

# Introdução aos Métodos Numéricos com Octave

## Dia 3

---

Márcio Antônio de Andrade Bortoloti

I Jornada de Mineração / UNEB

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas - DCET

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

[mbortoloti@uesb.edu.br](mailto:mbortoloti@uesb.edu.br)

[www2.uesb.br/professor/mbortoloti](http://www2.uesb.br/professor/mbortoloti)

Exercícios

Solução de um Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias

O Método de Newton

Solução de uma EDP via Diferenças Finitas

Solução de uma EDP via Método dos Elementos Finitos

## Exercícios

---

1. Implementar um algoritmo que receba um inteiro positivo e informe se ele é primo.
2. Escrever uma função que receba uma função e dois reais  $a$  e  $b$  e calcule

$$\int_a^b f(x) dx.$$

# Solução de um Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias

---

Considere o sistema conhecido por “Sistema Presa-Predador”

$$\begin{cases} x' = (a - by)x \\ y' = (-c + dx)y \end{cases}$$

com  $a, b, c, d > 0$ . Aqui  $x$  denota a população de presas e  $y$  de predadores.

- Observa-se que os pontos de equilíbrio são  $(0, 0)$  e  $(c/d, a/b)$ .
- A singularidade  $(0, 0)$  é um ponto de sela;
- A singularidade  $(c/d, a/b)$  é um ponto de centro.

## Método de Euler

$$x'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} \Rightarrow x'(t_0) \approx \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$$

$$x' = f(x, t) \Rightarrow \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = f(x, t) \Rightarrow$$

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + \Delta t f(x, t)$$

Assim, para  $t \in \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  tem-se

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \Delta t f(x(t_k), t_k)$$

Para o sistema presa-predador, dada uma condição inicial  $(x(t_0), y(t_0))$ , constrói-se a solução por meio da seguinte relação

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + f_1(x(t_k), y(t_k), t_k) \Delta t$$

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + f_2(x(t_k), y(t_k), t_k) \Delta t$$

## Método de Euler

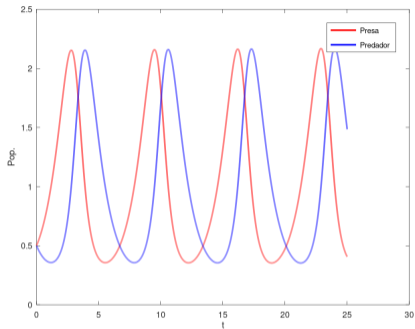
$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + f_1(x(t_k), y(t_k), t_k) \Delta t$$

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + f_2(x(t_k), y(t_k), t_k) \Delta t$$

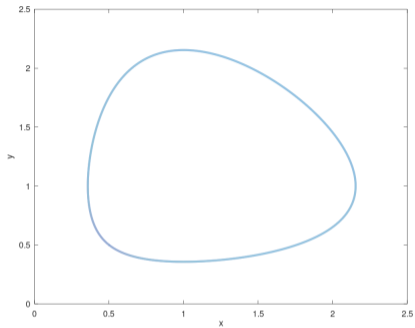
$$\begin{cases} x' = (a - by)x \\ y' = (-c + dx)y \end{cases}$$

```
1 a = 1.0;
2 b = 1.0;
3 c = 1.0;
4 d = 1.0;
5
6
7 i=1;
8 x(i) = 0.5;
9 y(i) = 0.5;
10 t(i) = 0.0;
11 dt = 0.0001;
12 Tf = 6.7;
13
14 while( t(i) < Tf )
15     i++;
16     x(i) = x(i-1)+( a-b*y(i-1))*x(i-1)*dt;
17     y(i) = y(i-1)+(-c+d*x(i-1))*y(i-1)*dt;
18     t(i) = t(i-1)+dt;
19 endwhile
20
21
22 plot(x,y,'LineWidth',2.5)
23 xlabel("x");
24 ylabel("y");
25
```

# Sistema Presa-Predador



Presas e predadores no tempo.



Retrato de fase.



Figueiredo, D. G. de, Neves, A. F.,

**Equações Diferenciais Aplicadas.**

Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2007.

# O Método de Newton

---

## O Método de Newton

Considere a função  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

## O Método de Newton

Considere a função  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Apresentaremos o Método de Newton para resolver o problema

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

## O Método de Newton

Considere a função  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Apresentaremos o Método de Newton para resolver o problema

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Seja  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ . Considere a equação que define o valor da melhor aproximação afim de  $\mathbf{f}$  em uma vizinhança do ponto  $\mathbf{x}_0$

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

## O Método de Newton

Considere a função  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Apresentaremos o Método de Newton para resolver o problema

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Seja  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ . Considere a equação que define o valor da melhor aproximação afim de  $\mathbf{f}$  em uma vizinhança do ponto  $\mathbf{x}_0$

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

Note que, agora  $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$  representa a matriz jacobiana de  $\mathbf{f}$  no ponto  $\mathbf{x}_0$ ,

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} f_{11}(\mathbf{x}_0) & f_{12}(\mathbf{x}_0) & \cdots & f_{1n}(\mathbf{x}_0) \\ f_{21}(\mathbf{x}_0) & f_{22}(\mathbf{x}_0) & \cdots & f_{2n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(\mathbf{x}_0) & f_{n2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & f_{nn}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}, \text{ onde } f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

## O Método de Newton

Fazendo  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ , determinamos  $\mathbf{x}_1$  da forma

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

## O Método de Newton

Fazendo  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ , determinamos  $\mathbf{x}_1$  da forma

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

De onde obtemos

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

## O Método de Newton

Fazendo  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ , determinamos  $\mathbf{x}_1$  da forma

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

De onde obtemos

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

Desde que  $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$  seja inversível, podemos aplicar a inversa  $[\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)]^{-1}$  em ambos os lados para obter

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - [\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$$

## O Método de Newton

Fazendo  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ , determinamos  $\mathbf{x}_1$  da forma

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

De onde obtemos

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

Desde que  $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$  seja inversível, podemos aplicar a inversa  $[\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)]^{-1}$  em ambos os lados para obter

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - [\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$$

Dessa mesma forma, construímos

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 - [\mathbf{f}'(\mathbf{x}_1)]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_1).$$

## O Método de Newton

Fazendo  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ , determinamos  $\mathbf{x}_1$  da forma

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

De onde obtemos

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

Desde que  $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$  seja inversível, podemos aplicar a inversa  $[\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)]^{-1}$  em ambos os lados para obter

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - [\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$$

Dessa mesma forma, construímos

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 - [\mathbf{f}'(\mathbf{x}_1)]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_1).$$

Assim, para qualquer  $k \in \mathbb{N}$  temos

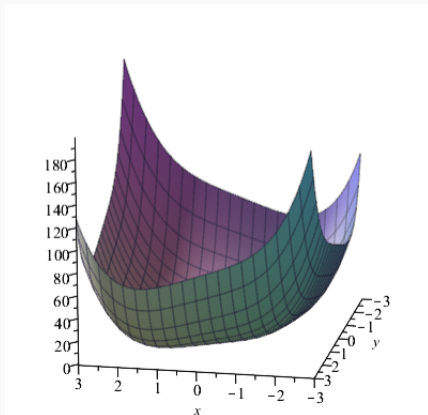
$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - [\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_k).$$

## Um Exemplo de um Problema de Otimização

Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

Use o Método de Newton para obter os pontos mínimos locais de  $f$ .



## Um Exemplo de um Problema de Otimização

Para determinar os pontos críticos de  $f$  devemos determinar os pontos  $(x, y)$  tais que

$$\nabla f(x, y) = (0, 0).$$

## Um Exemplo de um Problema de Otimização

Para determinar os pontos críticos de  $f$  devemos determinar os pontos  $(x, y)$  tais que

$$\nabla f(x, y) = (0, 0).$$

Vamos usar o Método de Newton para resolver a equação anterior.

## Um Exemplo de um Problema de Otimização

Para determinar os pontos críticos de  $f$  devemos determinar os pontos  $(x, y)$  tais que

$$\nabla f(x, y) = (0, 0).$$

Vamos usar o Método de Newton para resolver a equação anterior. Defina

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y),$$

para aplicarmos o método no problema

$$\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{0}.$$

## Um Exemplo de um Problema de Otimização

Para determinar os pontos críticos de  $f$  devemos determinar os pontos  $(x, y)$  tais que

$$\nabla f(x, y) = (0, 0).$$

Vamos usar o Método de Newton para resolver a equação anterior. Defina

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y),$$

para aplicarmos o método no problema

$$\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{0}.$$

Notemos que

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4y \\ 4y^3 - 4x \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{F}'(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

## Um Exemplo de um Problema de Otimização

Temos então

$$[\mathbf{F}'(x, y)]^{-1} = \frac{1}{144x^2y^2 - 16} \begin{pmatrix} 12y^2 & 4 \\ 4 & 12x^2 \end{pmatrix}$$

## Um Exemplo de um Problema de Otimização

Temos então

$$[\mathbf{F}'(x, y)]^{-1} = \frac{1}{144x^2y^2 - 16} \begin{pmatrix} 12y^2 & 4 \\ 4 & 12x^2 \end{pmatrix}$$

Assim, a sequência é gerada, via Método de Newton, por

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \frac{1}{144x_k^2y_k^2 - 16} \begin{pmatrix} 12y_k^2 & 4 \\ 4 & 12x_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4x_k^3 - 4y_k \\ 4y_k^3 - 4x_k \end{pmatrix}$$

**Exercício:** Implementar o método de Newton para o problema acima.

## Um Exemplo de um Problema de Otimização

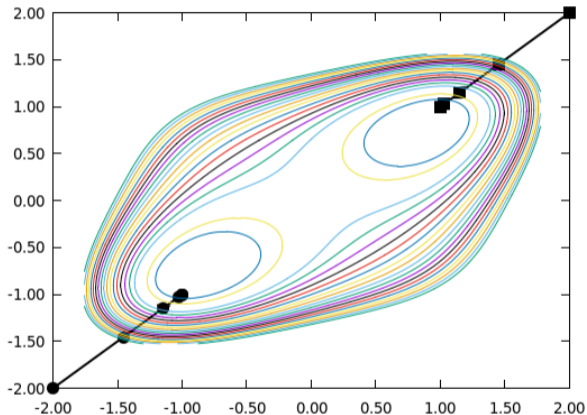
```
1 x0 = [-2,-2];
2 %x00 = x0;
3 k = 0;
4 fprintf("%5d   %15.13f   %15.13f\n",k,x0(1),x0(2));
5
6 %f = @(x,y) [2*x;2*y];
7 %df = @(x,y) [2,0;0,2];
8 f = @(x,y) [4*x^3-4*y;4*y^3-4*x];
9 df=@(x,y) [12*x^2,-4;-4,12*y^2];
10 Nit = 10;
11 for k = 1:Nit
12     x1 = x0 - inv(df(x0(1),x0(2)))*f(x0(1),x0(2));
13     f1 = f(x1(1),x1(2))(1);
14     f2 = f(x1(1),x1(2))(2);
15     fprintf("%5d   %15.13f   %15.13f   %15.13f   %15.13f\n",...
16             k,x1(1),x1(2),f1,f2);
17     x0 = x1;
18 end
19
20
```

# Um Exemplo de um Problema de Otimização

Assim, obtemos o seguinte resultado:

k	x_k	y_k
0	2.00000000000000	2.00000000000000
1	1.45454545454545	1.45454545454545
2	1.1510467893775	1.1510467893775
3	1.0253259289767	1.0253259289767
4	1.0009084519431	1.0009084519431
5	1.0000012353089	1.0000012353089

k	x_k	y_k
0	-2.00000000000000	-2.00000000000000
1	-1.45454545454545	-1.45454545454545
2	-1.1510467893775	-1.1510467893775
3	-1.0253259289767	-1.0253259289767
4	-1.0009084519431	-1.0009084519431
5	-1.0000012353089	-1.0000012353089



**Exercício:** Construir o gráfico acima. As duas sequências são geradas por meio dos pontos iniciais:  $(2, 2)$  e  $(-2, -2)$ .

# Solução de uma EDP via Diferenças Finitas

---

Uma equação diferencial parcial é um problema da forma:

Determinar  $u \in \mathcal{C}^n(\Omega) \times \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , tal que

$$\mathcal{F}(t, \mathbf{x}, u, u', u'', \dots, u^{(n)}) = 0$$

sujeito a condições de contorno e iniciais adequadas de modo a garantir a existência e unicidade da solução.

Como exemplo:

- **Problema de Poisson**  $\Delta u = f$ , sujeito a condições de contorno;
- **Equação do Calor**  $u_t - k\Delta u = f$ , sujeito a condições iniciais e de contorno;
- **Equação da Onda**  $u_{tt} - c\Delta u = f$ , sujeito a condições iniciais e de contorno;
- etc...

Considere a equação abaixo

$$a(x, y)u_{xx} + b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + d(x, y, u_x, u_y, u) = 0$$

e

$$\Delta = b(x, y)^2 - 4a(x, y)c(x, y).$$

Define-se

- $\Delta = 0$  dizemos que a equação acima é Parabólica;
- $\Delta < 0$  dizemos que a equação é Elíptica;
- $\Delta > 0$  dizemos que a equação é Hiperbólica.

## Problema Modelo

Considere o seguinte problema modelo:

$$-u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

## Problema Modelo

Considere o seguinte problema modelo:

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), & 0 < x < 1 \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

Vamos apresentar o Método das Diferenças Finitas aplicada ao modelo acima.

## Problema Modelo

Considere o seguinte problema modelo:

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), & 0 < x < 1 \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

Vamos apresentar o Método das Diferenças Finitas aplicada ao modelo acima.

Para isso, vamos introduzir a partição de  $[0, 1]$  como sendo os pontos  $\{x_j\}_{j=0}^n$  dados por  $x_j = jh$ , onde  $n \geq 2$  é um inteiro e  $h = 1/n$  é o tamanho do espaçamento (estamos considerando uma partição homogênea).

## Problema Modelo

Considere o seguinte problema modelo:

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), & 0 < x < 1 \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

Vamos apresentar o Método das Diferenças Finitas aplicada ao modelo acima.

Para isso, vamos introduzir a partição de  $[0, 1]$  como sendo os pontos  $\{x_j\}_{j=0}^n$  dados por  $x_j = jh$ , onde  $n \geq 2$  é um inteiro e  $h = 1/n$  é o tamanho do espaçamento (estamos considerando uma partição homogênea).

Considerando essa discretização do domínio, passaremos agora para a discretização da equação diferencial.

## O Método das Diferenças Finitas

A discretização da equação diferencial é feita de maneira intuitiva.

## O Método das Diferenças Finitas

A discretização da equação diferencial é feita de maneira intuitiva. De fato, nota-se que

$$u_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}.$$

## O Método das Diferenças Finitas

A discretização da equação diferencial é feita de maneira intuitiva. De fato, nota-se que

$$u_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}.$$

Assim, para todo  $h$  próximo de zero podemos escrever

$$u_x = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

## O Método das Diferenças Finitas

A discretização da equação diferencial é feita de maneira intuitiva. De fato, nota-se que

$$u_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}.$$

Assim, para todo  $h$  próximo de zero podemos escrever

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \\ u_{xx} &= \frac{u(x+2h) - 2u(x+h) + u(x)}{h^2} \end{aligned}$$

## O Método das Diferenças Finitas

A discretização da equação diferencial é feita de maneira intuitiva. De fato, nota-se que

$$u_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}.$$

Assim, para todo  $h$  próximo de zero podemos escrever

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \\ u_{xx} &= \frac{u(x+2h) - 2u(x+h) + u(x)}{h^2} \end{aligned}$$

Se avaliarmos  $u_{xx}$  em cada ponto  $x_j$  da discretização do domínio, teremos

$$u_{xx} = \frac{u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1}))}{h^2} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n-1.$$

## O Método das Diferenças Finitas

Ou em uma notação mais compacta,

$$u_{xx} = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n-1.$$

## O Método das Diferenças Finitas

Ou em uma notação mais compacta,

$$u_{xx} = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Assim, o problema modelo pode ser reescrito como

$$-\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = f(x_j) \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n-1.$$

com  $u_0 = u_n = 0$ .

## O Método das Diferenças Finitas

Ou em uma notação mais compacta,

$$u_{xx} = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Assim, o problema modelo pode ser reescrito como

$$-\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = f(x_j) \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n-1.$$

com  $u_0 = u_n = 0$ . Se nós definirmos  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{n-1})^T$  e  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_{n-1})^T$ , com  $f_i = f(x_i)$ , nós podemos escrever o sistema

$$A_{fd}\mathbf{u} = \mathbf{f},$$

onde  $A_{fd}$  é a matriz simétrica  $(n-1) \times (n-1)$ , chamada matriz de diferenças finitas, definida como

$$A_{fd} = h^{-2} \text{tridiag}_{n-1}(-1, 2, -1).$$

## O Método das Diferenças Finitas

Ou seja,

$$A_{fd} = h^{-2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & & \\ & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \\ & & 0 & -1 & 2 & -1 & \\ & & & 0 & -1 & 2 & \end{bmatrix}$$

## O Método das Diferenças Finitas

Ou seja,

$$A_{fd} = h^{-2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & & \\ & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \\ & & 0 & -1 & 2 & -1 & \\ & & & 0 & -1 & 2 & \end{bmatrix}$$

Note que a matriz  $A_{fd}$  é definida positiva, pois

$$\mathbf{x}^T A_{fd} \mathbf{x} = h^{-2} \left[ x_1^2 + x_{n-1}^2 + \sum_{i=2}^{n-1} (x_i - x_{i-1})^2 \right].$$

## O Método das Diferenças Finitas

Ou seja,

$$A_{fd} = h^{-2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & & \\ & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \\ & & 0 & -1 & 2 & -1 & \\ & & & 0 & -1 & 2 & \end{bmatrix}$$

Note que a matriz  $A_{fd}$  é definida positiva, pois

$$\mathbf{x}^T A_{fd} \mathbf{x} = h^{-2} \left[ x_1^2 + x_{n-1}^2 + \sum_{i=2}^{n-1} (x_i - x_{i-1})^2 \right].$$

Isso implica que o sistema  $A_{fd} \mathbf{u} = \mathbf{f}$  admite uma única solução.

## Exemplo Numérico

Resolvendo o seguinte problema

$$-u_{xx} = e^x \text{ em } [0, 1]$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

## Exemplo Numérico

Resolvendo o seguinte problema

$$-u_{xx} = e^x \text{ em } [0, 1]$$

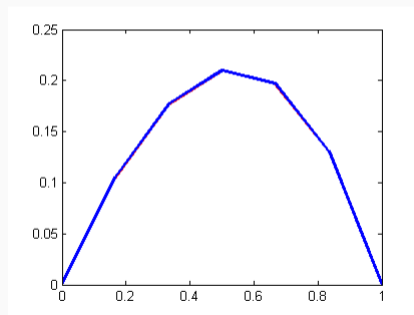
$$u(0) = u(1) = 0$$

A solução exata do problema é

$$u(x) = -\exp(x) + (e - 1)x + 1.$$

Obtemos, para  $n = 7$ :

Sol. Aprox.	Sol. Exata
0.00000000	0.00000000
0.10477713	0.10501989
0.17673869	0.17714818
0.20993324	0.21041964
0.19732997	0.19778718
0.13062298	0.13092563
0.00000000	0.00000000



### Comportamento do Erro

$h$	$\ Erro\ $
0.5000	0.43000E-02
0.2500	0.16000E-02
0.1250	0.56819E-03
0.0625	0.20103E-03
0.0313	0.71086E-04

# Solução de uma EDP via Método dos Elementos Finitos

---

## O Método de Elementos Finitos

**Problema Modelo (Equação de Convecção-Difusão):** Dado  $f \in C^0([0, 1])$ , determinar  $\theta \in C^2([0, 1])$  tal que

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} - k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = f,$$

sujeito às condições de contorno  $\theta(0) = \theta(1) = 0$ .

**Formulação Galerkin (Problema G):** Dado  $f$  no dual de  $V$ , determinar  $\theta \in V$  tal que

$$\int_0^1 u \frac{\partial \theta}{\partial x} \eta \, dx + \int_0^1 k \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \, dx = \int_0^1 f \eta \, dx, \text{ para todo } \eta \in V,$$

onde  $V$  é o conjunto das funções quadrado integráveis tais que  $\theta(0) = \theta(1) = 0$ .

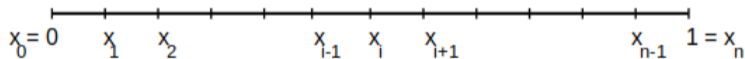
### Teorema

*Garantido condições suficientes de regularidade,  $\theta$  é solução do Problema Modelo CD se e somente se é solução do Problema G.*

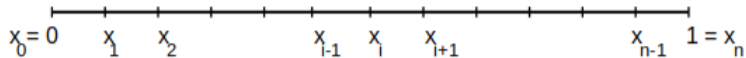
## Versão Discreta do Problema $G$

Vamos construir uma base para o espaço solução, utilizando polinômios de Lagrange de grau 1.

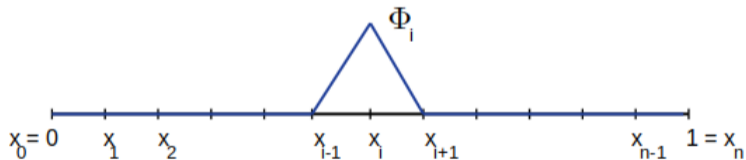
Para isso, vamos considerar uma partição homogênea do intervalo  $[0, 1]$ .



## Versão Discreta do Problema $G$



$$\phi_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = x_i \\ 0, & \text{se } x = x_{i+1} \end{cases} \quad \text{e} \quad \phi_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = x_i \\ 0, & \text{se } x = x_{i-1} \end{cases}$$



$$\Phi_i(x) = \begin{cases} \phi_1(x), & \text{se } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ \phi_2(x), & \text{se } x \in [x_{i-1}, x_i] \end{cases} \quad P_h^1 = \text{span}\{\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_n\}$$

O espaço de soluções é construído como

$$V_h = P_h^1 \cap V$$

Assim, vamos buscar soluções aproximadas do Problema G da forma

$$\theta_h = \sum_{j=0}^n \alpha_j \Phi_j(x).$$

O Problema passa a ser o de determinar  $\alpha_j$ , para  $j = 1, \dots, n - 1$ .

## Formulação de Galerkin

**Formulação Galerkin (Problema  $G_h$ ):** Determinar  $\theta_h \in V_h$  tal que

$$\int_0^1 u \frac{\partial \theta_h}{\partial x} \eta \, dx + \int_0^1 k \frac{\partial \theta_h}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \, dx = \int_0^1 f \eta \, dx \text{ para todo } \eta \in V_h,$$

Fazendo  $\theta_h = \sum_{j=0}^n \alpha_j \Phi_j(x)$  no Problema  $G_h$  e tomando  $\eta = \Phi_i(x)$ , obtemos

$$\int_0^1 u \sum_{j=0}^n \alpha_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \Phi_i \, dx + \int_0^1 k \sum_{j=0}^n \alpha_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \, dx = \int_0^1 f \Phi_i \, dx, \text{ para } i = 0, \dots, n.$$

O que implica em

$$\sum_{j=0}^n \int_0^1 \left( u \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \Phi_i + k \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \, dx \right) \alpha_j = \int_0^1 f \Phi_i \, dx, \text{ para } i = 0, \dots, n.$$

## Formulação de Galerkin

$$\sum_{j=0}^n \int_0^1 \left( u \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \Phi_i + k \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \right) dx \alpha_j = \int_0^1 f \Phi_i dx, \text{ para } i = 0, \dots, n.$$

$$K\alpha = F$$

onde

$$K_{ij} = \int_0^1 \left( u \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \Phi_i + k \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \right) dx, \quad F_i = \int_0^1 f \Phi_i dx \quad \text{e} \quad \alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n]^T.$$

**Formulação de Galerkin (Problema  $G_h$ ):** Dado  $f$  no dual de  $V$ , determinar  $\theta_h \in V_h$  tal que

$$\int_0^1 u \frac{\partial \theta_h}{\partial x} \eta \, dx + \int_0^1 k \frac{\partial \theta_h}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \, dx = \int_0^1 f \eta \, dx \text{ para todo } \eta \in V,$$

onde  $V$  é o conjunto das funções quadrado integráveis tais que  $\theta_h(0) = \theta_h(1) = 0$ .

- Funciona bem para problema com difusão dominante ( $Pe = \|u\|h/(2k) \rightarrow 0$ );
- Em problemas com convecção dominante ( $Pe \gg 0$ ), apresenta oscilações em regiões de alto gradiente;

## Problema $PG_h$ - Formulação Estabilizada de Petrov-Galerkin

**Problema  $PG_h$ :** Dado  $f$  no dual de  $V$ , determinar  $\theta_h \in V_h$  tal que

onde  $a(\theta_h, \eta) + b_1(\theta_h, \eta) = (f, \eta) + b_2(f, \eta)$  para todo  $\eta \in V$ ,

$$a(\theta_h, \eta) = \int_0^1 u \frac{\partial \theta_h}{\partial x} \eta \, dx + \int_0^1 k \frac{\partial \theta_h}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \, dx, \quad (f, \eta) = \int_0^1 f \eta \, dx$$

$$b_1(\theta_h, \eta) = \sum_{k=1}^n h_k \tau \int_{\Omega_k} \left( u \frac{\partial \theta_h}{\partial x} - k \frac{\partial^2 \theta_h}{\partial x^2} \right) \left( u \frac{\partial \eta}{\partial x} - k \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) \, dx$$

$$b_2(\theta_h, \eta) = \sum_{k=1}^n h_k \tau \int_{\Omega_k} f \left( u \frac{\partial \eta}{\partial x} - k \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) \, dx$$

onde  $V$  é o conjunto das funções quadrado integráveis tais que  $\theta_h(0) = \theta_h(1) = 0$ .

- Funciona razoavelmente para problemas com advecção dominante, recuperando a estabilidade;
- Pode apresentar difusividade excessiva prejudicando a precisão;

## Exemplo Numérico

Dado  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$ , determinar  $\theta \in \mathcal{C}^2([0, 1])$  tal que

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} - k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0,$$

sujeito às condições de contorno  $\theta(0) = \theta(1) = 0$ .

**Solução Exata:**

$$\theta(x) = \frac{1}{u} \left( \frac{e^{ux/k} - 1}{1 - e^{u/k}} + x \right)$$

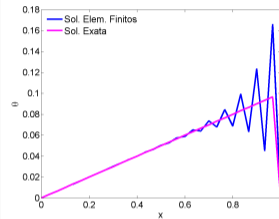
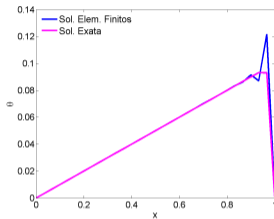
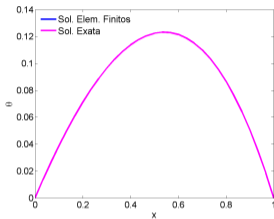
# Exemplo Numérico: Galerkin $\times$ GLS

$$u = 1 \text{ e } k = 1$$

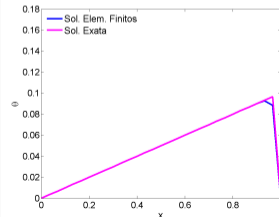
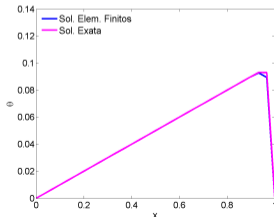
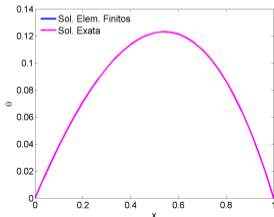
$$u = 10 \text{ e } k = 0.1$$

$$u = 10 \text{ e } k = 0.03$$




Galerkin



GLS



## Referências (FEM para Equação de convecção-difusão)

-  Hughes, T. J.R., Franca, L. P., Hulbert, G. M.,  
**A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin/Least-Squares method for advective-diffusive equations.**  
Comput. Methods Appl. Engrg, 73 1989 173–189.
-  Ilinca, F., Héту, J.-F, Pelletier, D.,  
**On stabilized finite element formulations for incompressible advective-diffusive transport and fluid flow problems.**  
Comput. Methods Appl. Engrg, 188 2000 235–255.
-  Reddy, J. N.  
**An Introduction to The Finite Element Method, 2nd edition.**  
McGraw-Hill International Editions, 1993.