome fórmulas para uma expressão construída a partir dos símbolos proposicionais p, q, r, etc., por aplicações apropriadas dos conectivos proposicionais. O valor verdade de uma fórmula pode ser representado por uma tabela verdade. Por exemplo, a fórmula $(p \wedge q) \to (\sim p \vee r)$ tem a tabela verdade a seguir.

p	q	r	$p \wedge q$	$\sim p$	$\sim p \vee r$	$(p \wedge q) \to (\sim p \vee r)$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1

Figura 1.6: Tabela verdade da fórmula $(p \wedge q) \to (\sim p \vee r)$.

Uma fórmula que é sempre verdadeira é chamada de tautologia. Uma fórmula é uma tautologia se, e somente se, sua função de verdade correspondente assume apenas o valor 1, ou seja, sua tabela verdade tem apenas uns na coluna sob a fórmula. Por exemplo, as fórmulas $(p \vee (\sim p))$ e $(\sim (p \wedge (\sim p))$ são tautológicas.

Se P e Q são fórmulas e (P $\to$ Q) é uma tautologia, dizemos que P implica logicamente Q, ou Q é uma consequência lógica de P. Uma fórmula que é falsa para todos os valores verdade possíveis de seus símbolos proposicionais é chamada de contradição. Sua tabela verdade tem apenas zeros na coluna sob a fórmula. Por exemplo, (p $\wedge$ ($\sim$ p)) e (p $\leftrightarrow$ ($\sim$ p)) são contradições. Note que uma fórmula P é uma tautologia se, e somente se, ($\sim$ P) é uma contradição.

1.2 Conjuntos Clássicos

Chamamos de conjunto clássico ou conjuntos crisp, a coleção de objetos distintos e bem definidos. Esses objetos são chamados de elementos ou membros do conjunto. Normalmente denotamos os conjuntos por letras maiúsculas A, B, C etc. E os membros por x, y, z etc. Para denotar que x pertence a A, escrevemos $x \in A$, caso contrário $x \notin A$. Um conjunto sem elementos é chamado de conjunto vazio e será denotado por $\emptyset$. Dizemos que o conjunto A é um subconjunto de B e escrevemos A $\subset$ B se todo elemento de A também é membro de B. Escrevemos $A = B$ se os conjuntos A e B têm os mesmos elementos. Portanto, dois conjuntos A e B são iguais se e somente se A $\subset$ B e $B \subset A$. O conjunto de todos os subconjuntos de um dado conjunto A é chamado de conjunto das partes de A e é denotado por $\mathcal{P}$(A).

Quando estamos falando sobre conjuntos, assume-se que todos os conjuntos são subconjuntos de um determinado conjunto chamado conjunto universo, geralmente denotado por U. Então um conjunto universo é um conjunto que contém todos os elementos possíveis que precisamos para uma discussão ou aplicação particular. Seja U o conjunto universo, A e B subconjuntos de U, temos as seguintes operações:

Complementar de A, denotado por $\bar{A}$, será formado por todos os elementos em U que não são membros de A e escrevemos $\bar{A} = \{a \in U \mid a \notin A\}$.

A união $A \cup B$ dos conjuntos A e B é definido como conjunto de todos os elementos que estão em A ou B e denotamos por $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

A interseção $A \cap B$ dos conjuntos A e B é definido pelo conjunto de todos os elementos que são membros de A e B e denotamos por $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$.

As propriedades entre operações com conjuntos, são as seguintes:

Comutativa: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$,

Associativa: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,

Associativa: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,

Absorção: $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$,

Distributiva : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

Distributiva : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

Idempotência: $A \cup \emptyset = A, A \cup U = U, A \cap U = A, A \cap \emptyset = \emptyset$,

Lei da contradição: $A \cap \bar{A} = \emptyset$,

Lei do terceiro excluído: $A \cup \bar{A} = U$,

Involução: $\bar{\bar{A}} = A$,

Lei de Morgan: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$,

Lei de Morgan: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

As propriedades para complementar, união e interseção de conjuntos são semelhantes para os operadores lógicos $\sim, \vee, \wedge$, respectivamente, por exemplo, a lei de Morgan, para as proposições p e q pode ser representada como:

$$\sim (\text{p} \vee q) \ = \sim \text{p} \wedge \sim q \text{ e} \sim (\text{p} \wedge q) \ = \sim \text{p} \vee \sim \text{q}.$$

1.3 Lógica Fuzzy

O princípio da lógica fuzzy é permitir que os valores verdade sejam qualquer número no intervalo $[0, 1]$. Se p é uma proposição atômica, então vamos usar $v(p)$ para denotar o "nível de verdade"de p. Então, $v(p) \in [0, 1]$ para qualquer proposição na lógica fuzzy. Por exemplo, $v(p) = 1$, significa que p é absolutamente verdadeiro, para $v(p) = 0$, temos que p é absolutamente falso e $v(p) = 0,6$ significa apenas que a verdade de p é 0,6.

A lógica fuzzy é uma lógica de valor infinito em que os valores de verdade podem variar de zero a um. Como a lógica proposicional, a lógica fuzzy está preocupada com a verdade das proposições. No entanto, no mundo real, as proposições são muitas vezes apenas parcialmente verdadeiras. É difícil caracterizar a verdade de "João é velho"como inequivocamente verdadeira ou falsa se João tem 60 anos. Em alguns aspectos ele é idoso, sendo elegível para benefícios como fila prioritária em muitos estabelecimentos, mas em outros aspectos ele não é idoso, pois não é elegível para a previdência social. Assim, na lógica fuzzy, para $p =$ João é velho, $v(p)$ assume uma infinidade de valores no intervalo $[0, 1]$ além de apenas zero e um.

É possível estender os operadores $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow$, para a lógica fuzzy. O valor verdade da negação da proposição p pode ser encontrado fazendo $v(\sim p) = 1 - v(p)$. Por exemplo, se $v(p) = 0.6$ então $v(\sim p) = 0,4$. Observe que para $v(p) = 0$ e $v(p) = 1$, a operação negação na lógica fuzzy coincide com os valores encontrados na lógica clássica.

Para o operador "e"o valor verdade será dada por $v(p \wedge q) = \min\{v(p), v(q)\}$, ou seja, será o menor valor entre os valores verdade de p e q. Por exemplo, se $v(p) = 0,6$ e $v(q) = 0,3$, então $v(p \wedge q) = \min\{v(p), v(q)\} = \min\{0,6; 0,3\} = 0,3$. Observe que $v(p \wedge q)$, também generaliza a operação "e"da lógica clássica.

O valor verdade da operação "ou"é definido por $v(p \vee q) = \max\{v(p), v(q)\}$. Por exemplo, considere os valores verdade para p e q, sendo $v(p) = 0,6$ e $v(q) = 0,3$, então $v(p \vee q) = \max\{0,3; 0,6\} = 0,6$. A operação "ou"também generaliza esta mesma operação da lógica proposicional.

O operador implicação da lógica proposicional pode ser "fuzzificado"por $v(p \rightarrow q) = min\,\{1, 1 - v(p) + v(q)\}$. Por exemplo, se $v(p) = 1$ e $v(q) = 0$, então $v(p \rightarrow q) = min\,\{1, 1 - 1 + 0\} = 0$. Observe que a operação implicação também generaliza essa mesma operação na lógica proposicional.

Tendo fuzzificado $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow$, podemos encontrar valores verdade de outras expressões. Por exemplo, o valor verdade de $(p \wedge q) \rightarrow r$ será:

$$\min\{1, 1 - \min[v(p), v(q)] + v(r)\}.$$

.

Capítulo 2

Conjuntos fuzzy

Este capítulo, discute a possibilidade de representação da imprecisão da linguagem natural através de conjuntos, denominados fuzzy. Inicia-se com a representação de um conjunto crisp por meio de uma função característica. Na sequência, é apresentado a definição de um subconjunto fuzzy e sua função de pertinência. As seções 2.4 e 2.5 discuti-se as operações com os conjuntos fuzzy e são definidos conceitos importantes como Suporte, Núcleo e α-nível. Ainda nesse capítulo, é apresentado a extensão de Zadeh, recurso importante para inter-relacionar a teoria clássica com a fuzzy. Na seção 2.7 o conceito de número fuzzy e suas operações. Por fim, é apresentado a definição e exemplos de relações fuzzy.

2.1 Conjuntos clássicos e função característica

Na teoria clássica dos conjuntos, se A é um subconjunto de U, temos que para o elemento $x \in U$, só existem duas possibilidades, ou $x \in A$ ou x $\notin$ A. Dessa forma, é possível definir uma função, chamada função característica, que permite descrever todos os elementos do subconjunto A.

Definição 2.1.1. *Seja U um conjunto universo e A um subconjunto de U. A função característica de A é dada por:*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \in A \\ 0 & se \quad x \notin A \end{cases}$$

Assim, a função $\chi_A : U \to \{0,1\}$ estabelece uma correspondência entre cada elemento x do conjunto universo U com o conjunto binário $\{0,1\}$. Se $\chi_A(x) = 1$, tem-se que $x \in A$, caso $\chi_A(x) = 0$ então $x \notin A$. Um subconjunto clássico, na linguagem fuzzy, costuma ser denominado por crisp. A figura 2.1 ilustra a função característica de um determinado conjunto crisp.

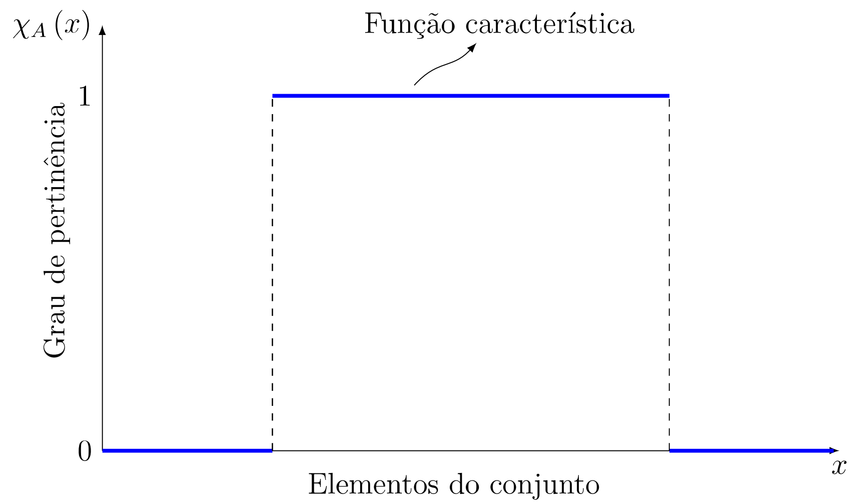


Figura 2.1: Função característica de um subconjunto crisp

2.2 Subconjunto fuzzy

Um subconjunto crisp nem sempre modela muito bem situações do mundo real, por exemplo, se consideramos um grupo de pessoas com idade de 0 à 100 anos, sendo o conjunto universo $U = [0, 100]$ e $J \subset U$ como o conjunto das idades dos humanos jovens, não é possível estabelecer, com clareza, quem são os elementos de J, pois o conceito jovem é subjetivo. Podemos considerar jovem uma pessoa com idade de 20 anos, entretanto, isso não significa que uma pessoa com 30 anos não seja jovem. Nesse caso, o que podemos afirmar é que uma pessoa com 20 anos tem um maior grau de pertinência com o conjunto das pessoas jovens do que a pessoa com 30 anos. Como veremos, uma das maneiras de descrever o subconjunto formado pelas pessoas jovens é por meio de subconjunto fuzzy.

Definição 2.2.1. *Seja U um conjunto clássico; um subconjunto fuzzy F de U é caracterizado por uma função $\varphi_F : U \to [0, 1]$, pré-fixada, chamada função de pertinência do subconjunto fuzzy F.*

Dessa forma, segundo [5], podemos escrever o conjunto $F = \{(x, \varphi_F) \,|x \in U\}$. Assim, dado um $x \in U$, a função φ_F fornece o grau de pertinência do elemento x em relação ao conjunto F. Observe que a diferença entre a definição de um subconjunto crisp para um subconjunto fuzzy está no contradomínio. No subconjunto fuzzy o contradomínio é uma ampliação do contradomínio do subconjunto clássico. Assim podemos considerar que um subconjunto crisp é um caso particular de um subconjunto fuzzy.

A figura 2.2 mostra o gráfico que representa a função de pertinência de um determinado subconjunto fuzzy.

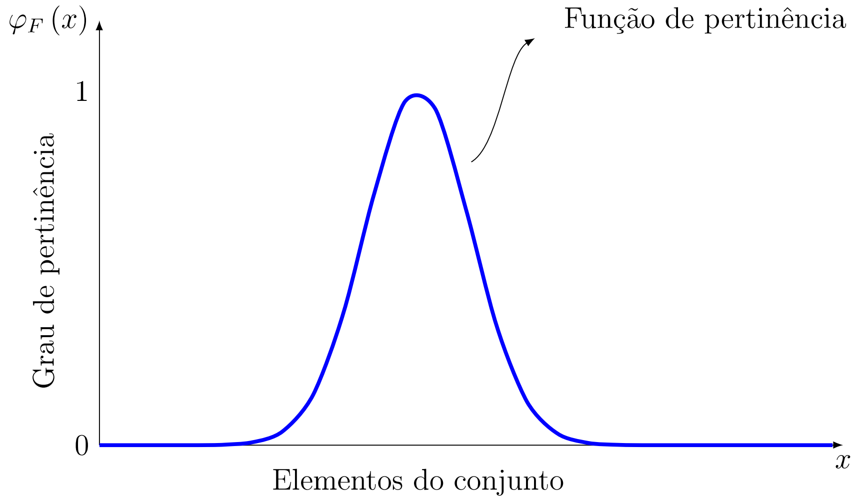


Figura 2.2: Gráfico de um subconjunto fuzzy

Para ilustrar melhor a diferença entre a representação de um conjunto clássico e um conjunto fuzzy vamos realizar o seguinte exemplo:

Exemplo 2.2.1. *Dado um conjunto universo* $U = [10, 50]$*, sendo as temperaturas da água para um banho, são consideradas agradáveis aquelas que estão entre 29°C e 38°C.*

Se o interesse for descrever o conjunto sob o ponto de vista clássico, teremos que o conjunto crisp B que indica as temperaturas agraveis é dado por:

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & se \quad 29 \leq x \leq 38 \\ 0 & se \quad x < 29 \quad ou \quad x > 38 \end{cases}$$

Por outro lado, se o interesse for modelar o conjunto das temperaturas agradáveis podemos usar o seguinte conjunto fuzzy, também chamado de trapezoidal:

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} \frac{x-10}{19} & se \quad 10 \leq x < 29 \\ 1 & se \quad 29 \leq x \leq 38 \\ \frac{50-x}{12} & se \quad 29 < x \leq 50 \end{cases}$$

Claramente a representação do termo linguístico “agradável”, por um conjunto fuzzy, acontece de forma mais natural, já que a percepção de pequena variação de temperatura pelo corpo humano não é tão precisa. Veja que em uma interpretação crisp, a leitura de 28,9 graus teria valor zero e seria considerada uma temperatura não agradável, porém com um conjunto fuzzy temos um valor muito próximo de 1 o que se justifica na prática.

As figuras 2.3 e 2.4, mostram, respectivamente, os gráficos dos conjuntos crisp e fuzzy do exemplo 2.2.1.

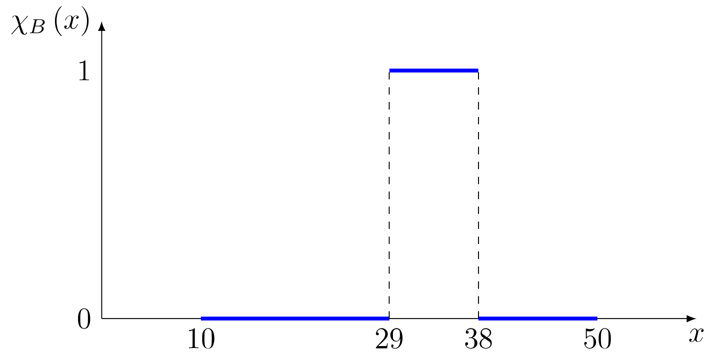


Figura 2.3: Subconjunto crisp

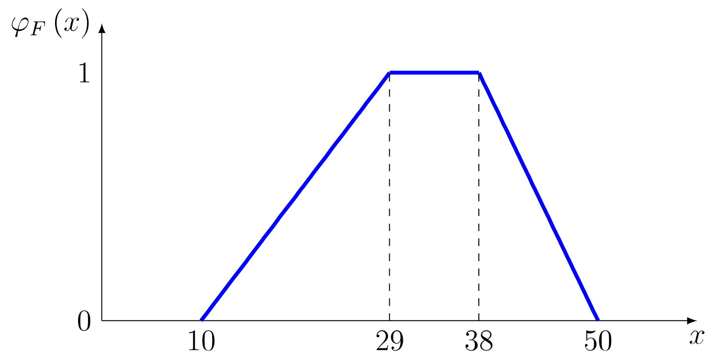


Figura 2.4: Subconjunto fuzzy

Podemos verificar que o gráfico da função de pertinência do conjunto fuzzy F, não existe uma fronteira bem definida para decidirmos se uma temperatura pertence ou não ao respectivo conjunto, já no gráfico da função característica do conjunto crisp B existe um diferença nítida entre quais são as temperaturas que pertencem e não pertencem ao conjunto das temperaturas agradáveis.

2.3 Variável linguística

Variável que possuem palavras ou frases da linguagem natural, em vês de números, são denominadas de variável linguística. Elas são os nomes dos conjuntos fuzzy, os quais são representados por meio de funções de pertinência. Por exemplo, a figura 2.4 representa a variável linguística " temperatura agradável". As variáveis linguísticas têm a função de fornecer uma forma sistemática para as descrições aproximadas dos fenômenos complexos ou mal definidas, utilizando um tipo de descrição linguística similar ao empregado pelos seres humanos. Isto permite o tratamento de sistemas muito complexos para serem analisados através de cálculos matemáticos.

2.4 Operações com conjuntos fuzzy

Nesta seção vamos definir as operações de união, interseção e complementar fuzzy. Para isso, é importante observar que se A e B são dois subconjuntos fuzzy de um universo U, dizemos que A é um subconjunto fuzzy de B se $\varphi_A(x) \leq \varphi_B(x)$, para todo $x \in U$, e este fato é denotado com a mesma simbologia utilizada nos conjuntos crisp, ou seja, $A \subset B$.

Perceba que a função pertinência do conjunto vazio é dada por $\varphi_\varnothing \equiv 0$, e de forma análoga, a função de pertinência do conjunto universo U é dada por $\varphi_U \equiv 1$. Com efeito disso, podemos concluir que $\varnothing \subset A \subset U$, para todo A.

Definição 2.4.1. *(União) A união de dois subconjuntos fuzzy A e B de um universo U é um subconjunto fuzzy e sua função de pertinência é dada por:*

$$\varphi_{A\cup B}\left(x\right) = max\left\{\varphi_A\left(x\right), \varphi_B\left(x\right)\right\},\ x \in U.$$

Definição 2.4.2. *(Interseção) A interseção de dois subconjuntos fuzzy A e B de um universo U é um subconjunto fuzzy de U e sua função de pertinência é dada por:*

$$\varphi_{A\cap B}\left(x\right) = min\left\{\varphi_A\left(x\right), \varphi_B\left(x\right)\right\},\ x \in U.$$

Definição 2.4.3. *(Complementar) O complementar de A é o subconjunto fuzzy A' de U cuja a função de pertinência é dado por:*

$$\varphi_{A'}\left(x\right) = 1 - \varphi_A\left(x\right), x \in U.$$

Observe que as definições de união, interseção e complementar, generalizam estas mesmas definições para conjuntos crisp, entretanto é importante notar algumas diferenças. Para um conjunto crisp A temos que $\chi_{A\cap A'}(x) = 0$, para todo x em U, porém no contexto fuzzy podemos ter $\varphi_{A\cap A'}(x) \neq 0$. Da mesma forma, no contexto crip temos que $\chi_{A\cup A'}\left(x\right) = 1$, para todo x em U, mas pensando em conjuntos fuzzy, podemos ter $\varphi_{A\cup A'}\left(x\right) \neq 1$. No exemplo 2.4.1 pode-se verificar estas operações com dois conjuntos fuzzy e na figura 2.9 perceber que $\varphi_{A\cup A'}\left(x\right) \neq 1$.

Exemplo 2.4.1. *Considere o conjunto universo $U = [0, 3]$ e os subconjuntos fuzzy A e B, tal que:*

$$\varphi_A\left(x\right) = \begin{cases} x, & se \quad 0 \leq x \leq 1 \\ -x+2 & se \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

e

$$\varphi_B\left(x\right) = \begin{cases} x+1, & se \quad 1 \leq x \leq 2 \\ -x+3 & se \quad 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

As operações $A \cup B$*,* $A \cap B$*,* A' *e* $A \cup A'$ *são apresentados através dos gráficos a seguir :*

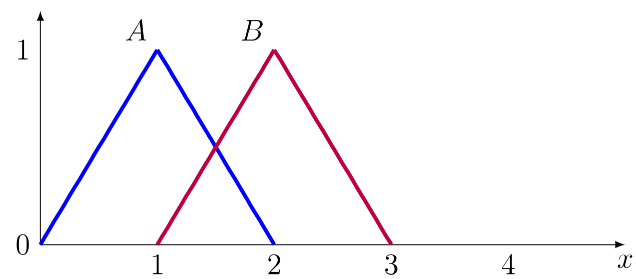


Figura 2.5: Subconjuntos A e B

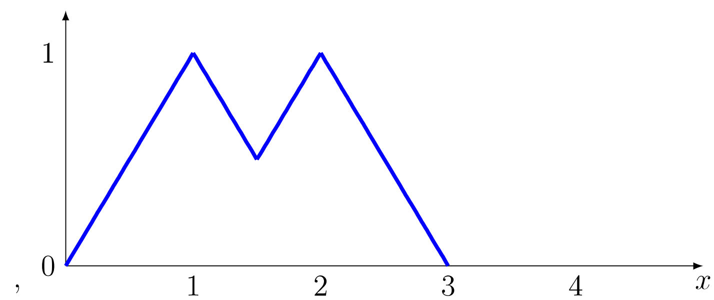


Figura 2.6: Subconjunto $A \cup B$

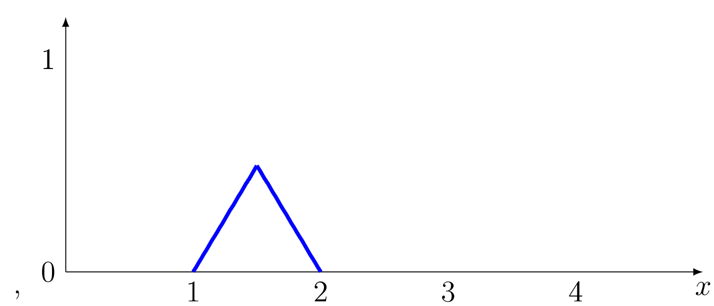


Figura 2.7: Subconjunto $A \cap B$

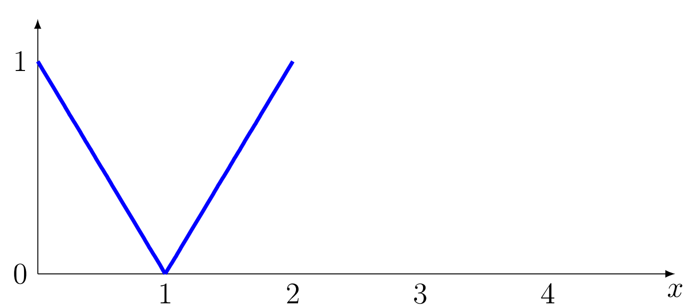


Figura 2.8: Subconjunto A'

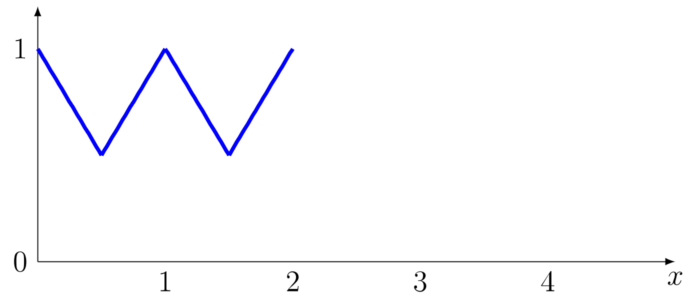


Figura 2.9: Subconjunto $A \cup A'$

Definição 2.4.4. *(Igualdade) Os subconjuntos A e B de U são iguais se suas funções de pertinência coincidem, isto é, se $\varphi_A(x) = \varphi_B(x)$ para todo $x \in U$.*

Proposição 2.4.1. *As operações entre conjuntos fuzzy satisfazem as seguintes propriedades:*

- $A \cup B = B \cup A$ *e* $A \cap B = B \cap A$ *(Comutatividade).*
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *(Associatividade).*
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(Associatividade) .*
- $A \cup A = A$ *e* $A \cap A = A$ *(Idempotência).*
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(Distributividade).*
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *(Distributividade).*
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$ *e* $(A \cap B)' = A' \cup B'$ *(leis de Morgan).*
- $A \cap \varnothing = \varnothing$ *e* $A \cup \varnothing = A$.
- $A \cap U = A$ *e* $A \cup U = U$.

Vamos demostrar aqui duas propriedades, a comutatividade e as leis de Morgan, as demais demonstrações seguem o mesmo raciocínio.

Demonstração. $(Comutatividade)$ Pela definição de união temos que:

$$\begin{aligned}
\varphi_{(A \cup B)}(x) &= \max\left[\varphi_A(x), \varphi_B(x)\right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[\varphi_A(x) + \varphi_B(x) + |\varphi_A(x) - \varphi_B(x)|\right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[\varphi_A(x) + \varphi_B(x) + |\varphi_B(x) - \varphi_A(x)|\right] \\
&= \max\left[\varphi_B(x), \varphi_A(x)\right] \\
&= \varphi_{(B \cup A)}(x).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$A \cup B = B \cup A$$

□

Demonstração. $(Leis\ de\ Morgan)$

Complementar da união: $(A \cup B)' = A' \cap B'$ pelas definições de interseção, união e complementar, temos que:

$$
\begin{aligned}
\varphi_{A' \cap B'}(x) &= \min\left[\varphi'_A(x), \varphi'_B(x)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\varphi'_A(x) + \varphi'_B(x) - |\varphi'_A(x) - \varphi'_B(x)|\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[1 - \varphi_A(x) + 1 - \varphi_B(x) - |(1 - \varphi_A(x)) - (1 - \varphi_B(x))|\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2 - \varphi_A(x) - \varphi_B(x) - |-\varphi_A(x) + \varphi_B(x)|\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2 - (\varphi_A(x) + \varphi_B(x) + |-\varphi_A(x) + \varphi_B(x)|)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2 - (\varphi_A(x) + \varphi_B(x) + |\varphi_A(x) - \varphi_B(x)|)\right] \\
&= 1 - \max\left[\varphi_A(x), \varphi_B(x)\right] \\
&= 1 - \varphi_{A \cup B}(x) \\
&= \varphi_{(A \cup B)'}(x).
\end{aligned}
$$

Logo, $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Complementar da interseção: $(A \cap B)' = A' \cup B'$, pelas definições de interseção, união e complementar temos que::

$$
\begin{aligned}
\varphi_{A' \cup B'}(x) &= \max\left[\varphi'_A(x), \varphi'_B(x)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\varphi'_A(x) + \varphi'_B(x) + |\varphi'_A(x) - \varphi'_B(x)|\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[1 - \varphi_A(x) + 1 - \varphi_B(x) + |(1 - \varphi_A(x)) - (1 - \varphi_B(x))|\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2 - \varphi_A(x) - \varphi_B(x) + |-\varphi_A(x) + \varphi_B(x)|\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2 - (\varphi_A(x) + \varphi_B(x) - |-\varphi_A(x) + \varphi_B(x)|)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2 - (\varphi_A(x) + \varphi_B(x) - |\varphi_A(x) - \varphi_B(x)|)\right] \\
&= 1 - \min\left[\varphi_A(x), \varphi_B(x)\right] \\
&= 1 - \varphi_{A \cap B}(x) \\
&= \varphi_{(A \cap B)'}(x).
\end{aligned}
$$

□

Podemos concluir que as propriedades dos conjuntos crip também são válidas para os conjuntos fuzzy, exceto as propriedades $A \cap A' = \emptyset$, pois para um conjunto crisp A, temos que $\chi_{A \cap A'}(x) = 0$, para todo x em U, porém para um conjunto fuzzy podemos ter $\varphi_{A \cap A'}(x) \neq 0$. Por exemplo, considere o conjunto U = { frio, morno, quente } e o conjunto discreto fuzzy $A = \left\{\frac{0{,}3}{\text{frio}}, \frac{1.0}{\text{morno}}, \frac{0{,}6}{\text{quente}}\right\}$, onde $\varphi_A(\text{ frio }) = 0,3$; $\varphi_A(\text{ morno }) = 1$ e $\varphi_A(\text{ quente }) = 0,6$. Tem-se que $\text{A}' = \left\{\frac{0{,}7}{\text{frio}}, \frac{0{,}0}{\text{morno}}, \frac{0{,}4}{\text{quente}}\right\}$ e $\text{A} \cap \text{A}' = \left\{\frac{0{,}3}{\text{frio}}, \frac{0{,}0}{\text{morno}}, \frac{0{,}4}{\text{quente}}\right\} \neq \left\{\frac{0{,}0}{\text{frio}}, \frac{0{,}0}{\text{morno}}, \frac{0{,}0}{\text{quente}}\right\}$, mostrando que não é válida a lei da contradição para os conjuntos fuzzy.

Da mesma forma, a propriedade $A \cup A' = U$ também não é válida para os conjuntos fuzzy, pois para um conjunto crisp A, $\chi_{A\cup A'}(x) = 1$, mas para conjuntos fuzzy podemos ter $\varphi_{A\cup A'}(x) \neq 1$. Por exemplo, se considerarmos os conjuntos U e A, do exemplo anterior, tem-se que $\text{A} \cup \text{A}' = \left\{\frac{0{,}7}{\text{frio}}, \frac{1{,}0}{\text{morno}}, \frac{0{,}6}{\text{quente}}\right\} \neq \left\{\frac{1{,}0}{\text{frio}}, \frac{1{,}0}{\text{morno}}, \frac{1{,}0}{\text{quente}}\right\}$. Notamos assim que para os conjuntos fuzzy não é válida a lei do terceiro excluído.

2.5 Suporte, núcleo e α-nível

As definições a seguir tem papel importante na inter-relação entre as teorias dos conjuntos crisp e fuzzy. Por meio dos α-níveis, será possível representar um conjunto fuzzy através de um intervalo real, permitindo assim, estender conhecimentos já consolidados na matemática clássica à teoria fuzzy. Por exemplo, veremos que é possível realizar operações aritméticas com conjuntos fuzzy por meio de operações sobre intervalos, conforme veremos nas próximas seções.

Definição 2.5.1. *O subconjunto crisp de U definido por supp $(F) = \{x \in U : \varphi_F(x) > 0\}$ é denominado suporte de F.*

Em termos gerais, supp(F) é o subconjunto crisp de todos os elementos que possuem um certo grau de pertinência em F. Note que o suporte de um conjunto crisp coincide com o próprio conjunto.

Definição 2.5.2. *O subconjunto crisp de U definido por $\mathcal{N}(F) = \{x \in U : \varphi_F(x) = 1\}$ é denominado núcleo de F.*

Definição 2.5.3. *Seja A um subconjunto fuzzy em U e $\alpha \in (0,1]$. O α-nível de A é o subconjunto crip de U definido por: $[A]^\alpha = \{x : \varphi_A(x) \geq \alpha\}$ para $\alpha \in (0,1]$.*

Segundo [5], um subconjunto fuzzy A de U é "formado"por elementos de U com uma certa hierarquia que é traduzida através da classificação por graus de pertinência. Um elemento x de U está em um α-nível se seu grau de pertinência é a maior que um determinado valor limiar ou nível $\alpha \in (0,1]$.

Observe que para $\alpha = 0$, o α-nível precisa ser definido separadamente, pois $[A]^0 = \{x : \varphi_A(x) \geq 0\}$ será todo o conjunto universo. Assim, se $\alpha = 0$, o α-nível do subconjunto fuzzy A é definido como o fecho do suporte de A, ou seja, é o menor subconjunto clássico fechado de U que contém o suporte de A, e escrevemos $[A]^0 = \overline{\mathrm{supp}(A)}$. Em [4], $[A]^0$ também é chamado de base do conjunto fuzzy A.

Os exemplos a seguir ilustram os conceitos de suporte, núcleo e α-nível de um conjunto fuzzy.

Exemplo 2.5.1. *Dado um conjunto universo $U = [0, 5]$. Considere o subconjunto fuzzy F, definido por:*

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} x - 1, & se \quad 1 \leq x < 2 \\ 1, & se \quad 2 \leq x \leq 3 \\ -x + 4 & se \quad 3 < x \leq 4 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

O conjunto suporte de F será todo $x \in U$, tal que $\varphi_F(x) > 0$, logo, supp $(F) = (1, 4)$. O núcleo de F será todo $x \in U$, tal que $\varphi_F(x) = 1$, logo $\mathcal{N}(F) = [2, 3]$. Dado um α em (0,1], o α-nível de F é o intervalo fechado:

$$[A]^\alpha = [\alpha + 1, 4 - \alpha]\,, \ \forall \alpha \in (0, 1]\,.$$

O gráfico a seguir ilustra o exemplo anterior:

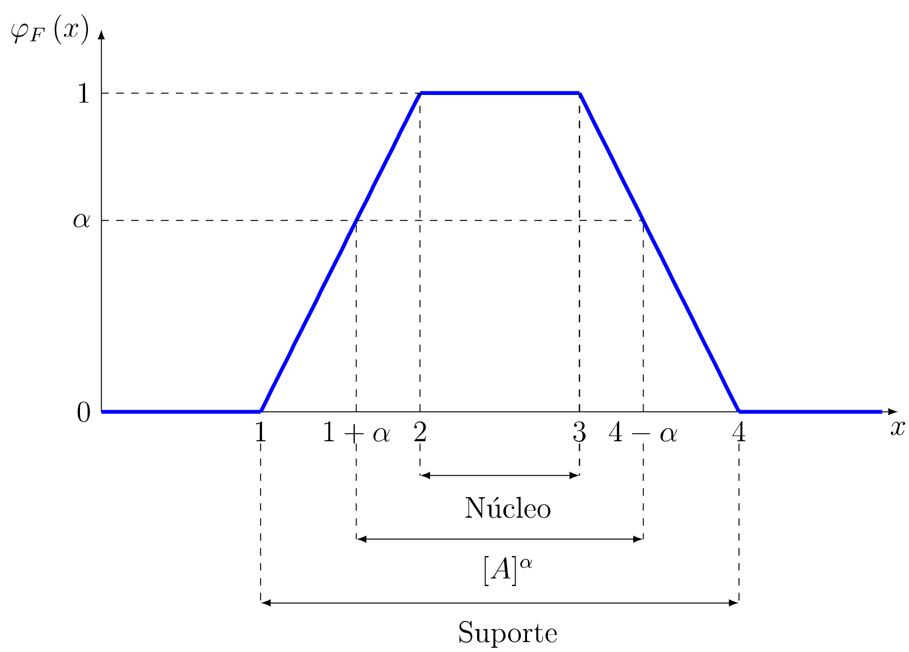


Figura 2.10: Núcleo, α-nível e suporte do conjunto fuzzy F.

Como consequência, podemos verificar a igualdade de conjuntos por meio de α-níveis, vejamos o próximo teorema.

Teorema 2.5.1. *Sejam A e B subconjuntos fuzzy de U. Temos que $A = B$, se e somente se, $[A]^\alpha = [B]^\alpha$, para qualquer $\alpha \in (0,1]$*

Demonstração. Pela definição de α-nível é claro que $A = B \Rightarrow [A]^\alpha = [B]^\alpha$ para todo $\alpha \in (0,1]$. Suponhamos agora que $[A]^\alpha = [B]^\alpha$ para todo $\alpha \in (0,1]$. Se $A \neq B$, então existe $x_\alpha \in U$ tal que $\varphi_A(x_\alpha) \neq \varphi_B(x_\alpha)$. Logo, temos $\varphi_A(x_\alpha) < \varphi_B(x_\alpha)$ ou $\varphi_A(x_\alpha) > \varphi_B(x_\alpha)$. Supondo $\varphi_A(x_\alpha) > \varphi_B(x_\alpha)$, podemos concluir que $x_\alpha \in [A]^{\varphi_A(x_\alpha)}$ e $x \notin [B]^{\varphi_A(x_\alpha)}$ e, portanto, $[A]^{\varphi_A(x_\alpha)} \neq [B]^{\varphi_A(x_\alpha)}$ o que contradiz a hipótese $[A]^\alpha = [B]^\alpha$ para todo $\alpha \in (0,1]$. De maneira análoga chegamos a uma contradição se admitirmos que $\varphi_A(x_\alpha) < \varphi_B(x_\alpha)$. $\square$

O conceito de α-níveis é um recurso importante na teoria fuzzy, pois permite estabelecer uma ponte entre conjunto fuzzy e crisp, uma vez que para um conjunto fuzzy A é possível ter uma família $\mathcal{A} = \{[A]^\alpha : \alpha \in (0,1]\}$ de conjuntos crip, permitindo assim a aplicação de conceitos da matemática crisp sobre os conjuntos fuzzy.

2.6 Princípio da extensão de Zadeh

O princípio da extensão de Zadeh [5], possibilita estender conceitos dos conjuntos crisp para os conjuntos fuzzy. Por exemplo, dada uma função f clássica de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, então a extensão de Zadeh permite calcular a f de um conjunto fuzzy ao invés da f aplicada a um número real. Este princípio surge da necessidade de se aplicar uma função clássica a argumentos imprecisos, sendo indispensável para a estruturação matemática quando se modelam fenômenos envolvendo certo grau de incerteza [1].

Definição 2.6.1. *(Princípio da Extensão de Zadeh). Sejam f uma função tal que $f : X \longrightarrow Y$ e A um subconjunto fuzzy de X. A extensão de Zadeh de f, dado por $\widehat{f} : Y \longrightarrow [0,1]$ e que fornece o subconjunto fuzzy $\widehat{f}(A)$ de Y, cuja função de pertinência é dada por*

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(y) = \begin{cases} \sup_{f^{-1}(y)} \varphi_A(x), & se\ f^{-1}(y) \neq \varnothing; \\ 0, & se\ f^{-1}(y) = \varnothing. \end{cases}$$

onde $f^{-1}(y) = \{x; f(x) = y\}$.

O conjunto $\sup_{f^{-1}(y)} \varphi_A(x)$ determina o grau de pertinência do contradomínio e será dado por $\varphi_A(x)$ quando $f^{-1}(y) = x$. Quando um valor do contradomínio é mapeado por vários do domínio, o seu grau de pertinência é obtido pelo maior dos graus de pertinência dos valores da entrada [5].

Exemplo 2.6.1. *Seja $X = [1,5]$ e $Y = [3,15]$, considere a função $f : X \longrightarrow Y$, definida por $f(x) = x^2 - 1$ e o subconjunto fuzzy A de X, cuja função característica é dada por:*

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} x-2, & se \quad 2 \leq x < 3; \\ 4-x, & se \quad 3 \leq x \leq 4; \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

A extensão de Zadeh $\varphi_{\hat{f}(A)}(y)$, será dado por:

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(y) = \begin{cases} \sqrt{y+1} - 2, & se \quad 3 \leq y < 8; \\ 4 - \sqrt{y+1}, & se \quad 8 \leq y \leq 15; \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

As figuras a seguir mostram os gráficos da função $f(x) = x^2 - 1$ e dos conjuntos fuzzy A e $\hat{f}(A)$.

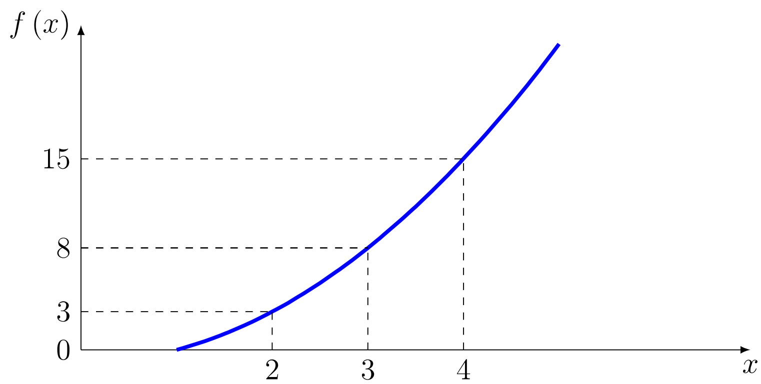


Figura 2.11: Função $f(x) = x^2 - 1$

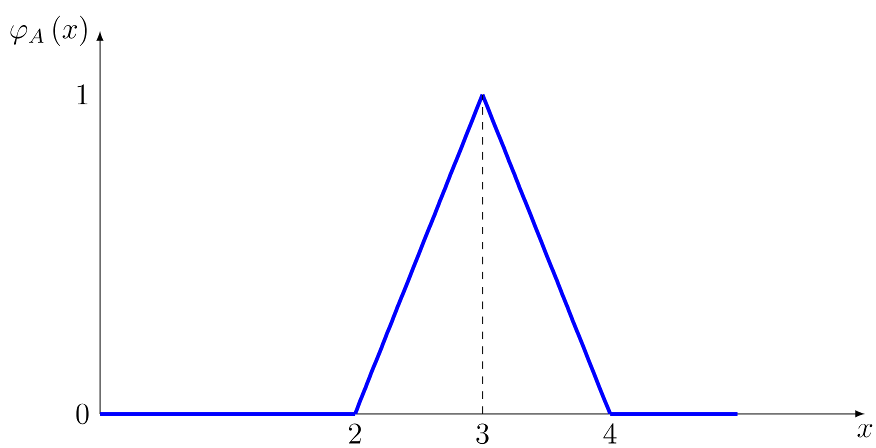


Figura 2.12: Subconjunto fuzzy A

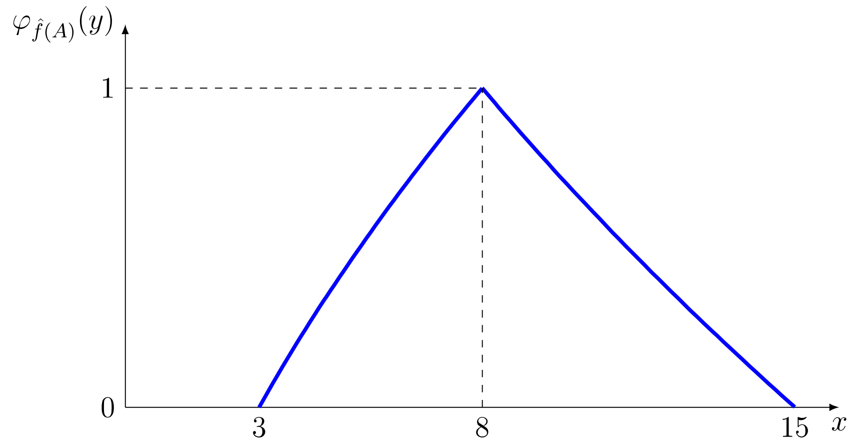


Figura 2.13: Subconjunto $\hat{f}(A)$

No exemplo anterior, como a função $f(x) = x^2 - 1$ é monótona no domínio $[1, 5]$, não foi necessário usar a operação *sup*, ou seja, selecionar as pertinências máximas de y. No caso de funções que não são monótonas, devemos usar o operador *sup* de acordo com o Princípio da Extensão de Zadeh.

2.7 Número Fuzzy

Na vida cotidiana costuma-se usar expressões como “cerca de três” ou “próximo de dois” para indicar um número real de forma vaga, na prática tais expressões são geralmente mal definidas. Por outro lado, atribuímos um certo significado à estas expressões. Claramente, seria de grande valor se pudéssemos tornar essas noções vagas mais precisas e operacionais. O conceito de número fuzzy, que veremos a seguir, possibilita, por exemplo, modelar o número “cerca de três”, e por meio de intervalos realizar operações com valores imprecisos. Um número fuzzy, é um tipo especial de conjunto fuzzy, onde cada elemento do domínio tem um certo grau de pertinência, variando de 0 à 1.

Definição 2.7.1. *(Número fuzzy). Um subconjunto fuzzy A é chamado de número fuzzy quando o conjunto universo no qual φ_A está definida, é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e satisfaz às condições:*

(i) todos os α-níveis de A são não vazios, com $0 < \alpha \leq 1$;

(ii) todos os α-níveis de A são intervalos fechados de $\mathbb{R}$;

(iii) $\operatorname{supp} A = \{x \in \mathbb{R} : \varphi_A(x) > 0\}$ *é limitado.*

Vamos denotar os α-níveis do número fuzzy A por $[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$.

É importante observar que qualquer número real r é um número fuzzy particular, onde sua função característica será igual a 1 se $x = r$, e 0 caso contrário, para $x \in U$.

A família dos números fuzzy será indicada por $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ e, de acordo com o observado acima, o conjunto de números reais $\mathbb{R}$ é um subconjunto de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Os números fuzzy mais comuns são os triangulares, trapezoidais e os em forma de sino.

Definição 2.7.2. *Um número fuzzy A é dito triangular se sua função de pertinência é da forma*

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \leq a; \\ \frac{x-a}{u-a}, & se\ a < x \leq u; \\ \frac{x-b}{u-b}, & se\ u < x \leq b; \\ 0, & se\ x \geq b. \end{cases}$$

Deste modo, os números reais a, u e b definem o número fuzzy triangular A que será denotado pela terna ordenada $(a; u; b)$ ou por $a/u/b$. Abaixo temos a representação gráfica do numero fuzzy A triangular.

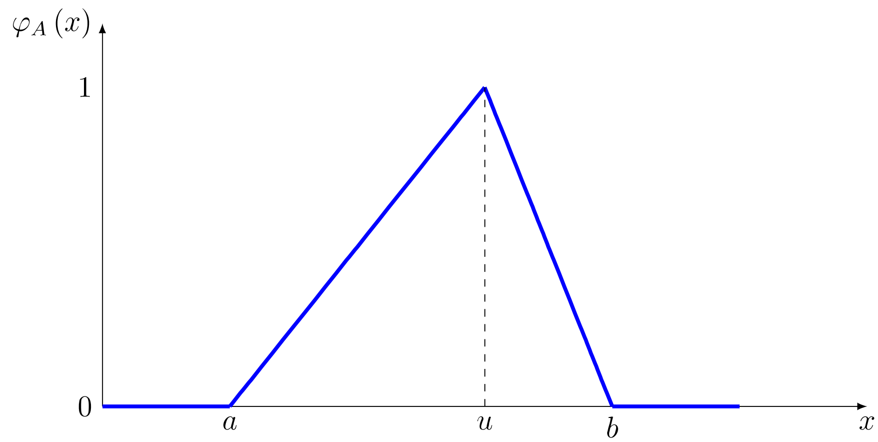


Figura 2.14: Numero fuzzy A triângular

Observe que um número fuzzy não precisa ser necessariamente simétrico, já que $b - u$ pode ser diferente de $u - a$. Os α-níveis desses números fuzzy têm a seguinte forma simplificada $[a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [(u-a)\alpha + a, (u-b)\alpha + b]$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Definição 2.7.3. *Um número fuzzy A é dito trapezoidal se sua função de pertinência tem a forma de um trapézio e é dada por*

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & se\ a \leq x < b; \\ 1, & se\ b \leq x \leq c; \\ \frac{d-x}{d-c}, & se\ c < x \leq d; \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

Abaixo temos a representação gráfica do numero fuzzy A trapezoidal.

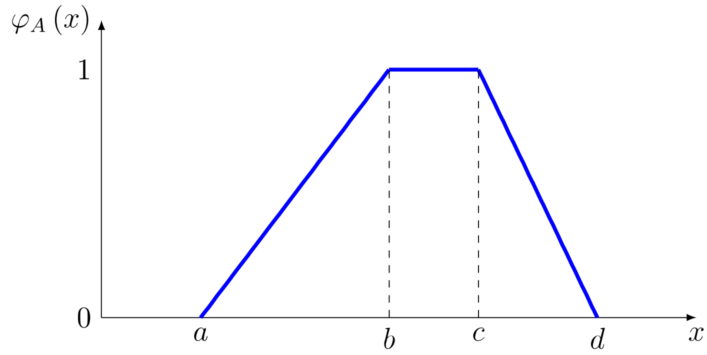


Figura 2.15: Número fuzzy A trapezoidal

Os α-níveis de um conjunto fuzzy trapezoidal são os intervalos

$$[a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [(b-a)\alpha + a, (c-d)\alpha + d]$$

para todo $\alpha \in [0,1]$.

Definição 2.7.4. *Um número fuzzy tem forma de sino se a função de pertinência for suave e simétrica em relação a um número real, sua função de pertinência tem estas propriedades para u, a e δ dados:*

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(\frac{x-u}{a}\right)^2\right), & se\ u-\delta \leq x \leq u+\delta; \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

A seguir temos a representação gráfica do número fuzzy A na forma de sino.

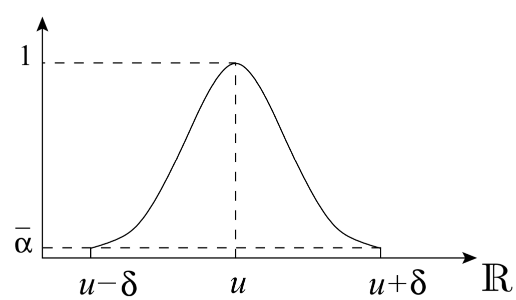


Figura 2.16: Número fuzzy na forma de sino [5].

Os α-níveis dos números fuzzy em forma de sino são os intervalos:

$$[a_1^\alpha, a_2^\alpha] = \begin{cases} \left[u - \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha^{a^2}}\right)}, u + \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha^{a^2}}\right)}\right], & \text{se } \alpha \geq \bar{\alpha} = e^{-\left(\frac{\delta}{a}\right)^2}; \\ [u-\delta, u+\delta], & \text{se } \alpha < \bar{\alpha} = e^{-\left(\frac{\delta}{a}\right)^2}. \end{cases}$$

Veremos a seguir exemplos sobre números fuzzy triangular e trapezoidal com seus respectivos α-níveis.

Exemplo 2.7.1. *A expressão em torno de 7 horas pode ser modelada pelo número triangular A = (6,7,8), cuja a função de pertinência é:*

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \leq 6; \\ x-6, & se\ 6 < x \leq 7; \\ -x+8, & se\ 7 < x \leq 8; \\ 0, & se\ x \geq 8. \end{cases}$$

Seus α-níveis serão, $[a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [\alpha + 6, -\alpha + 8]$ para todo $\alpha \in (0,1]$.

Exemplo 2.7.2. *O conjunto fuzzy dos adolescentes pode ser representado pelo número fuzzy trapezoidal A(11,14,17,20), cuja a função de pertinência é dada por:*

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x-11}{3}, & se\ 11 \leq x < 14; \\ 1, & se\ 14 \leq x \leq 17; \\ \frac{20-x}{3}, & se\ 17 < x \leq 20; \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

Seus α-níveis serão, $[a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [3\alpha + 11, -3\alpha + 20]$ para todo $\alpha \in (0,1]$.

Outro tipo de número fuzzy que pode modelar valores incertos é denominado de Número Fuzzy de Agnesi [7]. A função de pertinência desse número está definido a seguir.

Definição 2.7.5. *Seja $u \in \mathbb{R}$, o número fuzzy de Agnesi u é dado pela função $u : \mathbb{R} \longrightarrow (0,1]$, onde $u(x) = \frac{1}{1+(x-u)^2}$.*

A baixo temos o gráfico desse número.

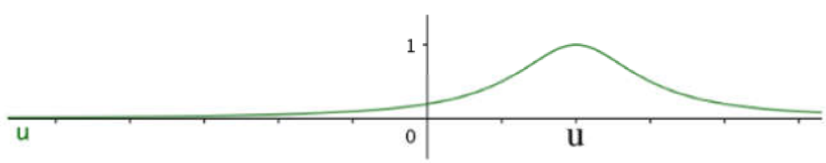


Figura 2.17: Número fuzzy de Agnesi [7]

Na próxima seção apresentaremos as operações aritméticas com números fuzzy a partir do seus α-níveis. No caso dos números fuzzy de Agnesi é possível realizar operações por meio da definição a seguir [7].

Definição 2.7.6. *Considere $\mathcal{F}_A$ o conjunto de todos os números fuzzy de Agnesi. Em $\mathcal{F}_A$ define-se:*

$$u(x) + v(x) = \frac{1}{1 + (x - (u+v))^2},\ u(x) \cdot v(x) = \frac{1}{1 + (x - (u \cdot v))^2},$$

$$1(x) = \frac{1}{1 + (x-1)^2}\ e\ 0(x) = \frac{1}{1 + (x-0)^2}.$$

Observe que as operações são realizadas usando números reais. A seguir temos um exemplo com a operação adição.

Exemplo 2.7.3. *Sejam* $u = 2$ *e* $v = 4$ *números fuzzy de Agnesi, então* $u(x) + v(x) = \frac{1}{1+(x-(2+4))^2} = \frac{1}{1+(x-6)^2}$. *A seguir temos o gráfico da função de pertinência de* $u + v$.

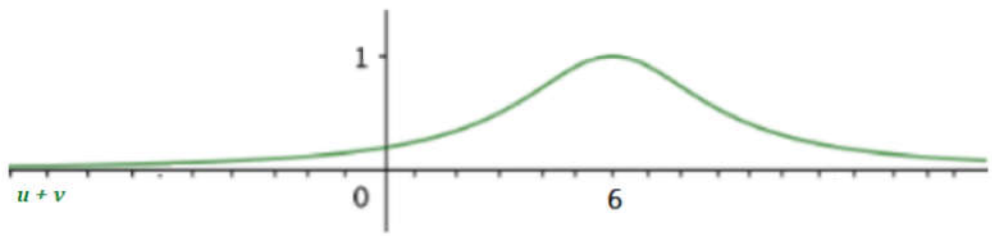


Figura 2.18: Número fuzzy de Agnesi [7]

Veja que os números 2 e 4 foram obtidos com imprecisão, e sua soma transmite essa imprecisão de maneira estabilizada em torno do 6. Uma outra forma de tratar imprecisão e manter estabilidade aritmética nos cálculos, pode ser obtida com aritmética dos intervalos que veremos a seguir.

2.8 Aritmética intervalar e operações com números fuzzy

A Aritmética Intervalar é uma ferramenta numérica para manipulação e operação com intervalos, foi desenvolvida na década de 60, por Ramon E. Moore [10]. O objetivo de Moore era produzir resultados confiáveis, colocando limites em erros de arredondamento no cálculo numérico, em vez de representar um valor como um único número, a aritmética intervalar representa cada valor como um intervalo de possibilidades. Por exemplo, em vez de estimar a altura de alguém como exatamente 2,0 metros, usando a aritmética intervalar, pode-se ter certeza de que a altura da pessoa estará em algum lugar entre 1,97 e 2,03 metros. Matematicamente, em vez de trabalhar com um x real incerto, trabalha-se com as extremidades de um intervalo $[a,b]$ que contém x.

Na seção 2.6 vimos que um número fuzzy pode ser representado por meio do seus α-níveis que são intervalos reais. Logo a aritmética intervalar se apresenta como um recurso importante para as operações aritméticas com os números fuzzy. A seguir apresentaremos a definição sobre operações aritméticas com intervalos reais.

Definição 2.8.1. *Considere dois intervalos fechados* $A = [a_1, a_2]$ *,* $B = [b_1, b_2]$ *e um número real* k*. As operações aritméticas, e multiplicação por um número real* k *para esses intervalos estão definidas a seguir.*

$$A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2],$$

$$A - B = [a_1 - b_2, a_2 - b_1],$$

$$\lambda A = \begin{cases} [\lambda a_1, \lambda a_2], & se\ \lambda \geq 0; \\ [\lambda a_2, \lambda a_1], & se\ \lambda < 0. \end{cases}$$

$$A \cdot B = [\min P, \max P],\ \ onde\ P = \{a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2\},$$

$$A/B = [a_1, a_2] \cdot \left[\frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1}\right]\ \ para\ 0 \notin B.$$

Exemplo 2.8.1. *Considere os intervalos* $A = [-1, 2]$ *e* $B = [3, 4]$*, então*

$$A + B = [-1, 2] + [3, 4] = [2, 6],$$

$$A - B = [-1, 2] - [3, 4] = [-5, -1],$$

$$A \cdot B = [\min P, \max P] = [-4, 8],\ onde\ P = \{(-1 \cdot 3), (-1 \cdot 4), (2 \cdot 3), (2 \cdot 4)\} = \{-3, -4, 6, 8\},$$

$$A/B = [-1, 2] \cdot \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right] = \left[\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right].$$

A partir das operações sobre intervalos reais podemos operar os números fuzzy usando seus respectivos conjuntos α-níveis, já que eles são intervalos reais fechados. A seguir temos a definição das operações aritméticas entre números fuzzy.

Definição 2.8.2. *Sejam* A *e* B *números fuzzy e* $\otimes$ *uma operação aritmética para intervalos fechados. O número fuzzy* $A \otimes B$ *é definido de modo que seus* α*-níveis sejam dados por:*

$$[A \otimes B]^\alpha = [A]^\alpha \otimes [B]^\alpha,\ \ para\ todo\ \alpha \in (0, 1].$$

Dessa maneira, torna-se relativamente simples a aritmética entre números fuzzy. Basta encontrar os intervalos α-níveis de cada número fuzzy e realizar as operações aritméticas intervalar sobre esses conjuntos. Fazendo variar α no intervalo $(0, 1]$, encontra-se o número fuzzy, resultado da operação realizada. O exemplo seguinte, adaptado de uma questão retirada de [9], ilustra melhor essas operações. Posteriormente, temos os gráficos que representam as operações realizadas.

Exemplo 2.8.2. *Realizar as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão entre os números fuzzy triangulares.*

$$A = (1;2;3) \quad e \quad B = (2;3;4)$$

Solução.

Neste exemplo temos dois números triangulares, cujas funções características são:

$$A = \begin{cases} x-1, & se \quad 1 \leq x < 2; \\ 3-x, & se \quad 2 \leq x \leq 3; \\ 0, & caso \text{ contrário.} \end{cases}$$

$$e$$

$$B = \begin{cases} x-2 & se \quad 2 \leq x < 3 \\ 4-x & se \quad 3 \leq x \leq 4 \\ 0 & , caso \text{ contrário} \end{cases}$$

Temos que $[A]^\alpha = [\alpha+1, 3-\alpha]$ e $[B]^\alpha = [\alpha+2, 4-\alpha]$ para todo $\alpha \in (0,1]$.

$$[A+B]^\alpha = [2\alpha+3,\ 7-2\alpha],\ \forall \alpha \in (0,1];$$

$$[A-B]^\alpha = [2\alpha-3,\ 1-2\alpha],\ \forall \alpha \in (0,1].$$

Para encontrar $[A \cdot B]^\alpha = [A]^\alpha \cdot [B]^\alpha$, vamos determinar o conjunto P das combinações entre os extremos dos intervalos $[A]^\alpha$ e $[B]^\alpha$. Desenvolvendo, temos que:

$$P = \{(\alpha+1)\cdot(\alpha+2); (\alpha+1)\cdot(4-\alpha); (3-\alpha)\cdot(\alpha+2); (3-\alpha)\cdot(4-\alpha)\},$$

onde, $minP = \alpha^2 + 3\alpha + 2$ e $maxP = \alpha^2 - 7\alpha + 12,\ \forall \alpha \in [0,1]$, logo:

$$[A.B]^\alpha = [\alpha^2 + 3\alpha + 2, \alpha^2 - 7\alpha + 12] \text{ e } [\frac{A}{B}]^\alpha = [\frac{\alpha+1}{4-\alpha}, \frac{3-\alpha}{\alpha+2}].$$

Na divisão usamos max/min das divisões em P.

Para encontrar as funções de pertinência de cada número fuzzy a partir dos seus α-níveis, igualamos as extremidades de cada intervalo à x e escrevemos α em função de x. Para descobrir o domínio parcial de cada função, fazemos $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$, com isso descobrimos os extremos de cada domínio. Seguindo este procedimento para a soma temos:

$$[A+B]^\alpha = [2\alpha+3,\ 7-2\alpha],\ \forall \alpha \in (0,1];$$

Para $2\alpha + 3 = x$, segue que $\alpha = \frac{x-3}{2}$, variando α no intervalo $(0,1]$, descobrimos que o domínio será $3 \leq x < 5$. Fazendo $7 - 2\alpha = x$, segue que $\alpha = \frac{7-x}{2}$, variando α

no intervalo $(0,1]$, descobrimos que o domínio será $5 \leq x < 7$. Desse modo a função de pertinência de $A{+}B$ será:

$$A+B = \begin{cases} \frac{x-3}{2}, & se \quad 3 \leq x < 5; \\ \frac{7-x}{2}, & se \quad 5 \leq x \leq 7; \\ 0, & caso \text{ contrário.} \end{cases}$$

Para determinar as funções de pertinências das demais operações, procedemos da mesma forma que fizemos para a soma. Assim temos:

$$A-B = \begin{cases} \frac{x+3}{2}, & se \quad -3 \leq x < -1; \\ \frac{1-x}{2}, & se \quad -1 \leq x \leq 1; \\ 0, & caso \text{ contrário.} \end{cases}$$

$$A.B = \begin{cases} \frac{-3+\sqrt{1+4x}}{2}, & se \quad 2 \leq x < 6; \\ \frac{7-\sqrt{1+4x}}{2}, & se \quad 6 \leq x \leq 12; \\ 0, & caso \text{ contrário.} \end{cases}$$

$$\frac{A}{B} = \begin{cases} \frac{4x-1}{1+x}, & se \quad \frac{1}{4} \leq x < \frac{2}{3}; \\ \frac{3-2x}{1+x}, & se \quad \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}; \\ 0, & caso \text{ contrário.} \end{cases}$$

A seguir temos os gráficos dos números fuzzy A e B e as operações aritméticas entre eles.

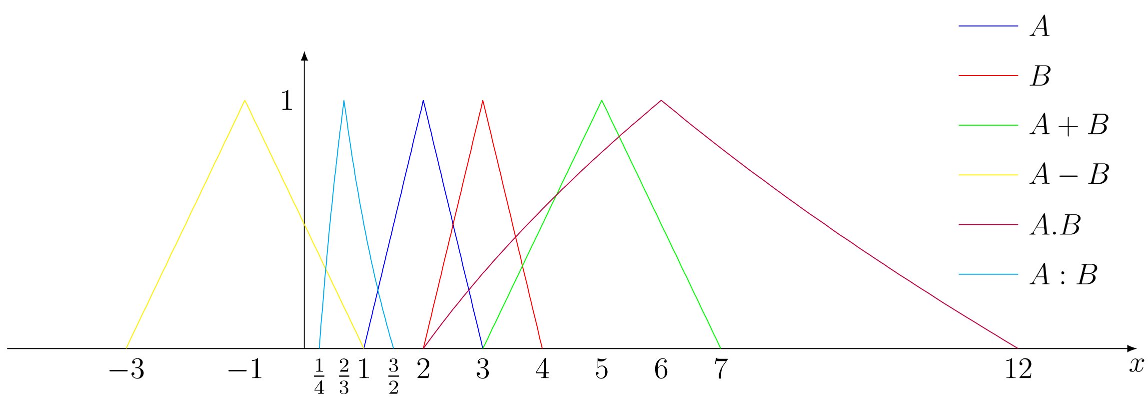


Figura 2.19: Operações aritméticas com números fuzzy

2.9 Relações fuzzy

A ideia de relação fuzzy advém do conceito de relação para os conjuntos crisp. Uma relação crisp indica se há ou não alguma associação entre dois objetos, enquanto que uma relação fuzzy, além de indicar se há ou não tal associação, indica também o grau desta relação. De acordo com [5], vamos definir a relação crisp e a relação fuzzy.

Definição 2.9.1. *Uma relação (crisp) $\mathcal{R}$ sobre $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$, é qualquer subconjunto (crisp) do produto cartesiano $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$. Se o produto cartesiano for formado por apenas dois conjuntos $U_1 \times U_2$, a relação é denominada relação binária sobre $U_1 \times U_2$. Se $U_1 = U_2 = \ldots = U_n = U$, diz-se que $\mathcal{R}$ é uma relação sobre U Onde a função característica de $\mathcal{R}$ é dada por:*

$$\chi_{\mathcal{R}} : U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n \longrightarrow \{0, 1\}$$

com

$$\chi_{\mathcal{R}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & se \ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{R} \\ 0 & se \ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin \mathcal{R} \end{cases}$$

Definição 2.9.2. *Uma relação fuzzy $\mathcal{R}$ sobre $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$ é qualquer subconjunto fuzzy de $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$. Assim, uma relação fuzzy $\mathcal{R}$ é definida por uma função de pertinência $\varphi_{\mathcal{R}} : U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n \longrightarrow [0, 1]$.*

Se o produto cartesiano for formado por apenas dois conjuntos $U_1 \times U_2$, a relação é chamada de fuzzy binária sobre $U_1 \times U_2$. Indicando a função de pertinência da relação fuzzy $\mathcal{R}$ por $\varphi_{\mathcal{R}}$, então o número $\varphi_{\mathcal{R}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [0, 1]$, indica o grau com que os elementos x_i, que compõem a n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, estão relacionados segundo a relação $\mathcal{R}$. A seguir temos um exemplo de relação fuzzy adaptado de [12].

Exemplo 2.9.1. *Sejam $X = \{x_1, x_2\} = \{$Vitória da Conquista , Fortaleza $\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\} = \{$ Planalto, Salvador, Jequié $\}$ e R a relação "muito próxima", indicando a relação de proximidade entre duas cidades. No caso de uma relação fuzzy, esta poderia ser dada pela função de pertinência $\varphi_R(x, y)$, expressa pela seguinte matriz relacional:*

		y_1	y_2	y_3
		Planalto	*Salvador*	*Jequié*
x_1	*Vitória da Conquista*	$1,0$	$0,7$	$0,8$
x_2	*Fortaleza*	$0,2$	$0,4$	$0,1$

Podemos observar que a relação φ_R entre as cidades de Vitória da Conquista e planalto tem o grau 1,0 de proximidade enquanto Fortaleza e Planalto tem grau 0,2 de proximidade.

A seguir temos a definição de uma composição entre relações crisp, que permitirá uma melhor compreensão da definição 2.8.4 sobre composição de relações fuzzy [4].

Definição 2.9.3. *Seja $\mathcal{R}$ uma relação crisp entre U e V, e $\mathcal{S}$ uma relações crisp entre V e W, então a composição $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ é uma nova relação crisp entre U e W, cuja função característica é dada por*

$$\chi_{\mathcal{R}\circ\mathcal{S}}(x,z) = \max_{y\in V}\left[\min\left(\chi_{\mathcal{R}}(x,y), \chi_{\mathcal{S}}(y,z)\right)\right].$$

Definição 2.9.4. *Considere $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ duas relações fuzzy binárias em $U \times V$ e $V \times W$, respectivamente. A composição $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ é uma relação fuzzy binária em $U \times W$ cuja função de pertinência é dada por*

$$\varphi_{\mathcal{R}\circ\mathcal{S}}(x,z) = \sup_{y\in V}\left[\min\left(\varphi_{\mathcal{R}}(x,y), \varphi_{\mathcal{S}}(y,z)\right)\right].$$

Quando os conjuntos U, V e W são finitos, uma maneira prática de realizar as operações acima consiste em se efetuar a "multiplicação"das matrizes relacionais, substituindo a multiplicação pela operação *min* e cada adição pelo operador *max*.

Exemplo 2.9.2. *Seja o conjunto dos alunos $U = \{Pedro, Maria\}$, o conjunto das áreas de estudos, $V = \{Humanas, Exatas, Biológicas\}$ e o conjunto dos cursos $W = \{Matemática, Medicina, Direito\}$. O interesse dos estudantes por uma determinada área (em termos das $afinidades$ em V) são representados pela matriz relacional P, e o grau de relação entre áreas de conhecimentos V e cursos W são dados pela matriz relacional Q. A matriz relacional $P \circ Q$, indica o grau de relação entre um aluno e um determinado curso.*

$$P\,(U,V) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} Hum. & Exa. & Bio. \end{array} \\ \begin{array}{c} Pedro \\ Maria \end{array} & \begin{bmatrix} 0,2 & 1,0 & 0,8 \\ 1,0 & 0,1 & 0,0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$Q\,(V,W) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} Mat. & Med. & Dir. \end{array} \\ \begin{array}{c} Hum. \\ Exa. \\ Bio. \end{array} & \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,9 \\ 0,8 & 0,7 & 0,0 \\ 0,0 & 1,0 & 0,0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$P \circ Q = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} Mat. & Med. & Dir. \end{array} \\ \begin{array}{c} Pedro \\ Maria \end{array} & \begin{bmatrix} 0,8 & 0,7 & 0,2 \\ 0,8 & 0,2 & 0,9 \end{bmatrix} \end{array}$$

Observe que os elementos da matriz $P \circ Q$, são dados a partir da operação "multiplicação" entre as matrizes P e Q. Por exemplo, o elemento da matriz $P \circ Q$, que corresponde a 1ª linha e 1ª coluna foi encontrado operando:

$$max\left[min\left(0,2;0,8\right);min\left(1,0;0,8\right);min\left(0,8;0,0\right)\right] =$$

$$max\left[0,2;0,8;0,0\right] = 0,8$$

Veja que o resultado nos mostra que Pedro deve escolher Matemática, pois ele deu prioridade a exatas em P, e pela relação Q, Matemática possui maior relação com exatas.

Capítulo 3

Aplicações no Ensino Médio

O Ensino de matemática, especialmente no Ensino Médio, quase sempre, considera apenas conceitos matemáticos que conduzem à resolução de problemas de forma exata. A matemática como ferramenta para analisar situações mal definidas ou imprecisas é restritas a métodos probabilísticos. Na vida real, no entanto, existem muitas situações em que não temos um banco de dados de amostra ou os dados são bastante imprecisos ou incompletos e há a necessidade de tomar decisões com base em conceitos subjetivos ou mal definidos como grande, baixo, forte, bonito, muito etc. Nesses casos, os processos matemáticos determinísticos ou probabilísticos podem não ser a melhor escolha. No entanto, problemas mal definidos costumam ser resolvidos intuitivamente. A lógica fuzzy trabalha com subjetividade, e para quantificar as incertezas para resolver problemas reais que não têm solução exata. A matemática da lógica difusa é relativamente simples e bem adaptável a situações reais.

Para justificar o estudo de fatos incertos, tão presente a vida de todos, podemos citar o que diz algumas políticas públicas educacionais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> " Um dos pontos de partida para esse processo é tratar, como conteúdo do aprendizado matemático, científico e tecnológico, elementos do domínio vivencial dos educandos, da escola e de sua comunidade imediata. Isso não deve delimitar o alcance do conhecimento tratado, mas sim dar significado ao aprendizado, desde seu início, garantindo um diálogo efetivo. A partir disso, é necessário e possível transcender a prática imediata e desenvolver conhecimentos de alcance mais universal." (PCN [2]).

Complementando, podemos citar a Base Nacional Comum Curricular, que diz

> " No Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade. Nesse contexto, quando a realidade é a re-

> ferência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio, envolvidos, em diferentes graus dados por suas condições socioeconômicas, pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros." (BNCC [3])

Nesse aspecto, este capítulo apresenta situações problemas sobre a modelagem e resolução de problemas de aspectos incertos, tão presente na vida de todos. A realização desses problemas poderão ocorrer em qualquer momento do Ensino, desde que seja apresentado antecipadamente a teoria dos conjuntos crisp, intervalos reais e funções.

3.1 Aplicação 1: Rua ou avenida?

Para introduzir o conceito de conjuntos fuzzy e chamar a atenção para a modelagem de conceitos difusos pode ser proposto aos alunos que discutam quando chamar uma via urbana de rua ou avenida. Certamente a definição não é clara, tomando por base o Dicionário Aurélio, rua é uma "via pública para circulação urbana, total ou parcialmente ladeada de casas". Por outro lado, avenida é definida como uma "via urbana mais larga do que a rua, em geral com diversas pistas para circulação de veículos". Pode ser observado que mesmo com a definição dada, não é possível, distinguir com clareza uma da outra. Usando o critério de tamanho, para definir se uma via é rua ou avenida pode ser discutido com os alunos, por exemplo, que em São Paulo [11], as avenidas devem ter pelo menos 20 metros de largura, porém em outras cidades o tamanho mínimo pode ser diferente. Sugerimos, então, a seguinte atividade que pode ser desenvolvida em uma sala de aula:

Atividade

Questão 1 – Qual é a diferença entre rua e avenida?

Questão 2 – Considere que para uma via receber o nome de avenida precisa ter por volta de 20 metros ou mais. Uma via que tenha 19,5 metros de largura pode ser chamada de avenida? E se tiver 19,0 metros?

Questão 3 – Com auxílio do Google Earth localize em sua cidade ruas e avenidas. Utilizando a ferramenta "medir" do Google Earth efetuar a medição aproximada de alguma rua e de alguma avenida.

Questão 4 – Os gráfico a seguir representam o conjunto difuso das vias que podem ser chamadas de rua e o conjunto fuzzy das vias que podem ser denominadas de avenida. Os gráficos determinam o grau de pertencimento ao conjunto de uma via em função de sua largura em metros.

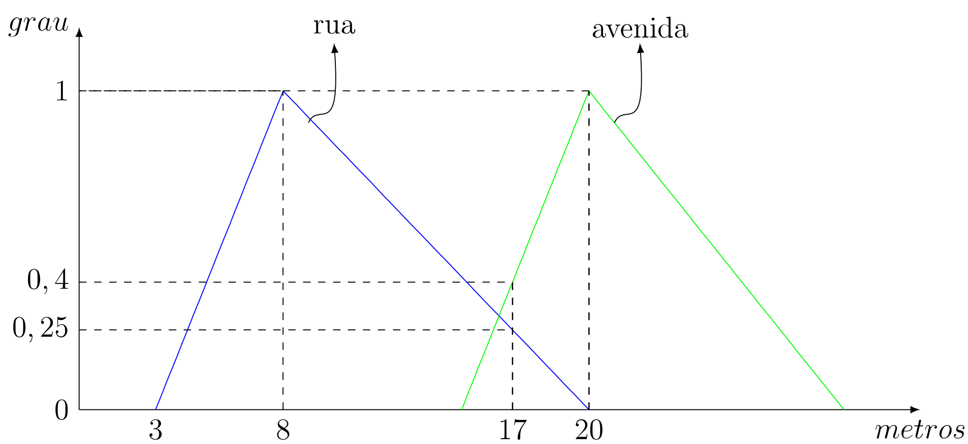


Figura 3.1: Subconjunto fuzzy das ruas e avenidas

a) De acordo com os gráficos, uma via com 17 metros pertence mais ao conjunto das ruas ou das avenidas?

b) De acordo com gráfico uma via com menos de 3 metros pode ser classificada como rua?

Analise da atividade

Questão 1: Nesta questão o aluno pode refletir que nem sempre é possível determinar com exatidão quando uma via pertencerá ao conjunto das ruas ou ao conjunto das avenidas, permitindo assim a introdução aos conjuntos difusos.

Questão 2: O termo "por volta de 20 metros ou mais" não possibilita distinguir, de forma cristalina, uma rua de uma avenida. Tanto uma via com 19,5 m como outra de 19,0 m podem ser classificadas como avenida, porém a de 19,5 m pertencerá mais ao conjunto das avenidas do que a de 19,0 m.

Questão 3: A atividade permite que o discente perceba que o processo de medir, usando o Google Earth não é exato (Figura 3.2). Se dois alunos utilizarem a mesma imagem e tentar medir a largura de uma avenida ou rua, podem encontrar medidas diferentes, porém valores relativamente próximos.

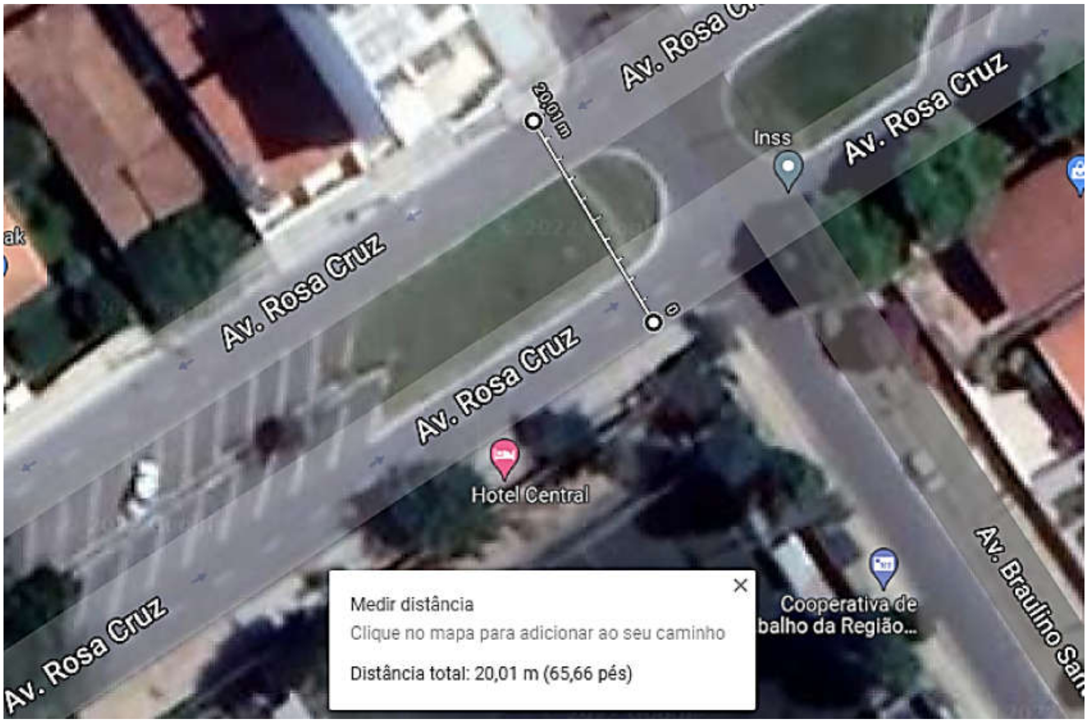


Figura 3.2: Medição da largura de uma avenida no Google Earth

Questão 4: O objetivo aqui é introduzir noções sobre a representação de conjuntos difusos, possibilitando, através da interpretação gráfica, a percepção que uma mesma via com 17 m pode pertencer tanto ao conjuntos das ruas como ao conjunto das avenidas, porém com graus de pertinência diferentes. Dessa forma, podemos utilizar um conjunto fuzzy para auxiliar nos processos de decisão quando levamos em consideração que os dados chegam com imprecisão.

3.2 Aplicação 2: Janela um pouco aberta

É comum à nossa linguagem, afirmar “Aquela janela está um pouco fechada” ou “Abra um pouca essa janela!”. Como descrever matematicamente o conjunto das medidas de aberturas de uma janela que representam uma janela um pouco aberta? Esse tipo de questionamento pode ser levado a sala de aula, possibilitando, assim, que os alunos reflitam sobre os aspectos subjetivos desse problema e como resolver.

Por exemplo, podemos considerar uma janela com duas folhas de vidro; uma fixa e outra móvel, de acordo com a ilustração da figura 3.3.

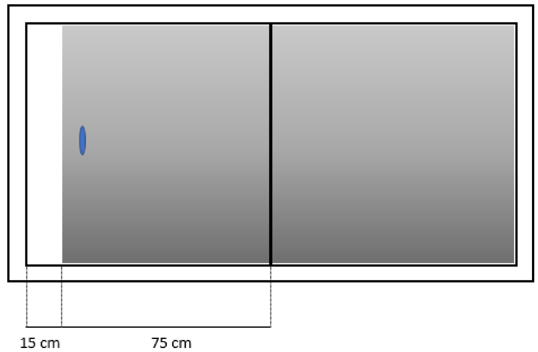


Figura 3.3: Janela um pouco aberta

Vamos supor que a abertura máxima, da folha móvel, seja de 90 cm. Qual seria o conjunto fuzzy que representa as medidas de abertura relativas ao termo "janela um pouco aberta"? Uma possível função de pertinência para esse conjunto pode ser:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x}{15}, & \text{se} \quad 0 < x \leq 15 \\ -\frac{x}{75} + \frac{6}{5}, & \text{se} \quad 15 < x \leq 90 \end{cases}$$

Neste caso, a função $\varphi_A(x)$ determina os graus de pertinência para a abertura x em cm, considerando que uma janela um pouco aberta teria uma abertura por volta de 15 cm. O gráfico a seguir mostra os graus de pertinência da função $\varphi_A(x)$.

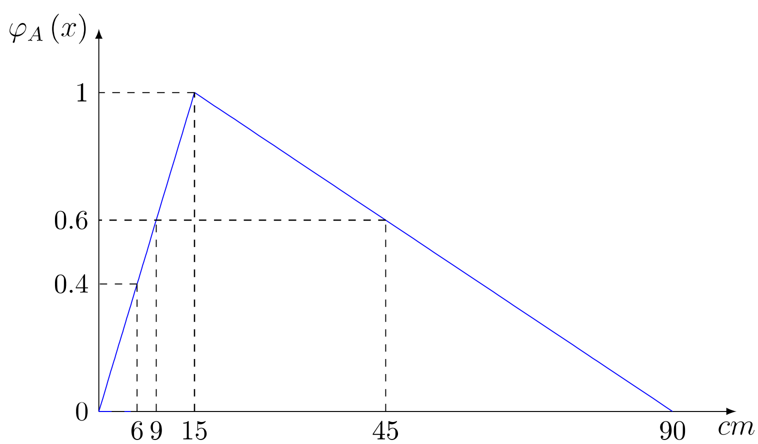


Figura 3.4: Conjunto A das medidas de uma janela um pouco aberta.

Podemos perceber que uma abertura de 9 cm tem maior pertinência ao conjunto do que uma abertura de 6 cm. Já uma abertura de 9 cm tem o mesmo grau de pertencimento que uma abertura de 45cm, a janela aberta 9 cm teria o maior grau de pertinência do conjunto.

A tabela a seguir mostra o grau de pertinência ao conjunto A de algumas medidas de aberturas da janela.

Abertura (cm)	0	3	6	9	12	15	18	30	45	60	90
$\varphi_A(x)$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	0,96	0,8	0,6	0,4	0

Figura 3.5: Graus de pertinência para algumas medidas.

Para as medidas onde $\varphi_A(x)$ está em verde mais escuro, têm maior possibilidade da janela está um pouco aberta, enquanto o verde mais claro tem menor possibilidade. Através da tabela percebemos que mesmo para algumas aberturas diferentes o grau de pertinência continua o mesmo, é o caso das aberturas 6 e 60 centímetros. Esses valores podem ser diferente se a função de pertinência escolhida for outra.

3.3 Aplicação 3: Como escolher um bom jogador de basquete. Perspectiva booleana versus fuzzy

Este exemplo, adaptado de [8], pode ser utilizado em uma atividade com os alunos do Ensino Médio possibilitando a compreensão entre a abordagem de um problema na perspectiva da lógica booleana versus uma abordagem usando a lógica fuzzy.

Perspectiva booleana: Considere quatro jogadores de basquete, A, B, C e D com alturas 184 cm, 185 cm, 186 cm e 187 cm, respectivamente. Devemos fazer a escolha dos melhores jogadores de acordo com critérios booleanos:

$$\text{Altura} \geq 185 \text{ cm}$$
$$\text{Taxa de acertos} \geq 80\%$$

A determinação dos melhores jogadores pode ser obtida a partir da operação interseção entre os conjuntos Altura e Taxa de acerto. O valor lógico indicando se um determinado jogador pertence ou não ao conjunto dos bons jogadores pode ser obtido a partir do operador $\wedge$.

Considerando o conjunto H = altura e P = taxa de acerto, pode ser criada a seguinte tabela (figura 3.6):

JOGADOR	ALTURA (Valor lógico)	TAXA DE ACERTO (Valor lógico)	ESCOLHA BOOLEANA (H ∩ P)
A	184 cm (0)	100% (1)	0
B	185 cm (1)	80% (1)	1
C	186 cm (1)	95% (1)	1
D	187 cm (1)	60% (0)	0

Figura 3.6: Tabela booleana para escolha dos melhores jogadores de basquete

Dessa forma somente os jogadores B e C deverão ser escolhidos como melhores atletas de basquete.

Perspectiva fuzzy: Considere os mesmos jogadores de basquete A, B, C e D, a escolha dos melhores jogadores deve ser feita de acordo com os critérios fuzzy apresentados pelo gráficos das figuras 3.7 e 3.8, onde o conjunto fuzzy H = altura ideal e P = taxa de acerto ideal

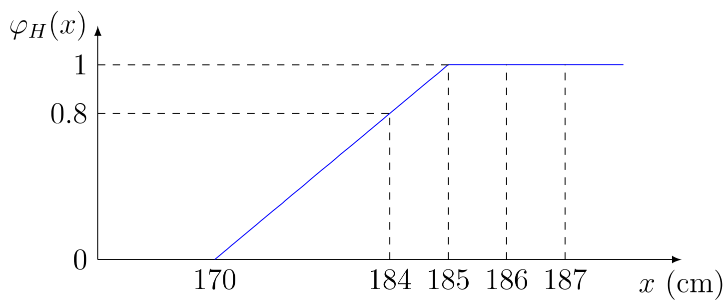


Figura 3.7: Conjunto fuzzy H

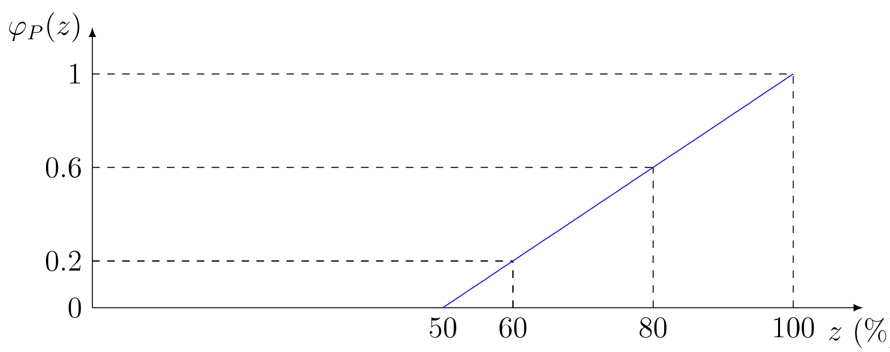


Figura 3.8: Conjunto fuzzy P

O gráfico do conjuntos fuzzy H (figura 3.7) determina o grau de pertencimento das alturas (x) de cada atleta em relação ao conjuntos das alturas ideais, enquanto o gráfico da figura 3.8 determina o grau de pertinência da taxa percentual de acerto (z) com o conjunto das taxas de acerto ideal. De acordo com os gráficos dos conjuntos fuzzy é possível obter a tabela da figura 3.9, onde a escolha dos melhores atletas é determinada a partir do operador: mínimo.

JOGADOR	ALTURA $\varphi_H(x)$	TAXA DE ACERTO $\varphi_P(z)$	ESCOLHA FUZZY Min $[\varphi_H(x), \varphi_P(z)]$
A	184 cm (0,8)	100% (1.0)	0,8
B	185 cm (1,0)	80% (0,6)	0,6
C	186 cm (1,0)	95% (0,9)	0,9
D	187 cm (1,0)	60% (0,2)	0,2

Figura 3.9: Tabela fuzzy para escolha dos melhores jogadores de basquete

Analisando os dois modelos é possível notar como a modelagem do problema através da lógica booleana permite escolher apenas quais são os melhores atletas, não diferenciando entre os jogadores A e B quem é o melhor, já que o resultado indica apenas se pertence ou não aos conjuntos dos bons jogadores, ainda nessa perspectiva, o jogador A que tinha 100% de aproveitamento foi simplesmente eliminado por não ter altura suficiente. Através da perspectiva fuzzy, além da possibilidade de determinar os melhores, ainda é possível ordenar. Acreditamos que essa analise é mais coerente, pois uma pequena variação na altura ou taxa de acerto do jogador não altera a classificação de bom jogador de forma abrupta. Concluímos que esse exemplo possibilita a percepção da modelagem fuzzy como uma possibilidade na resolução de problemas com alguma característica incerta, como a escolha dos melhores atletas a partir de critérios que nem sempre são cristalinos.

3.4 Aplicação 4: Aritmética Intervalar

Como visto na seção 2.6, a compreensão de números fuzzy e suas operações aritméticas partem do conhecimento prévio de matemática intervalar, dessa forma, com o intuito de apresentar esse requisito, como base para compreensão de noções difusas, propomos uma atividade que pode ser aplicada em uma classe com alunos que tenham conhecimento prévio sobre intervalos reais. Porém, antes da apresentação do problema é importante que o professor apresente as operações aritméticas com intervalos, presente na seção 2.6 desse trabalho.

Atividade

Em uma fábrica de tijolos e telhas são fabricados diariamente entre 800 e 1200 tijolos, desses, é comum apresentarem defeitos entre 60 e 90 tijolos. Esta fábrica também produz diariamente entre 700 e 900 telhas, dessas, entre 30 e 50 apresentam defeitos.

a) Qual é a quantidade de tijolos sem defeitos que essa fábrica produzirá por dia?

b) Quantas telhas sem defeitos são produzidas por dia?

c) Entre tijolos e telhas qual será a quantidade de peças produzidas por essa fábrica?

d) Qual é o total de peças defeituosas produzidas por dia nessa fábrica?

e) Qual será a quantidade total de peças fabricadas sem defeitos?

Analise da atividade

A análise do problema leva a reflexão de como pensar matematicamente e realizar operações aritméticas com valores incertos, já que não é possível determinar a quantidade exata de blocos e telhas fabricados e com defeitos. Sua resolução é possível através de operações aritméticas com intervalos reais. Nos itens (a) e (b) pode-se realizar a operação diferença entre os intervalos para determinar a quantidade de blocos e telhas sem defeitos.

$$Blocos : [800, 1200] - [60, 90] = [800 - 90, 1200 - 60] = [710, 1140]\,,$$

$$Telhas : [700, 900] - [30, 50] = [700 - 50, 900 - 30] = [650, 870]\,,$$

Logo a quantidade de tijolos sem defeitos está compreendido entre 710 e 1140 tijolos e de telhas sem defeitos está entre 650 e 870.

O item (c) pode ser solucionado realizando adição entre os intervalos de tijolos produzidos e o intervalo de telhas produzidas, dessa forma:

$$[800, 1200] + [700, 900] = [1500, 2100]\,,$$

assim a produção ficam entre 1500 a 2100 peças de tijolos e telhas.

O item (d) pode ser solucionado realizando adição entre os intervalos de tijolos defeituosos e o intervalo de telhas defeituosas, dessa forma:

$$[60, 90] + [30, 50] = [90, 140]\,,$$

logo a produção de peças defeituosas ficam entre 90 a 140 peças de tijolos e telhas.

Para responder o item (e) podemos adicionar os resultados obtidos nos itens (a) e (b):

$$[710, 1140] + [650, 870] = [1360, 2010],$$

outra possibilidade seria fazer a diferença entre o total de peças produzidas e o intervalo de peças produzidas com defeitos. Usando os resultados obtidos em (c) e (d), temos:

$$[1500, 2100] - [90, 140] = [1500 - 140, 2100 - 90] = [1360, 2010],$$

Portanto, valores entre 1360 a 2010 pode ser um número que representa a quantidade de peças sem defeitos produzidas por dia.

3.5 Aplicação 5: Tempo gasto em uma viagem

Ainda pensando em problemas que sugerem uma análise sobre incertezas e consequentemente a utilização da teoria fuzzy, pode-se propor o seguinte problema [6]:

Numa viagem de ônibus que deve percorrer cerca de 100 km, a velocidade máxima permitida é de 120 km / h. Normalmente o ônibus sai às 12h, atrasado, mas não mais que 15 minutos. Já o trânsito nessa via é muito complicado (muitas curvas, muitos carros, pedágios etc.) A que horas o ônibus chegará ao destino?

Primeiro vamos propor uma possível solução crisp. Em seguida resolveremos usando conceitos da matemática fuzzy.

SOLUÇÃO CRISP: Este problema tem uma natureza incerta, pois não é possível determinar qual seria a velocidade média do ônibus durante o percurso, porém em uma análise crisp pode ser sugerido algum valor para a velocidade. A velocidade máxima permitida na via é de 120 km/h, devido ao transito vamos sugerir 80 km/h para a velocidade média. Vamos considerar também, que a distância é de 100 km e vamos supor que o ônibus saia da rodoviária às 12:10. Com estes dados podemos determinar o tempo da viagem pela fórmula:

$$T = \frac{D}{V}$$

Onde T, D e V são respectivamente, tempo, distância e velocidade média. Substituindo os valores, temos:

$$T = \frac{100}{80} = 1,25 \; horas$$

A duração da viagem será de aproximadamente 1,25 horas ou 1 hora e 15 minutos. Se o ônibus partir às 12:15, chegará ao destino às 13 horas e 30 minutos. Observe que em uma resolução crisp não é possível modelar matematicamente a imprecisão dos dados do problema. Encontramos um valor exato para o horário de chegada porque determinamos um valor também exato para a velocidade, distância e momento de partida. Veremos a seguir, na resolução fuzzy, que será possível modelar a imprecisão dos dados e ainda estimar o momento de chegada que tem a maior possibilidade.

SOLUÇÃO FUZZY: Observe que distância do percurso, velocidade e tempo de atraso são valores aproximados e não exatos. Dessa maneira a melhor forma de responder esta questão é a partir do conceito de números fuzzy.

Seja D a distância do percurso, podemos representar D, por exemplo, pelo número fuzzy triangular (90; 100; 110), cuja função de pertinência é:

$$\varphi_D(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \leq 90; \\ \frac{x}{10} - 9, \text{ se } 90 < x \leq 100; \\ 11 - \frac{x}{10}, \text{ se } 100 < x \leq 110; \\ 0, \text{ se } x > 110. \end{cases}$$

O gráfico está representado a seguir:

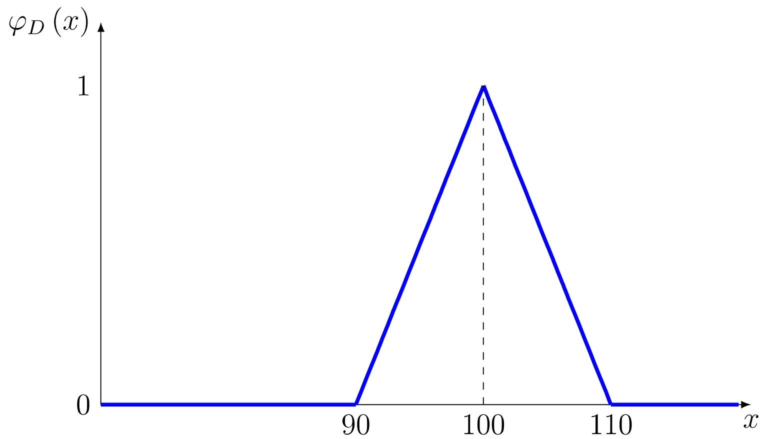


Figura 3.10: Distância fuzzy D

e α-níveis dados por $[D]^\alpha = [10\alpha + 90, -10\alpha + 110]$.

A incerteza da velocidade V do ônibus pode ser também modelada por um número triangular fuzzy. Levando-se em conta que nunca ultrapassa 120 Km/h e que têm algumas velocidades no percurso bem baixas, podemos supor que V = (30; 80; 120), cuja função de pertinência é:

$$\varphi_V(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \leq 30 \text{ ou } x > 120; \\ \frac{1}{50}x - \frac{3}{5}, & \text{se} \quad 30 < x \leq 80; \\ 3 - \frac{1}{40}x, & \text{se} \quad 80 < x \leq 120. \end{cases}$$

O gráfico de V está representado a seguir:

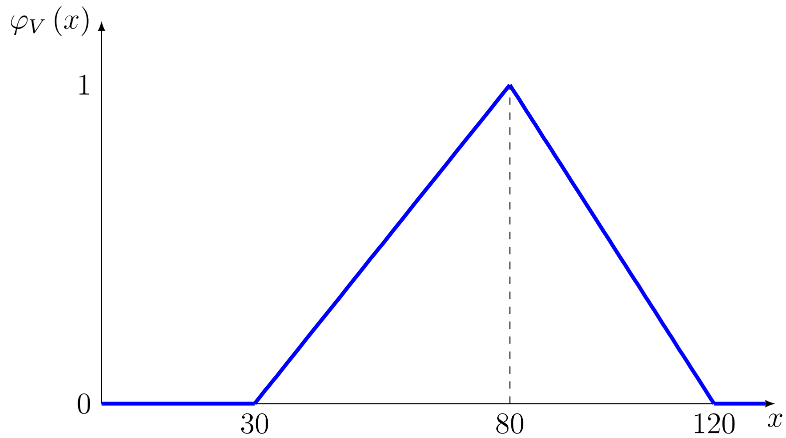


Figura 3.11: Velocidade fuzzy V

e α-níveis descritos por:

$$[V]^{\alpha} = [50\alpha + 30, 120 - 40\alpha].$$

.

O tempo total do deslocamento, pode ser dado por $T = T_1 + T_2$, onde T_1 é o tempo de espera que não excede 15 minutos. Este tempo pode ser modelado por um número fuzzy triangular $T_1 =$ (0; 0; 0,25), cuja função de pertinência é:

$$\varphi_{T_1}(x) = \begin{cases} 1 - 4x, & \text{se} \quad 0 < x \leq 0,25; \\ 0, & \text{se} \quad x > 0,25, \end{cases}$$

seu gráfico está descrito a seguir:

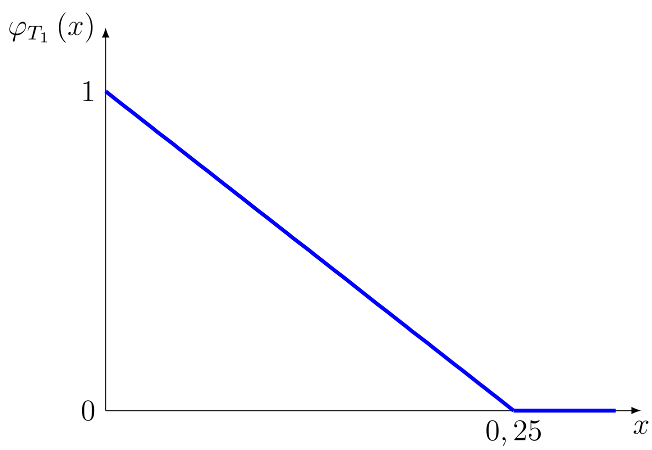


Figura 3.12: Tempo fuzzy T_1

e α-níveis são descritos por:

$$[T_1]^{\alpha} = \left[0, \frac{1 - \alpha}{4}\right].$$

T_2 é o tempo da viagem, para determiná-lo podemos usar a relação física:

$$T_2 = \frac{D}{V}$$

Para efetuar a operação aritmética com os números fuzzy, realizamos as operações com os intervalos de α-níveis relativo a cada número fuzzy, as operações com esses intervalos foram definidos na seção 2.7. Dessa forma, temos que :

$$[T_2]^\alpha = [10\alpha + 90, -10\alpha + 110] \cdot \left[\frac{1}{120 - 40\alpha}, \frac{1}{50\alpha + 30}\right],$$

$$[T_2]^\alpha = \left[\frac{10\alpha + 90}{120 - 40\alpha}, \frac{110 - 10\alpha}{50\alpha + 30}\right],$$

$$[T_2]^\alpha = \left[\frac{\alpha + 9}{12 - 4\alpha}, \frac{11 - \alpha}{5\alpha + 3}\right].$$

Com velocidade, distância e atraso modelado por funções de pertinências e com seus respectivos α-níveis. Podemos determinar $[T]^\alpha$ do tempo da viagem pela relação:

$$[T]^\alpha = [T_1]^\alpha + [T_2]^\alpha = \left[0, \frac{1-\alpha}{4}\right] + \left[\frac{\alpha + 9}{12 - 4\alpha}, \frac{11 - \alpha}{5\alpha + 3}\right] =$$

$$\left[\frac{\alpha + 9}{12 - 4\alpha}, \frac{1-\alpha}{4} + \frac{11 - \alpha}{5\alpha + 3}\right].$$

A partir dos α-níveis de $[T]^\alpha$ é possível obter uma solução fuzzy para o problema. Para isso fazemos $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$. Obtemos o número fuzzy $(\frac{9}{12}; \frac{10}{8}; \frac{47}{12})$, cuja a função de pertinência é dada por:

$$\varphi_T(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \leq \frac{9}{12} \text{ ou } x > \frac{47}{12}; \\ 2x - \frac{3}{2}, & \text{se} \quad \frac{9}{12} < x \leq \frac{10}{8}; \\ \frac{-3}{8}x + \frac{47}{32}, & \text{se} \quad \frac{10}{8} < x \leq \frac{47}{12}. \end{cases}$$

A seguir temos o gráfico do número T = $(\frac{9}{12}; \frac{10}{8}; \frac{47}{12})$, que representa a solução do problema.

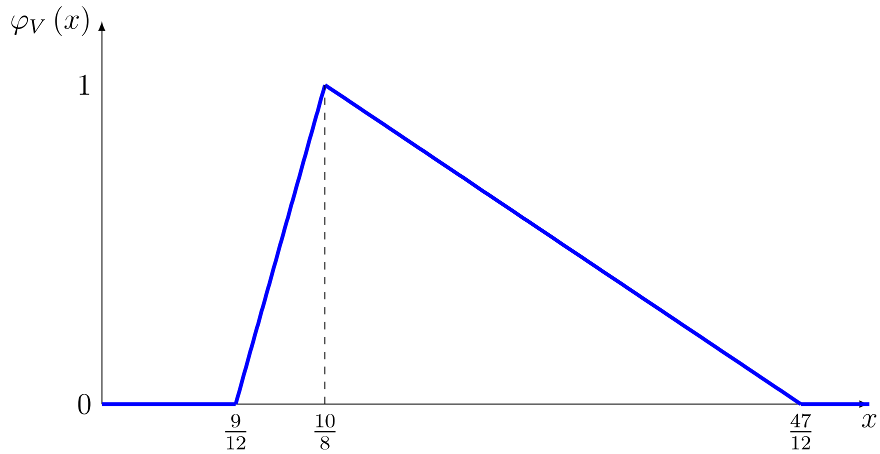


Figura 3.13: Tempo da viagem T

Analisando a função solução, podemos verificar que o tempo da viagem está entre 45 minutos ($\frac{9}{12}$ $horas$) e 3 horas e 55 minutos ($\frac{47}{12}$ $horas$), tendo uma maior possibilidade de acontecer em 1 hora e 15 minutos ($\frac{10}{8}$ $horas$) portanto, existe uma possibilidade maior do ônibus chegar ao seu destino às 13 horas e 30 minutos. Observe que na solução crip, também obtemos um tempo de 1 hora e 15 minutos, entretanto, não foi possível estabelecer, por exemplo, qual seria possibilidade do tempo de viagem ser de 2 horas. Na solução fuzzy isso é possível. Para uma viagem com duração de 2 horas e 5 minutos (2,05 horas), a partir da função de pertinência do número triangular T, é possível verificar que a possibilidade será de 0,7. Outras possibilidades poderão ser encontradas por meio da função $\varphi_T(x)$.

Capítulo 4

Lógica fuzzy na sala de aula

O objetivo desse trabalho é dissertar sobre a inserção do tema lógica fuzzy no Ensino Médio. Para isso, desenvolvemos o estudo desse tema no Colégio Estadual de Cândido Sales-BA, município da região sudoeste da Bahia. Dentre as turmas do Ensino Médio, escolhemos aplicar a atividade com os alunos da 3ª série, por estarem já familiarizado com o conceito de conjuntos, intervalos reais e funções. Para a realização das atividades foram escolhidas duas turmas com um total de 51 alunos. Devido a pandemia da COVID-19, essas turmas não tiveram aulas presenciais na 1ª e 2ª séries, apenas aulas online, no período de 2019 a 2021. Sabendo das dificuldades educacionais decorrentes do período pandêmico, foi feito uma revisão de conceitos fundamentais de matemática logo no início do período letivo de 2022. Dessa forma, foi possível a realização do trabalho, possibilitando a apresentação e a discussão sobre o que é lógica e conjuntos fuzzy. O propósito da prática foi baseado em:

1) Fazer uma abordagem comparativa da teoria clássica dos conjuntos, introduzindo os conjuntos fuzzy, através de aula expositiva;

2) Exemplificar situações problemas em que a teoria clássica dos conjuntos não se enquadraria, mas sim os conjuntos fuzzy, por meio de aula expositiva;

3) Verificar como os alunos analisam e resolvem problemas envolvendo incertezas por meio de um questionário.

O trabalho foi realizado em dois encontros com duração de 50 minutos cada. O primeiro encontro, iniciou-se com uma aula apresentando conceitos da lógica e dos conjuntos clássicos. Foi mostrado que na lógica clássica uma expressão ou enunciado só admite dois valores, 0 ou 1. Da mesma forma, na teoria dos conjuntos, dado um elemento, ele pertence ou não pertence ao conjunto. Introduzimos à matemática fuzzy a partir do aspecto histórico, apresentamos que em 1973 o professor Lotfi A. Zadeh, publicou os fundamentos da Teoria Fuzzy, introduzindo um novo pensamento matemático. Mostramos que de acordo com a lógica fuzzy, uma sentença pode assumir uma infinidade de valores lógicos no intervalo [0,1], e que em um conjunto fuzzy, um elemento pode ter graus de pertencimento a este conjunto também variando no intervalo [0,1]. Mostramos que a representação de um conjunto fuzzy pode ser feito por meio de uma função que indica o nível de pertinência de um elemento ao conjunto fuzzy. Por meio de exemplos, foi possível apresentar que situações que não são muito bem descritas pela matemática clássica torna-se possível através da matemática fuzzy.

No segundo encontro, foi solicitado aos educandos que formassem equipes com 2, 3 ou 4 componentes, com um total de 16 grupos, para cada equipe foi entregue um questionário que após leitura, análise e discussão deveriam responder as questões a seguir.

Questionário

1) O técnico de um time de basquete está selecionando atletas para compor o time. Um dos critérios para entrar para o time é ser alto. O que seria um jogador de estatura baixa, média, alta e muita alta? Justifique sua resposta.
2) A fita abaixo tem uma variação de cor que vai do branco ao vermelho. Imagine que você esteja aquecendo a água para um banho. Marque um ponto na fita para indicar a temperatura fria, morna, quente e fervendo. Justifique o que você fez para determinar a localização de cada ponto.

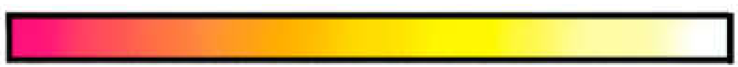


Figura 4.1: Barra da temperatura

3) Uma viagem de ônibus da cidade A até a cidade B demora aproximadamente seis horas. Se tomarmos o ônibus que deve sair às 23h da cidade A, mas está quase sempre atrasado, a que horas chegaremos na cidade B? Justifique sua resposta.
4) O conforto térmico de uma sala de aula pode ser classificado como Baixo, Bom e Alto. O gráfico a seguir indica o nível de pertencimento de uma temperatura aos conjuntos Baixo, Bom e Alto. Por exemplo, a temperatura de 18°C tem nível de pertencimento ao conjunto Baixo de 0,8 e ao conjunto Bom de 0,2. Baseado nisso, responda:

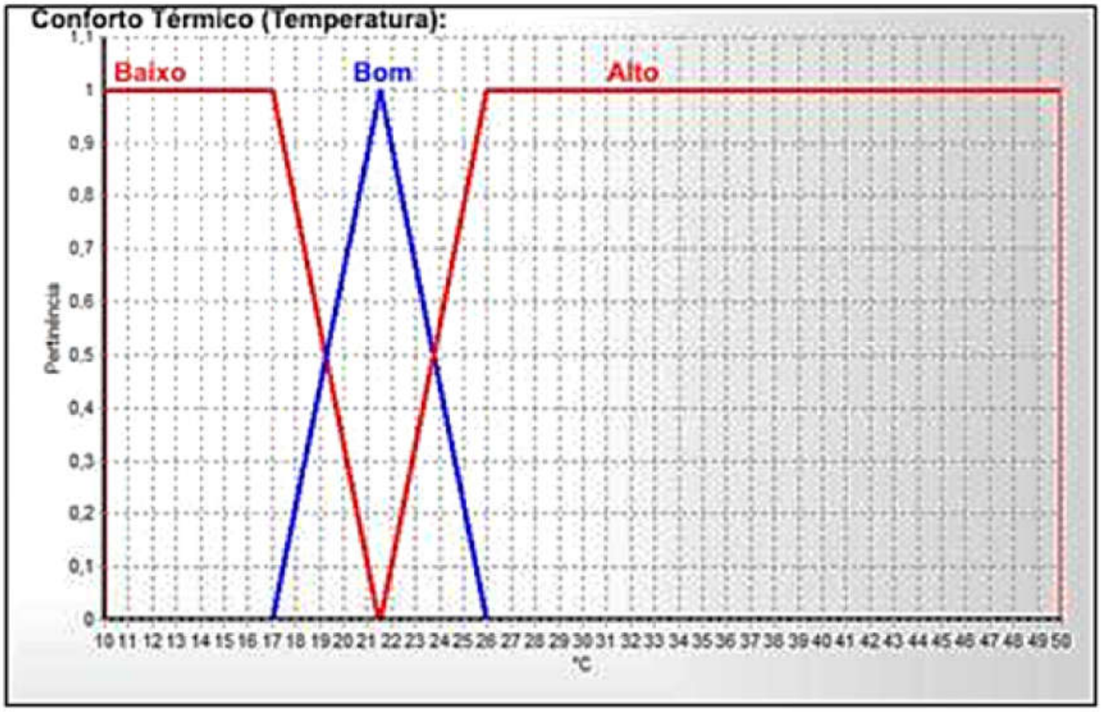


Figura 4.2: Conforto térmico

a) Qual é o nível de pertencimento de 20°C ao conjunto de conforto térmico Baixo, Bom e Alto?

b) A temperatura de 25°C pertence a quais conjuntos? Justifique.

5) Para cada conjunto, analise quais são melhores representados por conjuntos fuzzy e quais são melhores representados pelos conjuntos clássicos. Justifique sua resposta.

a) Conjuntos dos números pares maiores que 9 e menores que 15.

b) Conjuntos das pessoas altas.

c) Conjuntos dos alunos inteligentes.

4.1 Resultados das atividades

A primeira questão dessa atividade consiste em descrever matematicamente o que seria um jogador de altura baixa, média, alta e muito alta. Notamos que dos 16 questionários respondidos, 14, apresentaram como solução apenas um valor numérico para descrever cada uma das alturas. Apenas dois grupos, usaram intervalos para descrever o que seria baixo, médio, alto e muito alto. A figura 4.3 mostra como uma das equipes resolveu a questão 1, observe que a escolha dos valores foi baseado em uma "média intuitiva"das alturas dos jogadores profissionais.

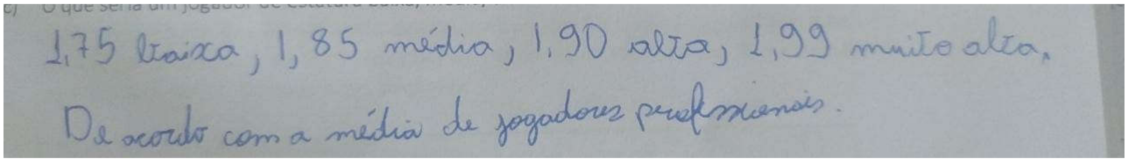


Figura 4.3: Solução da questão 1

Já na figura 5.4 temos uma solução que representa a resposta a essa questão dada por outro grupo.

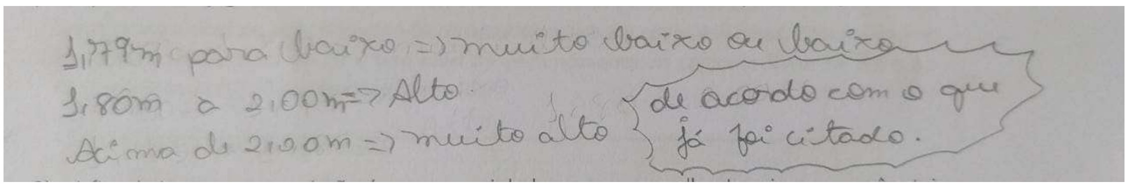


Figura 4.4: Solução da questão 1

A equipe que apresentou a solução da figura 4.4, utilizou intervalos para representar os termos baixo, alto e muito alto. A observação colocado ao lado da solução refere-se ao primeiro momento da prática, onde foi apresentado noções de matemática fuzzy.

A questão 2 propõe a quantificação da temperatura da água utilizando uma fita colorida. Foi unanime a marcação de um ponto na região vermelha para indicar a temperatura fervendo, o laranja para indicar o quente, o amarelo para o morno e o branco para o frio. Ao caminhar pela sala, em quanto as equipes resolviam essa questão, notamos discussões sobre como determinar o locar para marcar o ponto, mostrando que eles tinham a percepção da região mas não do local exato para marcação. A figura 4.5 representa uma resposta dada para essa questão.

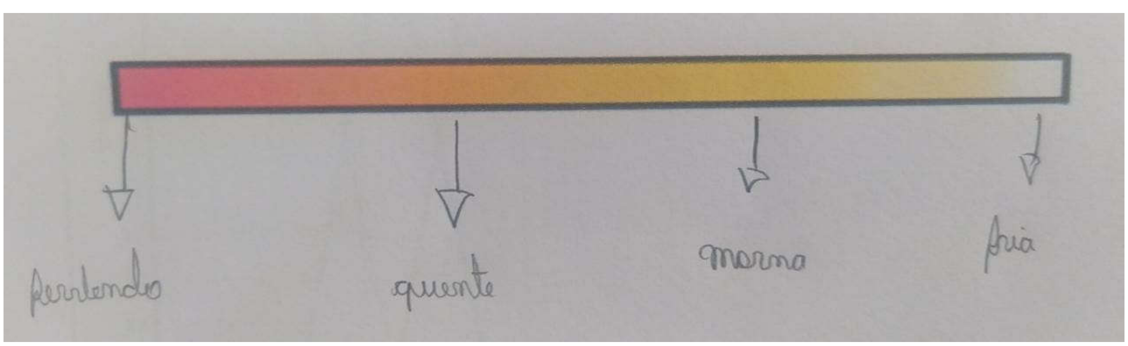


Figura 4.5: Solução da questão 2

O problema 3 pede que o leitor faça uma previsão de chegada do ônibus ao seu destino, uma vez que este está sempre atrasado. Foram diversas respostas para esse problema, para todas as soluções observamos que a abordagem sempre foi por meio da matemática clássica. Por exemplo, uma grupo sugeriu que se o atraso fosse de 30 minutos, o ônibus chegaria aproximadamente às 5:30 da manhã, esta resposta está representada na figura 4.6.

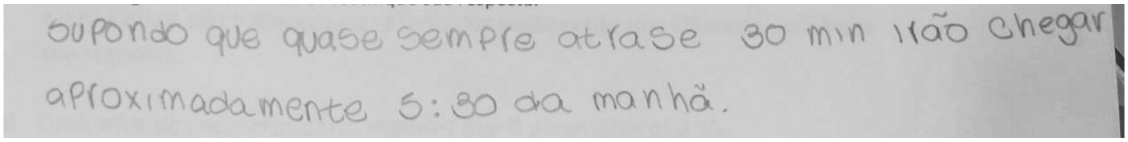


Figura 4.6: Solução da questão 3

Outra equipe sugeriu uma atraso de 1 hora, determinando assim que o ônibus chegaria às 6:00 no seu destino, conforme observado na figura 4.7.

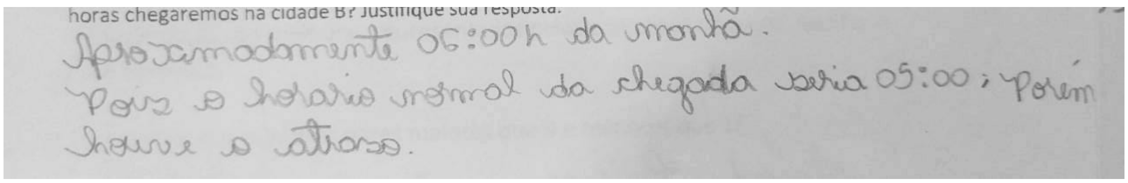


Figura 4.7: Solução da questão 3

Das 16 equipes, apenas uma apontou que essa questão deveria ser respondida através da matemática fuzzy, pois não se sabe ao certo a hora exata que o ônibus parte da origem. Essa resposta está representada na figura 4.8.

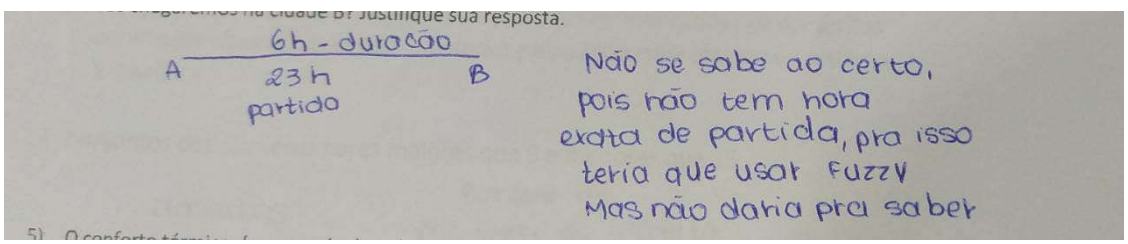
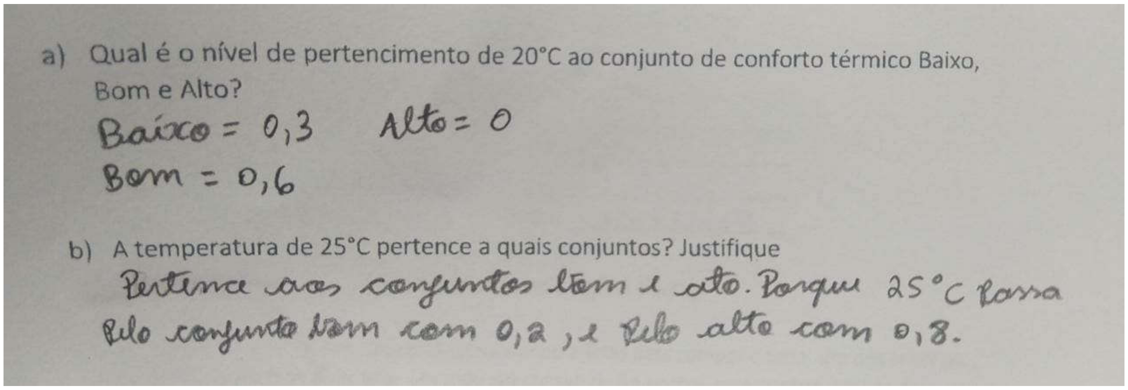


Figura 4.8: Solução da questão 3

Na quarta questão os alunos precisavam verificar o grau de pertinência da temperatura 20°C em relação aos conjuntos fuzzy de conforto baixo, bom e alto, em seguida determinar a quais conjuntos fuzzy pertencia a temperatura de 25°C. Notamos que devido a familiaridade com o estudo de funções e interpretação de gráficos, metade das equipes conseguiram responder corretamente, conforme está apresentado na figura 4.9, uma das soluções. A outra metade não conseguiu interpretar corretamente o gráfico, portanto a resposta não ficou de acordo com o esperado, figura 4.10.



a) Qual é o nível de pertencimento de 20°C ao conjunto de conforto térmico Baixo, Bom e Alto?

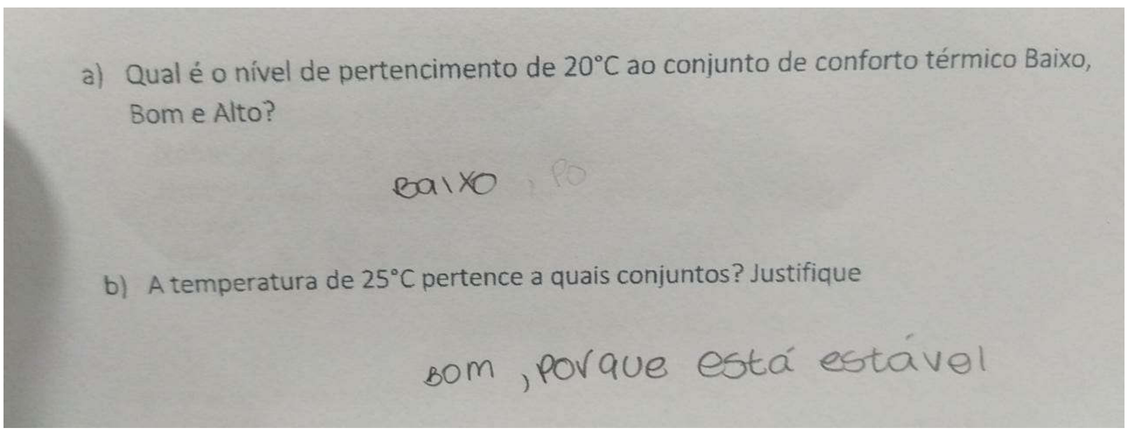
Baixo = 0,3 Alto = 0

Bom = 0,6

b) A temperatura de 25°C pertence a quais conjuntos? Justifique

Pertence aos conjuntos bom e alto. Porque 25°C passa pelo conjunto bom com 0,2, e pelo alto com 0,8.

Figura 4.9: Solução da questão 4



a) Qual é o nível de pertencimento de 20°C ao conjunto de conforto térmico Baixo, Bom e Alto?

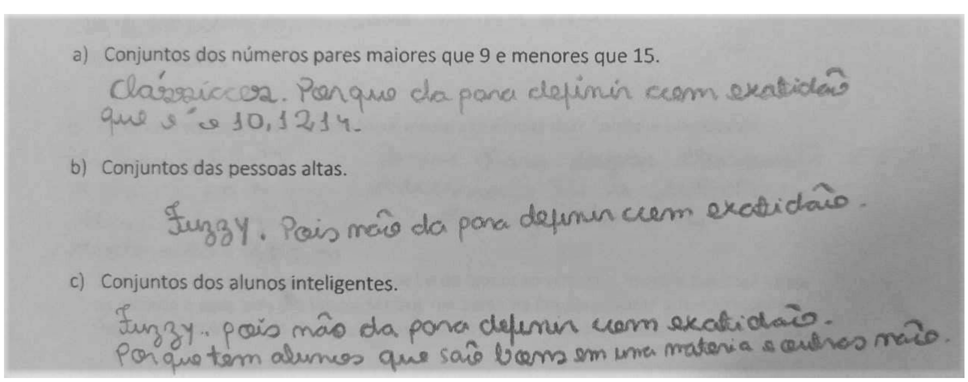
Baixo

b) A temperatura de 25°C pertence a quais conjuntos? Justifique

Bom, porque está estável

Figura 4.10: Solução da questão 4

Na última questão foi solicitado a melhor forma de representar os conjuntos dos números pares entre 9 e 15, o conjunto das pessoas altas e o conjunto dos alunos inteligentes. Percebemos que a maioria dos alunos (14 equipes), classificaram corretamente todos os conjuntos solicitados, na figura 4.11 temos um exemplo de resposta dada a esse problema.



a) Conjuntos dos números pares maiores que 9 e menores que 15.

Clássicos. Porque da para definir com exatidão que é o 10, 12, 14.

b) Conjuntos das pessoas altas.

Fuzzy. Pois não da para definir com exatidão.

c) Conjuntos dos alunos inteligentes.

Fuzzy.. pois não da para definir com exatidão. Porque tem alunos que são bons em uma materia e outros não.

Figura 4.11: Solução da questão 4

A apresentação sobre lógica fuzzy e conjuntos fuzzy, pelo professor, em uma aula anterior à aplicação do questionário, foi fundamental para resolução das questões 4 e 5. Na análise das demais questões foi possível perceber que as soluções para problemas de caráter subjetivo são respondidos pelos discentes de forma intuitiva ou através de recursos da matemática clássica, por exemplo, realizando substituição de um número para prever o horário de chegada de um ônibus que sai atrasado ou calculando de forma intuitiva a média das alturas de jogadores de basquete para estimar a altura de um atleta considerado alto. Enfim, percebemos que a introdução de conceitos de lógica e conjuntos fuzzy, pode ser um ferramenta importante para a análise, compreensão, e resolução de problemas envolvendo subjetividade.

Considerações Finais

A matemática clássica utiliza em sua fundamentação a lógica clássica bivalorada baseada em dois valores lógicos, verdadeiro e falso. Quando passamos para a lógica fuzzy temos uma teoria lógica multivalorada, onde temos uma infinidade de valores em [0,1]. Uma vez que a matemática clássica tem em seu pilar a teoria dos conjuntos baseada em lógica clássica, e é natural pensar que se alterarmos a lógica, também vamos alterar a teoria dos conjuntos. Da mesma forma que a lógica fuzzy estende a lógica clássica, a teoria dos conjuntos fuzzy também estende a teoria dos conjuntos clássicos, e como consequência toda matemática decorrente. Não espera-se que esse trabalho altere o ensino para um novo padrão, mas chama a atenção para o fato de que a matemática é uma ferramenta que pode ser utilizada para interpretar fenômenos e que está constantemente em processo e evolução, na tentativa de encontrar melhores modelos para tais fenômenos. A matemática fuzzy traz um novo modelo de matemática e interpretação de fenômenos que nos últimos anos vem se mostrando bastante eficiente na solução de problemas, por exemplo, a aplicação em sistemas de controle, inteligência artificial, tomada de decisões no mercado financeiro etc. Enfim, com a apresentação da teoria fuzzy, através de problemas de baixa complexidade, espera-se que seja possível introduzir conceitos básicos da matemática fuzzy, como subconjuntos fuzzy, relação fuzzy, matemática intervalar e número fuzzy; proporcionando, assim, mais uma ferramenta matemática possível à interpretação e inferência sobre fenômenos presentes em nosso cotidiano.

Referências Bibliográficas

[1] Tiago Gonçalves Botelho, Onofre Rojas Santos, and Sérgio Martins de Souza. Implementação computacional rigorosa do princípio de extensão de zadeh. In *II CONGRESSO BRASILEIRO DE SISTEMAS FUZZY*, volume 1, pages 490–503, 2012.

[2] BRASIL.MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.* MEC, 1997.

[3] BRASIL.MEC. *Base Nacional Comum Curricular.* MEC, 2018.

[4] ESFANDIAR BUCKLEY, JAMES J e ESLAMI. *An introduction to fuzzy logic and fuzzy sets*, volume 13. Springer Science & Business Media, 2002.

[5] BARROS; L. C. De.; BASSANEZI; R. C. *Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática.* Campinas, SP: UNICAMP/IMECC, 2010.

[6] CORCOLL-SPINA Catharina de Oliveira. *Lógica Fuzzy: reflexões que contribuem para a questão da subjetividade na construção do conhecimento matemático.* PhD thesis, USP, São Paulo, 2010.

[7] BERGAMASCHI, F., JESUS, N., SANTIAGO, R., and OLIVEIRA, A. Agnesi quasi-fuzzy numbers. In Barnabás Bede, Martine Ceberio, Martine De Cock, and Vladik Kreinovich, editors, *Fuzzy Information Processing 2020*, pages 25–30, Cham, 2022. Springer International Publishing.

[8] D. CALVALCANTI. JERONYMO. *Aula 4: Inteligencia computacional.* Disponível em: https://docplayer.com.br/85871713-Inteligencia-computacional.html. Acessado em 05 de Janeiro de 2022.

[9] VALLE; M.E. *Aula 2: Conjuntos fuzzy e suas propriedades e Aula 7: Aritmética com números fuzzy.* Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/ valle/Teaching/2015/MS580 Acessado em 14 de Dezembro de 2020.

[10] Ramon E Moore, R Baker Kearfott, and Michael J Cloud. *Introduction to interval analysis*. SIAM, 2009.

[11] SÃO PAULO. *Decreto Nº 49.346, de 27 de Março de 2008.* Disponível em: http://leismunicipa.is/cgbtm Acessado em 22 de Fevereiro de 2020.

[12] Ricardo Tanscheit. Sistemas fuzzy. *Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro*, 2004.