Emanuel Mendes Queiroz, João Matheus Lira Luiz, Marcio Antônio de Andrande Bortoloti, Maria Clara Brito dos Reis, Wéllington Moutinho Dias

Introdução à Otimização linear

Minicurso PETIMAT

21 de novembro de 2024

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Programa de Educação Tutorial Institucional da Univesidade Estadual do Sudoeste da Bahia (PETI/UESB) pelas bolsas de estudo.

Apresentação

O Programa de Educação Tutorial Institucional (PETI/UESB) tem como objetivo aprimorar os cursos regulares de graduação na Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), com o objetivo de proporcionar uma formação abrangente e de alta qualidade para os alunos envolvidos, mantendo a integração entre ensino, pesquisa e extensão como um princípio fundamental do ambiente universitário.

O Programa de Educação Tutorial Institucional de Matemática (PETIMAT) se dedica a elevar o padrão da formação dos estudantes de graduação e promover o sucesso acadêmico. Para alcançar esses objetivos, o grupo oferece, a cada semestre, minicursos voltados principalmente para os alunos matriculados no curso de Licenciatura em Matemática da UESB. Esses minicursos visam estimular a capacitação de futuros profissionais e docentes, proporcionando-lhes uma qualificação acadêmica, científica, técnica e tecnológica.

Dentro desse contexto, o PETIMAT desenvolveu o minicurso ”Introdução à Otimização Linear”. O objetivo do minicurso é promover a compreensão de conceitos fundamentais da Otimização Linear e utilizar o Método Simplex para resolução de problemas de minimização e maximização, além de utilizar recursos computacionais para aplicação da teoria estudada.

Este material corresponde às notas de aula e serve como um recurso de consulta para os participantes do minicurso. Nesta apostila, estão disponíveis os conteúdos e os exercícios que serão abordados nas aulas. Para ter acesso aos códigos utilizados nas aulas e aos códigos dos métodos computacionais já implementados nas pesquisas produzidas pelo PETIMAT, basta consultar o nosso repositório no GitHub:

`https://github.com/petimatematica/intro_otimizacao_linear`

Para conhecer mais sobre o trabalho e as publicações do PETIMAT, acesse o nosso site:

`http://www2.uesb.br/programa/petimatematica/`

e nossa conta oficial no Instagram:

`https://www.instagram.com/petimatuesb/`

onde estão disponíveis informações detalhadas sobre nossas atividades, projetos, eventos e conteúdos relacionados ao programa.

Conteúdo

Introdução

Este material foi elaborado pelo grupo do Programa de Educação Tutorial Institucional de Matemática (PETIMAT) para o minicurso ”Introdução a Otimização Linear”, oferecido durante o período letivo de 2024.2. A finalidade desta apostila é fornecer aos participantes do minicurso uma base teórica sobre os conceitos fundamentais da Otimização Linear.

Como parte integrante do minicurso, recomendamos a utilização da linguagem de programação Julia para a implementação dos algoritmos discutidos e para a visualização gráfica dos conceitos abordados.

Capítulo 1

Pesquisa operacional e Otimização Linear

Neste capítulo, apresentaremos uma breve discussão sobre o campo da Pesquisa Operacional e sobre o processo de modelagem matemática. Por fim, introduziremos algumas noções básicas da Otimização linear.

1.1 Pesquisa operacional

Pesquisa operacional trata-se da aplicação de métodos científicos a problemas complexos para auxiliar no processo de tomada de decisões, como projetar, planejar e operar sistemas em situações que requerem eficiência e se dispõe de recursos escassos.

O surgimento do termo *pesquisa operacional* está ligado à invenção do radar na Inglaterra em 1934, cuja tecnologia poderia ser utilizada para interceptar aviões inimigos. Em 1941, foi inaugurada a Seção de Pesquisa Operacional do Comando da Força Aérea de Combate, com equipes envolvidas em problemas de operações de guerra, como manutenção e inspeção de aviões, escolha do tipo de avião para uma missão e melhoria na probabilidade de destruição de submarinos. Além disso, outros problemas eram analisados, como controle de artilharia antiaérea e dimensionamento de comboios de frota.

A partir do início da década de 1950, a pesquisa operacional foi aplicada em uma variedade de problemas advindos dos setores público e privado. Exemplos de aplicações envolviam diversos setores industriais e financeiros, como: mineração, metalúrgica construção civil e militar, têxtil, farmacêutico, bancário, além de serviços públicos como coleta de lixo, transporte e segurança. Desde então, a Pesquisa Operacional tem sido aplicada às mais diversas áreas de produção e logística, incluindo indústrias de alimentação, automóveis, eletrônica, metalurgia, petróleo, telecomunicações e organizações como: bancos, hospitais, sistemas judiciais, agências de governo, entre outros.

A Pesquisa Operacional pode ser pensada como o desenvolvimento de métodos científicos para prever e comparar estratégias ou decisões alternativas, com o objetivo de dar suporte à definição de políticas e determinação de ações de forma científica. É uma abordagem científica para a tomada de decisões. A pesquisa operacional também tem sido chamada de ciência e tecnologia da decisão. O componente científico está relacionado a ideias e processos para articular e modelar os problemas de decisão, determinando os objetivos e as restrições. Já o componente tecnológico está relacionado a ferramentas de *software* e *hardware* para coletar e organizar dados, usando-os para gerar e otimizar modelos e devolver resultados.

1.2 Modelagem matemática

A Matemática é de fundamental importância na descrição dos fenômenos observados ao se fazer ciência e, a partir deles, buscam-se leis que os regem. Se essas leis puderem ser descritas por meio de relações matemáticas, elas originam os modelos matemáticos. Para se formular um modelo matemático, são consideradas simplificações razoáveis do problema real e a validação do modelo depende se a solução é coerente com o contexto original do problema. Então, pode-se dizer que o modelo matemático é uma representação simplificada do problema real, e deve ser suficientemente detalhado para abranger os elementos essenciais do problemas e ao mesmo tempo tratável por métodos de resolução. O diagrama da Figura 1.1 ilustra um processo simplificado da modelagem matemática na resolução de um problema.

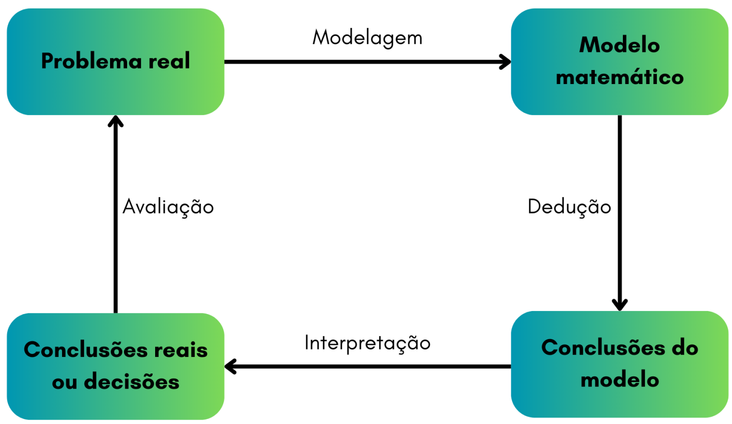

Figura 1.1: Processo de modelagem matemática

O primeiro passo, que é a modelagem, define as variáveis e as relações matemáticas para descrever o comportamento do problema. Em seguida, a dedução aplica técnicas matemáticas e recursos computacionais e outras tecnologias para resolver o modelo matemático e visualizar as conclusões que esse modelo sugere. Na interpretação, as conclusões do modelo têm significado suficiente para inferir conclusões ou decisões para o problema real. Muitas vezes, no passo de avaliação, essas conclusões são julgadas inadequadas, implicando que a definição do problema e sua modelagem precisam de revisão, e então, o ciclo é repetido.

Alguns autores sugerem que pesquisa operacional é tanto *ciência* quanto *arte*: ciência por causa das técnicas matemáticas envolvidas e arte porque o sucesso de todas as fases que precedem e sucedem a solução do modelo matemático depende muito da criatividade e experiência com pesquisa operacional.

Alguns exemplos de modelos matemáticos são os de otimização matemática, como otimização linear, otimização discreta, em redes e não-linear. Neste material, abordaremos uma introdução à Otimização linear.

1.3 Otimização linear

A Otimização linear é uma subárea da Pesquisa Operacional e trata-se de uma técnica de planejamento utilizada para maximizar ou minimizar funções. Essas funções modelam situações nas quais temos diversas alternativas de escolha sujeitas a algum tipo de restrição ou regulamentação. Em um problema de Otimização linear, a função objetivo e todas as restrições do modelo são representadas por funções lineares.

Muitas soluções práticas de problemas reais podem ser representadas por modelos de Otimização linear e também podemos encontrar esses modelos representando subproblemas de casos mais complexos. Diversos algoritmos ou métodos de solução podem ser aplicados para a determinação da solução ótima do modelo. O Método Simplex é o mais conhecido e utilizado e foi um marco na área da Otimização quando publicado em 1947. Mais a frente apresentaremos e discutiremos sobre esse método.

Para compreender melhor sobre o processo de modelagem, apresentamos o primeiro exemplo de problema de Otimização Linear.

Exemplo 1.3.1. ***(A fábrica de rádios)*** *Consideremos uma fábrica de rádios que possui duas linhas de produção: Rádios Standard e Rádios Luxo. Com relação aos rádios Standard, temos as informações de que a linha de produção comporta um máximo de* 24 *pessoas; cada rádio consome* 1 *pessoa/dia para ser produzido e fornece um lucro de R\$* $30,00$*. Já em relação aos rádios Luxo, sabe-se que a linha de produção comporta um máximo de* 32 *pessoas; cada rádio consome* 2 *pessoas/dia para ser produzido e fornece um lucro de R\$* $40,00$*. Além dessas informações, a fábrica possui um total de 40 empregados a serem alocados nas duas linhas de produção. O objetivo do dono da fábrica é maximizar o lucro diário.*

Solução

Analisando os dados fornecidos, podemos observar que:

- As duas linhas juntas podem receber um máximo de 56 pessoas, mas a fábrica possui apenas 40 empregados. Assim, temos o desafio de alocar adequadamente as 40 pessoas nas duas linhas.
- Os esquemas de produção em vigor implicam diferentes usos de mão-de-obra, já que o rádio Standard exige uma menor quantidade de pessoas/dia que o rádio Luxo.
- As lucratividades são diferentes, sendo a do modelo Luxo maior que a do modelo Standard.

Modelagem do problema: A estratégia para a resolução de problemas de Otimização linear consiste em transformar as características do problema em um modelo abstrato matemático constituído de uma função objetivo e um conjunto de restrições. Tanto a função objetivo quanto o conjunto de restrições fazem referência às variáveis do problema. No caso em que estamos analisando, as variáveis do problema são as quantidades a serem produzidas dos modelos de rádio Standard e Luxo. A função objetivo mostra como o lucro se relaciona com as variáveis do problema e o conjunto de restrições mostra os limites para as mesmas variáveis.

1. **Definindo as variáveis do problema -** Vamos nomear as variáveis do nosso exemplo da seguinte forma:

   Lucro: Lucro máximo a ser atingido

   ST: Quantidade da produção diária de rádios Standard

   LX: Quantidade da produção diária de rádios Luxo

2. **Definindo a função objetivo -** No nosso exemplo, desejamos maximizar o lucro, portanto a função objetivo é:
$$Lucro = (30 \cdot ST) + (40 \cdot LX)$$

3. **Definindo o conjunto de restrições -** As variáveis ST e LX do problema não podem assumir qualquer valor. Além de serem valores inteiros positivos, elas estão sujeitas às restrições da própria fábrica, que são:

   - *Capacidade máxima diária da linha Standard:* Visto que podemos alocar apenas 24 pessoas na linha e, como cada rádio demanda 1 pessoa/dia, a produção máxima diária desta linha é de 24 rádios/dia, ou seja,
$$ST \leqslant 24.$$

   - *Capacidade máxima diária da linha Luxo:* Como podemos alocar 32 pessoas na linha e cada rádio demanda 2 pessoas/dia, a produção máxima diária desta linha é de 16 rádios/dia, ou seja,
$$LX \leqslant 16.$$

   - *Disponibilidade máxima de operários:* Considerando que a fábrica possui 40 operários, o esquema ótimo de produção deve utilizar a mão-de-obra dentro deste limite. A linha Standard produzirá ST rádios por dia e, como cada rádio gasta 1 pessoa/dia, vai consumir $1 \cdot ST$ operários. A linha Luxo produzirá LX rádios por dia e, como cada rádio Luxo gasta 2 pessoas/dia, vai consumir $2 \cdot LX$ operários. Assim temos:
$$1 \cdot ST + 2 \cdot LX \leqslant 40.$$

Observe que a desigualdade acima nos garante que a produção não exceda a força de trabalho dos funcionários. Aparentemente, a solução ótima será tal que utilizará exatamente 40 operários, o que nos levaria a concluir que seria mais adequado escrever uma igualdade. O fato de escrevermos uma desigualdade visa ter um modelo com uma maior amplitude de análise e, assim fazendo, estamos possibilitando o surgimento de indicações eventualmente inesperadas e que podem nos direcionar para cenários de melhor rentabilidade.

Portanto, combinando essas informações, podemos descrever o problema num modelo matemático:

$$
\begin{aligned}
\text{Maximizar} \quad & Lucro = (30 \cdot ST) + (40 \cdot LX) \\
\text{sujeito a} \quad & ST \leqslant 24 \\
& LX \leqslant 16 \\
& (1 \cdot ST) + (2 \cdot LX) \leqslant 40 \\
& ST \geqslant 0,\ LX \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

Mais adiante neste material, discutiremos métodos de resolver problemas de Otimização linear nesse formato. Enquanto não apresentamos esses métodos, podemos analisar algumas opções no Exemplo 1.3.1 para tentar encontrar o lucro máximo.

- **Produzir o máximo de modelos Luxo (visto que ele fornece o maior lucro unitário):** Assim, seriam colocadas 32 pessoas na linha Luxo e elas produziriam 16 rádios por dia. Os demais operários ($40 - 32 = 8$ pessoas) seriam colocados na linha Standard para produzir 8 rádios por dia. O lucro obtido seria de $(16 \cdot 40) + (8 \cdot 30) = R\$\ 880,00$.

- **Produzir o máximo de modelos Standard (visto que ele consome a menor quantidade de mão-de-obra por produção unitária):** Assim, seriam colocadas 24 pessoas na linha Standard e elas produziriam 24 rádios por dia. Os demais operários ($40-24 = 16$ pessoas) seriam colocados na linha Luxo para produzir 8 rádios por dia. O lucro obtido seria de $(8 \cdot 40) + (24 \cdot 30) = R\$\ 1.040,00$.

Certamente, existem outras opções que poderiam ser analisadas, e isto será feito posteriormente neste material. Adiantamos que o lucro máximo deste exemplo é de R\$ $1.040,00$, que corresponde à segunda opção que analisamos acima.

O que este problema possui de inesperado é que a escolha ótima recaiu sobre o modelo de menor lucro unitário. Ao se resolver esse exemplo por tentativas chegamos à solução ótima rapidamente, mas isso não ocorreria caso o número de restrições fosse elevado. Na prática, quando não utilizamos ferramentas de otimização, geralmente tendemos a tomar uma decisão com base em fatores aos quais somos mais apegados, como, por exemplo, qual modelo fornece o maior lucro unitário. Uma contribuição da Otimização linear é mostrar que, em situações reais de alguma complexidade, o “bom senso” geralmente não é a ferramenta mais adequada para a resolução de problemas.

1.4 Exercícios

Exercício 1.4.1. *Considere um fabricante de móveis que fabrica apenas mesas e cadeiras. Ele tem um lucro de R\$* $150,00$ *em cada cadeira e de R\$* $350,00$ *em cada mesa vendida. Supõe-se que devido à forte demanda desses itens consegue-se vender toda a produção da fábrica. Mas a produção da firma é limitada em dois aspectos: cada cadeira produzida utiliza* 5 *unidades de jacarandá e cada mesa produzida utiliza* 20 *unidades de jacarandá e dispomos de um total de* 400 *unidades de jacarandá. Cada cadeira produzida gasta* 10 *pessoas/hora, cada mesa produzida gasta* 15 *pessoas/hora e dispomos de um total de* 450 *pessoas/hora. O objetivo do fabricante é descobrir qual a quantidade ótima de cadeiras e mesas a serem fabricadas, de tal modo que o lucro total seja o maior possível. Determine o modelo matemático que descreve o problema e tente encontrar o esquema de produção que maximiza o lucro.*

Exercício 1.4.2. *Uma fábrica de computadores produz* 2 *modelos de computador: A e B. O modelo A fornece um lucro de* $R\$\ 900,00$ *e B de* $R\$\ 1.500,00$. *O modelo A requer, em sua produção, um gabinete pequeno e uma unidade de disco. O modelo B requer* 1 *gabinete grande e* 2 *unidades de disco. Existem no estoque* 60 *unidades de gabinete pequeno,* 50 *unidades do gabinete grande e* 120 *unidades de disco. Determine o modelo matemático que descreve o problema e tente encontrar o esquema de produção que maximiza o lucro.*

Exercício 1.4.3. *Uma micro-empresa produz dois tipos de jogos e sua capacidade de trabalho é de* 45 *horas semanais. O jogo A requer* 3 *horas para ser produzido e gera um lucro de* $R\$\ 75,00$, *enquanto o jogo B precisa de* 5 *horas para ser produzido e acarreta um lucro de* $R\$\ 90,00$. *Determine o modelo matemático que descreve o problema e tente encontrar o esquema de produção que maximiza o lucro.*

Capítulo 2

Fundamentos da Otimização linear

Neste capítulo, faremos uma breve revisão de conceitos importantes de Álgebra Linear, apresentaremos as hipóteses necessárias nos modelos de Otimização Linear e a forma padrão desses modelos, além de outros conceitos básicos.

2.1 Sistema de equações lineares

Para entender o que são sistemas lineares, primeiro vamos definir o que são equações lineares.

Definição 2.1.1. ***(Equação linear)*** *Chamamos de equação linear nas incógnitas* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ *toda equação do tipo* $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b$*, em que* $a_{11}, \ldots, a_{1n} \in \mathbb{R}$ *e são chamados de coeficientes da equação e* $b \in \mathbb{R}$ *é chamado de termo independente da equação.*

Exemplo 2.1.1. ***(Equações lineares)***

(a) $3x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 5$

(b) $5x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 = 5$

(c) $-4x_1 + 2x_2 + 9x_3 - x_4 + 9x_5 = 23$

Definição 2.1.2. ***(Solução de uma equação linear)*** *Dizemos que um conjunto ordenado de números reais* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *é uma solução da equação linear* $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b$*, se* $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = b$*.*

Exemplo 2.1.2. *Seja a equação linear* $2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 3$*. O conjunto ordenado* $(1, 2, 3, -2)$ *é uma solução dessa equação, pois* $2 \cdot (1) + 3 \cdot (2) - (3) + (-2) = 3$*. No entanto,* $2 \cdot (1) + 3 \cdot (1) - (2) + (1) = 4 \neq 3$*, logo* $(1, 1, 2, 1)$ *não é solução.*

Definição 2.1.3. ***(Sistema linear de equações)*** *Um sistema linear é um conjunto de* $m\,(m \geqslant 1)$ *equações lineares nas incógnitas* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*. De forma geral, temos o sistema S dado por:*

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

Exemplo 2.1.3. ***(Sistemas lineares)***

(a) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x + y - z = 4 \\ 2x + 5y + 7z = 0 \end{cases}$

Definição 2.1.4. ***(Solução de um sistema linear)*** *Dizemos que um conjunto ordenado* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *é solução de um sistema linear, se for solução de todas as equações lineares do sistema.*

Exemplo 2.1.4. *Note que (1, 2, 3) é uma solução do seguinte sistema*

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases} .$$

Definição 2.1.5. ***(Sistemas lineares homogêneos)*** *Chamamos um sistema linear de homogêneo se todos os termos independentes de cada equação linear são iguais a* 0.

Exemplo 2.1.5. *O sistema linear de equações abaixo é homogêneo.*

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ -3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} .$$

Já sabemos da existência de métodos para resolver alguns desses sistemas, como o método da substituição e da adição. No entanto, para sistemas com grande quantidade de equações, tais métodos são mais demorados e complicados de se resolver. Por isso, vamos utilizar o método do escalonamento, que será apresentado a seguir. A seguinte observação será útil para esse método.

Observação 2.1.6. ***(Operações elementares)*** *Para resolver sistemas lineares, podemos fazer uso de algumas operações elementares para se obter equações equivalentes, de modo que não a solução do sistema não se altera. Essas operações são:*

1. *Permutação entre as equações lineares do sistema.*
2. *Multiplicação de uma das equações lineares por um escalar não nulo* k.
3. *Substituição de uma equação pela soma desta com um múltiplo de outra equação do sistema.*

No exemplo a seguir, será detalhado o uso dessas operações no escalonamento de um sistema linear.

Exemplo 2.1.6. *Resolva o seguinte sistema de equações lineares:*

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 & (1) \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 & (2) \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 & (3) \end{cases}$$

Passo 1: Eliminar x_1 *das equações* (2) *e* (3)

Para isto, multiplicamos a equação (1) por -2 e somamos a equação obtida com a equação (2), obtendo uma nova equação $(2')$. Da mesma maneira obtemos a equação $(3')$, multiplicando a equação (1) por -1 e somando a equação resultante à equação (3), obtendo o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 & (1') \\ 0x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 2 & (2') \\ 0x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 4 & (3') \end{cases}$$

Passo 2: Tornar o coeficiente x_2 da equação $(2')$ igual 1

Para isto, multiplicamos a equação $(2')$ por $-1/3$. O sistema resultante é

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 & (1'') \\ 0x_1 + x_2 + \frac{2}{3}x_3 = \frac{-2}{3} & (2'') \\ 0x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 4 & (3'') \end{cases}$$

Passo 3: Eliminar x_2 das equações $(2'')$ e $(3'')$

Para isto, multiplicamos a equação $(2'')$ por -4 e somamos a esta a equação $(1'')$, obtendo $(1''')$. De maneira análoga obtemos $(3''')$, multiplicando a equação $(2''')$ por 7 e somando a esta a nova equação $(3'')$, obtemos

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{11}{3} & (1''') \\ 0x_1 + x_2 + \frac{2}{3}x_3 = \frac{-2}{3} & (2''') \\ 0x_1 + 0x_2 - 1/3x_3 = \frac{-2}{3} & (3''') \end{cases} \tag{2.1}$$

Passo 4: Tornar o coeficiente de x_3 da equação $(3''')$ igual a 1

Para isto multiplicamos a equação $(3''')$ por -3. Isto resulta no seguinte sistema

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{11}{3} & (1'''') \\ 0x_1 + x_2 + \frac{2}{3}x_3 = \frac{-2}{3} & (2'''') \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 2 & (3'''') \end{cases} \tag{2.2}$$

Passo 5: Eliminar x_3 das duas primeiras equações

Multiplicamos a equação $(3'''')$ por $-1/3$ e somamos a esta nova equação $(3'''')$ por $-2/3$ e a essa nova equação somamos a equação $(2'''')$, resultando no seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 3 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = -2 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \tag{2.3}$$

Ou seja, do novo sistema obtido, podemos concluir que $x_1 = 3, x_2 = -2ex_3 = 2$.

Esse tipo de método para resolver sistemas lineares é chamado de método do escalonamento, que consiste em achar a solução do sistema através de operações entre as equações

2.2 Hipóteses de linearidade

Nos modelos de Otimização Linear, são admitidas algumas hipóteses nas quais as grandezas envolvidas precisam obedecer: aditividade, proporcionalidade e fracionamento.

1. **Hipótese de aditividade**: Pressupõe que o todo é igual à soma das partes.

   Exemplo 2.2.1. *Se em* $1kg$ *de um ingrediente* $\boldsymbol{j}$ *encontramos* $200g$ *do componente* $\boldsymbol{i}$ *e, em* $1kg$ *do ingrediente* $\boldsymbol{k}$ *encontramos* $100g$ *do mesmo componente, então a mistura de* $2,kg$*, obtida de* $\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$*, terá* $300,g$ *do componente* $\boldsymbol{i}$*.*

   Observação: Intuitivamente, isso ocorre em qualquer tipo de mistura; no entanto, nem sempre é o que acontece. Um exemplo disso é que, ao adicionar 0,1 L de água a uma solução de água com açúcar, o volume total não será 1,1 L, pois parte do açúcar é dissolvida.

2. **Hipótese de proporcionalidade**: Pressupõe que, se $\boldsymbol{a_{ij}}$ é a quantidade do componente $\boldsymbol{i}$ em uma unidade do ingrediente $\boldsymbol{j}$, então $\boldsymbol{a_{ij}} \cdot \boldsymbol{x_j}$ será a quantidade do componente $\boldsymbol{i}$ em $\boldsymbol{x_j}$ unidades. Se uma unidade do ingrediente $\boldsymbol{j}$ custa $\boldsymbol{c_j}$, então $\boldsymbol{x_j}$ unidades custam $\boldsymbol{c_j} \cdot \boldsymbol{x_j}$.

   Exemplo 2.2.2. *Se* 1 *kg de um ingrediente contém* 200 *g de um componente, então* $0,5$ *kg contém* 100 *g do mesmo componente, assim como* 2 *kg contém* 400 *g do componente.*

3. **Hipótese de fracionamento**: Cada uma das variáveis, consideradas no modelo, pode assumir quaisquer valores não negativos dentro de um intervalo, incluindo valores fracionários, desde que satisfaça as restrições do modelo. Por exemplo, podemos utilizar 1kg de um ingrediente assim como podemos utilizar $0,5$kg desse ingrediente. Quando as variáveis em estudo assumir apenas valores inteiros, o modelo é chamado de *Otimização linear inteira*, que será discutida mais a frente.

No exemplo a seguir, mostramos que as hipóteses de linearidade são satisfeitas.

Exemplo 2.2.3. *Uma agroindústria deve produzir um tipo de ração para determinado animal. Essa ração é produzida pela mistura de farinhas de três ingredientes básicos: osso, soja e peixe. Cada um desses três ingredientes contém diferentes quantidades de dois nutrientes necessários a uma dieta nutricional balanceada: proteína e cálcio. O nutricionista especifica as necessidades mínimas desses nutrientes em 1kg de ração. Cada ingrediente é adquirido no mercado com um certo custo unitário ($/kg). Na Tabela abaixo, os dados do problema são apresentados.*

	Ingredientes			
Nutrientes	Osso	Soja	Peixe	Ração
Proteína	0,2	0,5	0,4	0,3
Cálcio	0,6	0,4	0,4	0,5
Custos ($\$/kg$)	0,56	0,81	0,46	

Tabela 2.1: Dados para o problema da ração

A farinha de osso é constituída de 20% *de proteína e* 60% *de cálcio; a ração deve ser composta de pelo menos* 30% *de proteína e* 50% *de cálcio;* $1kg$ *da farinha de osso custa* $\$0,56$ ¨*(os ingredientes podem ser constituídos por outros elementos, mas que não são importantes para o problema em questão). Deve-se determinar em que quantidades os ingredientes devem ser misturados de modo a produzir uma ração que satisfaça às restrições nutricionais com o mínimo de custo.*

O problema da fábrica de rações satisfaz as hipóteses de linearidade:

1. *Se em* $2kg$ *de ração encontramos* $1kg$ *de osso,* $500g$ *de soja e* $500g$ *de peixe, e em outra* $1kg$ *ração, feita a mesma base, encontramos* $500g$ *de osso,* $250g$ *de soja e* $500g$ *de peixe, temos que na mistura entre as duas rações teremos* $1,5kg$ *de osso,* $750g$ *de soja e* $750g$ *de peixe. Assim satisfazendo a primeira hipótese de linearidade.*
2. *Se em* $1kg$ *de ração tiver* $200g$ *de soja, em* $2kg$ *dessa mesma ração teremos* $400g$ *de soja, assim como em* $500g$ *dessa ração teremos* $100g$ *de soja.*
3. *Vemos também que vale valores frácionários desse problema, ou seja, podemos considerar* $1kg$ *de ração assim como podemos considerar* $500g$ *da mesma ração.*

2.3 Conceitos Básicos

Nesta seção, apresentamos conceitos importantes para o desenvolvimento da teoria de Otimização Linear ao longo deste material.

Definição 2.3.1. ***(Forma padrão)*** *Um problema de otimização linear na forma padrão pode ser definido como:*

$$\begin{aligned}
\textit{Minimizar} \quad & f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n && (2.4)\\
\textit{sujeito a} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \qquad\qquad \vdots && (2.5)\\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0. && (2.6)
\end{aligned}$$

A função f dada pela equação 2.4 é chamada de *função objetivo*. O sistema de equações lineares em 2.5 define as restrições do problema, enquanto a equação 4.4 representa as condições de não negatividade.

Definição 2.3.2. ***(Solução factível e região factível)*** *Uma solução* $(x_1, \ldots, x_n)$ *é dita factível se satisfizer todas as restrições e as condições de não negatividade. O conjunto* $S \subset \mathbb{R}^n$ *de todas as soluções factíveis é denominado região factível.*

Definição 2.3.3. ***(Solução ótima)*** *Uma solução factível que fornece o menor valor à função objetivo* f *é chamada de solução ótima do problema, e é denotada por* $\{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\}$*. Isto é, uma solução* *factível é ótima se*

$$f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \leqslant f(x_1, \ldots, x_n)$$

para qualquer solução factível $(x_1, \ldots, x_n)$.

Exemplo 2.3.1. *Analise o problema de Otimização linear dado por*

$$\begin{aligned} \textit{Minimizar} \quad & f(x_1, x_2, x_3) := 2x_1 - x_2 + 4x_3 \\ \textit{sujeito a} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ & x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

O conjunto de variáveis $\{x_1, x_2, x_3\}$ representa as possíveis soluções para o problema. Um exemplo de solução factível é o conjunto $\{1, 0, 2\}$, já que esses valores atendem às duas restrições dadas ($1 + 2 \cdot 0 + 1 = 3$ e $0 + 2 = 4$). Substituindo essas variáveis na função objetivo, temos

$$f(1, 0, 2) = 2 \cdot 1 - 0 + 4 \cdot 2 = 10.$$

Outro exemplo de solução factível é o conjunto $\{0{,}25; 0{,}5; 1{,}75\}$, que resulta

$$f(0{,}25, 0{,}5, 1{,}75) = 7.$$

Por último, temos a solução factível $x^* = (0, 2/3, 5/3)$, em que

$$f(0, 2/3, 5/3) = 6.$$

Mais à frente, mostraremos que, além de ser uma solução factível, essa solução é ótima, ou seja, $f(x^*) \leqslant f(x)$ para qualquer x factível.

2.4 Mudança de problemas para a forma padrão

Nem sempre os problemas de Otimização linear da vida real atendem às condições mostradas na forma padrão. No entanto, quando lidamos com problemas desse tipo, buscamos colocá-los primeiramente na forma padrão, para que, a partir disso, possamos trabalhar no problema. Nesta seção, iremos mostrar como transformar alguns problemas comuns de Otimização Linear para a forma padrão.

2.4.1 Problemas de maximização

Encontrar uma solução ótima que maximize a função objetivo é equivalente a encontrar a solução ótima da forma $\{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$, que satisfaça

$$f(x_1^*, \ldots, x_n^*) \geqslant f(x_1, \ldots, x_n), \text{ para toda solução factível } \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Multiplicando essa inequação por (-1) temos

$$-f(x_1^*,\ldots,x_n^*) \geqslant -f(x_1,\ldots,x_n) \text{ para toda solução factível } \{x_1,\ldots,x_n\},$$

ou seja, encontrar uma solução factível que maximize $f(x_1,\ldots,x_n)$ é equivalente a encontrar uma solução factível que minimize $-f(x_1,\ldots,x_n)$.

Exemplo 2.4.1. *Analise o seguinte problema de Otimização linear.*

$$\begin{aligned}
\textit{Maximizar} \quad & f(x_1,x_2,x_3) := 8x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\
\textit{sujeito a} \quad & x_1 + 2x_2 - x_3 = 8 \\
& 3x_2 + x_3 = 4 \\
& x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Sabemos que o problema acima é equivalente a

$$\begin{aligned}
\textit{Minimizar} \quad & -f(x_1,x_2,x_3) := -8x_1 + 2x_2 - 4x_3 \\
\textit{sujeito a} \quad & x_1 + 2x_2 - x_3 = 8 \\
& 3x_2 + x_3 = 4 \\
& x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Com isso, transformamos um problema de maximização para forma padrão.

2.4.2 Problemas com restrições de desigualdade

Caso algumas das restrições do problema forem dadas por desigualdes, utilizaremos novas variáveis para que possamos chegar na igualdade exigida na forma padrão.

Seja a restrição $\boldsymbol{i}$ dada por

$$a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \cdots + a_{in} \cdot x_n \leqslant b_i.$$

A quantidade que falta para a igualdade é dada pela diferença entre o lado esquerdo e o lado direito da desigualdade, e vamos denotar pela incógnita x_k, onde

$$x_k = b_1 - (a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \cdots + a_{in} \cdot x_n) \geqslant 0$$

Com isso, podemos escrever uma igualdade com a nova variável x_k:

$$a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \cdots + a_{in} \cdot x_n + x_k = b_i.$$

A incógnita x_k representa a "folga" na inequação, ou seja, o que falta para a igualdade. Por conta disso, a chamamos de *variável de folga*. Analogamente, considerando a restrição $\boldsymbol{i}$, dada por

$$a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \cdots + a_{in} \cdot x_n \geqslant b_i.$$

Para se obter uma igualdade, basta subtrair uma quantidade x_k, ou seja,

$$a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \cdots + a_{in} \cdot x_n - x_k = b_i.$$

Note que x_k representa o "excesso" da inequação para se obter uma igualdade.

Exemplo 2.4.2. *Escreva o seguinte problema de Otimização linear na forma padrão*

$$\begin{aligned} \textit{Minimizar} \quad & f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\ \textit{sujeito a} \quad & x_1 + 2x_2 - x_3 \geqslant 3 \\ & -2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant -1 \\ & x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Introduzindo as variáveis de folga, temos:

$$\begin{aligned} \textit{Minimizar} \quad & f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\ \textit{sujeito a} \quad & x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 3 \\ & -2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = -1 \\ & x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0, x_5 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Exemplo 2.4.3. *Escreva o problema do Exemplo 1.3.1 para forma padrão.*

Primeiramente, observamos que o problema da fábrica de rádios tem como objetivo maximizar o lucro. No entanto, colocá-lo na forma padrão, precisamos transformá-lo em um problema de minimização. Utilizando a estratégia apresentada nos problemas de maximização, temos que

$$\begin{aligned} \textit{Maximizar} \quad & Lucro := 30 \cdot ST + 40 \cdot LX \\ \textit{sujeito a} \quad & ST \leqslant 24 \\ & LX \leqslant 16 \\ & (1 \cdot ST) + (2 \cdot LX) \leqslant 40 \\ & ST \geqslant 0,\ LX \geqslant 0. \end{aligned}$$

é equivalente a

$$\begin{aligned} \textit{Minimizar} \quad & -Lucro = -(30 \cdot ST) - (40 \cdot LX) \\ \textit{sujeito a} \quad & ST \leqslant 24 \\ & LX \leqslant 16 \\ & (1 \cdot ST) + (2 \cdot LX) \leqslant 40 \\ & ST \geqslant 0,\ LX \geqslant 0. \end{aligned}$$

Além disso, as restrições do problema são dadas por desigualdades. Utilizando a estratégia de adicionar variáveis de folga, temos:

$$\begin{aligned} \textit{Minimizar} \quad & -Lucro = -(30 \cdot ST) - (40 \cdot LX) \\ \textit{sujeito a} \quad & V_1 + ST = 24 \\ & V_2 + LX = 16 \\ & V_3 + 1 \cdot ST + 2 \cdot LX = 40 \\ & ST \geqslant 0,\ LX \geqslant 0,\ V_1 \geqslant 0,\ V_2 \geqslant 0,\ V_3 \geqslant 0, \end{aligned}$$

onde V_1, V_2, V_3 *são as variáveis de folga e o problema está na forma padrão.*

2.5 Exercícios

Exercício 2.5.1. *Considere o seguinte problema de otimização linear:*

$$\begin{aligned} \textit{Minimizar} \quad & f(x_1, x_2) := 3x_1 + 5x_2 \\ \textit{sujeito a} \quad & 2x_1 + x_2 \geqslant 6, \\ & -x_1 + 2x_2 \leqslant 4, \\ & x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Transforme este problema para a forma padrão.

Exercício 2.5.2. *Um problema de otimização linear é dado por:*

$$\begin{aligned} \textit{Maximizar} \quad & f(x_1, x_2, x_3) := 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 \\ \textit{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 10, \\ & 2x_1 + 3x_2 \geqslant 12, \\ & x_2 + 4x_3 \leqslant 8, \\ & x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Converta este problema de maximização para um problema de minimização e coloque na forma padrão.

Exercício 2.5.3. *Coloque os exercícios, 1.4.1, 1.4.2, 1.4.3 na forma padrão.*

Capítulo 3

Resolução gráfica e analítica

Neste capítulo, estudaremos a resolução gráfica e analítica de problemas de Otimização linear de duas variáveis.

3.1 Resolução Gráfica

Nos problemas de Otimização linear, vimos que a função objetivo é definida na região factível $S \subset \mathbb{R}^n$. Caso $n = 2$ ou $n = 3$, podemos determinar a existência e unicidade de soluções graficamente. Neste capítulo, iremos analisar o caso em que $n = 2$. Antes disso, justificaremos matematicamente o processo de resolução gráfica.

Definição 3.1.1. *Um conjunto X é dito convexo quando todos os segmentos de reta que unem dois pontos quaisquer de X estão contidos em X.*

Exemplo 3.1.1. *Na Figura 3.1 abaixo, o conjunto X_1 é convexo, enquanto o conjunto X_2 é não convexo.*

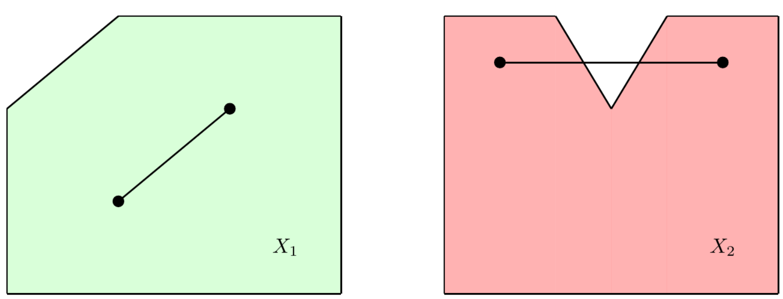

Figura 3.1: Exemplo de um conjunto convexo e não convexo

Existem várias caracterizações equivalentes para verificar se um determinado conjunto é convexo. Em particular, dada uma reta r contida no plano π, o **postulado**[1] **da separação dos pontos de um**

[1] trata-se de um postulado da Geometria Euclidiana

plano afirma que r separa π em dois conjuntos convexos. A seguir, enunciamos este postulado formalmente.

Postulado 3.1.1. *Uma reta r e um plano π tal que $r \subset \pi$ separa esse plano em dois subconjuntos, π_1 e π_2, tais que:*

(a) $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$;

(b) π_1 *e* π_2 *são convexos;*

(c) se $A \in \pi_1$ *e* $B \in \pi_2$, *então* $\overline{AB} \cap r \neq \varnothing$.

Cada um dos dois conjuntos (π_1 e π_2) é chamado de **semiplano aberto**. Os conjuntos $r \cup \pi_1$ e $r \cup \pi_2$ são **semiplanos** e a reta r é a **origem** de cada um dos semiplanos. Por fim, π_1 e π_2 são semiplanos opostos.

Antes de prosseguirmos com a justificativa matemática da resolução gráfica de problemas de Otimização linear, vamos utilizar os conceitos definidos acima para resolver o problema a seguir.

Exemplo 3.1.2. *Uma lanchonete oferece duas opções de bebida, que são água e suco. A lanchonete lucra R\$ 1,00 por litro de água vendido e R\$ 2,00 por litro de suco vendido. Durante um determinado período, a lanchonete vendeu no máximo 4 litros de bebida, sendo máximo 2 litros de água e no máximo 3 litros de suco. Qual é o maior lucro possível que a lanchonete pode obter nesse período?*

Primeiramente, é necessário elaborar um modelo matemático para a situação problema retratada. Para isso, note que se x_1 representa a quantidade em litros de água vendida e x_2 a quantidade em litros de suco vendido na lanchonete, podemos determinar o lucro em reais a partir de uma função $f : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$.

O fato de que a lanchonete vendeu no máximo 4 litros de bebida, pode ser descrito matematicamente pela inequação $x_1 + x_2 \leqslant 4$. Analogamente, $x_1 \leqslant 2$ é a desigualdade que descreve matematicamente a venda de no máximo 2 litros de água e $x_2 \leqslant 3$ a condição de ter vendido no máximo 3 litros de suco. Evidentemente, como não faz sentido vender uma quantidade negativa de bebida, temos que $x_1 \geqslant 0$ e $x_2 \geqslant 0$. Portanto, a formulação completa do modelo matemático pode ser representada como:

$$
\begin{array}{rl}
\text{Maximizar} & f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \\
\text{sujeito a} & x_1 + x_2 \leqslant 4 \\
& x_1 \leqslant 2 \\
& x_2 \leqslant 3 \\
& x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.
\end{array}
\tag{3.1}
$$

Como $S \subset \mathbb{R}^2$, é possível realizar seu esboço em um plano cartesiano. Observe que se transformássemos (3.1) na forma padrão, teríamos que adicionar 3 variáveis de folga, logo seguiria que $S \subset \mathbb{R}^5$ impossibilitando assim, qualquer procedimento gráfico. Por isso, no método da resolução gráfica os problemas de Otimização Linear não necessita estar na forma padrão. Uma maneira de proceder (caso $S \subset \mathbb{R}^2$), é esboçar as regiões do plano referentes a cada uma das restrições dadas acima.

Procedendo dessa forma, podemos observar que a restrição $x_1 + x_2 \leqslant 4$ contém uma reta r no plano onde a igualdade $x_1 + x_2 = 4$ é satisfeita. Essa reta passa pelos pontos $(0, 4)$ e $(4, 0)$. Graficamente temos:

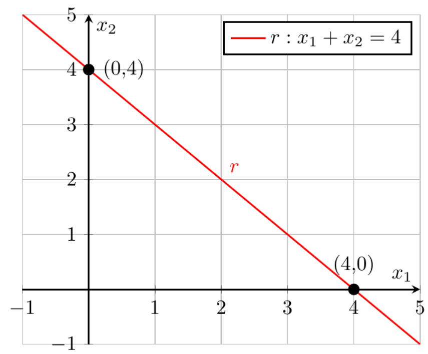

Figura 3.2: Reta $x_1 + x_2 = 4$

Pelo Postulado 3.1.1, a reta r separa o plano cartersiano em dois semiplanos abertos e convexos π_1 e π_2:

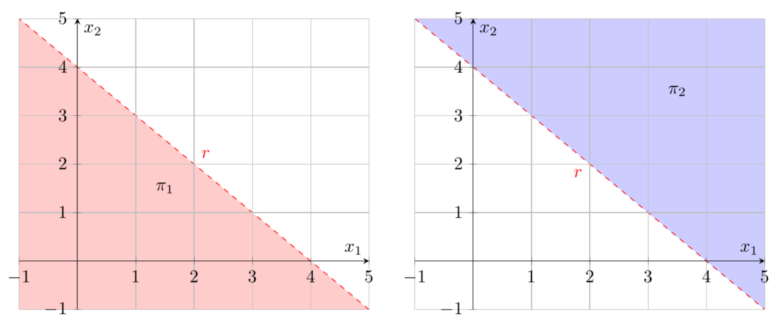

Figura 3.3: Semiplanos abertos cuja origem é a reta r

Vamos mostrar que $\pi_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 < 4\}$. Para isso, note que se existisse $(x_1, x_2) \in \pi_1$ tal que $x_1 + x_2 = k > 4 > 0$, teríamos pelo fato de $(0, 0) \in \pi_1$ (de acordo com a figura acima) e pela convexidade de π_1 que o segmento de reta[2] $s : t(x_1, x_2) + (1 - t)(0, 0),\ t \in [0, 1]$ está contido em π_1.

Tomando $t = \dfrac{4}{k}$ $(k > 4 > 0 \Rightarrow 1 > 4/k > 0)$, podemos determinar o ponto $P \in \pi_1$ de modo que

$$P = t(x_1, x_2) + (1 - t)(0, 0) = \frac{4}{k}(x_1, x_2) = \left(\frac{4}{k}x_1, \frac{4}{k}x_2\right).$$

[2] temos aqui a parametrização de um segmento de reta com extremos (x_1, x_2) e $(0, 0)$ para qualquer $(x_1, x_2) \in \pi_1$

Repare que $\frac{4}{k}x_1 + \frac{4}{k}x_2 = \frac{4}{k}(x_1 + x_2) = \frac{4}{k}k = 4$, ou seja, $P \in r$ mas como π_1 é um semiplano aberto concluímos que $P \notin \pi_1$ e isso contradiz o fato de π_1 ser convexo.

Portanto, não existe $(x_1, x_2) \in \pi_1$ tal que $x_1 + x_2 = k > 4 > 0$. Como π_1, r e π_2 são disjuntos (isto é, $\pi_1 \cap r = \pi_1 \cap \pi_2 = r \cap \pi_2 = \varnothing$)[3] mas $\pi_1 \cup r \cup \pi_2 = \mathbb{R}^2$ concluímos que $\pi_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 < 4\}$ e $\pi_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 > 4\}$. De forma análoga podemos demonstrar o seguinte resultado.

Proposição 3.1.1. *A reta $r : ax_1 + bx_2 = c$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ divide o plano cartesiano em dois semiplanos abertos π_1 e π_2 tais que $\pi_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : ax_1 + bx_2 < c\}$ e $\pi_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : ax_1 + bx_2 > c\}$.*

Por fim, vale mencionar que a proposição acima pode ser estendida para planos e para o espaço $\mathbb{R}^3$ e até generalizada para hiperplanos e para o $\mathbb{R}^n$. Com isso, podemos estabelecer o seguinte procedimento prático para esboçar restrições da forma $ax_1 + bx_2 \leqslant c$.

1º - Esboce a reta $r : ax_1 + bx_2 = c$;

2º - Tome um ponto $P = (x'_1, x'_2) \notin r$:

(a) se $ax'_1 + bx'_2 < c$, então a região $ax_1 + bx_2 \leqslant c$ é o semiplano que contém P;

(b) se $ax'_1 + bx'_2 > c$, então a região $ax_1 + bx_2 \leqslant c$ é o semiplano que não contém P.

O esboço de restrições do tipo $ax_1 + bx_2 \geqslant c$ pode ser feito através do mesmo procedimento, mas observando que o semiplano contém um ponto $P = (x'_1, x'_2) \notin r$ se $ax'_1 + bx'_2 > c$. Vamos utilizar o procedimento prático acima para esboçar as demais restrições de (3.1), porque já mostramos que a restrição $x_1 + x_2 \leqslant 4$ é graficamente representada na Figura 3.4

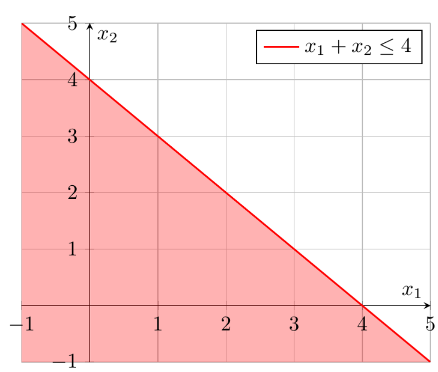

Figura 3.4: Primeira restrição do problema (3.1)

Na restrição $x_1 \leqslant 2$ temos que o esboço da reta $x_1 = 2$ é dado pela Figura 3.5.

[3] Os conjuntos π_1 e π_2 são disjuntos pelo Postulado 3.1.1.

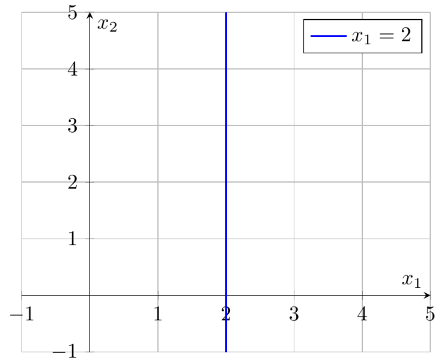

Figura 3.5: Reta $x_1 = 2$

Na origem, temos $x_1 = 0 < 2$, logo $x_1 \leqslant 2$ é representado graficamente pela Figura 3.6.

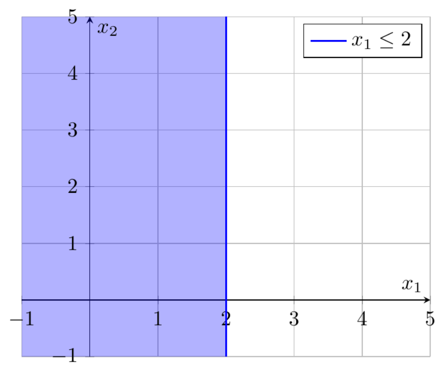

Figura 3.6: Segunda restrição do problema (3.1)

Pela mesma razão, da restrição $x_2 \leqslant 3$, podemos obter a representação da Figura 3.7.

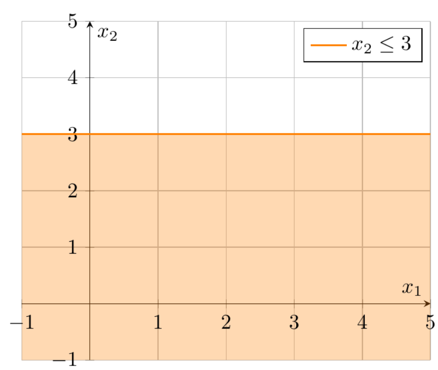

Figura 3.7: Terceira restrição do problema (3.1)

Com as restrições $x_1 \geqslant 0$ e $x_2 \geqslant 0$ sabemos que a região factível S localiza-se no primeiro quadrante. Assim, obtemos a representação gráfica da Figura 3.8.

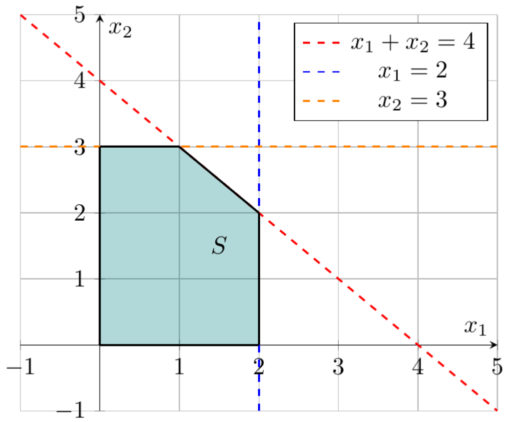

Figura 3.8: Região factível do problema (3.1)

A resolução gráfica consiste em avaliar a função objetivo em algum ponto de S, esboçar a curva de nível corresponte sobre o conjunto viável e determinar se tal ponto é solução ótima e se há outros candidatos para serem tal solução. O conceito de curva de nível é formalmente descrita por

Definição 3.1.2. *Seja $k \in \mathbb{R}$. Uma* ***curva de nível****, de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é o conjunto de todos os pontos $(x,\ y) \in \mathbb{R}^n$, tais que $f(x,y) = k$, isto é, o conjunto $\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^n; f(x,\ y) = k\}$.*

Por simplicidade, verificaremos o valor de f na origem. Note que $f(0,0) = 0 + 2 \cdot 0 = 0$. Em seguida esboçamos a curva de nível $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 = 0$, que é uma reta.

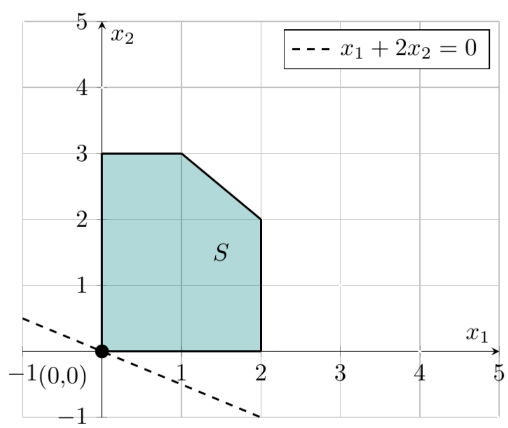

Figura 3.9: Curva de nível $x_1 + 2x_2 = 0$ sobre a região factível

Pela Proposição 3.1.1 sabemos que a reta $r : x_1 + 2x_2 = 0$ divide o plano cartesiano nos semiplanos abertos π_{1_1} e π_{1_2} tais que $\pi_{1_1} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 < 0\}$ e $\pi_{1_2} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 > 0\}$. Mas como $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$, podemos escrever que $\pi_{1_1} \cap S = \{(x_1, x_2) \in S : f(x_1, x_2) < 0\}$ e $\pi_{1_2} \cap S = \{(x_1, x_2) \in S : f(x_1, x_2) > 0\}$.

Note que o ponto $(1,1) \in S$, como $f(1,1) = 1 + 2 \cdot 1 = 3 > 0 = f(0,0)$ sabemos que $(0,0)$ não é solução ótima de (3.1). Ao esboçarmos a curva de nível $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 = 3$ temos

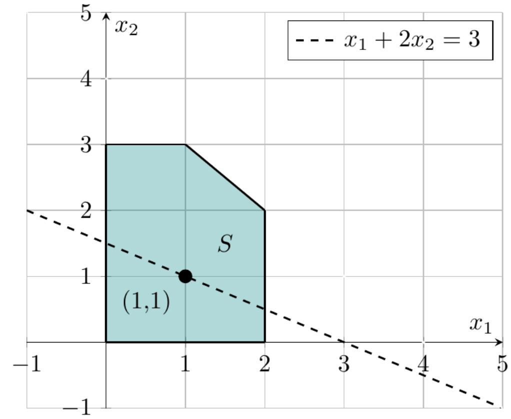

Figura 3.10: Curva de nível $x_1 + 2x_2 = 3$ sobre a região factível

Novamente, pela Proposição 3.1.1 sabemos que a reta $r : x_1 + 2x_2 = 3$ divide o plano cartesiano nos semiplanos abertos π_{2_1} e π_{2_2} tais que $\pi_{2_1} \cap S = \{(x_1, x_2) \in S : f(x_1, x_2) < 3\}$ e $\pi_{2_2} \cap S = \{(x_1, x_2) \in S : f(x_1, x_2) > 3\}$. Pelo fato de $f(0, 0) = 0$ e $S = (\pi_{2_1} \cap S) \cup r \cup (\pi_{2_2} \cap S)$, isto é, no domínio de f existem pares ordenados (x_1, x_2) tais que $f(x_1, x_2) < 3$ ou $f(x_1, x_2) = 3$ ou ainda $f(x_1, x_2) > 3$, podemos representar graficamente tais regiões do domínio pela Proposição 3.1.1.

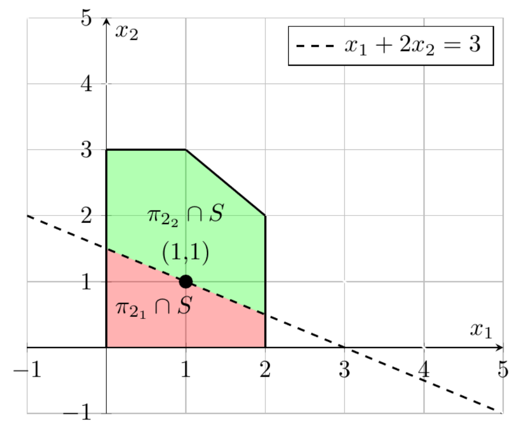

Figura 3.11: Curva de nível $x_1 + 2x_2 = 3$ dividindo a região factível em duas sub regiões

Assim, temos que $\pi_{2_2} \cap S \neq \varnothing$, logo $(1, 1)$ também não é solução ótima. Prosseguindo, repare que $(1, 2) \in \pi_{2_2} \cap S$ e $f(1, 2) = 1 + 2 \cdot 2 = 5$. Dessa forma, pelo que já vimos anteriormente, considerando $\pi_{3_1} \cap S = \{(x_1, x_2) \in S : f(x_1, x_2) < 5\}$ e $\pi_{3_2} \cap S = \{(x_1, x_2) \in S : f(x_1, x_2) > 5\}$, podemos representar graficamente tais regiões do domínio S, conforme a figura a seguir.

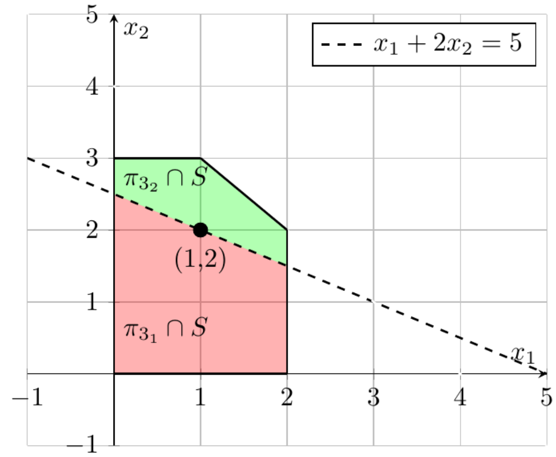

Figura 3.12: Curva de nível $x_1 + 2x_2 = 5$ dividindo a região factível em duas sub regiões

Tomando $(1, 3) \in \pi_{3_2} \cap S$ acarreta em $f(1, 3) = 1 + 2 \cdot 3 = 7$. Daí, tendo $\pi_{4_1} \cap S = \{(x_1, x_2) \in S : f(x_1, x_2) < 7\}$ e $\pi_{4_2} \cap S = \{(x_1, x_2) \in S : f(x_1, x_2) > 7\}$, temos a seguinte representação gráfca.

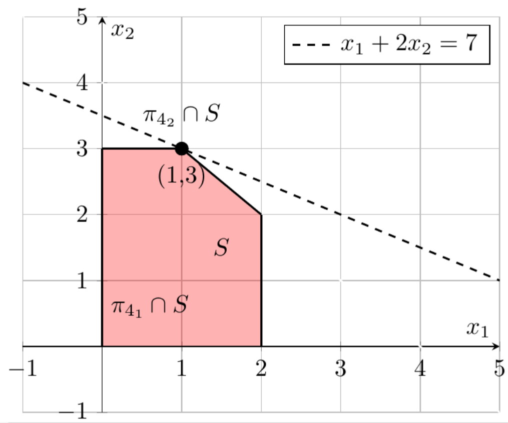

Figura 3.13: Curva de nível $x_1 + 2x_2 = 7$ passando por um vértice da região factível

Pela figura acima, concluímos que $\pi_{4_2} \cap S = \{(x_1, x_2) \in S : f(x_1, x_2) > 7\} = \varnothing$. Portanto, $(1, 3)$ é solução ótima e isso significa que, nas condições dadas, o maior lucro possível que a lanchonete pode obter nesse período será vendendo um litro de água e três litros de suco no período considerado.

Exemplo 3.1.3. ***Uma Solução Ótima*** *Considere o problema de Otimização Linear a seguir e encontre a solução ótima por meio da resolução gráfica.*

$$
\begin{aligned}
\textit{Maximizar} \quad & f(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2 \\
\textit{sujeito a} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leqslant 18 \\
& 5x_1 + 4x_2 \leqslant 40 \\
& x_1 \leqslant 6 \\
& x_2 \leqslant 8 \\
& x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Esboço da Região factível

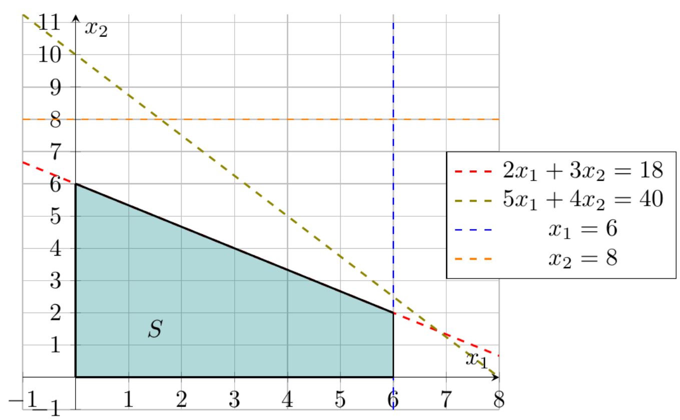

Figura 3.14: Região factível do problema (3.2)

Observe que as retas $x_2 = 8$ e $5x_1 + 4x_2 = 40$ não passam por nenhum ponto de S, logo as restrições $5x_1 + 4x_2 \leqslant 40$ e $x_2 \leqslant 8$ são **redundantes**, isto é, caso elas fossem excluídas do modelo, o espaço de soluções factíveis não seria afetado.

Resolução gráfica

Temos que $f(0,0) = 6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0$ e $f(1,1) = 6 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 10$, logo $(0,0)$ não é solução ótima. Assim, ao esboçar a curva de nível $6x_1 + 4x_2 = 10$, teremos a seguinte representação gráfica.

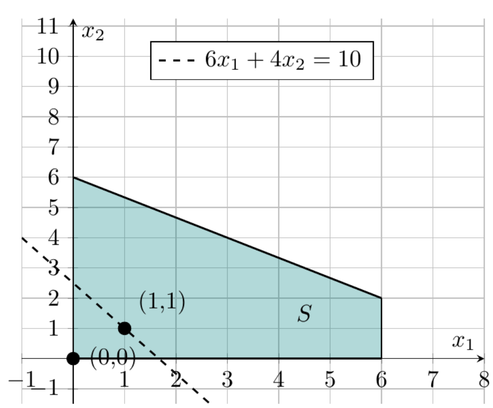

Figura 3.15: Curva de nível $6x_1 + 4x_2 = 10$ sobre a região factível

Graficamente, a reta $6x_1 + 4x_2 = 10$ divide o conjunto S em dois subconjuntos não vazios (pois $(1,1)$ não é um vértice de S) que são $\{(x_1, x_2) \in S : f(x_1, x_2) < 10\}$ e $\{(x_1, x_2) \in S : f(x_1, x_2) > 10\}$. Consequentemente, $(1,1)$ não é solução ótima. Como $f(0,0) = 0$, sabemos que a sub região de S que contém a solução ótima está acima da reta $6x_1 + 4x_2 = 10$. Por isso, podemos tomar $(3,3)$ e notar que $f(3,3) = 6 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 30$. Esboçando a curva de nível $5x_1 + 4x_2 = 30$, temos

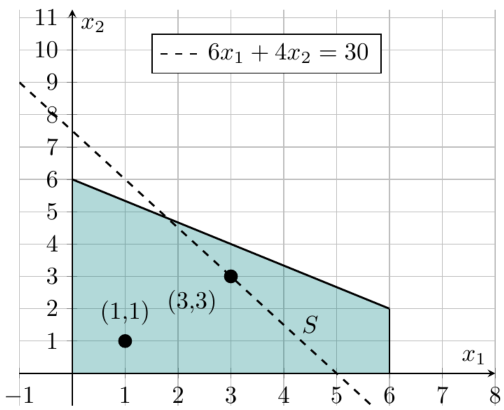

Figura 3.16: Curva de nível $6x_1 + 4x_2 = 30$ sobre a região factível

Pelo fato de $f(1,1) = 10$, sabemos que a sub região de S que contém a solução ótima está acima da reta. Assim, podemos tomar o ponto $(5,2)$ e notar que $f(5,2) = 6 \cdot 5 + 4 \cdot 2 = 38$, e teremos a representação gráfica a seguir.

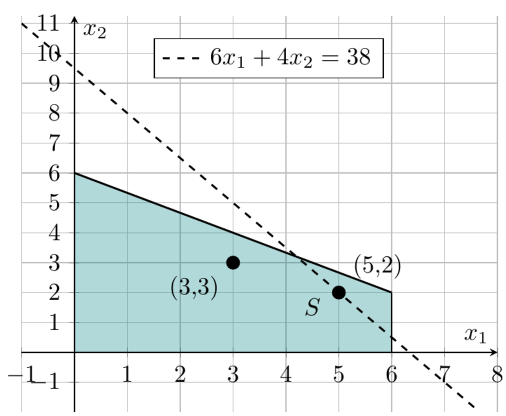

Figura 3.17: Curva de nível $6x_1 + 4x_2 = 38$ sobre a região factível

Por razão de $f(3,3) = 30$, novamente a sub-região de S que contém a solução ótima está acima da reta. Assim, podemos tomar o ponto $(6,2)$ e teremos $f(6,2) = 6 \cdot 6 + 4 \cdot 2 = 44$, obtendo a seguinte representação gráfica.

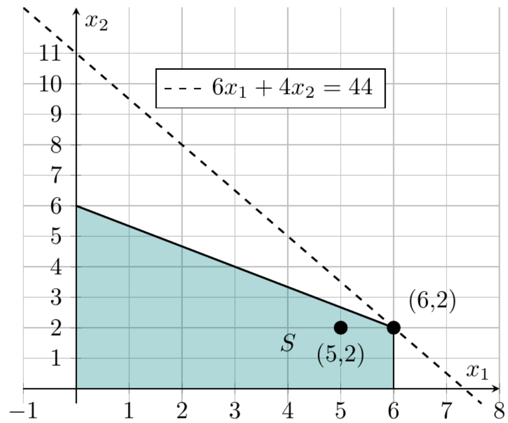

Figura 3.18: Curva de nível $x_1 + 2x_2 = 44$ passando por um vértice da região factível

Ao tomarmos o ponto $(6, 2)$, que é um vértice de S, e repararmos que $\{(x_1, x_2) \in S : f(x_1, x_2) = 44\} = \{(6, 2)\}$ concluímos que $(6, 2)$ é solução ótima de (3.2). Ao comparar (3.1) e (3.2), notamos que ambos os problemas têm uma única solução ótima, sendo que a única diferença é o fato de (3.2) possuir restrições redundantes e o mesmo não ocorre em (3.1).

Ao resolver os dois exemplos anteriores, terminamos de justificar a resolução gráfica de problemas de Otimização Linear. Além disso, já temos um procedimento prático para resolver problemas desse tipo. Esse procedimento consiste em avaliar a função objetivo em algum ponto de S, esboçar a curva de nível em S e depois, calcular a função objetivo em um ponto de S que não pertença a curva de nível (se existir) e assim, compararmos os valores que a função objetivo assume mediante a aplicação da Proposição 3.1.1.

Dependendo da posição relativa da curva de nível em relação a região factível, podemos determinar a existência e unicidade de soluções ótimas. Nos exemplos anteriores, vimos que a solução ótima existe e é única. Agora, mostraremos alguns problemas de Otimização Linear que ilustrarão outras possibilidades.

Exemplo 3.1.4. ***Múltiplas Soluções Ótimas***

$$\begin{aligned} \textit{Maximizar} \quad & f(x_1, x_2) = 8x_1 + 4x_2 \\ \textit{sujeito a} \quad & 4x_1 + 2x_2 \leqslant 16 \\ & x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ & x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Esboço da Região factível

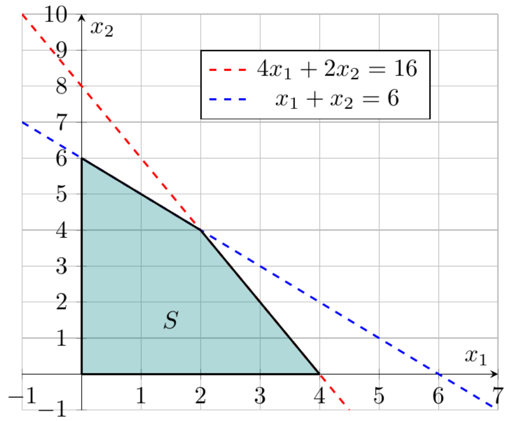

Figura 3.19: Região factível do problema (3.3)

Resolução gráfica

Como $f(0,0) = 8 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0$ e $f(1,1) = 8 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 12$ temos que $(0,0)$ não é solução ótima. Assim, ao esboçarmos a curva de nível $8x_1 + 4x_2 = 12$ segue que

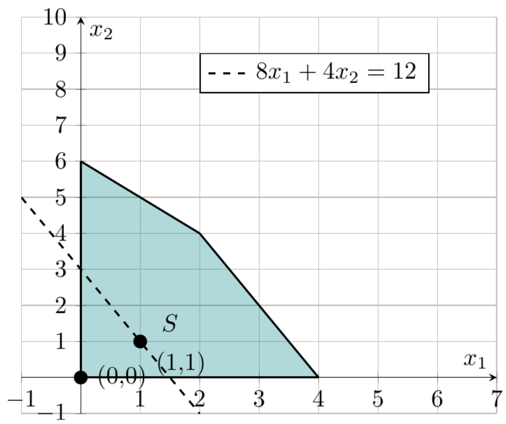

Figura 3.20: Curva de nível $8x_1 + 4x_2 = 12$ sob a região factível

Como a interseção de S com o semiplano aberto que não contém o ponto $(0,0)$ cuja origem é a reta $8x_1 + 4x_2 = 12$ é não vazia, sabemos que $(1,1)$ não é solução ótima e devemos tomar algum ponto que pertença a interseção entre S e esse semiplano, como por exemplo $(2,2)$ onde $f(2,2) = 8 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 24$. Assim, ao esboçarmos a reta $8 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 24$ temos

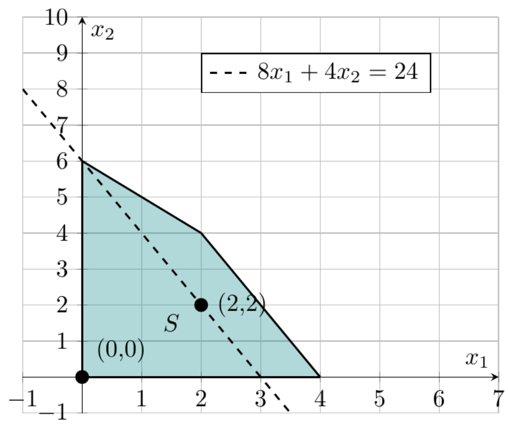

Figura 3.21: Curva de nível $8x_1 + 4x_2 = 24$ sob a região factível

Pela mesma razão dada acima, temos que $(2,2)$ não é soluão ótima, por isso, devemos tomar um ponto do conjunto $\{(x_1, x_2) \in S : 8x_1 + 4x_2 > 24\}$. Tais pontos localizam-se acima da reta $8x_1 + 4x_2 = 24$ e pertencem a S. Ao tomarmos o ponto $(3,2)$, observamos que $f(3,2) = 8 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 32$ daí segue-se

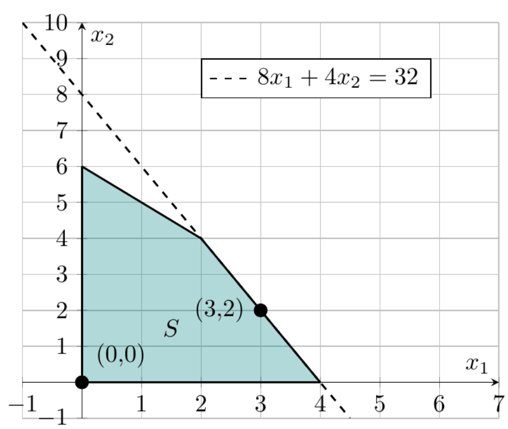

Figura 3.22: Curva de nível $8x_1 + 4x_2 = 32$ por uma aresta da região factível

Note que a interseção do semiplano aberto que não contém o ponto $(0,0)$ cuja origem é a reta $8x_1 + 4x_2 = 32$ com S é vazia, logo não existem pontos (x_1, x_2) de S tais que $8x_1 + 4x_2 > 32$. Além disso, os pontos (x_1, x_2) de S que não pertencem ao semiplano descrito anteriormente obedecem a desigualdade $8x_1 + 4x_2 \leqslant 32$, isto é

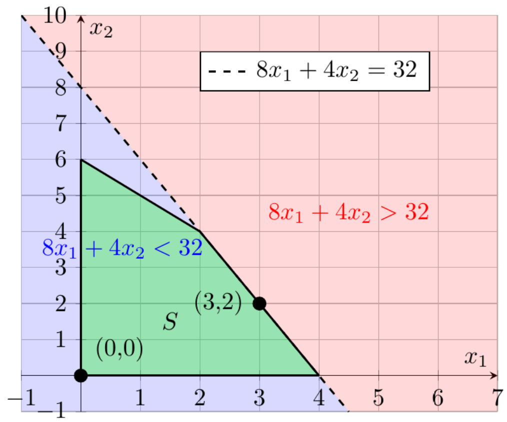

Figura 3.23: Curva de nível dividindo a região factível em duas sub regiões

Portanto, o conjunto de soluções factíveis é o segmento $t(2,4) + (1-t)(4,0) = (4-2t, 4t),\ t \in [0,1]$, ou seja, existe uma solução para (3.3), porém ela não é única.

Exemplo 3.1.5. ***Função Objetivo Ilimitada em*** S

$$\begin{aligned} \textit{Maximizar} \quad & f(x_1, x_2) = 4x_1 + 3x_2 \\ \textit{sujeito a} \quad & 2x_1 + 5x_2 \geqslant 20 \\ & x_1 \leqslant 8 \\ & x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Esboço da Região factível

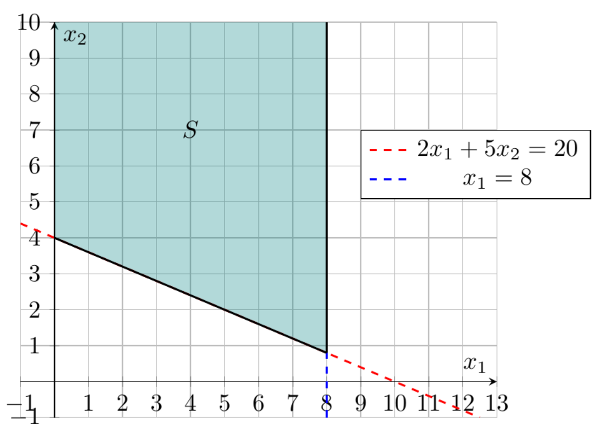

Figura 3.24: Região factível do problema (3.4)

O esboço anterior mostra que S é ilimitado. Por exemplo, o ponto $(5,t) \in S$ para todo $t \geqslant 2$, ou seja, não há uma limitação superior para as ordenadas dos pontos de S. Como o valor da função objetivo é diretamente proporcional a x_2, podemos afirmar que f é ilimitada superiormente em S.

De fato, se (x_1^*, x_2^*) fosse solução ótima de (3.4), então $(x_1^*, x_2^*) \in S$, isto é, $2x_1^* + 5x_2^* \geqslant 20$, $x_1^* \leqslant 8$, $x_1^* \geqslant 0$, $x_2^* \geqslant 0$ e $f(x_1^*, x_2^*) \geqslant f(x_1, x_2)$ para todo $(x_1, x_2) \in S$.

Vamos mostrar que essa última desigualdade não é válida para quaisquer elementos de S. Para isso, tome (x_1', x_2') tal que $x_1' := x_1^*$ e $x_2' := x_2^* + 1$. Note que $(x_1', x_2') \in S$, pois

$$2x_1' + 5x_2' = 2x_1^* + 5(x_2^* + 1) = (2x_1^* + 5x_2^*) + 5 \geqslant 20 + 5 = 25 \geqslant 20.$$

Além disso, $x_1' = x_1^* \leqslant 8$, $x_1' = x_1^* \geqslant 0$ e $x_2' = x_2^* + 1 \geqslant 0 + 1 = 1 \geqslant 0$. Por fim,

$$f(x_1', x_2') = 4x_1' + 3x_2' = 4x_1^* + 3(x_2^* + 1) = (4x_1^* + 3x_2^*) + 3 > 4x_1^* + 3x_2^* = f(x_1^*, x_2^*).$$

Ora, mostramos que para um elemento de S arbitrário sempre existirá outro elemento de S que será associado por f a um número real maior do que o anterior, portanto (3.4) não possui solução ótima.

Vimos no exemplo anterior um problema de Otimização Linear que não possui solução ótima, pois a função objetivo não é limitada superiormente em S (para problemas de maximização) ou não é limitadada inferiormente (para os problemas de minimização). Apresentaremos a seguir, uma outra situação em que um problema de Otimização Linear não terá solução ótima.

Exemplo 3.1.6. ***Não Existe Solução Ótima***

$$\begin{aligned} \textit{Maximizar} \quad & f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\ \textit{sujeito a} \quad & 5x_1 + 4x_2 \geqslant 40 \\ & 2x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ & x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Esboço da Região factível

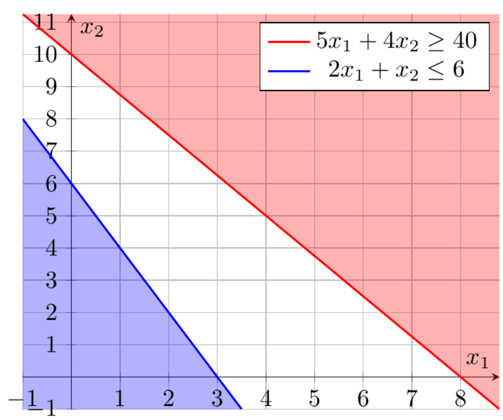

Figura 3.25: Região factível do problema (3.5)

Repare que, ao considerarmos o primeiro quadrante (visto que $x_1, x_2 \geqslant 0$), temos que as restrições $5x_1 + 4x_2 \geqslant 40$ e $2x_1 + x_2 \leqslant 6$ são disjuntas, de modo que nenhum ponto do primeiro quadrante satisfaz ambas as desigualdades simultaneamente. Logo, $S = \varnothing$ e, por isso, não há solução ótima para (3.5).

Quando um vértice de uma regão factível é obtido a partir da interseção de mais de duas retas distintas, tal ponto é chamado de **vértice degenerado**. Se esse vértice for também solução ótima, então temos uma **solução ótima degenerada**. No exemplo a seguir, apresentaremos um problema de Otimização Linear com solução ótima degenerada.

Exemplo 3.1.7. ***Solução Ótima Degenerada***

$$\begin{aligned} \textit{Minimizar} \quad & f(x_1, x_2) = x_1 + 5x_2 \\ \textit{sujeito a} \quad & 2x_1 + 4x_2 \geqslant 16 \\ & x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ & x_1 \leqslant 4 \\ & x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Esboço da Região factível

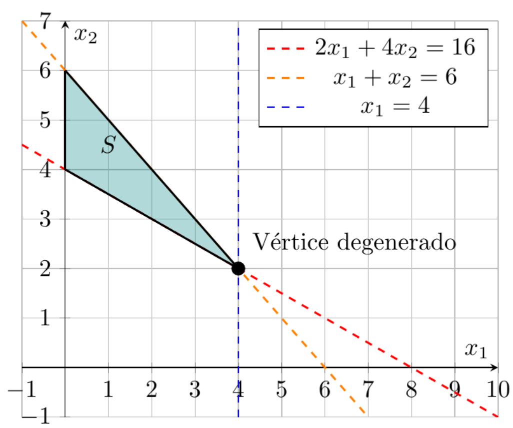

Figura 3.26: Região factível do problema (3.6)

Resolução gráfica

Observe que $f(0,6) = 0 + 5 \cdot 6 = 30$ e $f(0,4) = 0 + 5 \cdot 4 = 20$, ou seja $f(0,6) > f(0,4)$, logo $(0,6)$ não é solução ótima. Em relação a curva de nível $x_1 + 5x_2 = 20$ temos

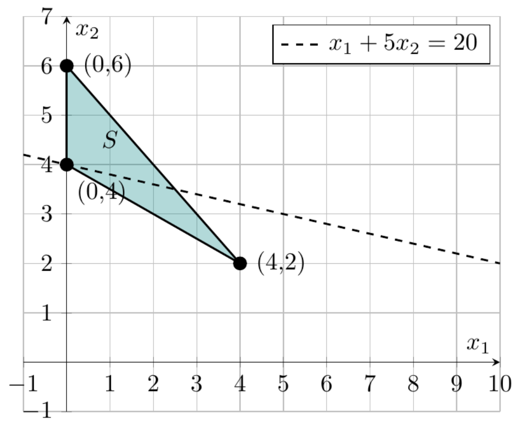

Figura 3.27: Curva de nível $x_1 + 5x_2 = 20$ sob a região factível

Tomando o ponto $(2,3)$ (que está numa sub região de S onde $x_1 + 5x_2 < 20$) temos que $f(2,3) = 2 + 5 \cdot 3 = 17$ assim $(0,4)$ não é solução ótima

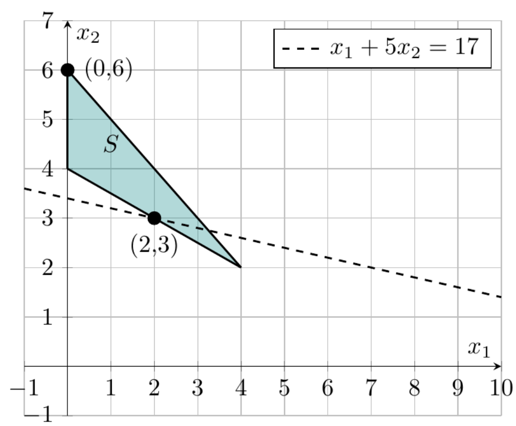

Figura 3.28: Curva de nível $x_1 + 5x_2 = 17$ sob a região factível

Prosseguindo, tomando o ponto $(4,2)$ segue que $f(4,2) = 4 + 5 \cdot 2 = 14$, logo o ponto $(2,3)$ não é solução ótima.

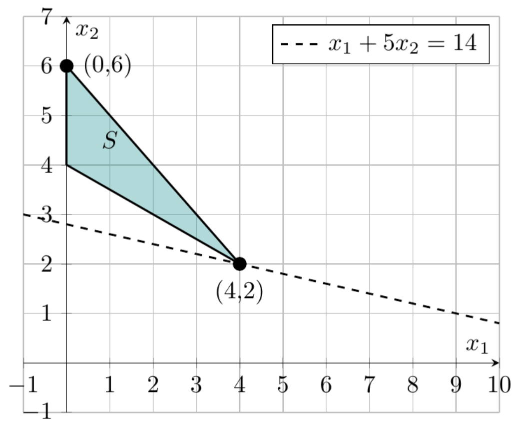

Figura 3.29: Curva de nível $x_1 + 5x_2 = 14$ passando por um vértice da região factível

Na figura acima, note que $(4, 2)$ é um vértice de S e $f(2,3) = 17$. Portanto, $(4, 2)$ é solução ótima degenerada de (3.6).

3.2 Resolução Analítica

Na seção anterior apresentamos o procedimento gráfico para solucionar problemas de Otimização Linear. Agora, resolveremos o mesmo tipo de problemas utilizando o procedimento analítico. Para isso, considere um sistema $Ax = b$ de m equações lineares e n variáveis, em que $m < n$, ou seja, trata-se de um sistema sem solução ou com uma infinidade delas.

Uma maneira de encontrar uma solução para sistemas lineares deste tipo é determinar um conjunto de $n - m$ variáveis de x, chamadas **variáveis não básicas** (VNB), as quais são atribuídas valores iguais a zero. As m variáveis restantes do sistema, chamadas **variáveis básicas** (VB), são então determinadas. Essa solução é chamada **solução básica** (SB). O conjunto de variáveis básicas é chamado **base**.

Se a solução básica atende às restrições de não negatividade, isto é, as variáveis básicas são não negativas, a mesma é chamada **solução básica factível** (SBF).

Para o cálculo da solução ótima, é necessário calcular o valor da função objetivo z de todas as possíveis soluções básicas e escolher a melhor alternativa. O número máximo de soluções básicas a serem calculadas é

$$C_m^n \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Portanto, o método analítico tal qual definimos analisa todas as possíveis combinações de n variáveis escolhidas m a m, escolhendo a melhor delas. Resolver sistemas de equações lineares é viável em casos em que m e n são pequenos. Contudo, para valores elevados de m e n, o cálculo torna-se impraticável. Como alternativa, pode-se utilizar o método Simplex que será estudado no próximo capítulo.

Exemplo 3.2.1. *Considere o seguinte sistema linear*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 28 \\ 3x_1 - x_3 = \ \ 4 \end{cases} . \tag{3.7}$$

Determinar todas as soluções básicas para esse sistema.

Solução: Para um sistema com três variáveis e duas equações, tem-se $n - m = 3 - 2 = 1$, ou seja, neste caso teremos uma variável não básica e $m = 2$ variáveis básicas. Por isso, o número total de soluções básicas possíveis, neste exemplo, é $C_2^3 = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$.

Solução básica 1: Consideraremos $VNB = \{x_1\}$ e $VB = \{x_2,\, x_3\}$. Atribui-se o valor zero à variável não básica, isto é, $x_1 = 0$. Dessa forma, o sistema de equações definido em (3.7) reduz-se a

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 28 \\ -x_3 = \ \ 4 \end{cases} .$$

Observe que decorre da segunda equação do sistema acima que $x_3 = -4 < 0$. Logo, a solução básica é infactível, pois x_3 não satisfaz a restrição de não-negatividade, isto é, $x_3 \geqslant 0$.

Solução básica 2: Tomando $VNB = \{x_2\}$ e $VB = \{x_1,\, x_3\}$, temos que $x_2 = 0$ e obteremos o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 28 \\ 3x_1 - x_3 = \ \ 4 \end{cases} .$$

Resolvendo-o segue que $x_1 = 4$ e $x_3 = 8$. Tem-se, portanto, uma solução básica factível (SBF).

Solução básica 3: Por fim, se $VNB = \{x_3\}$ e $VB = \{x_1,\, x_2\}$ então temos o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 28 \\ 3x_1 = 4 \end{cases} .$$

Ao resolvê-lo, encontramos $x_1 = \frac{4}{3}$ e $x_2 = \frac{40}{3}$. Da mesma forma que no caso anterior, tem-se aqui uma SBF.

Observe que esse exemplo mostra os aspectos computacionais do método analítico. Vamos aplicá-lo na resolução do problema de Otimização Linear (3.1).

Exemplo 3.2.2. *Resolva o problema de Otimização Linear abaixo pelo método analítico:*

$$\begin{aligned} \textit{Maximizar} \quad & f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \\ \textit{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ & x_1 \leqslant 2 \\ & x_2 \leqslant 3 \\ & x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Solução: Para que o procedimento de solução analítico possa ser aplicado, o problema deve estar na **forma padrão**. Para que as restrições de desigualdade possam ser reescritas na forma de igualdade, devem ser incluídas as variáveis de folga x_3, x_4 e x_5. Assim, o problema original reescrito na forma padrão passa a ser:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & -f(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + x_4 = 2 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

O sistema tem $m = 3$ equações e $n = 5$ variáveis. Para que uma solução básica seja encontrada, serão atribuídos valores iguais a zero a $n - m = 5 - 3 = 2$ variáveis não básicas, de forma que os valores das $m = 3$ variáveis básicas restantes possam ser determinados pelo sistema de equações (3.8). O total de soluções básicas nesse exemplo é

$$C_3^5 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10.$$

Solução básica 1: $VNB = \{x_1,\, x_2\}$ e $VB = \{x_3,\, x_4,\, x_5\}$. Atribuiu-se, primeiramente, o valor zero às variáveis não básicas x_1 e x_2, de forma que os valores das variáveis básicas x_3, x_4 e x_5 possam ser calculadas algebricamente a partir do sistema de equações (3.8). Logo, tem-se que:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_4 = 2 \\ x_2 + x_5 = 3 \end{cases} \quad \underset{\Rightarrow}{x_1 = x_2 = 0} \begin{cases} x_3 = 4 \\ x_4 = 2 \\ x_5 = 3 \end{cases}$$

Logo,

Solução não básica: $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$

Solução básica: $x_3 = 4$, $x_4 = 2$ e $x_5 = 3$

Classificação da solução básica: factível

Função objetivo: $z = -x_1 - 2x_2 = -0 - 2 \cdot 0 = 0$

O mesmo cálculo será efetuado para obtenção de diferentes soluções básicas. A cada nova solução, uma variável do conjunto de váriáveis não básicas entra no conjunto de variáveis básicas (base) e, consequentemente, uma sairá da base.

Solução básica 2: $VNB = \{x_1,\, x_3\}$ e $VB = \{x_2,\, x_4,\, x_5\}$.

Solução não básica: $x_1 = 0$ e $x_3 = 0$

Solução básica: $x_2 = 4$, $x_4 = 2$ e $x_5 = -1$

Classificação da solução básica: infactível (pois $x_5 < 0$)

Solução básica 3: $VNB = \{x_1, x_4\}$ e $VB = \{x_2, x_3, x_5\}$.

Solução não básica: $x_1 = 0$ e $x_4 = 0$

Solução básica: não existe

Classificação da solução básica: infactível

Solução básica 4: $VNB = \{x_1, x_5\}$ e $VB = \{x_2, x_3, x_4\}$.

Solução não básica: $x_1 = 0$ e $x_5 = 0$

Solução básica: $x_2 = 3$, $x_3 = 1$ e $x_4 = 2$

Classificação da solução básica: factível

Função objetivo: $z = -x_1 - 2x_2 = -0 - 2 \cdot 3 = -6$

Solução básica 5: $VNB = \{x_2, x_3\}$ e $VB = \{x_1, x_4, x_5\}$.

Solução não básica: $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$

Solução básica: $x_1 = 4$, $x_4 = -2$ e $x_5 = 3$

Classificação da solução básica: infactível

Solução básica 6: $VNB = \{x_2, x_4\}$ e $VB = \{x_1, x_3, x_5\}$.

Solução não básica: $x_2 = 0$ e $x_4 = 0$

Solução básica: $x_1 = 2$, $x_3 = 2$ e $x_5 = 3$

Classificação da solução básica: factível

Função objetivo: $z = -x_1 + -2x_2 = -2 - 2 \cdot 0 = -2$

Solução básica 7: $VNB = \{x_2, x_5\}$ e $VB = \{x_1, x_3, x_4\}$.

Solução não básica: $x_2 = 0$ e $x_5 = 0$

Solução básica: não existe

Classificação da solução básica: infactível

Solução básica 8: $VNB = \{x_3, x_4\}$ e $VB = \{x_1, x_2, x_5\}$.

Solução não básica: $x_3 = 0$ e $x_4 = 0$

Solução básica: $x_1 = 2$, $x_2 = 2$ e $x_5 = 1$

Classificação da solução básica: factível

Função objetivo: $z = -x_1 - 2x_2 = -2 - 2 \cdot 2 = -6$

Solução básica 9: $VNB = \{x_3, x_5\}$ e $VB = \{x_1, x_2, x_4\}$.

Solução não básica: $x_3 = 0$ e $x_5 = 0$

Solução básica: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ e $x_4 = 1$

Classificação da solução básica: factível

Função objetivo: $z = -x_1 - 2x_2 = -1 - 2 \cdot 3 = -7$

Solução básica 10: $VNB = \{x_4, x_5\}$ e $VB = \{x_1, x_2, x_3\}$.

Solução não básica: $x_4 = 0$ e $x_5 = 0$

Solução básica: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ e $x_3 = -1$

Classificação da solução básica: infactível

Ao compararmos todas as soluções básicas factíveis, concluímos que a melhor alternativa é dada pela **Solução básica 9**, onde $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$, ou seja, pelo método analítico, a solução básica factível $(1, 3)$ é ótima. Observe ainda que essa é a mesma resposta obtida pelo método gráfico.

Em todos os exemplos apresentados até então, podemos observar que a solução ótima, quando existia e era única, estava localizada em algum vértice do conjunto viável S. Por isso, poderíamos intuir que essa condição é verdadeira para quaisquer problemas de Otimização Linear. Felizmente, tal afirmação foi demonstrada como verdadeira desde que o conjunto viável seja convexo. Formalmente temos os seguintes resultados onde suas demonstrações encontram-se em Luenberger e Ye (1984):

Teorema 3.2.1. *Para problemas de Otimização Linear com uma única solução ótima, a função objetivo atinge seu ponto máximo ou mínimo em um vértice do conjunto viável S desde que S seja convexo.*

No contexto do método analítico temos ainda que:

Teorema 3.2.2. *Toda solução básica factível de um problema de Otimização Linear é um vértice do conjunto viável e convexo S.*

Os teoremas acima, viabilizaram o desenvolvimento do Método Simplex, que veremos no capítulo a seguir.

3.3 Exercícios

Exercício 3.3.1. *Encontre a região factível S dos seguintes problemas de Otimização Linear:*

(a)

$$\begin{aligned} \textit{Maximizar} \quad & f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \\ \textit{sujeito a} \quad & x_1 \leqslant 2 \\ & x_2 \leqslant 3 \\ & x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \textit{Minimizar} \quad & f(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2 \\ \textit{sujeito a} \quad & x_1 \leqslant 2 \\ & x_2 \geqslant 3 \\ & x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \textit{Minimizar} \quad & f(x_1, x_2) = x_1 - 5x_2 \\ \textit{sujeito a} \quad & x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\ & x_1 + x_2 = 9 \\ & x_1 \leqslant 6 \\ & x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Exercício 3.3.2. *Escreva o problema de Otimização Linear* (3.2) *na forma padrão, determine o número máximo de soluções básicas e em seguida responda se a solução analítica é viável neste caso. Justifique a resposta.*

Exercício 3.3.3. *Resolva os seguintes problemas de Otimização Linear utilizando ambos os métodos de resolução (analítico e gráfico):*

(a)

$$\begin{aligned} \textit{Maximizar} \quad & f(x_1, x_2) = 8x_1 + 4x_2 \\ \textit{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ & x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \textit{Minimizar} \quad & f(x_1, x_2) = x_1 + 5x_2 \\ \textit{sujeito a} \quad & x_1 + 2x_2 \leqslant 7 \\ & x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Exercício 3.3.4. *Resolva o problema de Otimização Linear* (3.3) *pelo método analítico.*

Capítulo 4

Método Simplex

O método gráfico apresentado no Capítulo 3 pode ser utilizado apenas para problemas com duas ou três variáveis. Para problemas maiores, com muitas variáveis e equações, este método torna-se inviável. Da mesma forma, o método analítico se torna impraticável, pois calcula todas as soluções básicas até encontrar a solução ótima. Por isso, necessitamos de uma técnica mais eficiente para resolver esses problemas. Apresentaremos, neste capítulo, o *Método Simplex*.

4.1 Introdução

Matematicamente, um *simplex* é uma generalização de um triângulo ou de um tetraedro em qualquer dimensão. É chamado assim por ser o polígono mais simples em sua dimensão (um triângulo em duas dimensões, um tetraedro em três dimensões, etc.). O *Método Simplex*, proposto por George Dantzig, trata-se de um algoritmo de busca das soluções que parte de uma solução básica factível inicial e busca, a cada iteração, uma nova solução básica factível com melhor valor na função objetivo, até que o valor ótimo seja atingido. O Método Simplex funciona movendo-se ao longo dos vértices de um poliedro que representa o conjunto de soluções viáveis até encontrar a solução ótima.

Antes da formulação do *Método Simplex*, a Otimização linear era bem menos utilzada devido à grande dificuldade computacional de se resolver problemas lineares, pelo fato de existir um grande número de possíveis soluções a serem analisadas. Com o *Método Simplex* essa dificuldade foi contornada, pois o algoritmo realiza uma busca apenas nos vértices do poliedro formado pelas restrições do problema.

4.2 A lógica do Método Simplex

O *Método Simplex* é um método iterativo que parte de uma solução básica factível inicial e busca, a cada iteração, uma nova solução básica factível, chamada solução básica factível adjacente, com melhor valor na função objetivo, até que o valor ótimo seja atingido.

Definição 4.2.1. ***(Solução básica adjacente)*** *Para um problema definido por um sistema linear de n variáveis, sendo m variáveis básicas e $n - m$ variáveis não básicas, duas soluções básicas são adjacentes se elas tiverem em comum $m - 1$ variáveis básicas, podendo as mesmas apresentarem valores numéricos diferentes.*

Uma solução básica adjacente difere da solução básica anterior por uma única variável: ao mover-se de uma solução básica para uma adjacente, uma variável básica (que não é zero) é substituída por uma variável não básica (que era zero), e vice-versa. Este processo de trocar uma variável básica por uma variável não básica é conhecido como troca de base, e ele é crucial no Método Simplex. O objetivo do método é determinar qual variável entra na base (uma variável não básica) e qual sai (uma variável básica) para mover-se para uma solução básica adjacente que melhora o valor da função objetivo.

Geometricamente, as soluções básicas correspondem aos vértices de um poliedro. Cada vértice representa uma possível solução do problema e as soluções básicas adjacentes são vértices que estão conectados por uma aresta do poliedro.

Se a solução básica adjacente atende as restrições de não negatividade, ela é chamada de **solução básica factível adjacente**. Conforme o Teorema 1, toda solução básica factível é um ponto extremo (vértice) da região factível. Dessa forma, dois vértices são adjacentes se estão ligados por um segmento de reta chamado aresta, o que significa que eles compartilham $n-1$ restrições. Assim como no procedimento analítico, para que o método Simplex seja aplicado, o problema deve estar na forma padrão. O algoritmo do método Simplex pode ser descrito por meio de um fluxograma, conforme mostra a Figura 4.1.

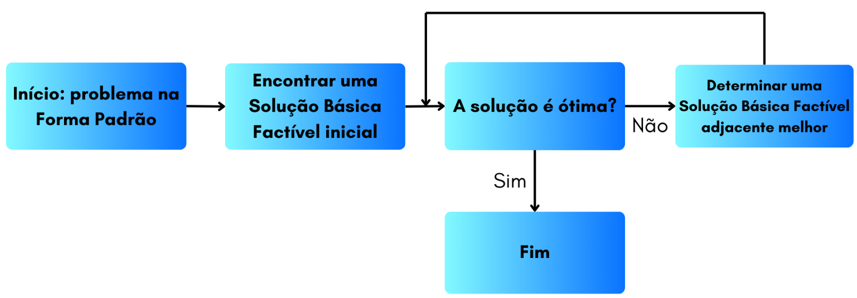

Figura 4.1: Fluxograma da descrição geral do algoritmo Simplex.

4.3 Solução analítica do Método Simplex

Para melhor compreensão, apresentamos abaixo os passos detalhados da resolução analítica do Método Simplex para problemas de Otimização linear em que a função objetivo z é de maximização.

Algoritmo para a solução de problemas de minimização de Otimização Linear pela forma analítica do Método Simplex

Início: O problema deve estar na forma padrão.
Passo 1: Encontrar uma solução básica factível inicial para o problema
Uma solução básica factível inicial pode ser obtida atribuindo-se valores iguais a zero às variáveis de decisão. Para que essa solução seja factível, nenhuma das restrições do problema pode ser violada.
Passo 2: Teste de otimalidade
Uma solução básica factível é ótima se não houver soluções básicas factíveis adjacentes melhores. Uma solução básica factível é melhor do que a atual se houver um incremento negativo no valor da função objetivo z. Analogamente, uma solução básica factível adjacente é pior do que a solução básica factível atual se o incremento em z for positivo. Enquanto pelo menos uma das variáveis não básicas da função objetivo z tiver coeficiente negativo, há uma solução básica factível adjacente melhor.
Iteração: Determinar uma solução básica factível adjacente melhor
A direção de maior incremento negativo em z deve ser identificada, para que uma melhor solução básica factível seja determinada. Para isso, três passos devem ser seguidos:

1. Determinar a variável não básica que passará para o conjunto de variáveis básicas (base). Ela deve ser aquela que tem maior incremento negativo em z, isto é, com maior coeficiente negativo em z.
2. Escolher a variável básica que passará para o conjunto de variáveis não básicas. A variável escolhida a sair da base deve ser aquela que limita o crescimento da variável não básica selecionada no passo anterior a entrar na base.
3. Resolver o sistema de equações recalculando os valores da nova solução básica adjacente. Antes disso, o sistema de equações deve ser convertido para uma forma conveniente, por meio de operações elementares, utilizando o método de eliminação de Gauss-Jordan. A partir do novo sistema de equações, cada equação deve possuir apenas uma variável básica com coeficiente igual a 1 e cada variável básica deve aparecer em apenas uma equação. Além disso, a função objetivo z deve ser escrita em função das variáveis não básicas, de forma que os valores das novas variáveis básicas e da função z podem ser obtidos diretamente, e o teste de otimalidade pode ser verificado facilmente.

Tabela 4.1: Algoritmo da solução analítica do Método Simplex

Exemplo 4.3.1. *Resolver o problema a seguir pela solução gráfica e em seguida pela solução analítica do Método Simplex.*

$$\begin{aligned} \textit{Maximizar} \quad & z = 3x_1 + 2x_2 \\ \textit{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ & 5x_1 + 2x_2 \leqslant 20 \\ & x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Solução

Utilizando o passo a passo apresentado no Capítulo 3, podemos definir a região factível e encontrar a solução ótima do problema graficamente. Essa solução é mostrada na Figura 4.2.

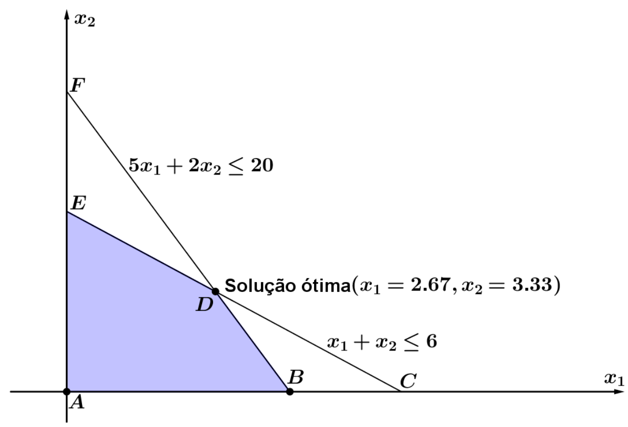

Figura 4.2: Resolução gráfica do Exemplo 4.3.1

No Capítulo 3, também foi mostrada a solução analítica de um problema de Otimização linear, em que foram calculadas todas as possíveis soluções básicas e escolhida a melhor delas. Utilizando o algoritmo da Tabela 4.1, vamos encontrar a solução do Exemplo 4.3.1 por meio da resolução analítica do Método Simplex.

Início: Devemos colocar o problema na forma padrão, conforme a Definição 2.3.1.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & z = -3x_1 - 2x_2 && (4.1)\\ \text{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 6 && (4.2)\\ & 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 20 && (4.3)\\ & x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0. && (4.4) \end{aligned}$$

Passo 1: Encontrar uma solução básica factível inicial para o problema

Uma solução básica inicial pode ser obtida atribuindo valores iguais a zero às variáveis de decisão x_1 e x_2, que, nesse caso, serão as variáveis não básicas. Note que os valores das variáveis básicas x_3 e x_4 podem ser obtidos imediatamente a partir do sistema de equações da forma padrão do problema, já que cada equação possui apenas uma variável básica com coeficiente 1 e cada variável básica aparece em apenas uma equação. Além disso, como a função objetivo está escrita em função de cada uma das variáveis não básicas, podemos aplicar um teste de otimalidade facilmente. O resultado completo da solução inicial é:

- $VNB = \{x_1, x_2\}$ e $VB = \{x_3, x_4\}$
- Solução não básica: $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$
- Solução básica factível: $x_3 = 6$ e $x_4 = 20$
- Solução: $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{0, 0, 6, 20\}$
- Função objetivo: $z = 0$

Passo 2: Teste de otimalidade

Podemos afirmar que que a solução básica factível obtida no Passo 1 não é ótima, já que os coeficientes das variáveis não básicas x_1 e x_2 na função objetivo (4.1) são negativos. Se qualquer uma das variáveis deixar de assumir o valor zero, passando a assumir um valor positivo, haverá um incremento negativo no valor da função z. Assim, é possível obter uma solução básica factível melhor.

Iteração 1: Determinar uma solução básica factível melhor

1. Escolha da variável não básica que entrará na base

   De acordo com o sistema de equações na forma padrão no problema, pode-se verificar que a variável x_1 possui maior coeficiente positivo na função objetivo em relação à variável x_2, gerando assim maior incremento negativo em z, caso fossem consideradas as mesmas unidades de medida para x_1 e x_2. Logo, escolhemos x_1 para entrar na base:

$$VNB = \left\{ \overset{\uparrow}{x_1}, x_2 \right\}$$

2. Escolha da variável básica que sairá da base

   Para selecionar a variável básica que sairá da base, devemos escolher aquela que limita o crescimento da variável não básica escolhida no passo anterior a entrar na base, ou seja, x_1. Para isso, primeiramente devemos atribuir o valor zero às variáveis que permaneceram não básicas (nesse caso, apenas x_2) em todas as equações. A partir daí, pode-se obter as equações de cada uma das variáveis básicas em função da variável não básica escolhida a entrar na base. Como todas as variáveis básicas devem assumir valores não negativos, inserindo-se o sinal de desigualdade $\geqslant$ em cada uma das restrições pode-se identificar a variável básica que limita o crescimento de x_1. Assim, atribuindo o valor zero à variável x_2 nas equações (4.2) e (4.3), pode-se obter as equações das variáveis básicas x_3 e x_4 em função de x_1 :

$$\begin{aligned} x_3 &= 6 - x_1 \\ x_4 &= 20 - 5x_1 \end{aligned}$$

   Como as variáveis x_3 e x_4 devem assumir valores não negativos, então:

$$\begin{aligned} x_3 &= 6 - x_1 \geqslant 0 \Longrightarrow x_1 \leqslant 6 \\ x_4 &= 20 - 5x_1 \geqslant 0 \Longrightarrow x_1 \leqslant 4 \end{aligned}$$

   Podemos concluir que a variável que limita o crescimento de x_1 é a variável x_4, já que o valor máximo que x_1 pode atingir a partir de x_4 é menor comparado à variável x_3. Portanto, a variável básica escolhida para sair da base é x_4:

$$VB = \left\{ x_3, \overset{\uparrow}{x_4} \right\}$$

3. Reescrever o sistema de equações utilizando o método de eliminação de Gauss-Jordan e recalcular a solução básica

Conforme os passos anteriores, a variável x_1 entra na base no lugar da variável x_4, de forma a gerar uma solução básica adjacente melhor. Portanto, o conjunto de variáveis não básicas e o conjunto de variáveis básicas passam a ser:

$$VNB = \{x_2, x_4\} \text{ e } VB = \{x_1, x_3\}$$

Nessa etapa, busca-se recalcular os valores da nova solução básica factível. Como x_4 representa a nova variável não básica na solução adjacente, juntamente à x_2 que permaneceu não básica, tem-se que $x_2 = x_4 = 0$. A partir daí, os valores das variáveis básicas x_1 e x_3 da solução adjacente devem ser recalculados, além do valor da função objetivo z.

Primeiramente, o sistema de equações deve ser convertido para uma forma mais conveniente, utilizando-se o método de eliminação de Gauss-Jordan, de modo que cada equação possua apenas uma variável básica (x_1 ou x_3) com coeficiente igual a 1, cada variável básica apareça em apenas uma equação e de forma que a função objetivo possa ser escrita em função das variáveis não básicas x_2 e x_4.

Para isso, os coeficientes da variável x_1 no sistema de equações devem ser transformados de -3, 1 e 5 para 0, 0 e 1, respectivamente (coeficientes da variável x_4 no sistema).

Primeiramente, convertemos o coeficiente da variável x_1 na equação (4.3) do sistema de 5 para 1. Para isto, basta dividir essa equação por 5, de forma que a nova equação passa a ser escrita em função de uma única variável básica com coeficiente 1:

$$x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_4 = 4. \tag{4.5}$$

Outra transformação deve ser feita de modo a converter o coeficiente da variável x_1 na equação (4.2) de 1 para 0. Para isso, basta subtrair a equação (4.5) que encontramos acima da equação (4.2), de forma que a nova equação passa a ser escrita em função de uma única variável básica com coeficiente 1:

$$\frac{3}{5}x_2 + x_3 - \frac{1}{5}x_4 = 2. \tag{4.6}$$

Finalmente, deve-se converter o coeficiente da variável x_1 na função objetivo (4.1) de 3 para 0. Para isso, basta multiplicar a equação (4.5) por -3 e subtraí-la da equação (4.1), de forma que a nova equação passa a ser escrita em função de x_2 e x_4:

$$z = -\frac{4}{5}x_2 + \frac{3}{5}x_4 - 12 \tag{4.7}$$

O sistema de equações completo, obtido após a aplicação do método de eliminação de Gauss-Jordan, é:

$$z = -\frac{4}{5}x_2 + \frac{3}{5}x_4 - 12 \tag{4.8}$$

$$\frac{3}{5}x_2 + x_3 - \frac{1}{5}x_4 = 2 \tag{4.9}$$

$$x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_4 = 4 \tag{4.10}$$

A partir do novo sistema de equações é possível obter os novos valores de x_1, x_3 e z. O resultado completo da nova solução é

- $VNB = \{x_2, x_4\}$ e $VB = \{x_1, x_3\}$
- Solução não básica: $x_2 = 0$ e $x_4 = 0$
- Solução básica factível: $x_1 = 4$ e $x_3 = 2$
- Solução: $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{4, 0, 2, 0\}$
- Função objetivo: $z = -12$

Dessa forma, foi possível obter uma solução básica factível adjacente melhor, já que houve um incremento negativo em z comparado com a solução básica factível atual. A solução básica factível adjacente obtida nessa iteração passa a ser a solução básica factível atual.

Passo 2: Teste de otimalidade

A solução básica factível atual ainda não é ótima, já que o coeficiente da variável não básica x_2 na função objetivo (4.8) é negativo. Se essa variável passar a assumir qualquer valor positivo, haverá um incremento negativo no valor da função objetivo z, de modo que é possível encontrar uma solução básica factível adjacente melhor.

Iteração 2: Determinar uma solução básica factível melhor

1. Escolha da variável não básica que entrará na base

   De acordo com o novo sistema de equações, pode-se verificar que a variável x_2 é a única com coeficiente positivo na equação da função objetivo, de forma a gerar um incremento negativo na função z para qualquer valor positivo que a variável x_2 passa a assumir. Logo, a variável escolhida a passar do conjunto de variáveis não básicas para o conjunto de variáveis básicas é x_2:

   $$VNB = \left\{ \overset{\uparrow}{x_2}, x_4 \right\}$$

2. Escolha da variável básica que sairá da base

   A variável básica que sairá da base é aquela que limita o crescimento da variável não básica escolhida no passo anterior a entrar na base, ou seja, x_2. Atribuindo o valor zero à variável que permaneceu não básica, ou seja, x_4, em cada uma das equações, é possível obter as equações de cada uma das variáveis básicas x_1 e x_3 da solução básica atual em função da variável não básica escolhida para entrar na base:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 4 - \frac{2}{5}x_2 \\
x_3 &= 2 - \frac{3}{5}x_2
\end{aligned}
$$

Como as variáveis x_1 e x_3 devem assumir valores não negativos, então

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 4 - \frac{2}{5}x_2 \geqslant 0 \Longrightarrow x_2 \leqslant 10 \\
x_3 &= 2 - \frac{3}{5}x_2 \geqslant 0 \Longrightarrow x_2 \leqslant \frac{10}{3}
\end{aligned}
$$

Podemos concluir que a variável que limita o crescimento de x_2 é a variável x_3, já que o valor máximo que x_2 pode assumir a partir de x_3 é menor comparado à variável x_1. Portanto, a variável básica escolhida para sair da base é x_3:

$$VB = \left\{ x_1, \overset{\uparrow}{x_3} \right\}$$

3. Reescrever o sistema de equações utilizando o método de eliminação de Gauss-Jordan e recalcular a solução básica

Conforme mostrado nos dois passos anteriores, a variável x_2 entra na base no lugar da variável x_3, de forma a gerar uma solução básica adjacente melhor. Portanto, o conjunto de variáveis não básicas e o conjunto de variáveis básicas passam a ser:

$$VNB = \{x_3, x_4\} \text{ e } VB = \{x_1, x_2\}$$

Antes de calcular os valores da nova solução básica, o sistema de equações deve ser convertido por meio do método de eliminação de Gauss-Jordan. Neste caso, os coeficientes da variável x_2 no sistema de equações atual devem ser transformados de $-4/5$, $3/5$ e $2/5$ para 0, 1 e 0.

Primeiramente, convertemos o coeficiente da variável x_2 na primeira equação do sistema de $3/5$ para 1. Para isso, basta multiplicar a primeira equação por $5/3$, de forma que a nova equação passa a ser escrita em função de uma única variável básica, isto é, x_2 com coeficiente 1:

$$x_2 + \frac{5}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 = \frac{10}{3} \tag{4.11}$$

Analogamente, deve-se converter o coeficiente da variável x_2 na segunda equação do sistema de $2/5$ para 0. Para isso, basta multiplicar a equação (4.11) por $2/5$ e subtraí-la da equação (4.10), de forma que a nova equação passa a ser escrita em função de uma única variável básica com coeficiente 1:

$$x_1 - \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 = \frac{8}{3} \tag{4.12}$$

Finalmente, deve-se converter o coeficiente da variável x_2 na função objetivo (4.8) de $4/5$ para 0. Para isso, basta multiplicar a equação (4.11) por $-4/5$ e subtraí-la da equação (4.8), de forma que a nova equação passa a ser escrita em função de x_3 e x_4:

$$z = \frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{44}{3} \tag{4.13}$$

O sistema de equações completo é

$$\begin{aligned} z &= \frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{44}{3} \\ x_2 + \frac{5}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 &= \frac{10}{3} \\ x_1 - \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 &= \frac{8}{3} \end{aligned} \tag{4.14}$$

A partir do novo sistema de equações, é possível obter imediatamente os novos valores de x_1, x_2 e z. O resultado completo da nova solução é:

- $VNB = \{x_3, x_4\}$ e $VB = \{x_1, x_2\}$
- Solução não básica: $x_3 = 0$ e $x_4 = 0$
- Solução básica factível: $x_1 = 8/3$ e $x_2 = 10/3$
- Solução: $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{8/3, 10/3, 0, 0\}$
- Função objetivo: $z = -44/3 \approx -14,66$

Essa solução corresponde ao vértice D da região factível ilustrada na Figura 4.2. A direção de incremento em z, a partir da solução inicial, passa pelos vértices $A \longrightarrow B \longrightarrow D$ da solução gráfica. Assim, foi possível obter uma solução adjacente melhor, já que houve um incremento positivo em z comparada com a solução básica factível atual.

Passo 2: Teste de otimalidade

A solução básica factível atual é a solução ótima, já que os coeficientes das variáveis não básicas x_3 e x_4 na função objetivo (4.14) são positivos. Portanto, não é mais possível nenhum incremento negativo no valor da função objetivo z.

4.4 Análise de sensibilidade

Uma das hipóteses de um modelo de problema de Otimização linear é assumir que todos os parâmetros, ou seja, os coeficientes da função objetivo, os coeficientes das variáveis de restrição e os termos independentes, são constantes e conhecidos. Porém, muitas vezes a estimativa desses parâmetros é baseadas em previsões futuras, de forma que mudanças podem ocorrer até que a solução final seja implementada no mundo real. Pode haver, por exemplo, alterações nas quantidades de recursos disponíveis, introdução de um novo produto, variação do preço de um produto, aumento ou diminuição dos custos de produção, entre outros.

Nesse sentido, a *análise de sensibilidade* é fundamental no estudo de problemas de Otimização linear e tem como objetivo investigar os efeitos que determinadas alterações nos parâmetros do modelo causariam na solução ótima. Especificamente, abordaremos a análise de sensibilidade na resolução de problemas por computador considerando três aspectos:

1. *Intervalos de variabilidade dos coeficientes da função objetivo:* São os intervalos nos quais cada coeficiente da função objetivo (fixados os demais) pode variar sem alterar a base ótima, ou seja, sem mudar a solução ótima encontrada.
2. *Shadow-price das restrições (Preço-sombra):* Valores de alteração no valor da função objetivo para alterações unitárias nas restrições do modelo.
3. *Custo reduzido das variáveis:* O custo reduzido de uma variável é a quantidade pela qual o coeficiente dessa variável na função objetivo deveria ser aumentado de modo que ela passe a fazer parte da solução. As variáveis cujos valores na solução já são diferentes de zero possuem um valor zero para o custo reduzido.

Ressaltamos que nosso objetivo não é trazer uma discussão teórica acerca da análise de sensibilidade de um problema de Otimização linear, mas realizar e interpretar essa análise na resolução dos problemas por computador utilizando a linguagem de programação Julia e um *solver* específico, o que será feito com os problemas que se encontram no Capítulo 6.

4.5 Exercícios

Exercício 4.5.1. *Resolva o Exemplo 1.3.1 da fábrica de rádios utilizando a solução analítica do Método Simplex.*

Exercício 4.5.2. *Resolva o Exercício 1.4.1 utilizando a solução analítica do Método Simplex.*

Exercício 4.5.3. *Sabe-se que uma pessoa necessita, em sua alimentação diária, de um mínimo de* 15 *unidades de proteínas e* 20 *unidades de carboidratos. Suponhamos que, para satisfazer essa necessidade, ela disponha dos produtos A e B. Um quilograma do produto A contém* 3 *unidades de proteínas,* 10 *unidades de carboidratos e custa* $R\$ \ 2,00$*. Um quilograma do produto B contém* 6 *unidades de proteínas,* 5 *unidades de carboidratos e custa* $R\$ \ 3,00$*. Que quantidade deve-se comprar de cada produto de modo que as exigências da alimentação sejam satisfeitas a um custo mínimo? Encontre o modelo matemático que descreve o problema, esboçe a região factível e resolva o problema pela solução analítica do Método Simplex.*

Exercício 4.5.4. *Uma transportadora utiliza burros e jumentos para transportar cargas entre duas cidades. A capacidade de carga de um burro é de até* $100 \ kg$*, enquanto a do jumento é de até* $50 \ kg$*. Durante a viagem, um burro consome* 3 *montes de capim e* 100 *litros de água. Um jumento cosnome* 2 *montes de capim e* 30 *litros de água. A empresa possui várias estações de alimentação intermediárias entre as duas cidades. Estas estações dispõem, no momento, de* 900 *litros de água e* 35 *montes de capim. Os burros e jumentos utilizados pela firma são alugados e o preço do aluguel é de* $R\$ \ 90,00$ *por burro e* $R\$ \ 60,00$ *por jumento. Existe, no momento, uma necessidade de transporte de* $1000 \ kg$*. Quantos burros e jumentos devem ser utilizados de modo a minimizar o custo do aluguel pago? Encontre o modelo matemático que descreve o problema, esboçe a região factível e resolva o problema pela solução analítica do Método Simplex.*

Capítulo 5

Método Simplex em *tableau*

As operações realizadas no Método Simplex podem ser organizadas em tabelas, chamadas **tabelas simplex**. Essas tabelas são muito úteis para problemas de pequena escala em Otimização Linear, facilitando o manuseio e a resolução.

5.1 Ideia básica

Considere o seguinte problema de Otimização Linear:

$$\begin{array}{rl}
\text{Minimizar} & f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{sujeito a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0
\end{array}$$

Os coeficientes do sistema de equações lineares e da função objetivo são suficientes para descrever o problema da seguinte forma:

Tabela 5.1: Tabela dos coeficientes

nº da equação	**Coeficientes**					**Constante**
	f	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	
0	1	c_1	c_2	$\ldots$	c_n	0
1	0	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}	b_1
2	0	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
m	0	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}	b_m

Exemplo 5.1.1. *Considere o seguinte problema*

$$
\begin{aligned}
\textit{Minimizar} \quad & f(x_1,x_2) = -x_1 - 2x_2 \\
\textit{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 \leqslant 6 \\
& x_1 - x_2 \leqslant 4 \\
& -x_1 + x_2 \leqslant 4 \\
& x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Convertendo o problema para a forma padrão, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & f(x_1,x_2) = -x_1 - 2x_2 \\
\text{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\
& x_1 - x_2 + x_4 = 4 \\
& -x_1 + x_2 + x_5 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0.
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Com base nessa formulação, podemos montar uma tabela com os coeficientes do problema na forma padrão:

Tabela 5.2: Tabela simplex inicial

Variável básica	nº da equação	Coeficientes						Constante
		f	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
f	0	1	-1	-2	0	0	0	0
x_3	1	0	1	1	1	0	0	6
x_4	2	0	1	-1	0	1	0	4
x_5	3	0	-1	1	0	0	1	4

Note que as colunas das variáveis de folga x_3, x_4, x_5 formam uma matriz indentidade. Essas variáveis são chamadas variáveis básicas.

Para obter uma solução factível inicial, atribuímos o valor zero às variáveis não básicas ($x_1 = 0$ e $x_2 = 0$), e podemos obter diretamente de (5.1) os valores para as variáveis básicas (x_3, x_4, x_5):

$$x_3 = 6, \quad x_4 = 4, \quad x_5 = 4.$$

Essa solução é um vértice da região factível, mas não é a solução ótima, já que a função objetivo decresce à medida que aumentamos x_1 e x_2.

Aumentando o valor de x_2 com $x_1 = 0$, a função objetivo diminui à taxa de -2, pois teríamos $f = -2x_2$ de forma que quanto maior x_2, menor será o valor de f. Por outro lado, aumentando o valor de x_1 com $x_2 = 0$, a função objetivo diminui à uma taxa de -1, de modo que a variável x_2 deve ser escolhida para entrar na base. Esse processo é conhecido como **estratégia simplex**, onde ajustamos uma variável não básica por vez.

Ao manter $x_1 = 0$ e aumentar x_2, devemos analisar as restrições para garantir que as variáveis básicas permaneçam não negativas, e encontrar a variável que limita o crescimento de x_2, a qual será substituída na base:

$$\begin{aligned} x_3 &= 6 - x_2 \geqslant 0 \quad &\Rightarrow \quad x_2 &\leqslant 6 \\ x_4 &= 4 + x_2 \geqslant 0 \quad &\Rightarrow \quad x_2 &\geqslant -4 \\ x_5 &= 4 - x_2 \geqslant 0 \quad &\Rightarrow \quad x_2 &\leqslant 4. \end{aligned}$$

Portanto, o valor máximo que x_2 pode assumir é 4, e a variável que limita seu crescimento é x_5, resultando na seguinte solução:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 8, \quad x_5 = 0.$$

O valor da função objetivo é $f = -8$. Nesta solução, a variável x_5 saiu da base e a variável x_2 entrou na base, portanto x_2 passa a ser a variável da terceira equação na tabela inicial.

Tabela 5.3: Tabela simplex inicial

Variável básica	**nº da equação**	**Coeficientes**						**Constante**
		f	x_1	$x_2 \downarrow$	x_3	x_4	x_5	
f	0	1	-1	-2	0	0	0	0
x_3	1	0	1	1	1	0	0	6
x_4	2	0	1	-1	0	1	0	4
$\leftarrow x_5$	3	0	-1	$\bar{1}$	0	0	1	4

As colunas das novas variáveis não básicas não formam a matriz identidade, portanto, a tabela deve ser atualizada. Este procedimento, que parte de uma solução básica factível e encontra outra melhor, consiste em uma iteração no Método Simplex. As operações em uma iteração são realizadas da seguinte forma:

1. Encontre uma variável não básica que tenha um coeficiente negativo na função objetivo, digamos x_k (essa variável entra na base).
2. Percorra a coluna da tabela simplex correspondente a x_k e, para cada coeficiente positivo ($a_{ik} > 0$), calcule a razão $\frac{b_i}{a_{ik}}$. Determine $l = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}} : a_{ik} > 0, i = 1, 2 \ldots, m\right\}$. Com isso, a variável $x_k = \frac{b_l}{a_{lk}}$ se anula, portanto a variável básica da linha l sai da base. Se $a_{ik} \leqslant 0$, então, f pode decrescer indefinidamente, ou seja, não tem solução ótima finita. Neste caso, pare.
3. Redefina as variáveis básicas e não básicas e reconstrua a tabela simplex para essa nova solução básica.

Para obter a nova tabela simplex com a redefinição das variáveis básicas e não básicas, precisamos "pivotear" a tabela anterior para que os coeficientes das variáveis básicas formem a matriz identidade e a função objetivo esteja em termos das novas variáveis não básicas. Para isso, utilizaremos as operações elementares entre linhas (ou equações, no caso do sistema) de uma matriz.

Analisando a tabela simplex inicial, notamos que a coluna da nova variável básica x_2 deve ser transformada na terceira coluna da matriz identidade. Para isso, considerando as linhas L_1, L_2, L_3 e L_4 dos coeficientes na tabela, realizamos as seguintes operações: $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_4$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_4$, $L_3 \leftarrow L_3 + L_4$.

Tabela 5.4: Tabela iteração 1

Variável básica	**nº da equação**	**Coeficientes**						**Constante**
		f	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
f	0	1	-3	0	0	0	2	$f+8$
x_3	1	0	$\bar{2}$	0	1	0	-1	2
x_4	2	0	0	0	0	1	1	8
x_2	3	0	-1	1	0	0	1	4

Essa tabela é equivalente ao problema

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & f = -3x_1 + 2x_5 - 8, \\
\text{sujeito a} \quad & 2x_1 + x_3 - x_5 = 2, \\
& x_4 + x_5 = 8, \\
& -x_1 + x_2 + x_5 = 4, \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Aumentando o valor de x_1 e mantendo $x_5 = 0$, a função objetivo f decresce a uma taxa de -3. As equações nos dizem que, com $x_5 = 0$,

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 2 - 2x_1 \geqslant 0, \\
x_4 &= 8 \geqslant 0, \\
x_2 &= 4 + x_1 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, o valor máximo para x_1 é $\frac{b_1}{a_{11}} = \frac{2}{2} = 1$. Sendo assim, a variável básica na primeira equação, $x_3 = 2 - 2x_1$, se anula, enquanto a variável não básica x_1 torna-se positiva. Isso produz uma nova solução básica:

- Variáveis não básicas: $x_1 = 1, x_5 = 0$.
- Variáveis básicas: $x_3 = 0, x_4 = 8, x_2 = 5$.

Novamente, definimos as variáveis não básicas como aquelas cujos valores são nulos, e as variáveis básicas cujos valores são positivos. Assim, temos:

- Variáveis não básicas: $x_3 = 0, x_5 = 0$.
- Variáveis básicas: $x_1 = 1, x_4 = 8, x_2 = 5$.

Como a variável x_1 "entrou na base" e a variável x_3 "saiu da base", vamos reescrever a nova tabela simplex "pivoteando" o elemento $(1, 1)$, transformando a coluna x_1 na primeira coluna da matriz identidade e x_1 na variável básica da primeira equação, obtendo:

Tabela 5.5: Tabela iteração 2

Variável básica	nº da equação	Coeficientes						Constante
		f	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
f	0	1	0	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$f + 11$
x_1	1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	1
x_4	2	0	0	0	0	1	1	8
x_2	3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	5

A tabela da iteração 2 fornece as equações:

$$
\begin{aligned}
f &= -11 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_5, \\
x_1 &= 1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5, \\
x_4 &= 8 - x_5, \\
x_2 &= 5 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5.
\end{aligned}
$$

Ao considerar $(x_3, x_5) = (0, 0)$, obtemos a solução básica $(x_3, x_4, x_5) = (1, 8, 5)$, com $f(1, 5, 0, 8, 0) = -11$. Como qualquer outra solução factível é obtida atribuindo valores a x_3 e x_5, e como ambos têm coeficientes positivos, a função objetivo cresce, ou seja, $f(x) \geqslant -11$ para qualquer outra solução factível. Isso implica que a solução básica atual é ótima. Quando os coeficientes são não negativos, dizemos que a condição de otimalidade foi verificada.

5.2 Algoritmo Simplex em tableau

Considere um problema de Otimização Linear escrito na forma padrão. O algoritmo do Método Simplex em tableau é descrito nos passos a seguir.

Fase 1: Determine uma tabela simplex inicial, isto é,

- A matriz dos coeficientes contém uma matriz indentidade $m \times m$ (m é o número de equações e de incógnitas), e os termos independentes $b_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, m$.
- A função objetivo é escrita em termos de variáveis não-básicas, ou seja, os coeficientes das variáveis básicas são nulos.

Fase 2:

1. Determine o menor dos custos relativos: $c_k = \min\{c_j$ para toda variável não-básica$\}$.
2. Se $c_k \geqslant 0$, então pare (A solução básica atual é ótima). Se não, a variável x_k entra na base.
3. Se $a_{ik} \leqslant 0, i = 1, \ldots, m$, então pare (não existe solução ótima finita). Se não, determine: $\frac{b_l}{a_{lk}} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}} \text{ tal que } a_{ik} \geqslant 0, i = 1, \ldots, m\right\}$ (A variável básica da linha l sai da base)
4. Atualiza a tabela simplex (pivoteando o elemento (l, k)). A variável x_k passa a ser a variável básica da linha l.

O processo descrito acima é repetido até que a solução básica atual seja ótima.

5.3 Exercícios

Exercício 5.3.1. *Resolva o seguinte problema de otimização Linear usando o método simplex em tabelas:*

$$\begin{aligned} \textit{Maximizar} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \textit{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ & 5x_1 + 2x_2 \leqslant 4 \\ & x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Capítulo 6

Categorias de problemas

Neste capítulo, exploraremos diferentes categorias de problemas de Otimização Linear, destacando suas principais características por meio de exemplos práticos. A resolução desses problemas, no entanto, não será abordada aqui, pois será realizada computacionalmente durante as aulas do minicurso e disponibilizado em nosso repositório do *GitHub*: (`https://github.com/petimatematica/intro_otimizacao_linear`). Destacamos que todos os problemas apresentados já satisfazem as hipóteses de linearidade discutidas no Capítulo 2 deste material, garantindo que possam ser adequadamente modelados e resolvidos como problemas de Otimização Linear.

6.1 Problemas de mistura

Um problema de mistura, em geral, envolve a produção de um produto final, chamado de *mistura*, através da combinação de diversos materiais. O objetivo central desses problemas é minimizar o custo ou maximizar o lucro da mistura, levando em consideração que as matérias-primas possuem diferentes valores e composições. As restrições impostas no problema dizem respeito à proporção em que cada componente deve estar no produto, garantindo que a mistura atenda às especificações desejadas. O custo unitário dos ingredientes e as proporções de cada componente são previamente definidos.

Um exemplo clássico do problema de mistura é o da produção de rações. Diversas fábricas desenvolvem diferentes tipos de rações destinados a animais, utilizando uma combinação de vários alimentos e farinhas, cujos preços de mercado são previamente conhecidos. A composição nutricional desses ingredientes também é bem estabelecida, incluindo a quantidade de calorias, proteína, cálcio, ferro, magnésio, e outros nutrientes. A nutrição veterinária define as necessidades mínimas e máximas de cada nutriente por quilo de ração para diferentes tipos de animais. Surge, então, um problema de otimização para determinar as quantidades ideais de cada ingrediente que devem ser utilizadas por quilo de ração, de modo a atender às exigências nutricionais e, ao mesmo tempo, minimizar o custo total dos ingredientes. É importante destacar que as necessidades nutricionais funcionam como restrições, o que significa que nem toda combinação de ingredientes será aceitável, e o critério de custo é fundamental para identificar a solução.

Além da fabricação de ração, outros problemas podem ser categorizados como problemas de mistura. Um exemplo é a produção de ligas metálicas, em que diferentes insumos são colocados em um forno de alta temperatura, no qual, em estado líquido, se misturam para formar uma liga metálica. Outro exemplo comum é o problema da dieta, onde o objetivo é combinar diferentes alimentos para atender requisitos nutricionais mínimos ao menor custo possível. Por último, citamos o problema da produção de combustíveis, onde diferentes tipos de combustíveis ou aditivos são combinados para produzir um combustível final com propriedades específicas. Um problema deste tipo será abordado neste capítulo.

6.1.1 Modelagem matemática

Seja n o número de ingredientes a serem utilizados na produção e m o número de componentes relevantes para a mistura. Escrevemos o modelo matemático identificando inicialmente as variáveis do problema, ou seja, as quantidades dos ingredientes. Definimos as variáveis:

x_j: quantidade do ingrediente j, que deve ser ultilizada em uma unidade de mistura, onde $j = 1, 2, ..., n$.

Note que um valor negativo para x_j não tem significado. Assim, $x_j \geqslant 0$ e $j = 1, 2, ..., n$ são restrições do modelo. Além disso, também podemos atribuir

$$\begin{aligned} a_{ij} &: \text{ quantidade do componente } i \text{ em uma unidade do ingrediente } j \\ b_i &: \text{ quantidade do componente } i \text{ na mistura} \\ c_j &: \text{ custo de uma unidade do ingrediente } j \end{aligned}$$

onde $i = 1, ..., m$. Note que $a_{ij}x_j$ é a quantidade do componente i em x_j unidades do ingrediente j. Portanto $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n$ é a quantidade total do componente i em uma unidade da mistura. Logo, temos

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i \quad i = 1, 2, ..., m. \tag{6.1}$$

A soma das quantidades dos ingredientes deve resultar em uma unidade da mistura, ou seja, $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$. Em (6.1), supõe-se que não há alterações na composição dos ingredientes quando estes se misturam. Por exemplo, a quantidade de cálcio da ração é dada pela soma de cálcio presente em cada ingrediente. Por fim, consideraremos que o custo de uma unidade da mistura é dado pela soma dos custos de todos os ingredientes ultilizados, isto é, $c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$. Desejamos minimizar o custo da ração, logo, o problema de mistura é dado por:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\ \text{sujeito a} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ & x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \\ & x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0, \ldots, \ x_n \geqslant 0. \end{aligned}$$

6.1.2 Problema da fabricação de ração

Uma agroindústria deve produzir um tipo de ração para determinado animal. Essa ração é produzida pela mistura de farinhas de três ingredientes básicos: osso, soja e peixe. Cada um desses três ingredientes contém diferentes quantidades de dois nutrientes necessários a uma dieta nutricional balanceada: proteína e cálcio. O nutricionista especifica as necessidades mínimas desses nutrientes em 1kg de ração. Cada ingrediente é adquirido no mercado com um certo custo unitário $(R\$/kg)$. Na Tabela 6.1, os dados do problema são apresentados.

	Ingredientes			
Nutrientes	Osso	Soja	Peixe	**Ração**
Proteína	0,2	0,5	0,4	0,3
Cálcio	0,6	0,4	0,4	0,5
Custos $(R\$/kg)$	0,56	0,81	0,46	

Tabela 6.1: Dados para o problema da ração

A farinha de osso é constituída de 20% de proteína e 60% de cálcio; a ração deve ser composta de pelo menos 30% de proteína e 50% de cálcio; $1kg$ da farinha de osso custa $R\$0,56$ (os ingredientes podem ser constituídos por outros elementos, mas que não são importantes para o problema em questão). Deve-se determinar em que quantidades os ingredientes devem ser misturados de modo a produzir uma ração que satisfaça às restrições nutricionais com o menor custo.

Solução: Defina a variável de decisão x_j como a quantidade (em kg) do ingrediente j que deve ser utilizado em uma unidade $(1kg)$ da ração, onde j = osso, soja ou peixe. Com isso, o custo da mistura é dado por:

$$f(x_{osso}, x_{soja}, x_{peixe}) = 0,56x_{osso} + 0,81x_{soja} + 0,46x_{peixe}$$

e as restrições de composição são dadas por:

$$0,2x_{osso} + 0,5x_{soja} + 0,4x_{peixe} \geqslant 0,3$$

$$0,6x_{osso} + 0,4x_{soja} + 0,4x_{peixe} \geqslant 0,5.$$

Temos também que a soma dos ingredientes resulta em uma unidade da mistura, ou seja,

$$x_{osso} + x_{soja} + x_{peixe} = 1,$$

e que esses ingredientes podem ser ultilizados ou não, isto é,

$$x_{osso} \geqslant 0, \;\; x_{soja} \geqslant 0, \; x_{peixe} \geqslant 0.$$

O modelo matemático completo do problema é dado por

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & f(x_{osso}, x_{soja}, x_{peixe}) = 0,56x_{osso} + 0,81x_{soja} + 0,46x_{peixe} \\ \text{sujeito a} & 0,2x_{osso} + 0,5x_{soja} + 0,4x_{peixe} \geqslant 0,3 \\ & 0,6x_{osso} + 0,4x_{soja} + 0,4x_{peixe} \geqslant 0,5 \\ & x_{osso} + x_{soja} + x_{peixe} = 1 \\ & x_{osso} \geqslant 0, \;\; x_{soja} \geqslant 0, \; x_{peixe} \geqslant 0. \end{array}$$

A solução ótima deste modelo, é dada por $\bar{x}_{osso} = 0,5$, $\bar{x}_{soja} = 0$ e $\bar{x}_{peixe} = 0,5$. Isto é, a ração deve ser constituída de 50% de farinha de osso e 50% de farinha de peixe.

6.1.3 Problema da fabricação de gasolina

A refinaria de petróleo Petrisul utiliza três tipos de óleo bruto (óleo 1, óleo 2 e óleo 3) para produzir três tipos de gasolina: *comum*, *super* e *extra*. Para garantir a qualidade, cada tipo de gasolina exige determinadas especificações a partir da composição dos diversos tipos de óleo bruto.

Tipo de gasolina	**Especificações**
Comum	Até 70% do óleo 1
Super	Até 50% do óleo 1
	Pelo menos 10% do óleo 2
Extra	Até 50% do óleo 2
	Pelo menos 40 do óleo 3

Tabela 6.2: Especificações para cada tipo de gasolina

Para atender a demanda de seus clientes, a refinaria precisa produzir pelo menos 5.000 barris por dia da gasolina *comum* e 3.000 barris por dia da gasolina *super* e da gasolina *extra*. A capacidade diária disponível é de 10.000 barris do óleo 1, 8.000 do óleo 2 e 7.000 do óleo 3. A refinaria pode produzir até 20.000 barris de gasolina por dia. Além disso, lucra \$5 para cada barril de gasolina *comum* produzido, \$7 por barril de gasolina *super* e \$8 por barril de gasolina *extra*. Os custos de óleo bruto 1, 2 e 3 por barril são \$2, \$3 e \$3, respectivamente. Formule o problema de Otimização Linear de forma a maximizar o lucro diário.

Solução: Defina a variável de decisão x_{ij} como a quantidade de barris de óleo bruto i usados diariamente para produzir a gasolina j, onde $i, j = 1, 2, 3$.

Tem-se que:
Produção diária de gasolina *comum* = $x_{11} + x_{21} + x_{31}$
Produção diária de gasolina *super* = $x_{12} + x_{22} + x_{32}$

Produção diária de gasolina *extra* = $x_{13} + x_{23} + x_{33}$
Barris de óleo bruto 1 usados diariamente = $x_{11} + x_{12} + x_{13}$
Barris de óleo bruto 2 usados diariamente = $x_{21} + x_{22} + x_{23}$
Barris de óleo bruto 3 usados diariamente = $x_{31} + x_{32} + x_{33}$

A função objetivo do problema busca maximizar o lucro diário da refinaria. As restrições do modelo devem garantir que as especificações mínimas exigidas para cada tipo de gasolina sejam consideradas, que a demanda de seus clientes seja atendida e que as capacidades de produção de gasolina e de fornecimento de óleo bruto sejam respeitadas.

A receita diária a partir de cada barril de gasolina produzido é igual a

$$5(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 7(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 8(x_{13} + x_{23} + x_{33}).$$

Já os custos diários a partir de cada barril de óleo bruto adquirido é igual a

$$2(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 3(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 3(x_{31} + x_{32} + x_{33}).$$

A função objetivo pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} f(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}) = {} & (5-2)x_{11} + (5-3)x_{21} + (5-3)x_{31} + (7-2)x_{12} \\ & + (7-3)x_{22} + (7-3)x_{32} + (8-2)x_{13} + (8-3)x_{23} + (8-3)x_{33}. \end{aligned}$$

Além disso, a composição do tipo de gasolina comum deve conter, no máximo, 70% de óleo 1:

$$\frac{x_{11}}{x_{11} + x_{21} + x_{31}} \leqslant 0,70$$

que pode ser escrita como: $0,30x_{11} - 0,70x_{21} - 0,70x_{31} \leqslant 0$. Já a composição do tipo de gasolina *super* deve conter, no mínimo, 10% de óleo 2 e no máximo 50% de óleo 1:

$$\frac{x_{22}}{x_{12} + x_{22} + x_{32}} \geqslant 0,10 \quad \frac{x_{12}}{x_{12} + x_{22} + x_{32}} \leqslant 0,50$$

que podem ser escritas, respectivamente, como: $-0,10x_{12} + 0,90x_{22} - 0,10x_{32} \geqslant 0$ e $0,50x_{12} - 0,50x_{22} - 0,50x_{32} \leqslant 0$. A composição do tipo de gasolina *extra* deve conter, no mínimo, 40% de óleo 3 e no máximo, 50% de óleo 2:

$$\frac{x_{33}}{x_{13} + x_{23} + x_{33}} \geqslant 0,40 \quad \frac{x_{23}}{x_{13} + x_{23} + x_{33}} \leqslant 0,50$$

que podem ser escritas, respectivamente, como: $-0,40x_{13} - 0,40x_{23} + 0,60x_{33} \geqslant 0$ e $-0,50x_{13} + 0,50x_{23} - 0,50x_{33} \leqslant 0$. A demanda diária das gasolinas *comum*, *super* e *extra* devem ser atendidas:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geqslant 5.000$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geqslant 3.000$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geqslant 3.000$$

A quantidade máxima de barris de óleo bruto 1, óleo bruto 2 e óleo bruto 3 disponibilizados diariamente deve ser respeitada, logo devemos ter

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leqslant 10.000$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leqslant 8.000$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leqslant 7.000$$

A capacidade diária de produção da refinaria é de 20.000 barris de gasolina por dia, ou seja,

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{13} + x_{23} + x_{33} \leqslant 20.000$$

O problema completo está modelado a seguir:

$$\begin{aligned}
\text{Maximizar} \quad & f = 3x_{11} + 2x_{21} + 2x_{31} + 5x_{12} + 4x_{22} + 4x_{32} + 6x_{13} + 5x_{23} + 5x_{33} \\
\text{sujeito a} \quad & 0,30x_{11} - 0,70x_{21} - 0,70x_{31} \leqslant 0 \\
& 0,50x_{12} - 0,50x_{22} - 0,50x_{32} \leqslant 0 \\
& -0,10x_{12} + 0,90x_{22} - 0,10x_{32} \geqslant 0 \\
& -0,40x_{13} - 0,40x_{23} + 0,60x_{33} \geqslant 0 \\
& -0,50x_{13} + 0,50x_{23} - 0,50x_{33} \leqslant 0 \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} \geqslant 5.000 \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} \geqslant 3.000 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} \geqslant 3.000 \\
& x_{11} + x_{12} + x_{13} \leqslant 10.000 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} \leqslant 8.000 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} \leqslant 7.000 \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{13} + x_{23} + x_{33} \leqslant 20.000 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} \geqslant 0
\end{aligned}$$

6.2 Problemas de Transporte

Problemas de transporte envolvem a logística de distribuir diversos produtos dos centros de produção para os mercados consumidores, com o objetivo de minimizar o custo total do transporte. Geralmente, as quantidades produzidas em cada centro e as demandas de cada mercado são conhecidas. O desafio é realizar o transporte de maneira a atender às demandas dos mercados, respeitando as limitações de oferta de cada centro de produção e garantindo que o custo total seja o mais baixo possível. Usualmente, nos referimos aos centros de produção como *origens* e aos mercados consumidores como *destinos*.

6.2.1 Modelagem matemática

Suponha que existam m origens e n destinos para um produto. Além disso, considere as seguintes variáveis:

a_i : oferta do produto na origem i,
b_j : demanda do produto no destino j,
c_{ij} : custo do transporte de uma unidade do produto da origem i para o destino j,
x_{ij} : quantidade transportada do produto da origem i ao destino j,

onde $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$. Veja que o custo total do transporte a ser minimizado é dado por

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij},$$

que é a soma dos custos de transporte de todas as quantidades transportadas de todas as origens i a todos os destinos j. Sabemos ainda que as quantidades dos produtos transportados aos destinos não pode ultrapassar a quantidade disponível nas origens, ou seja,

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i, \ i = 1, ..., m.$$

Além disso, desejamos que as quantidades transportadas das diversas origens ao destino satisfaçam a demanda requerida neste destino. Assim, temos

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = 1, ..., n.$$

Por fim, considerando a não-negatividade da variável x_{ij}, a restrição $x_{ij} \geqslant 0$ será atribuída ao modelo. Dessa forma, o modelo matemático que descreve o problema é dado por

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x_{11}, x_{12}, ..., x_{mn}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \text{sujeito a} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i \quad i = 1, ..., m \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1, ..., n \\ & x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, ..., m \ e \ j = 1, ..., n. \end{array}$$

6.2.2 Problema da distribuidora de bebidas

Considere uma distribuidora de bebidas que tem 2 centros de produção (Araraquara e São José dos Campos) e 3 mercados consumidores principais (São Paulo, Belo Horizonte e Rio de Janeiro). O custo unitário de se transportar uma unidade do produto de cada centro de produção a cada mercado consumidor é dada na tabela 6.3, em que também são apresentadas as demandas de cada mercado e a quantidade máxima disponível do produto em cada centro de produção no próximo período.

Centro de Suprimento	**São Paulo**	**Belo Horizonte**	**Rio de Janeiro**	**Suprimento Disponível**
Araraquara	4	2	5	800
S. J. Campos	11	7	4	1000
Demanda dos Mercados	500	400	900	-

Tabela 6.3: Dados para o problema da distribuidora de bebidas.

Solução: Definindo a variável x_{ij} como a quantidade do produto a ser enviada do centro de produção i, em que $i = 1$ (Araraquara), 2 (São José dos Campos), ao mercado j, com $j = 1$ (São Paulo), 2 (Belo Horizonte), 3 (Rio de Janeiro), o modelo que representa o problema é dado por:

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & f(x_{11}, ..., x_{23}) = 4x_{11} + 2x_{12} + 5x_{13} + 11x_{21} + 7x_{22} + 4x_{23} \\
\text{sujeito a} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} \leqslant 800 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} \leqslant 1000 \\
& x_{11} + x_{21} = 500 \\
& x_{12} + x_{22} = 400 \\
& x_{13} + x_{23} = 900 \\
& x_{11} \geqslant 0, x_{12} \geqslant 0, x_{13} \geqslant 0, x_{21} \geqslant 0, x_{22} \geqslant 0, x_{23} \geqslant 0.
\end{aligned}$$

6.2.3 Problema da construção de rodovias

Suponha que, para a construção de uma rodovia, não estejam disponíveis jazidas de rochas adequadas à obtenção de pedra britada na região. Faz-se necessário, portanto, o transporte, ao menor custo, desse material de jazidas mais próximas para alguns pontos convenientes preestabelecidos ao longo do caminho onde será implantada a estrada. Na Figura 6.1, são apresentados todos os caminhos possíveis que ligam cada pedreira aos pontos de depósito.

Neste problema, temos $m = 4$ jazidas correspondentes às origens e $n = 3$ depósitos correspondentes aos destinos, cujos dados estão na tabela 6.4. As quantidades ofertadas a_i e as demandas b_j, em toneladas, bem como os custos de transportar 1 tonelada de pedra da pedreira i para o depósito j, são dados na tabela abaixo.

A unidade de referência pode ser alterada para outra mais apropriada, como, em vez de tonelada, poderia ser a carga de um caminhão, de modo que o custo de transportar uma unidade seria o custo de uma viagem de caminhão.

	Depósitos			
Pedreiras	1	2	3	**Oferta** a_i
1	30	13	21	433
2	12	40	26	215
3	27	15	35	782
4	37	25	19	300
Demanda b_j	697	421	612	

Tabela 6.4: Dados do problema de transporte de agregados.

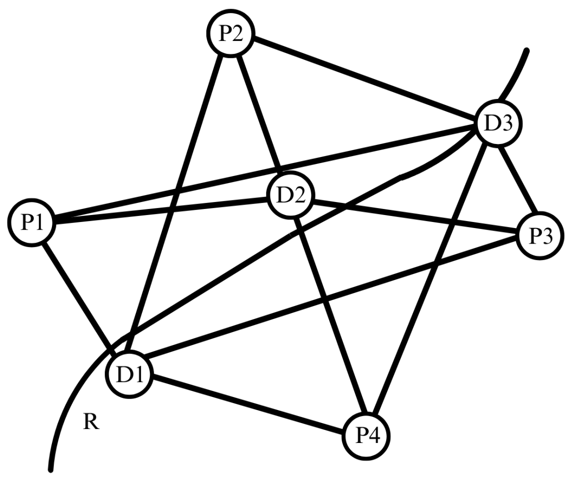

Figura 6.1: Pedreiras fornecedoras de pedra britada: $P1$, $P2$, $P3$ e $P4$; pontos convenientes para depósito de material: $D1$, $D2$ e $D3$; trajeto da rodovia R.

Solução: Se x_{ij} é a variável de decisão que representa a quantidade transportada de rochas da jazida i para o ponto de depósito j, podemos formular este problema da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & f(x_{11}, x_{12}, ..., x_{43}) = 30x_{11} + 13x_{12} + 21x_{13} + 12x_{21} + 40x_{22} + 26x_{23} + 27x_{31} + 15x_{32} \\
& \qquad + 35x_{33} + 37x_{41} + 25x_{42} + 19x_{43} \\
\text{sujeito a} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} \leqslant 433 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} \leqslant 215 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} \leqslant 782 \\
& x_{41} + x_{42} + x_{43} \leqslant 300 \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 697 \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 421 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 612 \\
& x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}, x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42}, x_{13}, x_{23}, x_{33}, x_{43} \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

6.3 Problemas de Mix de produção

Problemas relacionados ao mix de produção, ou seja, a fabricação de múltiplos produtos, exigem decisões estratégicas sobre quais produtos devem ser fabricados e as quantidades que devem ser fabricadas dentro de um determinado período. Com a capacidade de produção limitada, abrangendo restrições como máquinas, mão de obra, capital, armazenamento, entre outros recursos, a empresa precisa determinar a combinação ideal de produtos e suas quantidades. O objetivo principal é maximizar a margem de lucro, aproveitando ao máximo os recursos disponíveis.

6.3.1 Modelagem matemática

Seja x_j a quantidade do produto j, $(j = 1, ..., n)$ a ser produzida em um período do planejamento e C_i a capacidade do recurso i, $(i = 1, ..., m)$, disponível no período. Considere que para a produção de uma quantidade do produto j, são consumidas a_{ij} unidades do recurso i. Uma produção mínima d_j do produto j percisa ser realizada no prazo. O departamento de vendas da empresa acredita que as vendas desse produto não excedam v_j unidades no prazo considerado. Cada unidade do produto j contribui l_j de lucro para a empresa. O problema de mix de produção pode ser formulado como:

$$\text{Maximizar } f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} l_j x_j \tag{6.2}$$

$$\text{sujeito a } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant C_i, \quad i = 1, 2, ..., m \tag{6.3}$$

$$d_j \leqslant x_j \leqslant v_j \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{6.4}$$

A função a ser maximizada representa a contribuição ao lucro da empresa. As restrições (6.3) limitam a fabricação dos produtos devido à disponibilidade dos recursos e as restrições (6.4) impõem que a quantidade fabricada de cada produto não pode ser inferior à mínima já estabelecida, nem exceder o que o departamento de vendas espera.

6.3.2 Problema da produção de geladeiras

Um fabricante de geladeiras precisa decidir quais modelos deve produzir em uma nova fábrica recentemente instalada. O departamento de marketing e vendas realizou uma pesquisa de mercado. A pesquisa indicou que, no máximo, 1.500 unidades do modelo de luxo e 6.000 unidades do modelo básico podem ser vendidas no próximo mês. A empresa já contratou um certo número de empregados e, com isso, dispõe de uma força de trabalho de 25.000 pessoas-hora por mês. Cada modelo de luxo requer dez pessoas-hora e cada modelo básico requer oito pessoas-hora para ser montado. Além disso, uma mesma linha de montagem é compartilhada pelos dois modelos a capacidade de produção desta linha é de 4.500 geladeiras por mês. O lucro unitário do modelo de luxo é de $\$100,00$, e do modelo básico é de $\$50,00$. Deseja-se determinar quanto produzir de cada modelo de modo a maximizar o lucro da empresa.

Solução: Definimos a variável x_j como a quantidade de geladeiras do tipo j (j = luxo, básico), a ser produzida no mês, de modo que o lucro da empresa é representado por:

$$f(x_{\text{luxo}}, x_{\text{básico}}) = 100x_{\text{luxo}} + 50x_{\text{básico}}.$$

As restrições de produção devido à limitação de capacidade ficam: $10x_{\text{luxo}} + 8x_{\text{básico}} \leqslant 25.000$, devido à limitação da força de trabalho por mês e, $x_{\text{luxo}} + x_{\text{básico}} \leqslant 4.500$, devido à limitação da linha de montagem. As restrições devido ao mercado são: $x_{\text{luxo}} \leqslant 1.500$ e $x_{\text{básico}} \leqslant 6.000$. O modelo completo para este problema é dado por:

$$\begin{array}{rl}
\text{Maximizar} & f(x_{\text{luxo}}, x_{\text{básico}}) = 100x_{\text{luxo}} + 50x_{\text{básico}} \\
\text{sujeito a} & 10x_{\text{luxo}} + 8x_{\text{básico}} \leqslant 25.000 \\
& x_{\text{luxo}} + x_{\text{básico}} \leqslant 4.500 \\
& x_{\text{luxo}} \leqslant 1.500 \\
& x_{\text{básico}} \leqslant 6.000 \\
& x_{\text{luxo}} \geqslant 0,\ x_{\text{básico}} \geqslant 0
\end{array}$$

6.3.3 Problema da fabriacação de laticínios

A empresa *Naturelat* do setor de laticínios fabrica os seguintes produtos: iogurte, queijo minas, queijo mussarela, queijo parmesão e queijo provolone. Em função das mudanças estratégicas decorrentes da concorrência de mercado, a empresa está redefinindo seu *mix* de produção.

Para a fabricação de cada um dos cinco produtos, são necessários três tipos de matérias-primas: leite *in natura*, soro e gordura.

Produto	**Leite *in natura (L)***	**Soro (L)**	**Gordura (kg)**
Iogurte	$0,70$	$0,16$	$0,25$
Queijo minas	$0,40$	$0,22$	$0,33$
Queijo mussarela	$0,40$	$0,32$	$0,33$
Queijo parmesão	$0,60$	$0,19$	$0,40$
Queijo provolone	$0,60$	$0,23$	$0,47$

Tabela 6.5: Matéria-prima necessária para a fabricação de 1kg de cada produto

A quantidade de matéria-prima diária disponível é limitada: 1.200 litros de leite *in natura*, 460 litros de soro e $650kg$ de gordura.

A disponibilidade diária de mão de obra especializada também é limitada (170 horas-pessoas/dia). A empresa necessita de 0.05 hora-pessoa para iogurte, $0,12$ para o queijo minas, $0,09$ hora-pessoa para queijo mussarela, $0,04$ hora-pessoa para queijo parmesão e $0,16$ hora-pessoa para queijo provolone. Esses dados correspondem à produção de $1kg$ de cada produto.

Devido a razões contratuais, a empresa necessita produzir uma quantidade mínima diária de $320kg$ de iogurte, $380kg$ de queijo minas, $450kg$ de queijo mussarela, $240kg$ de queijo parmessão e $180kg$ de queijo provolone. A área comercial da empresa garante que existe mercado para absorver qualquer nível de produção, independentemente do produto.

Produto	**Preço de venda**	**Custos variáveis totais**	**Margem de contribuição**
Iogurte	$3,20$	$2,40$	$0,80$
Queijo minas	$4,10$	$3,40$	$0,70$
Queijo mussarela	$6,30$	$5,15$	$1,15$
Queijo parmesão	$8,25$	$6,95$	$1,30$
Queijo provolone	$7,50$	$6,80$	$0,70$

Tabela 6.6: Margem de contribuição unitária de cada produto $(R\$/kg)$.

A empresa tem como objetivo determinar a quantidade de cada produto a ser fabricado de forma a maximizar seu lucro.

Solução: Defina a variável de decisão x_j como a quantidade em kg a ser fabricada do produto j por dia ($j = 1, 2, ..., 5$). Assim, tem-se que:

x_1 : quantidade (em kg) a ser fabricada de iogurte por dia.
x_2 : quantidade (em kg) a ser fabricada de queijo minas por dia.
x_3 : quantidade (em kg) a ser fabricada de queijo mussarela por dia.
x_4 : quantidade (em kg) a ser fabricada de queijo parmesão por dia.
x_5 : quantidade (em kg) a ser fabricada de queijo provolone por dia.

A margem de contribuição total por produto é o resultado obtido pela multiplicação da margem de contribuição unitária ($R\$/kg$) pelas respectivas quantidades vendidas. A função objetivo do problema busca maximizar a margem de contribuição total de todos os produtos da empresa, que é obtida pelo somatório das margens de contribuições totais de cada produto:

$$\text{Maximizar } f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0,80x + 0,70x_2 + 1,15x_3 + 1,30x_4 + 0,70x_5.$$

Com relação às restrições de disponibilidade de matéria-prima consideraremos inicialmente, a quantidade de leite *in natura* (litros) utilizada diariamente para a fabricação de cada produto. Para a fabricação de $1kg$ de iogurte, necessita-se de $0,70$ litro de leite. Dessa forma, $0,70x_1$ representa o total de leite *in natura* utilizado por dia na fabricação de iogurte. Do mesmo modo, teremos $0,40x_2$, $0,40x_3$, $0,60x_4$ e $0,60x_5$, para representar o total de leite *in natura* utilizado na produção de queijo minas, mussarela, parmesão e provolone, respectivamente. Assim, a quantidade total de leite *in natura* em litros a ser usado diariamente para a fabricação de todos os produtos pode ser representada como $0,70x_1 + 0,40x_2 + 0,40x_3 + 0,60x_4 + 0,60x_5$. Porém, esse total não pode ultrapassar $1.200L$. Essa restrição é dada por

$$0,70x_1 + 0,40x_2 + 0,40x_3 + 0,60x_4 + 0,60x_5 \leqslant 1.200.$$

Analogamente, a quantidade de soro, em litros, a ser utilizada diariamente para a fabricação de iogurte, queijo minas, mussarela, parmessão e provolone não pode ultrapassar a quantidade máxima disponível de 460 litros, logo

$$0,16x_1 + 0,22x_2 + 0,32x_3 + 0,19x_4 + 0,23x_5 \leqslant 460.$$

Consideramos ainda a disponibilidade de matéria-prima para o caso da gordura. A quantidade utilizada em kg diariamente para a fabricação dos cinco produtos não pode ultrapassar a quantidade máxima disponível de $650kg$, assim

$$0,25x_1 + 0,33x_2 + 0,33x_3 + 0,40x_5 + 0,47x_5 \leqslant 650.$$

Além disso, sabemos que cada quilo de iogurte fabricado requer $0,05$ hora-pessoa, de forma que $0,05x_1$ representa o total de horas-pessoa utilizadas diariamente na fabricação de iogurte; usando a mesma ideia para os demais produtos, a fabricação total pode ser representada por $0,05x_1 + 0,12x_2 + 0,09x_3 + 0,04x_4 + 0,16x_5$. Porém, esse total não pode ultrapassar 170 horas-pessoa, que é a disponibilidade de mão de obra especializada por dia, ou seja,

$$0,05x_1 + 0,12x_2 + 0,09x_3 + 0,04x_4 + 0,16x_5 \leqslant 170.$$

Por fim, vamos considerar a restrição de demanda mínima de mercado diária para cada produto, resultando em: $x_1 \geqslant 320$, $x_2 \geqslant 380$, $x_3 \geqslant 450$, $x_4 \geqslant 240$ e $x_5 \geqslant 180$.
O modelo completo é apresentado a seguir:

$$
\begin{array}{rl}
\text{Maximizar} & f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0,80x_1 + 0,70x_2 + 1,15x_3 + 1,30x_4 + 0,70x_5 \\
\text{sujeito a} & 0,70x_1 + 0,40x_2 + 0,40x_3 + 0,60x_4 + 0,60x_5 \leqslant 1.200 \\
& 0,16x_1 + 0,22x_2 + 0,32x_3 + 0,19x_4 + 0,23x_5 \leqslant 460 \\
& 0,25x_1 + 0,33x_2 + 0,33x_3 + 0,40x_5 + 0,47x_5 \leqslant 650 \\
& 0,05x_1 + 0,12x_2 + 0,09x_3 + 0,04x_4 + 0,16x_5 \leqslant 170 \\
& x_1 \geqslant 320 \\
& x_2 \geqslant 380 \\
& x_3 \geqslant 450 \\
& x_4 \geqslant 240 \\
& x_5 \geqslant 180
\end{array}
$$

6.4 Problemas de programação de projetos

Essa categoria de problemas envolve a determinação da sequência ideal em que um conjunto de atividades deve ser realizado. Em tais problemas, é fundamental avaliar quais atividades dependem da conclusão de outras antes de poderem ser iniciadas, e quais atividades não possuem predecessores e, portanto, podem ser iniciadas a qualquer momento. Um aspecto importante no planejamento de todas as atividades de um projeto é a determinação do menor tempo necessário para sua conclusão.

6.4.1 Modelagem matemática

Considere que, para a conclusão de um projeto, seja necessária a realização das atividades X_j, em que $j = 1, 2, ..., n$. Definiremos a variável de decisão $t_i, i = X_1, X_2, ..., X_n$ o instante mais cedo em que a atividade i pode ser iniciada. O objetivo é minimizar o tempo necessário para conclusão do projeto.

É importante destacar que os índices j das atividades X_j não representam a ordem em que essas atividades devem ser realizadas. Certas atividades só podem ser iniciadas após a conclusão de outras, enquanto algumas podem começar a qualquer momento. Por esse motivo, atribuímos a cada atividade uma variável t_i, considerando suas dependências e restrições de precedência.

Para definir as restrições do modelo, é necessário considerar o instante em que cada atividade pode começar. Suponha, que a atividade X_3 só possa ser realizada após a conclusão da atividade X_2, que, por sua vez, só possa ser iniciada após a conclusão da atividade X_1. Além disso, suponha que a atividade X_4 seja independente e possa ser iniciada a qualquer momento. Nesse caso, as restrições seriam:

$$t_{X_2} \geqslant t_{X_1} + d_{X_1}$$
$$t_{X_3} \geqslant t_{X_2} + d_{X_2}$$
$$t_{X_4} \geqslant 0,$$

onde d_{X_1} e d_{X_2} representam a duração das atividades X_1 e X_2, respectivamente. Essas restrições garantem que cada atividade que depende de outra seja iniciada somente após a conclusão da atividade precedente.

6.4.2 Problema do planejamento da produção de brinquedos

A empresa Venix de brinquedos está revendo seu planejamento de produção de carrinhos e triciclos. O lucro líquido por unidade de carrinho e triciclo produzido é de $R\$12,00$ e $R\$60,00$, respectivamente. As matérias-primas e os insumos necessários para a fabricação de cada um dos produtos são terceirizados, cabendo à empresa os processos de usinagem, pintura e montagem. O processo de usinagem requer 15 minutos de mão de obra especializada por unidade de carrinho e 30 minutos por unidade de triciclo produzida. O processo de pintura requer 6 minutos de mão de obra especializada por unidade de carrinho e 45 minutos por unidade de triciclo produzida. Já o processo de montagem necessita de 6 minutos e 24 minutos para uma unidade de carrinho e de triciclo produzida, respectivamente. O tempo disponível por semana é de 36, 22 e 15 horas para os processos de usinagem, pintura e montagem, respectivamente. A empresa quer determinar quanto produzir de cada produto por semana, respeitando as limitações de recursos, de forma a maximizar o lucro líquido semanal.

Solução: Definimos a variável x_j como a quantidade a ser fabricada do produto j por semana, em que $j = C, T$, com C = carrinho e T = triciclo. Verifica-se, portanto, que as variáveis de decisão devem assumir valores inteiros, pois não se pode produzir valores fracionários de carrinhos ou triciclos. Considerando o processo de usinagem, para produzir uma unidade de carrinho e de triciclo necessita-se de 15 minutos $(0,25hora)$ e 30 minutos $(0,5hora)$ de mão de obra especializada, respectivamente. Porém, o tempo total de mão de obra para a atividade de usinagem não pode ultrapassar 36 horas/semana, gerando a seguinte restrição:

$$0,25x_C + 0,5x_T \leqslant 36$$

Analogamente, para a atividade de pintura, uma unidade de carrinho e de triciclo produzida requer 6 minutos $(0,1hora)$ e 45 minutos $(0,75hora)$ de mão de obra especializada, respectivamente. Porém, o limite de mão de obra disponível para essa atividade é de 22 horas/semana:

$$0,1x_C + 0,75x_T \leqslant 22$$

Já para o processo de montagem, para produzir uma unidade de carrinho e de triciclo necessita-se de 6 minutos $(0,1hora)$ e 24 minutos $(0,4hora)$ de mão de obra, respectivamente. A disponibilidade de mão de obra para essa atividade é de 15 horas/semana:

$$0,1x_C + 0,4x_T \leqslant 15$$

Finalmente, têm-se as restrições de não negatividade das variáveis de decisão. A formulação completa do modelo pode ser representada como:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & f(x_C, x_T) = 12x_C + 60x_T \\ \text{sujeito a} \quad & 0,25x_C + 0,5x_T \leqslant 36 \\ & 0,1x_C + 0,75x_T \leqslant 22 \\ & 0,1x_C + 0,4x_T \leqslant 15 \\ & x_C, x_T \geqslant 0. \end{aligned}$$

6.4.3 Problema da Contrução de pilares de uma edificação

Considere o problema de construir pilares de uma edificação, a qual é constituída basicamente por 8 atividades, descritas na tabela abaixo. Determine o menor tempo necessário para que todas atividades sejam concluídas.

Atividades	**Descrição**	**Predecessor imediato**	**Duração (horas)**
A	Preparo da armadura	-	6
B	Preparo da forma	-	5
C	Lançamento da armadura	**A**	4
D	Lançamento da forma	**B,C**	4
E	Providências para concretagem	-	2
F	Aplicação do concreto	**E,D**	3
G	Cura do concreto	**F**	72
H	Desforma do pilar	**G**	3

Tabela 6.7: Dados das atividades do projeto

Solução: Observe que a atividade D só pode ser iniciada depois da conclusão das atividades B e C, enquanto as atividades A, B e E podem ser iniciadas a qualquer instante a partir do início do projeto. Note ainda que o projeto não pode ser concluído antes do instante $t_H + 3$. Assim, queremos minimizar $t_H + 3$. Os instantes mais cedo que as atividades podem ser iniiadas devem fazer relações de precedência indicadas na tabela (6.7). Assim, o problema de determinar o menor tempo para concusão do projeto pode ser formulado da seguinte forma

$$
\begin{array}{rl}
\text{Minimizar} & f(t_A, t_B, ..., t_H) = t_H + 3 \\
\text{sujeito a} & t_A \geqslant 0 \\
& t_B \geqslant 0 \\
& t_C \geqslant t_A + 6 \\
& t_D \geqslant t_B + 5 \\
& t_D \geqslant t_C + 4 \\
& t_E \geqslant 0 \\
& t_F \geqslant t_E + 2 \\
& t_F \geqslant t_D + 4 \\
& t_G \geqslant t_F + 3 \\
& t_H \geqslant t_G + 72.
\end{array}
$$

6.5 Problemas de meio ambiente

Uma maneira de preservar nosso meio ambiente é cuidar para que a poluição dos recursos naturais esteja sob controle. Neste contexto, modelos lineares também podem ser aplicados para promover a preservação ambiental. Para ilustrar, considere uma fábrica que desvia parte da água de um rio para usá-la em seu processo produtivo. Durante esse processo, dois componentes químicos poluentes, A e B, são adicionados à água desviada, que em seguida é devolvida ao rio. Se essa água não for tratada, poderá causar poluição no rio. É importante notar que o processo de produção da fábrica não altera o fluxo ou o volume de água, embora a introdução dos poluentes possa impactar negativamente o meio ambiente.

As concentrações aceitáveis dos poluentes A e B na água são de a_0 e b_0 gramas por milhão de litros (ML) de água por dia, respectivamente. O rio tem uma vazão de VML de água por dia, e a fábrica necessita de pelo menos UML de água por dia para sustentar sua produção. Para reduzir a concentração dos poluentes resultantes do processo produtivo, a empresa pode escolher entre três tipos de tratamento de água.

Cada tratamento tem um custo específico (em $\$/ML$) e resulta em diferentes níveis de concentração de poluentes A e B (medidos em gramas por ML) após o tratamento. Esses detalhes estão resumidos na tabela abaixo.

Tratamento	**1**	**2**	**3**
A	a_1	a_2	a_3
B	b_1	b_2	b_3
Custo (\$/ML)	c_1	c_2	c_3

Tabela 6.8: Eficiência e custo dos tratamentos de água

O problema consiste em determinar a quantidade de água a ser tratada em cada tipo de tratamento, de modo que as exigências ambientais regulamentadas sejam atendidas e o custo total de tratamento seja o menor possível.

6.5.1 Modelagem do problema de tratamento da água

Defina a variável de decisão $x_i,\ i = 1,2,3$, como a quantidade de água (em ML) por dia a ser tratada pelo tratamento 1, 2 e 3, respectivamente. Nosso objetivo é minimizar o custo de tratamento da água, ou seja, minimizar a função

$$f(x_1,x_2,x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3.$$

A quantidade diária de água (em ML) desviada para a produção corresponde a $x_1 + x_2 + x_3$, e essa quantidade deve ser no mínimo U, a quantidade mínima necessária para a fábrica funcionar em cada dia. Temos, portanto, a restrição

$$x_1 + x_2 + x_3 \geqslant U.$$

Do mesmo modo, a quantidade desviada não pode superar a vazão do rio. Assim, temos

$$x_1 + x_2 + x_3 \leqslant V.$$

Após o tratamento de x_i milhões de litros de água, retornam ao tratamento a_ix_i e b_ix_i gramas dos poluentes A e B, respectivamente, por dia. O total de poluentes resultante dos tratamentos é:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \text{ do poluente } A \text{ e}$$

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 \text{ do poluente } B.$$

A concentração de poluentes no rio deve ficar abaixo dos limites considerados aceitáveis. Logo, temos

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)/V \leqslant a_0,$$

$$(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)/V \leqslant b_0.$$

Assim, é possível determinar o modelo abaixo

$$\begin{array}{rl}
\text{Minimizar} & f(x_1,x_2,x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\
\text{sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 \geqslant U \\
& x_1 + x_2 + x_3 \leqslant V \\
& (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)/V \leqslant a_0 \\
& (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)/V \leqslant b_0 \\
& x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0.
\end{array}$$

6.6 Problemas de corte

Diversas indústrias usam da estratégia de cortar objetos de tamanhos padronizados em itens de tamanhos variados, conforme a solicitação de clientes. Exemplo disso, são as indústrias de estruturas metálicas que produzem treliças, cortando-se tubos ou perfis de tamanho grandes em pedaços menores de diveros comprimentos. Deseja-se saber qual o número mínimo de tubos grandes que devem ser cortados para obter os pedaços menores nos tamanhos e quantidades desejados. Surge, então, um problema de otimização que consiste em cortar os objetos para a produção dos itens nas quantidades solicitadas, de modo que a perda de material dos objetos seja mínima.

6.6.1 Modelagem matemática

Considere um problema em que queremos cortar barras disponíveis de um tamanho padronizado L para a produção de m barras de tamanhos menores $l_1, l_2, ..., l_m$ em quantidades variadas, digamos $b_1, b_2, ..., b_m$, respectivamente. Ou seja, deve ser produzida a quantidade b_i da peça de comprimento l_i. Conforme os tamanhos e as quantidades dos itens encomendados, podemos ter várias maneiras de cortar as barras em estoque. Uma maneira particular define o que chamamos de *padrão de corte* e cada padrão de corte $j(j = 1, 2, ...,)$, associamos um vetor $a_j = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj})$ em que cada a_{ij} fornece o número de itens do tipo i no padrão de corte j. Para ilustrar, considere: $L = 11,\ l_1 = 2,\ l_2 = 3,\ l_3 = 3.5,\ l_4 = 4$ $(m = 4)$. Podemos ter, por exemplo, os seguintes padrões de corte e seus vetores associados, ilustrados na Figura 6.2.

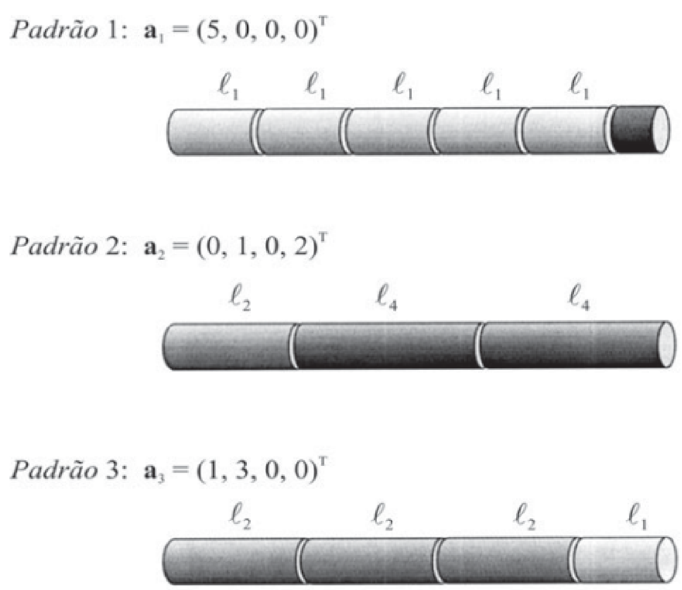

Figura 6.2: Alguns padrões de corte unidimensionais. Fonte: Arenales et al. (2007).

As possibilidades mostradas na Figura 6.2 são apenas alguns possíveis padrões de corte para os dados apresentados, mas vários outros podem ser determinados. Um vetor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ representa um padrão de corte se, e somente se, o seguinte sistema é satisfeito:

$$l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_m\alpha_m \leqslant L$$

$$\alpha_1 \geqslant 0, \alpha_2 \geqslant 0, \ldots, \alpha_m \geqslant 0 \text{ e inteiros.}$$

Suponha que existam n soluções possíveis para este sistema, isto é, n padrões de corte. Embora este número n seja muito grande para problemas práticos, em geral apenas um pequeno número de padrões de corte é necessário para a resolução do problema.

Uma vez definidos os padrões de corte, o problema consiste em determinar quantas barras devem ser cortadas de acordo com cada padrão, de modo que a demanda de cada item seja atendida, utilizando o menor número possível de barras disponíveis.

Define-se a variável x_j como o número de barras cortadas conforme o padrão de corte j. O problema de corte pode ser formulado por:

$$\begin{aligned}
&\text{Minimizar} \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\
&\text{sujeito a} \quad \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, n.
\end{aligned}$$

As variáveis deste modelo devem ser necessariamente inteiras, pois representam o número de barras cortadas de acordo com um padrão de corte.

Suponha que a demanda é dada em toneladas, isto é, b_i é a quantidade em toneladas demandada para o item de largura l_i. Suponha também que cada barra em estoque mede L cm de largura e seu peso é T toneladas, de modo que cada centímetro cortado pesa $\rho = \frac{T}{L}$ toneladas/cm (ρ é chamado peso específico linear). Assim, um item de largura l_i cm cortado da barra pesa ρl_i toneladas. Por exemplo, se $L = 400cm$ e $T = 1$ tonelada, um item de largura $l_1 = 40cm$ pesa $0,1$ tonelada.

Como em um padrão de corte j, o número de itens do tipo i é a_{ij}, segue-se que a quantidade em toneladas do item tipo i produzida pelo padrão de corte j é $\rho l_i a_{ij}$ toneladas e o modelo anterior pode ser alterado para:

$$\begin{aligned}
&\text{Minimizar} \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\
&\text{sujeito a} \quad \begin{bmatrix} \rho l_1 a_{11} \\ \rho l_2 a_{21} \\ \vdots \\ \rho l_m a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} \rho l_1 a_{12} \\ \rho l_2 a_{22} \\ \vdots \\ \rho l_m a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} \rho l_1 a_{1n} \\ \rho l_2 a_{2n} \\ \vdots \\ \rho l_m a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.5}$$

com $x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, n$. Porém, substituindo $\rho = \frac{T}{L}$ e deixando T multiplicar cada coluna do modelo (6.5), obtemos o seguinte problema:

$$\text{Minimizar} \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$
$$\text{sujeito a} \quad \begin{bmatrix} \frac{l_1}{L}a_{11} \\ \frac{l_2}{L}a_{21} \\ \vdots \\ \frac{l_m}{L}a_{m1} \end{bmatrix} (Tx_1) + \begin{bmatrix} \frac{l_1}{L}a_{12} \\ \frac{l_2}{L}a_{22} \\ \vdots \\ \frac{l_m}{L}a_{m2} \end{bmatrix} (Tx_2) + \cdots + \begin{bmatrix} \frac{l_1}{L}a_{1n} \\ \frac{l_2}{L}a_{2n} \\ \vdots \\ \frac{l_m}{L}a_{mn} \end{bmatrix} (Tx_n) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

onde $x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, n$. Podemos fazer ainda a seguinte mudança de variável: $y_j = Tx_j$ toneladas cortadas conforme o padrão de corte j. Temos assim, um modelo equivalente:

$$\text{Minimizar} \quad g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$
$$\text{sujeito a} \quad \begin{bmatrix} \frac{l_1}{L}a_{11} \\ \frac{l_2}{L}a_{21} \\ \vdots \\ \frac{l_m}{L}a_{m1} \end{bmatrix} y_1 + \begin{bmatrix} \frac{l_1}{L}a_{12} \\ \frac{l_2}{L}a_{22} \\ \vdots \\ \frac{l_m}{L}a_{m2} \end{bmatrix} y_2 + \cdots + \begin{bmatrix} \frac{l_1}{L}a_{1n} \\ \frac{l_2}{L}a_{2n} \\ \vdots \\ \frac{l_m}{L}a_{mn} \end{bmatrix} y_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

com $x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, n$.

6.6.2 Problema do corte de bobinas de papel

Uma indústria de papel produz bobinas-jumbo de $L = 400cm$ de largura e cada uma pesa $T = 1$ tonelada. Os jumbos devem ser cortados em bobinas menores nas larguras e quantidades apresentadas na Tabela 6.9, conforme solicitações de diversos clientes.

Dados da demanada	
Larguras (l_i)	**Quantidades** (b_i)
40cm	5 ton
45cm	3,5 ton
55cm	4 ton
60cm	5 ton

Tabela 6.9: Dados para o exemplo de problema de corte.

Na Figura 6.3, listamos 6 padrões de corte que poderiam ser utilizados para cortar os jumbos.

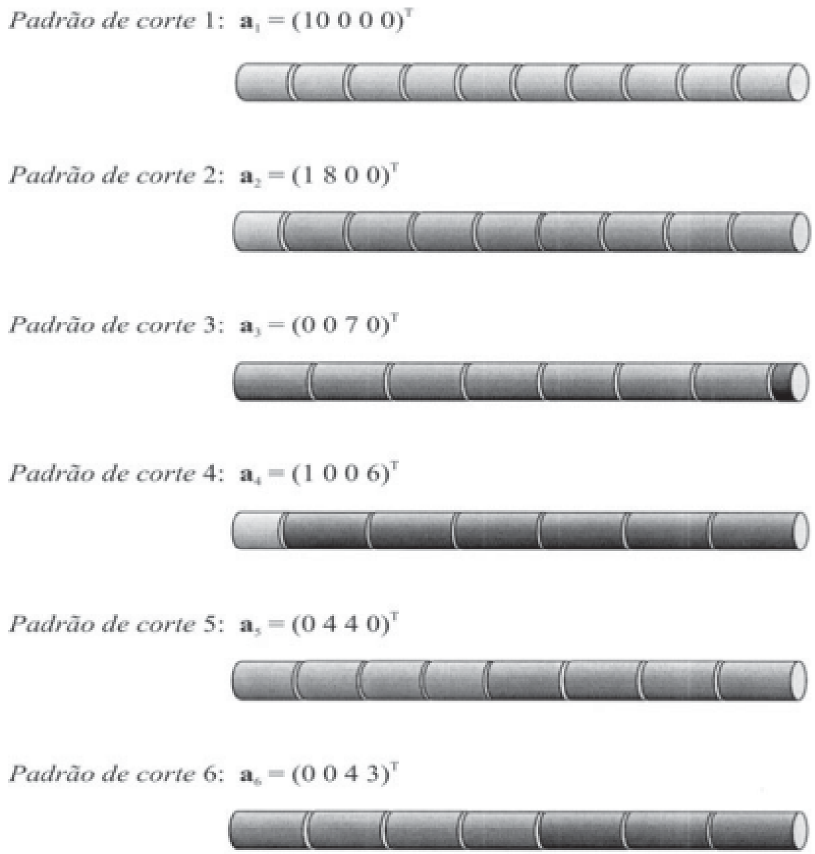

Figura 6.3: Possíveis padrões de corte para uma bobina-jumbo. Fonte: Arenales et al. (2007).

Utilizando os padrões de corte da Figura 6.3 e considerando que $\frac{l_1}{L} = 0,1$, $\frac{l_2}{L} = 0,1125$, $\frac{l_3}{L} = 0,1375$, $\frac{l_4}{L} = 0,15$, o modelo (6.7) é dado por:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad g(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \ldots) = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 \ldots \\ &\text{sujeito a} \quad \begin{bmatrix} 10 \cdot 0,1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y_1 + \begin{bmatrix} 1 \cdot 0,1 \\ 8 \cdot 0,1125 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \cdot 0,1375 \\ 0 \end{bmatrix} y_3 + \begin{bmatrix} 1 \cdot 0,1 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \cdot 0,15 \end{bmatrix} y_4 \\ &\qquad + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \cdot 0,1125 \\ 4 \cdot 0,1375 \\ 0 \end{bmatrix} y_5 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \cdot 0,1375 \\ 3 \cdot 0,15 \end{bmatrix} y_6 + \cdots = \begin{bmatrix} 5 \\ 3,5 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad y_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{6.8}$$

6.7 Problemas de orçamento de capital

Técnicas de Pesquisa Operacional, incluindo modelos de Otimização Linear, vêm sendo bastante utilizadas para a solução de diversos problemas de investimentos financeiros, como o problema de orçamento de capital. Estes problemas têm como objetivo selecionar, a partir de um conjunto de alternativas, os projetos de investimentos financeiros viáveis, respeitando as restrições orçamentárias da empresa investidora.

O problema de orçamento de capital utiliza o conceito de VPL (valor presente líquido), que tem como objetivo definir qual investimento é mais atrativo. O VPL é definido como o valor presente dos fluxos de caixa de entrada (contas a receber) menos os fluxos de caixa de saída (contas a pagar/investimento) para cada período $t = 0, 1, ..., n$. Considerando diferentes projetos de investimento, o mais atrativo é aquele que apresenta o maior valor presente líquido. O cálculo do VPL é dado por:

$$VPL = \sum_{t=1}^{n} \frac{FCE_t}{(1+i)^t} - \sum_{t=1}^{n} \frac{FCS_t}{(1+i)^t} \tag{6.9}$$

em que FCE_t representa o fluxo de caixa de entrada no início do período $t = 1, ..., n$, FCS_t o fluxo de caixa de saída no início do período $t = 1, ..., n$ e i a taxa de retorno do investimento. Para ilustrar, analisaremos dois tipos de investimentos A e B, a fim de determinar qual deles é mais atrativo.

O investimento A requer um capital inicial de \$100 mil, mais um investimento de \$50 mil em um ano, tendo um retorno de \$200 mil em dois anos. A taxa de juros é de 12% a.a. O cálculo do VPL do investimento A é dado por

$$VPL = -100.000 - \frac{50.000}{(1+0,12)^1} + \frac{200.000}{(1+0,12)^2} = 14.795,92.$$

O investimento B requer um capital inicial de \$150 mil, mais um investimento de \$70 mil em dois anos, tendo um retorno de \$130 mil em um ano e \$120 mil em três anos. A taxa de juros é de 12% a.a. O VPL do investimento B é dado por

$$VPL = -150.000 + \frac{130.000}{(1+0,12)^1} - \frac{70.000}{(1+0,12)^2} + \frac{120.000}{(1+0,12)^3} = -4.318,51.$$

Verifica-se, portanto, que o investimento B não é lucrativo. O investimento A é, portanto, o mais atrativo.

6.7.1 Problema do investimento em atividades de cultura

Um fazendeiro está considerando cinco tipos de investimentos em atividades de cultura (soja, mandioca, milho, trigo e feijão) em sua nova fazenda, que possui área total disponível de 1.000 hectares. Cada atividade de cultura exige investimentos de capital que gerarão benefícios futuros.

O investimento inicial e as contas a pagar nos próximos três anos para cada atividdade de cultura, estão especificados na Tabela 6.10.

Ano	**Investim. incial/contas a pagar em cada ano ($R\$$ mil por hectare)**					**Fluxo máximo de saída ($R\$$ mil)**
	Soja	**Mandioca**	**Milho**	**Trigo**	**Feijão**	
0	5,00	2,00	3,50	3,50	3,00	3.800,00
1	1,00	1,00	0,50	1,50	0,50	3.500,00
2	1,20	0,50	0,50	0,50	1,00	3.200,00
3	0,80	0,50	1,00	0,50	0,50	2.500,00

Tabela 6.10: Fluxo de caixa de saída em cada ano

O retorno esperado nos próximos três anos, para cada investimento de cultura, está especificado na Tabela 6.11. O fazendeiro possui limitação de recursos a serem investidos em cada período (última coluna na Tabela 6.10) e espera um fluxo mínimo de entrada em cada período (última coluna da tabela 6.11). A taxa de juros para cada atividade de cultura, é de 10% a.a. A partir da área total disponível para investimento, o fazendeiro quer determinar quanto investir, respeitando os fluxos mínimo de entrada e máximo de saída em cada período. Formule o problema de Otimização Linear do fazendeiro.

Ano	**Retorno esperado em cada ano ($R\$$ mil por hectare)**					**Fluxo mínimo de entrada ($R\$$ mil)**
	Soja	**Mandioca**	**Milho**	**Trigo**	**Feijão**	
1	5,00	4,20	2,20	6,60	3,00	6.000,00
2	7,70	6,50	3,70	8,00	3,50	5.000,00
3	7,90	7,20	2,90	6,10	4,10	6.500,00

Tabela 6.11: Fluxo de caixa de entrada em cada ano

Solução: Primeiramente, define-se as variáveis de decisão do modelo:
x_j = área total (em hectares) a ser investida para a cultuta da atividade $j, \ j = 1, 2, ..., 5$.
Assim, tem-se:
x_1 = área total (em hectares) a ser investida para a cultura de soja.
x_2 = área total (em hectares) a ser investida para a cultura de mandioca.
x_3 = área total (em hectares) a ser investida para a cultura de milho.
x_4 = área total (em hectares) a ser investida para a cultura de trigo.
x_5 = área total (em hectares) a ser investida para a cultura de feijão.

A função objetivo do modelo busca maximizar o VPL ($R\$$ mil) do conjunto de investimentos em atividades de cultura sob análise, isto é, o somatório do VPL de cada atividade de cultura ($R\$$ mil/hectare) multiplicado pela área total a ser investida para a respectiva cultura (hectares). O cálculo do VPL da cultura da soja ($R\$$ mil/hectare), de acordo com a expressão (6.9), está detalhado a seguir:

Cultura da soja ($R\$$ mil por hectare)

$$\begin{aligned} VPL = & \frac{5,0}{(1+0,10)^1} + \frac{7,7}{(1+0,10)^2} + \frac{7,9}{(1+0,10)^3} - 5,0 - \frac{1,0}{(1+0,10)^1} - \frac{1,2}{(1+0,10)^2} \\ & - \frac{0,8}{(1+0,10)^3} \\ & = 9,343 (R\$9.342,60/\text{hectare}) \end{aligned}$$

O cálculo do VPL das demais atividades de cultura, considerando o mesmo procedimento, está listado na Tabela 6.12.

Valor Presente Líquido - (R\$ mil por hectare)				
Soja	**Mandioca**	**Milho**	**Trigo**	**Feijão**
9,343	8,902	2,118	11,542	4,044

Tabela 6.12: Valor Presente Líquido (VPL) de cada atividade de cultura

Assim, a função objetvo pode ser descrita da seguinte forma:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 9,343x_1 + 8,902x_2 + 2,118x_3 + 11,542x_4 + 4,044x_5.$$

As restrições de fluxo máximo e mínimo de recursos em cada ano, além da área total disponível, devem ser consideradas e estão detalhadas a seguir.

Capacidade máxima disponível (hectares) para as atividades de cultura:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leqslant 1000$$

Fluxo mínimo de entrada para cada ano (R\$ mil):

$$5,0x_1 + 4,2x_2 + 2,2x_3 + 6,6x_4 + 3,0x_5 \geqslant 6000 \text{ (1º ano)}$$

$$7,7x_1 + 6,5x_2 + 3,7x_3 + 8,0x_4 + 3,5x_5 \geqslant 5000 \text{ (2º ano)}$$

$$7,9x_1 + 7,2x_2 + 2,9x_3 + 6,1x_4 + 4,1x_5 \geqslant 6500 \text{ (3º ano)}$$

Fluxo máximo de saída para cada ano (R\$ mil):

$$5,0x_1 + 4,0x_2 + 3,5x_3 + 3,5x_4 + 3,0x_5 \leqslant 3800 \text{ (investimento inicial)}$$

$$1,0x_1 + 1,0x_2 + 0,5x_3 + 1,5x_4 + 0,5x_5 \leqslant 3500 \text{ (1º ano)}$$

$$1,2x_1 + 0,5x_2 + 0,5x_3 + 0,5x_4 + 1,0x_5 \leqslant 3200 \text{ (2º ano)}$$

$$0,8x_1 + 0,5x_2 + 1,0x_3 + 0,5x_4 + 0,5x_5 \leqslant 2500 \text{ (3º ano)}$$

O modelo completo pode ser formulado da seguinte forma:

$$
\begin{array}{rl}
\text{Maximizar} & f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = 9,343x_1 + 8,902x_2 + 2,118x_3 + 11,542x_4 + 4,044x_5 \\
\text{sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leqslant 1000 \\
& 5,0x_1 + 4,2x_2 + 2,2x_3 + 6,6x_4 + 3,0x_5 \geqslant 6000 \\
& 7,7x_1 + 6,5x_2 + 3,7x_3 + 8,0x_4 + 3,5x_5 \geqslant 5000 \\
& 7,9x_1 + 7,2x_2 + 2,9x_3 + 6,1x_4 + 4,1x_5 \geqslant 6500 \\
& 5,0x_1 + 4,0x_2 + 3,5x_3 + 3,5x_4 + 3,0x_5 \leqslant 3800 \\
& 1,0x_1 + 1,0x_2 + 0,5x_3 + 1,5x_4 + 0,5x_5 \leqslant 3500 \\
& 1,2x_1 + 0,5x_2 + 0,5x_3 + 0,5x_4 + 1,0x_5 \leqslant 3200 \\
& 0,8x_1 + 0,5x_2 + 1,0x_3 + 0,5x_4 + 0,5x_5 \leqslant 2500 \\
& x_j \geqslant 0,\ j = 1,2,...,5.
\end{array}
$$

6.8 Exercícios

Exercício 6.8.1. *Uma fábrica de coputadores produz* 2 *modelos de computador A e B. O modelo A fornece um lucro de* $R\$180,00$ *e B de* $R\$300,00$*. O modelo A requer, na sua produção, um gabinete pequeno e uma unidade de disco. O modelo B requer um gabinete grande e duas unidades de disco. Existem no estoque* 60 *unidades do gabinete pequeno,* 50 *do gabinete grande e* 120 *unidades de disco. Formule o modelo que maximiza o lucro da produção.*

Exercício 6.8.2. *Um açougue prepara almôndegas misturando carne bovina magra e carne de porco. A carne bovina contém* 80% *de carne,* 20% *de gordura e custa* $R\$0,80$ *o kg; a carne de porco contém* 68% *de carne,* 32% *de gordura e custa* $R\$0,60$ *o kg. Formule o modelo matemático que descreva o quanto de carne bovina e de porco o açougue deve utilizar por kg de almôndega de modo que o seja o menor possível e o teor de fordura não supere* 25%*.*

Exercício 6.8.3. *A anemia é uma doença decorrente de baixos níveis de hemoglobina no sangue, proteína esta responsável pelo transporte de oxigênio. Segundo a hematologista Adriana Ferreira, a "ferropriva"é a anemia mais comum e é causada pela deficiência de ferro no oreganismo. Para sua prevenção, deve-se adotar uma dieta rica em ferro, vitamina A, vitamina B12 e ácido fólico. Esses nutrientes podem ser encontrados em diversos alimentos, como espinafre, brócolis, agrião, tomate, cenoura, ovo, feijão, grão de bico, soja, carne, fígado e peixe. A tabela 6.13 apresenta as necessidades diárias de cada nutriente, a respectiva quantidade em cada um dos alimento e preço por alimento. A fim de previnir que seus pacientes apresentem esse tipo de anemia, o Hospital Metrópole estpa estudando uma nova dieta. O objetivo é selecionar os ingredientes, com o menor custo possível, que farão parte das duas principais refeições diárias (almoço e jantar), de forma que* 100% *das necessiadades diárias de cada um desses nutrientes sejam atendidas nas duas refeições. Além disso, o total ingerido nas duas refeições não pode ultrapassar* $1,5kg$*.*

	Porção de 100 gramas				
	Ferro	**Vitamina A**	**Vitamina B12**	**Ácido fólico**	**Preço**
	(mg)	(UI)	(mcg)	(mg)	(R$)
Espinafre	3	7.400	0	0,4	0,30
Brócolis	1,2	138,8	0	0,5	0,20
Agrião	0,2	4.725	0	0,1	0,18
Tomate	0,49	1.130	0	0,25	0,16
Cenoura	1	14.500	0,1	0,005	0,30
Ovo	0,9	3.215	0	0,05	0,30
Feijão	7,1	0	0	0,056	0,40
Grão de bico	4,86	41	0	0,4	0,40
Soja	3	1.000	0	0,08	0,45
Carne	1,5	0	3	0,06	0,75
Fígado	10	32.000	100	0,38	0,80
Peixe	1,1	140	2,14	0,002	0,85
Necessidades diárias	**8**	**4.500**	**2**	**0,4**	

Tabela 6.13: Dados do problema

Exercício 6.8.4. *Uma empresa do ramo de madeiras produz madeira tipo compensado e madeira serrada comum e seus recursos são* $40m^3$ *de pinho e* $80m^3$ *de canela. A madeira serrada dá um lucro de* $R\$5,00$ *por* m^3 *e a madeira compensada dá um lucro de* $R\$0,70$ *por* m^2*. Para produzir uma mistura comerciável de* $1m^3$ *de madeira serrada são requeridos* $1m^3$ *de pinho e* $3m^3$ *de canela. Para produzir* $100m^2$ *de madeira compensada são requeridos* $3m^3$ *de pinho e* $5m^3$ *de canela. Compromissos de venda exigem que sejam produzidos pelo menos* $5m^3$ *de madeira serrada e* $900m^2$ *de madeira compensada. Contrua o modelo que maximize o lucro, dadas essas condições.*

Exercício 6.8.5. *Uma empresa de mineiração deseja cumprir um contrato de fornecimento de* 4 *milhões de toneladas por ano do minério Sinter Feed e, para tanto, conta com os seguintes minérios.*

	M1	**M2**
Fe	66%	64%
Si	1,5%	3,7%
Custo	5,60	3,30

Tabela 6.14: Composição percentual e custo por tonelada de cada minério

O minério a ser utilizado para este blending deve conter no mínimo 65% *de Ferro e no máximo* 3% *de Silício. Formule o modelo matemático com o obejtico de encontrar o blending a custo mínimo.*

Capítulo 7

Otimização inteira e binária

Nos capítulos anteriores, apresentamos exemplos em que as variáveis de decisão podiam assumir qualquer valor contínuo. Essas variáveis são denominadas *variáveis contínuas*, em oposição à outro tipo chamado de *variável inteira*. Modelos de Otimização Linear que incluem variáveis inteiras são classificados como problemas de Otimização Inteira. Em particular, quando essas variáveis podem assumir apenas os valores 0 ou 1, o problema é denominado Otimização 0/1. Este capítulo é dedicado ao estudo desses dois tipos de problemas.

7.1 Introdução

Um problema é classificado como um problema de Otimização Inteira quando todas as variáveis de decisão do modelo são discretas, ou seja, podem assumir valores dentro de um conjunto finito ou em uma quantidade enumerável de valores resultantes de uma contagem. Quando as variáveis de decisão são binárias, ou seja, podem assumir os valores 1 ou 0 (onde 1 indica a presença de uma característica de interesse e 0 indica sua ausência), temos um modelo de Otimização $0/1$. É importante observar que alguns autores não fazem distinção entre variáveis discretas e binárias, referindo-se ao modelo de forma genérica como Otimização Inteira quando as variáveis são discretas e/ou binárias.

Como exemplos de problemas de Otimização Inteira, podemos mencionar o problema da fabricação de rádios discutido no Capítulo 1, onde as variáveis de decisão representavam a quantidade de rádios a serem produzidos. Outro exemplo, desta vez de Otimização $0/1$, é o problema de orçamento de capital, que envolve variáveis binárias onde 1 pode representar a decisão de investir em um projeto e 0 indica a decisão de não investir.

7.2 O problema de escalonamento de pessoal

O banco PRINCE está abrindo novas agências bancárias e, para isso, precisa contratar mão de obra adicional. Entretanto, a escala da força de trabalho que será contratada deve ser definida. Busca-se escalonar os novos funcionários em turnos de trabalho, de forma a satisfazer o nível de serviço desejado com o menor custo possível. Em cada turno, os funcionários trabalham por um período de oito horas consecutivas, sendo que o período correspondente a cada turno e o custo diário por funcionário são apresentados na Tabela 7.1. Porém, para que nível de serviço seja atendido, é necessário um número mínimo de funcionários por período, conforme mostra a Tabela 7.2.

Turno	Período	Custo diário por funcionário
1	6:01-14:00	\$100
2	8:01-16:00	\$80
3	10:01-18:00	\$85
4	14:01-22:00	\$130
5	22:01-6:00	\$150

Tabela 7.1: Custo diário por funcionário e turno

Período	Número de funcionários necessários
6:01-8:00	22
8:01-10:00	35
10:01-12:00	54
12:01-14:00	42
14:01-16:00	60
16:01-17:00	44
17:01-18:00	35
18:01-20:00	30
20:01-22:00	25
22:01-6:00	18

Tabela 7.2: Número de funcionários necessários por período

Formule o problema de programação inteira de forma a determinar a mão de obra a ser contratada por turno, com o menor custo possível, respeitando a restrição de número mínimo de funcionários por período.

Solução: Inicialmente, definimos a variável de decisão $x_j,\ j = 1, 2, ..., 5$, que reperesenta o número de funcionários que começam a trabalhar no turno j. Assim, tem-se:
x_1 = número de funcionários que começam a trabalhar às $6:01$.
x_2 = número de funcionários que começam a trabalhar às $8:01$.
x_3 = número de funcionários que começam a trabalhar às $10:01$.
x_4 = número de funcionários que começam a trabalhar às $14:01$.
x_5 = número de funcionários que começam a trabalhar às $22:01$.

Busca-se determinar a escala de funcionários que iniciará o trabalho no turno j, de forma a minimizar o custo total de mão de obra. Assim, a função objetivo pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 100x_1 + 80x_2 + 85x_3 + 130x_4 + 150x_5$$

Porém, as restrições de número mínimo de funcionários designados por período devem ser respeitadas, de forma a atender o nível de serviço desejado. Cada uma das restrições do modelo é detalhada a seguir.

Período das $6:01-8:00$
O número de funcionários designados que cobrem este período é 22. O único turno que cobre esse período é o turno 1. Portanto: $x_1 \geqslant 22$.
Período das $8:01-10:00$
O número de funcionários designados que cobrem este período (turnos 1 e 2) deve ser pelo menos 35. Logo, $x_1+x_2 \geqslant 35$.
Período das $10:01-12:00$
Necessitam-se de, no mínimo, 54 funcionários. Os funcionários que serão designados para os turnos 1, 2 e 3 trabalharão nesse período. Logo, portanto: $x_1+x_2+x3 \geqslant 54$.
Período das $12:01-14:00$
O número mínimo de funcionários necessários é 42. Os turnos 1, 2 e 3 cobrirão este período. Tem-se, portanto: $x_1+x_2+x_3 \geqslant 42$.
Período das $14:01-16:00$
O número de funcionários designados que cobrem este período (turnos 2, 3 e 4) deve ser pelo menos 60. Assim, temos que $x_2+x_4+x_4 \geqslant 60$.
Período das $16:01-17:00$
Neste período, pelo menos 44 devem estar escalados. Os funcionários designados para os turnos 3 e 4 cobrirão esse período. Assim: $x_3+x_4 \geqslant 44$.
Período das $17:01-18:00$
O número de mínimo de funcionários para este período é 35. Apenas os funcionários escalados para os turnos 3 e 4 cobrirão este período: $x_3+x_4 \geqslant 35$.
Período das $18:01-20:00$
O número de funcionários designados que cobrem este período (turno 4) deve ser pelo menos 30: $x_4 \geqslant 30$.
Período das $20:01-22:00$
O número mínimo de funcionários designados para este período deve ser 25. Apenas os funcionários escalados no turno 4 cobrirão esse período. Logo: $x_4 \geqslant 25$.
Período das $22:01-06:00$
O número de funcionários designados que cobrem este período (turno 5) deve ser pelo menos 18: $x_5 \geqslant 18$.

Por fim, como trata-se de um problema de Otimização Inteira, além das restrições de não-negatividade, as variáveis de decisão são inteiras. O modelo completo pode ser formulado da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & f(x_1, x_2, \ldots, x_5) = 100x_1 + 80x_2 + 85x_3 + 130x_4 + 150x_5 \\
\text{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 54 \ (10:01 = 12:00) \\
& x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 42 \ (12:01 - 14:00) \\
& x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 60 \ (14:01 - 16:00) \\
& x_3 + x_4 \geqslant 44 \ (16:01 - 17:00) \\
& x_3 + x_4 \geqslant 35 \ (17:01 - 18:00) \\
& x_1 \geqslant 22 \\
& x_4 \geqslant 30 \ (18:01 - 20:00) \\
& x_4 \geqslant 25 \ (20:01 - 22:00) \\
& x_5 \geqslant 18 \ (22:01 - 6:00) \\
& x_j \geqslant 0 \text{ e inteiro}, \ j = 1, \ldots, 5.
\end{aligned}
$$

7.3 Modelagem geral

A formulação de um modelo geral de programação inteira e/ou binária pode ser representada matematicamente como:

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar (ou Maximizar)} \quad & f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{sujeito a} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \{\leqslant, =, \geqslant\} b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \{\leqslant, =, \geqslant\} b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \{\leqslant, =, \geqslant\} b_m \\
& x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0 \\
& x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ são inteiras ou binárias.}
\end{aligned}
$$

Em particular, as variáveis binárias envolvem a decisão entre duas alternativas. Essa dicotomia é modelada por uma variável x tal que

$$
x = \begin{cases} 1, & \text{se o evento ocorre} \\ 0, & \text{se o evento não ocorre} \end{cases}
$$

7.4 Problema de orçamento de capital como um modelo de Otimização $0/1$

Conforme visto no Capítulo 6, o problema de orçamento de capital tem como objetivo selecionar, a partir de um conjunto de alternativas, os projetos de investimentos financeiramente viáveis, respeitando as restrições orçamentárias da empresa investidora. Diferente do que já foi visto, ultilizaremos um modelo de Otimização $0/1$ para determinar, dentre um conjunto de alternativas de projetos de investimentos, se o projeto j vai ser aprovado ($x_j = 1$) ou rejeitado ($x_j = 0$).

A empresa Investilila está considerando cinco projetos para investimento. Cada projeto possui um Valor Presente Líquido (VPL) e requer investimentos no ano presente e nos dois anos seguintes. Além disso, para cada ano, há um limite de investimento disponível. Todos esses dados estão disponíveis na Tabela 7.3. A empresa quer decidir em qual(is) projeto(s) investir, de forma a maximizar o VPL total. Modele o problema de orçamento de capital empresa Investilila.

Projeto	**Investimento**			**VPL**
	ano 0	**ano 1**	**ano 2**	
1	5	4	6	22
2	4	3	3	17
3	3	2	1	16
4	4	1	2	14
5	5	3	6	20
Recursos disponíveis	12	10	9	

Tabela 7.3: Dados de investimentos e projetos da empresa Investilila (R\$ milhões)

Solução: Primeiramente, definem-se as variáveis de decisão do modelo:

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{se o projeto j vai ser aprovado } j = 1, 2 \ldots, 5 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A função objetivo do modelo busca maximizar o VPL (R\$ milhões) do conjunto de projetos de investimentos sob análise:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 22x_1 + 17x_2 + 16x_3 + 14x_4 + 20x_5$$

O investimento em cada ano não pode ultrapassar o total de recursos disponíveis. As restrições do modelo estão especificadas a seguir:

$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \leqslant 12 \text{ (ano 0)}$$

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \leqslant 10 \text{ (ano 1)}$$

$$6x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 6x_5 \leqslant 9 \text{ (ano 2)}$$

Além disso, as variáveis de decisão x_j são binárias: $x_j \in \{0, 1\},\ j = 1, 2, \ldots, 5$. Segue abaixo o problema modelado:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & f(x_1, x_2, \ldots, x_5) = 22x_1 + 17x_2 + 16x_3 + 14x_4 + 20x_5 \\ \text{sujeito a} \quad & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \leqslant 12 \\ & 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \leqslant 10 \\ & 6x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 6x_5 \leqslant 9 \\ & x_j \in \{0, 1\}, \; j = 1, 2, \ldots, 5 \end{aligned}$$

7.5 Problema da mochila

Considere n itens que devem ser colocados em m mochilas de capacidades distintas b_i, $i = 1, \ldots, m$. Cada item j tem uma lucratividade p_j e um peso ω_j, e o problema consiste em selecionar m subconjuntos distindos de itens, tal que cada subconjunto ocupe uma capacidade de no máximo b_i e o lucro total seja maximizado. Este problema ocorre também em situações de carregamento de conteineres, por exemplo.

Para construir o modelo, defina as variáveis:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o item } j \text{ é colocado na mochila } I \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

O problema é formulado como:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_j x_{ij} \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j x_{ij} \leqslant b_i, i = 1, \ldots, m \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqslant 1, j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

7.6 Exercícios

Exercício 7.6.1. *Um indivíduo dispõe de* $R\$8.000,00$ *para investir em até* 3 *opções de investimento que vão fornecer o retorno após* 5 *anos. Cada um dos investimentos pode ser feito em valores múltiplos de* $R\$1.000,00$ *e ele deseja investir, no máximo,* $R\$4.000,00$ *em uma determinada opção. Os retornos esperados estão apresentados a seguir:*

	Valor Investido			
Opção	**R$1.000**	**R$2.000**	**R$3.000**	**R$4.000**
A	2.000	5.000	7.500	10.000
B	1.500	3.500	8.000	11.000
C	1.100	2.500	8.500	10.500

Sabendo que o investidor pode investir e, quaisquer opções, qual deve ser a política de investimento a fim de se ter o maior retorno global?

Exemplo 7.6.1. *Considere cinco itens que podem ser processados em qualquer uma de duas máquinas. Se uma máquina é usada, incorre-se em um custo de preparação. O custo de processamento de cada item depende da máquina utilizada. Esses custos são mostrados na tabela abaixo. Formule o problema de determinar qual máquina usar para processar todos os itens.*

Máquina	**Custo de preparação**	**Custo de processamento**				
		1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	40	28	50	49	31	33
2	35	20	16	63	27	41

Exercício 7.6.2. *Em cada dia da semana, uma loja requer um número de empregados em tempo integral, de acordo com a tabela xx. Cada empregado deve trabalhar cinco dias consecutivos e descansar dois. Cada empregado recebe* $R\$30$ *por dia.*

	Segunda	**Terça**	**Quarta**	**Quinta**	**Sexta**	**Sábado**	**Domingo**
Empregados	10	6	8	5	9	4	6

Determine o número de empregados em tempo integral de forma a minimizar a despesa total com salários.

Exercício 7.6.3. *Considere n tarefas a serem processadas em m máquinas paralelas. Cada tarefa gasta uma unidade de tempo de processamento na máquina em que pode ser processada. Seja*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{se a máquina i pode processar a tarefa j} \\ 0, & \textit{caso contrário} \end{cases}$$

Determine uma alocação factível e balanceada de tarefas a máquinas, isto é, a diferença entre instantes de término de processamento entre quaisquer duas máquinas é no máximo uma unidade de tempo.

Capítulo 8
Otimização linear e Teoria dos jogos

8.1 Introdução

A teoria dos jogos abrange situações de tomada de decisões nas quais ”jogadores”têm objetivos conflitantes e o resultado depende da combinação de estratégias escolhidas. Além dos jogos de salão, exemplos de aplicação incluem

1. *Campanhas de marketing e políticas de preços de produtos* - os jogadores são empresas que disputam no mercado para vender seus produtos.
2. *Campanhas de eleições políticas* - os jogadores são candidatos que disputam eleitores para receber mais votos.
3. *Programação de programas de televisão* - os jogadores são redes de televisão que disputam espectadores para receber maior audiência.
4. *Planejamento de estratégias militares de guerra* - os jogadores são exércitos adversários.

A teoria dos jogos, em geral, admite que todos os jogadores são racionais e igualmente informados e tentam agir da melhor maneira possível para obter vantagens em relação a seus oponentes.

Um caso especial é o jogo em que dois jogadores A e B têm um número finito de estratégias: as estratégias $A_1, A_2, \ldots, A_m$ para o jogador A e as estratégias $B_1, B_2, \ldots, B_n$ para o jogador B. Para cada par (A_i, B_j) de estratégias escolhidas pelos jogadores, o jogador A ganha a_{ij} unidades do jogador B, ou seja, o jogador B perde a_{ij} unidades para o jogador A. Ou seja, se o jogador A escolher a estratégia A_i e o jogador B escolher a estratégia B_j, então seus ganhos serão a_{ij} e $-a_{ij}$, respectivamente.

Esse jogo é conhecido como *jogo de duas pessoas soma-zero*, porque o ganho do jogador A é igual à perda do jogador B e vice-versa. Supõe-se que os dois jogadores conhecem todas as estratégias $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e $B_1, B_2, \ldots, B_n$ e a tabela de ganhos $\{a_{ij}\}$, e que cada jogador escolhe simultaneamente uma estratégia sem saber a escolha do outro.

A solução ótima do jogo consiste em escolher uma estratégia para cada jogador, tal que qualquer mudança nas estratégias escolhidas não melhore os ganhos dos dois jogadores. Essa escolha pode ter a forma de uma estratégia pura ou a forma de uma combinação de estratégias para cada jogador de acordo com as probabilidades predeterminadas.

8.2 Exemplos

Exemplo 8.2.1. *Duas empresas A e B fabricam um produto que compete no mesmo mercado. As duas empresas podem fazer propagandas de vendas no rádio (estratégias* A_1 *e* B_1*) no jornal (estratégias* A_2 *e* B_2*) e na televisão (estratégias* A_3 *e* B_3*). A Tabela 8.1 apresenta a fatia do mercado (valores* $\{a_{ij}\}$ *em percentuais) que as empresas esperam ganhar ou perder, uma da outra, para cada par* (A_i, B_j) *de estratégias escolhidas, onde valores positivos de* a_{ij} *indicam ganhos para a empresa A e perdas para a empresa B e vice-versa.*

Tabela 8.1: Fatias de mercado que as empresas A e B esperam ganhar ou perder

	B_1	B_2	B_3
A_1	3	-1	-3
A_2	-2	4	-1
A_3	-5	-6	2

Note que se a empresa A escolhe a estratégia pura A_1, então, independentemente da estratégia escolhida pela empresa B, o pior que pode acontecer à empresa A é perder 3% do mercado para a empresa B, pois $\min\{3,-1,-3\} = -3$, de acordo com a linha A_1 da tabela. De modo semelhante, se a empresa A escolhe as estratégias puras A_2 ou A_3, o pior que pode acontecer é ela perder 2% ou 6% do mercado para a empresa B, respectivamente. Logo, a melhor opção para a empresa A é escolher a estratégia pura A_2 correndo o risco de perder 2%.

Seguindo o mesmo raciocínio, se a empresa B escolhe a estratégia pura B_1, então, independentemente da escolha que a empresa A fizer, o pior que pode acontecer à empresa B é perder 3% do mercado para a empresa A. De modo semelhante, se a empresa B escolhe as estratégias puras B_2 ou B_3 ela pode perder 4% ou 2% do mercado para a empresa A, respectivamente. Logo, a melhor opção para a empresa B é escolher a estratégia pura B_3 com o risco de perda de 2%.

Como os valores obtidos pela melhor estratégia pura para a empresa A e pela melhor estratégia pura para a empresa B são diferentes, a solução ótima do jogo é uma estratégia mista para cada empresa, com valor entre -2 e 2 (se estes valores fossem iguais, este seria o valor do jogo). A melhor estratégia mista para a empresa A com probabilidades x_1, x_2 e x_3 a serem determinadas, de escolher as estratégias A_1, A_2 e A_3, respectivamente) é escolher a melhor opção, independentemente da escolha da empresa B. Para isso, deve-se procurar valores x_1, x_2 e x_3 que maximizem o mínimo entre:

$$3x_1 - 2x_2 - 5x_3 \text{ (se a empresa } B \text{ escolher a estratégia } B_1)$$

$$-1x_1 + 4x_2 - 6x_3 \text{ (se a empresa } B \text{ escolher a estratégia } B_2)$$

$$-3x_1 - 1x_2 + 2x_3 \text{ (se a empresa } B \text{ escolher a estratégia } B_3)$$

ou seja,

$$\max_{(x_1,x_2,x_3)} z = \{\min\{3x_1 - 2x_2 - 5x_3, -1x_1 + 4x_2 - 6x_3, -3x_1 - 1x_2 + 2x_3\}\}.$$

O primeiro termo $3x_1 - 2x_2 - 5x_3$ corresponde ao ganho esperado da empresa A se empresa B escolher a estratégia B_1, ou seja, a empresa A ganha 3% com a probabilidade x_1, perde 2% com a probabilidade x_2 e perde 5% com a probabilidade x_3. É similar para os demais termos da expressão acima.

A empresa B também pode adotar uma estratégia mista (com probabilidades y_1, y_2 e y_3, a serem determinadas, de escolher as estratégias B_1, B_2 e B_3, respectivamente) para escolher a melhor opção, independentemente da escolha da empresa A. Para isso, deve-se procurar valores y_1, y_2 e y_3 que maximizem o mínimo entre:

$$3y_1 - 1y_2 - 3y_3 \text{ (se a empresa } A \text{ escolher a estratégia } A_1)$$
$$-2y_1 + 4y_2 - 1x_3 \text{ (se a empresa } A \text{ escolher a estratégia } A_2)$$
$$-5y_1 - 6y_2 + 2y_3 \text{ (se a empresa } B \text{ escolher a estratégia } B_3)$$

ou seja,

$$\min_{(y_1,y_2,y_3)} w = \{\max\{3y_1 - 1y_2 - 3y_3, -2y_1 + 4y_2 - 1x_3, -5y_1 - 6y_2 + 2y_3\}\}.$$

A interpretação desses termos é similar aos anteriores. Por exemplo, o primeiro termo $3y_1 - 1y_2 - 3y_3$ indica que, se a empresa A escolhe a estratégia A_1, a empresa B perde 3% com a probabilidade y_1, ganha 1% com a probabilidade y_2 e ganha 3% com a probabilidade y_3. A solução ótima do jogo das duas empresas com estratégia mista pode ser obtida resolvendo-se os modelos de otimização linear (A) ou (B) a seguir.

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & z \\ \text{sujeito a} \quad & 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 \geqslant z \\ & -1x_1 + 4x_2 - 6x_3 \geqslant z \\ & -3x_1 - 1x_2 + 2x_3 \geqslant z \\ & x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1 \\ & x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, z \text{ irrestrito} \end{aligned} \tag{A}$$

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & w \\ \text{sujeito a} \quad & 3y_1 - 1y_2 - 3y_3 \geqslant w \\ & -2y_1 + 4y_2 - 1x_3 \geqslant w \\ & -5y_1 - 6y_2 + 2y_3 \geqslant w \\ & y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1 \\ & y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0, y_3 \geqslant 0, w \text{ irrestrito} \end{aligned} \tag{B}$$

As soluções ótimas desses modelos resultam em $z^* = w^* = -0,908$, $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (0,394; 0,312; 0,294)$ e $(y_1^*, y_2^*, y_3^*) = (0,321; 0,083; 0,596)$. Ou seja, a empresa A deve escolher a estratégia $_1$ com chance 39,4%, um pouco maior que as estratégias A_2 e A_3 (31,2% e

$29,4\%$), respectivamente, enquanto a empresa B deve escolher a estratégia B_3 com grande chance ($59,6\%$) e a estratégia B_2 com pequena chance ($8,3\%$). Note que o valor ótimo do jogo $z^* = w^*$, para ambas as empresas, está entre -2 e 2, conforme mencionado anteriormente.

Referências

1. Arenales, M. N., Armentano, V. A., Morabito Neto, R., & Yanasse, H. H. (2007). Pesquisa operacional.
2. Belfiore, P., & Fávero, L. P. (2013). *Pesquisa operacional para cursos de engenharia* (Vol. 1). Elsevier Brasil.
3. Prado, D. (2016). *Programação linear* (Vol. 1). Falconi Editora.
4. Boldrini, J. L., Costa, S. I., Figueredo, V. L., & Wetzler, H. G. (1980). *Álgebra linear* (p. 372). Harper & Row.
5. Luenberger, D. G., & Ye, Y. (1984). *Linear and nonlinear programming* (Vol. 2). Reading, MA: Addison-wesley.