

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas

Licenciatura em Matemática

Emanuel Mendes Queiroz

UMA ANÁLISE NUMÉRICA DOS MÉTODOS DO
GRADIENTE PROJETADO AO LONGO DE
DIREÇÕES VIÁVEIS E DE ARCOS DE
PROJEÇÃO

AD PLENAM VITAM

Vitória da Conquista

2024

Emanuel Mendes Queiroz

**UMA ANÁLISE NUMÉRICA DOS MÉTODOS DO GRADIENTE
PROJETADO AO LONGO DE DIREÇÕES VIÁVEIS E DE ARCOS DE
PROJEÇÃO**

Monografia apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - Campus Vitória da Conquista - BA, para obtenção do Título de Licenciado em Matemática, sob orientação do professor Marcio Antônio de Andrade Bortoloti.

**Vitória da Conquista
2024**

Emanuel Mendes Queiroz

UMA ANÁLISE NUMÉRICA DOS MÉTODOS DO GRADIENTE
PROJETADO AO LONGO DE DIREÇÕES VIÁVEIS E DE ARCOS DE
PROJEÇÃO

Monografia apresentada ao Colegiado do Curso de Matemática como requisito parcial para aprovação na disciplina Seminário de Pesquisa II do Curso de Licenciatura em Matemática.

Trabalho aprovado em 11 de dezembro de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Marcio Antônio de Andrade Bortoloti - UESB
Orientador

Prof. Ricardo Freire da Silva - UESB
Examinador

Prof. André Nagamine - UESB
Examinador

Vitória da Conquista
2024

*“A coisa mais bela que podemos vivenciar é
o mistério. Ele é fonte fundamental de toda
verdadeira arte e de toda ciência.”*

Albert Einstein

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, que sempre esteve ao meu lado. Aos meus pais, Manoel e Tereza, que sempre me incentivaram e apoiaram em meus estudos, e aos demais familiares que contribuíram para o meu bem-estar.

Agradeço ao professor orientador Marcio Antônio de Andrade Bortoloti, que me incentivou a desenvolver autonomia e senso crítico. Por meio de sua experiência, me guiou na realização deste trabalho, me mostrou caminhos para resolver problemas e me instigou a amadurecer em meu conhecimento. À banca examinadora, por participar e contribuir com este trabalho.

Agradeço aos meus amigos, Samara, Gabriel e Giselle, que caminharam comigo durante os momentos bons e difíceis da graduação. Aos meus colegas de turma e aos meus colegas do grupo PETIMAT, com os quais compartilhei boas experiências durante esse tempo.

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos uma análise numérica de métodos do Gradiente Projetado ao longo de direções viáveis e de arcos de projeção. Abordamos uma breve revisão de literatura sobre esses métodos e discutimos suas principais características. Apresentamos uma comparação do desempenho de diferentes estratégias de métodos do Gradiente Projetado na minimização de uma função não linear em diferentes conjuntos de restrições. Isso permite identificar as estratégias que apresentam maior eficiência e robustez para esse problema. Em relação aos resultados numéricos, evidenciamos resultados existentes na teoria, como a ineficiência de métodos do Gradiente Projetado ao longo de arcos de projeção em relação ao uso de projeções. Por outro lado, esses mesmos métodos apresentam melhor desempenho nos casos em que o ponto crítico da função objetivo pertencia à fronteira do conjunto de restrições. Além disso, comparamos o desempenho de buscas lineares monótonas e não monótonas em cada caso estudado.

Palavras-chave: Métodos do Gradiente Projetado; Direções viáveis; Arcos de projeção; Buscas lineares não monótonas.

ABSTRACT

In this work, we present a numerical analysis of Projected Gradient methods along the feasible directions and projection arcs. We provide a brief literature review on these methods and discuss their main characteristics. We performed a comparison of the performance of different strategies of Projected Gradient methods for minimizing a nonlinear function under some constraint sets. This allow to identify the strategies that exhibit greater efficiency and robustness for this problem. Concerning the numerical results, it was possible to highlight existing theoretical results, such as the inefficiency of Projected Gradient methods along the projection arcs in terms of projections. On the other hand, these same methods showed better performance in the cases in which the critical point of the objective function belongs to the boundary of the constraint sets. In addition, we compared the performance of monotone and non-monotone linear searches in each case studied.

Keywords: Projected Gradient methods; Feasible directions; Projection arcs; Non-monotone line searches.

Sumário

| | |
|---|-----------|
| Introdução | 7 |
| 1 Métodos do Gradiente Projetado | 10 |
| 1.1 Contexto histórico e ideia inicial | 10 |
| 1.2 Métodos do Gradiente Projetado ao longo de arcos de projeção e ao longo de direções viáveis | 13 |
| 1.3 Busca de Armijo | 15 |
| 2 Resultados básicos e preliminares | 17 |
| 2.1 Definições iniciais | 17 |
| 2.2 Convexidade | 19 |
| 2.3 Convergência | 25 |
| 3 Buscas monótonas e não monótonas em métodos do Gradiente Projetado | 28 |
| 3.1 Buscas lineares ao longo de direções viáveis | 28 |
| 3.2 Busca de Armijo ao longo do arco de projeção | 30 |
| 4 Análise de convergência | 32 |
| 4.1 Buscas lineares ao longo das direções viáveis | 33 |
| 4.2 Busca de Armijo ao longo de arcos de projeção | 44 |
| 5 Resultados numéricos | 52 |
| 5.1 Comparação de diferentes algoritmos | 52 |
| 5.2 Minimização da função de Rosenbrock | 54 |
| 5.2.1 Conjunto viável Ω_1 | 58 |
| 5.2.2 Conjunto viável Ω_2 | 59 |
| 5.2.3 Conjunto viável Ω_3 | 60 |
| 5.2.4 Conjunto viável Ω_4 | 61 |
| 5.2.5 Conjunto viável Ω_5 | 62 |
| 5.2.6 Conjunto viável Ω_6 | 63 |
| 5.2.7 Conjunto viável Ω_7 | 65 |

| | | |
|-----------------------------------|---|-----------|
| 5.2.8 | Conjunto viável Ω_8 | 66 |
| 5.2.9 | Conjunto viável Ω_9 | 67 |
| 5.2.10 | Conjunto viável Ω_{10} | 68 |
| 5.2.11 | Conjunto viável Ω_{11} | 69 |
| 5.2.12 | Conjunto viável Ω_{12} | 70 |
| 5.3 | Considerações gerais | 71 |
| Conclusões | | 74 |
| Referências Bibliográficas | | 76 |

Introdução

A otimização é uma ferramenta essencial na ciência da tomada de decisão. Empresas aéreas buscam minimizar custos e distâncias, investidores minimizam riscos enquanto maximizam os lucros, indústrias otimizam a eficiência na operação dos seus processos de produção. A natureza otimiza: sistemas físicos tendem a um estado de energia mínima, raios de luz seguem caminhos que minimizam o tempo de viagem, abelhas otimizam a construção dos favos de mel.

Um problema de otimização que possui importantes aplicações é o de determinar os autovalores de uma matriz. O sistema de pesquisa da empresa Google, por exemplo, é baseado em um algoritmo denominado *PageRank*, que está associado ao cálculo de autovalores de uma matriz. Esse algoritmo classifica a importância de cada página na web, permitindo ao Google ordenar as páginas e apresentar ao usuário as mais importantes primeiro, veja [7]. Outro problema que envolve a determinação de autovalores é o de processamento de sinais, pois a esse problema estão associadas matrizes cujos autovalores e autovetores representam aspectos importantes dos sinais processados, veja [8].

A utilização de técnicas de otimização envolve um modelo matemático de um problema que depende de características expressas por variáveis, onde busca-se encontrar valores para essas variáveis que otimizem o modelo, isto é, que maximizem ou minimizem determinada função associada a ele. Muitas vezes, as variáveis são restritas ou limitadas de alguma forma. Por exemplo, quantidades como a densidade eletrônica em uma molécula ou a taxa de juros em um empréstimo não podem ser negativas, [20].

Em geral, o problema de otimização pode ser descrito como minimizar $f(x)$ sujeito a $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada função objetivo e Ω é o conjunto de restrições do problema, denominado conjunto viável. Problemas de otimização nessa forma geral podem ser classificados de acordo com a natureza da função objetivo e das restrições: lineares, não lineares, convexas, não convexas; quanto ao número de variáveis ou à quanto diferenciabilidade das funções, entre outros aspectos. Uma classificação muito importante é a de problemas de otimização irrestrita e problemas de otimização restrita.

Problemas de otimização irrestrita são um caso particular do problema geral de otimização, quando $\Omega = \mathbb{R}^n$. Esses problemas surgem diretamente em muitas aplicações práticas e também como reformulações de problemas de otimização com restrições. Conforme Ribeiro e Karas [23], o estudo das propriedades de problemas irrestritos, bem como

dos métodos que os resolvem, é de fundamental importância na otimização, uma vez que muitos métodos para resolver problemas mais gerais de otimização fazem uso de algumas ferramentas presentes em métodos que resolvem o caso irrestrito.

Por outro lado, os problemas de otimização restrita surgem de modelos que incluem restrições nas variáveis. O conjunto Ω , mencionado anteriormente, define essas restrições e, em geral, elas são restrições de igualdade ou de desigualdade e podem ser restrições lineares simples ou mais gerais, ou também desigualdades não lineares. Quando tanto a função objetivo quanto todas as restrições são funções lineares, o problema é de otimização linear. Já os problemas de otimização não linear são caracterizados pela existência de pelo menos uma restrição não linear ou pela não linearidade da própria função objetivo.

Neste trabalho, consideraremos o problema

$$\text{minimizar } f(x) \text{ sujeito a } x \in \Omega \subsetneq \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável, isto é, f é de classe \mathcal{C}^1 . Além disso, consideramos Ω um conjunto convexo e fechado. A convexidade de Ω torna possível a utilização de um operador de projeção ortogonal $\mathcal{P} : \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega$, que permite calcular, de modo único, o ponto de Ω mais próximo de um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrário. Em otimização restrita, a utilização de uma projeção ortogonal desempenha um papel fundamental ao garantir que as iterações geradas pelo algoritmo permaneçam no interior do conjunto viável.

Além do emprego de uma projeção, a escolha de uma estratégia de busca linear para encontrar o parâmetro de comprimento de passo no processo iterativo possui grande influência na eficiência do método. Uma busca linear, no processo de otimização, trata-se do processo de calcular um valor adequado para o parâmetro de comprimento de passo em cada iteração. Esse parâmetro define o quanto o algoritmo avança em direção à solução a cada etapa do processo, e seu ajuste permite balancear o progresso. Utilizar passos maiores pode acelerar o processo, mas com o risco de ultrapassar o ponto ideal, enquanto que utilizar passos menores proporciona mais precisão, porém pode tornar o processo mais lento.

Tradicionalmente, buscas lineares monótonas são amplamente utilizadas e, nessa abordagem, o valor da função objetivo deve diminuir a cada iteração do algoritmo. A utilização dessa estratégia assegura uma convergência estável e permite uma maior previsibilidade do algoritmo, uma vez que impõe-se um decréscimo da função objetivo em cada iteração. No entanto, essa abordagem pode gerar parâmetros de comprimento de passo excessivamente pequenos, resultando em convergência lenta do método em certos casos. Para contornar essa dificuldade, surgiram as buscas lineares não monótonas, que não impõem a condição de decréscimo da função objetivo a cada iteração. O emprego dessas estratégias pode melhorar a convergência em casos onde uma busca monótona seria obrigada a avançar lentamente ao longo do fundo de um “vale estreito e curvo”, uma situação comum

em problemas de otimização não linear de larga escala, [9]. Nesses casos, o gradiente da função pode ter grandes oscilações em algumas direções, mas quase não variar em outras, e a monotonicidade força as iterações a seguirem nessa região, o que pode causar passos muito curtos ou até mesmo oscilações indesejadas, conforme [1].

A utilização do operador de projeção ortogonal e das estratégias de busca de um parâmetro de comprimento de passo desempenham um papel fundamental nos métodos para otimização restrita. Métodos importantes para a resolução de problemas restritos da otimização são os métodos do Gradiente Projetado. Eles são caracterizados como uma combinação de métodos do Gradiente, para otimização irrestrita, com a projeção dos termos obtidos no processo iterativo no conjunto viável. Neste trabalho, trataremos desses métodos, abordando seu surgimento e suas principais características, além de analisar numericamente seu desempenho em um problema de otimização não linear.

Este trabalho está organizado em cinco capítulos, além das conclusões. No Capítulo 1, discutimos os métodos do Gradiente Projetado de maneira geral, apresentando, inicialmente, uma breve revisão da literatura sobre esses métodos. Em seguida, são discutidas duas abordagens de métodos do Gradiente Projetado, isto é, ao longo de arcos de projeção e ao longo de direções viáveis. Apresentamos também uma estratégia de busca linear amplamente utilizada, que é a busca de Armijo.

O Capítulo 2 reúne resultados básicos e preliminares que servirão de base para o desenvolvimento e para a análise de convergência das estratégias discutidas ao longo do texto. Em seguida, no Capítulo 3, detalhamos os métodos do Gradiente Projetado empregados neste trabalho com diferentes estratégias de busca linear, monótonas e não monótonas.

No Capítulo 4, apresentamos uma análise da convergência dos algoritmos implementados. Para um caso particular de Método do Gradiente Projetado, apresentamos uma adaptação de resultados contidos nos trabalhos de Iusem [16] e Ferreira [14]. Fornecemos uma prova alternativa desses resultados, considerando as especificidades deste trabalho.

No Capítulo 5, são apresentados os resultados numéricos obtidos da implementação dos métodos estudados, incluindo a comparação entre diferentes estratégias de busca linear em diferentes conjuntos viáveis. Por fim, nas conclusões, discutimos os pontos principais deste trabalho.

Capítulo 1

Métodos do Gradiente Projetado

1.1 Contexto histórico e ideia inicial

O desenvolvimento de métodos computacionais para a minimização de funções com restrições é fundamental, tanto na teoria matemática quanto nas aplicações da Otimização. Isso ocorre porque muitos problemas práticos, ao serem modelados matematicamente, podem ser descritos por funções definidas em conjuntos com restrições e solucionados através de processos de minimização.

No processo de minimização de funções com restrições, é fundamental a utilização de direções viáveis, que são direções que respeitam as restrições impostas pelo conjunto viável Ω do problema. Tomar a direção do gradiente de uma função é uma estratégia natural na resolução de problemas de otimização. No entanto, essa abordagem pode não funcionar para problemas com restrições, uma vez que a direção do gradiente pode não ser uma direção viável. Nesse contexto, surgiram os métodos do Gradiente Projetado.

Uma estratégia básica de método do Gradiente Projetado foi inicialmente proposta em 1960 por Rosen, [25]. Nessa estratégia, os termos obtidos no processo iterativo utilizando a direção do gradiente são projetados no conjunto de restrição. Isso é feito com o objetivo de se obter uma direção viável para se realizar a busca de um parâmetro de comprimento de passo que forneça um decréscimo da função objetivo ao longo dessa direção. Rosen propôs e analisou um método para problemas de otimização não linear considerando o caso em que as restrições são lineares, [25], e o caso de restrições não lineares, [24]. Além disso, foram apresentados resultados de convergência para o método proposto e possíveis aprimoramentos do algoritmo, a fim de aumentar sua utilidade prática e melhorar a convergência.

O trabalho de Rosen, após sua publicação, recebeu muita atenção na literatura. Isso ocorreu, em particular, porque uma prova de convergência global do método, isto é, a partir de qualquer ponto no conjunto viável, estava contida no artigo original de Rosen, mas sua demonstração estava incorreta, [11]. Esse se tornou um importante problema

teórico que permaneceu em aberto por vinte e cinco anos, e foi resolvido em 1986 por Du e Zhang, [12]. O problema ficou bem conhecido depois que vários livros o divulgaram. Desde então, novas técnicas foram criadas para provar a convergência global, e foi feita extensa pesquisa com essa finalidade. A importância deste método na literatura de otimização não linear também decorre do fato de que muitos algoritmos mais eficientes foram desenvolvidos posteriormente incorporando as ideias básicas propostas por Rosen (como por exemplo, por Murtagh e Sargent [19]).

Em 1964, Goldstein [15] propôs outra estratégia para método do Gradiente Projetado. A ideia consiste num esquema iterativo para minimizar funções duas vezes diferenciáveis em subconjuntos convexos e fechados do \mathbb{R}^n , assumindo a possibilidade de se projetar, no conjunto viável, pontos que são calculados fora dele. No método proposto por Goldstein, ao contrário do proposto por Rosen, a direção viável em cada iteração depende do parâmetro de comprimento de passo, o que caracteriza a busca ao longo de arcos de projeção, a qual discutiremos mais a frente. O mesmo método foi proposto, de forma independente, em 1966 por Levitin e Polyak [22]. Além disso, Goldstein [15] apresentou resultados de convergência global para o método proposto, que são extensões de resultados para métodos do Gradiente para o caso irrestrito.

No método proposto por Goldstein, utiliza-se uma direção viável para cada parâmetro de comprimento de passo testado em uma iteração, o que implica no cálculo de uma projeção para cada ponto teste. O método de Rosen, por outro lado, fixa uma direção viável e realiza o cálculo do parâmetro ao longo dessa mesma direção, o que demanda apenas uma projeção a cada iteração.

De modo geral, cada iteração de um método do Gradiente Projetado requer o cálculo de uma ou mais projeções no conjunto viável Ω . Isso significa que esses métodos só podem ser eficientes quando o cálculo da projeção tem custo computacional relativamente baixo. Quando Ω é um conjunto poliedral, por exemplo, a projeção necessária no processo iterativo requer a solução de um problema de programação quadrática, o que é considerado aceitável. No entanto, quando se trata do caso mais geral, isto é, com restrições não lineares, dificilmente técnicas de projeção serão viáveis computacionalmente. Assim, os métodos do Gradiente Projetado são limitados a problemas envolvendo conjuntos com restrições simples. Às vezes, o cálculo de projeções não requer resolução numérica porque existem fórmulas explícitas. Os conjuntos viáveis analisados nos experimentos numéricos deste trabalho correspondem a esse caso.

Conforme Bertsekas [3], o algoritmo do método do Gradiente Projetado proposto por [15] e [22] tem uma característica interessante que o torna atrativo para problemas de larga escala com muitas restrições simples. Ao contrário de outros algoritmos para minimização restrita, que mantêm a viabilidade das direções e realizam a busca ao longo de segmentos de reta, como o proposto por Rosen [25], ele prossegue ao longo de uma trajetória curva, conhecida como arco de projeção, em direção ao conjunto viável.

Por outro lado, um ponto fraco da implementação proposta em [15] e [22], de acordo com Bertsekas [3], é que não se sabe, a princípio, o quão pequeno deve ser o tamanho do parâmetro de comprimento de passo para garantir a convergência do método, o que na prática pode impor dificuldades, como a convergência lenta do algoritmo. Uma possível estratégia de escolha para esse parâmetro, que é frequentemente sugerida na literatura, consiste em começar com uma estimativa inicial para o parâmetro e então, se o valor da função objetivo no ponto resultante não for diminuído, reduzir esse parâmetro sucessivamente até que ocorra um decréscimo no valor da função. Na Seção 1.3, será discutida uma busca que funciona dessa maneira e é amplamente utilizada: a busca de Armijo.

A Figura 1.1 ilustra o esquema iterativo de um método do Gradiente Projetado na minimização restrita de uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. As curvas de nível de f estão representadas em cinza e o conjunto viável Ω , delimitado em preto, está contido no domínio de f . Os pontos em preto representam a sequência de iterações geradas pelo método, que são calculadas no interior do conjunto viável ou em sua fronteira. A partir do ponto x_0 , o método calcula o ponto z_0 , que fornece um vetor na direção do gradiente, mas que não considera o conjunto de restrições a princípio, ou seja, trata-se do caminho que o algoritmo seguiria caso não houvesse restrições. O ponto z_0 é então projetado em Ω e, considerando-se a direção definida por essa projeção e x_0 , calcula-se o próximo termo da sequência, x_1 , que, nesse caso, resultou na própria projeção de z_0 . De maneira análoga, a partir de x_1 , o método calcula o ponto z_1 e o projeta no conjunto, resultando no ponto $P_\Omega(z_1)$. Considerando a direção definida por x_1 e $P_\Omega(z_1)$, calcula-se o termo seguinte x_2 . E assim sucessivamente.

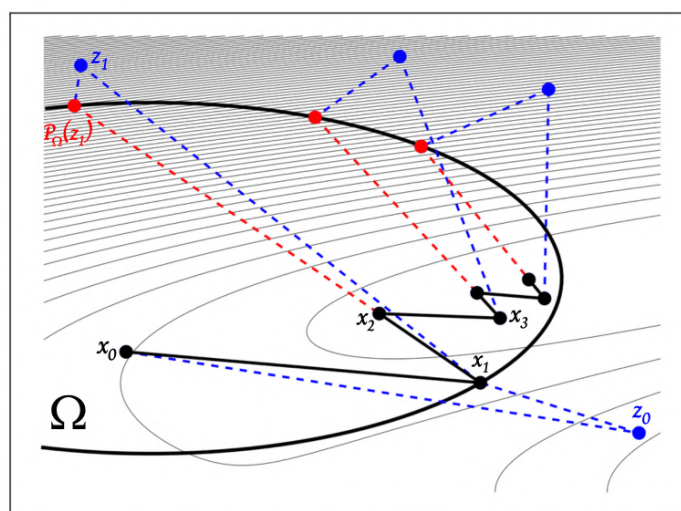


Figura 1.1: Exemplo de esquema iterativo de um método do Gradiente Projetado.

O processo iterativo de um método do Gradiente Projetado consiste, então, em calcular a direção de descida a partir do gradiente da função objetivo e projetar essa direção no conjunto viável, ajustando o passo para assegurar que a próxima iteração também esteja

no interior do conjunto. O algoritmo produz uma sequência de pontos a qual espera-se que convirja para um ponto estacionário do problema, conceito este que será discutido mais a frente. A sequência pode convergir para um ponto onde o gradiente da função objetivo se anula ou então para um ponto onde a direção do gradiente não permite mais um movimento de descida viável, isto é, que forneça um decréscimo da função e respeite as restrições do problema.

A importância teórica de métodos do Gradiente Projetado consiste, sobretudo, no fato de que vários outros métodos que geram iterações que respeitam o conjunto de restrições do problema e que são métodos de descida, podem ser vistos como versões inexatas ou modificadas de algum método do Gradiente Projetado, conforme [18].

1.2 Métodos do Gradiente Projetado ao longo de arcos de projeção e ao longo de direções viáveis

Métodos do Gradiente Projetado podem ser vistos como uma combinação natural de métodos do Gradiente para otimização irrestrita com a projeção dos termos obtidos na construção da sequência gerada pelo algoritmo, como mencionado. O esquema iterativo geral de um método do Gradiente Projetado pode ser descrito como

$$x_{k+1} = x_k + \gamma_k(x_k(\beta_k) - x_k), \quad (1.1)$$

onde $x_k(\beta_k) = P_\Omega(x_k - \beta_k \nabla f(x_k))$, ∇f denota o gradiente da função f e os parâmetros β_k e γ_k são positivos e denominados parâmetros de comprimento de passo.

O parâmetro de comprimento de passo é fundamental no esquema iterativo de um algoritmo de otimização, pois define o quanto o algoritmo avança a cada iteração. Utilizar estratégias de buscas lineares para o cálculo desse parâmetro torna mais eficiente o processo de otimização, pois considera as particularidades da função objetivo e do conjunto viável para se obter o decréscimo da função objetivo. Diversas escolhas são possíveis para esses parâmetros, e as estratégias que geralmente são utilizadas impõem alguma condição de decréscimo para a função objetivo e ajustam o parâmetro, caso necessário, para satisfazer essa condição.

Se tomarmos $\gamma_k = 1$ em (1.1) para todo $k \in \mathbb{N}$, obtemos o esquema de método do Gradiente Projetado proposto por Goldstein [15], que consiste em

$$x_{k+1} = P_\Omega(x_k - \beta_k \nabla f(x_k)). \quad (1.2)$$

Nesse caso, o parâmetro β_k é o maior número real positivo que garante um decréscimo suficiente da função $\varphi_k : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\varphi_k(\beta) = f(x_k(\beta))$ e $x_k(\beta) = P_\Omega(x_k - \beta \nabla f(x_k))$. A Figura 1.2 ilustra o processo de busca do parâmetro de comprimento de passo dessa estratégia. Na iteração k , o algoritmo calcula, a partir do ponto x_k , utilizando um parâmetro inicial $\bar{\beta}$, o ponto $z_{k,0} = x_k - \bar{\beta} \nabla f(x_k)$, que pode não estar no interior e nem

na fronteira do conjunto viável Ω . Nesse caso, esse ponto é projetado em Ω , obtendo-se $P_{\Omega}(z_{k,0}) = x_k(\bar{\beta})$. Se esse ponto projetado satisfizer a condição de decrescimento da função objetivo, imposta pela estratégia de busca, tomamos $x_{k+1} = x_k(\bar{\beta})$. Caso contrário, o parâmetro de comprimento de passo é reduzido e, a partir de x_k novamente, o processo é repetido, calculando-se os pontos $z_{k,j}$ e $P_{\Omega}(z_{k,j})$, com $j = 0, 1, 2, \dots$, até que seja obtido um $x_k(\beta_k)$ adequado, para $\beta_k \in [0, \bar{\beta}]$. A trajetória em preto, na Figura 1.2, representa o arco de projeção $x_k(\beta)$ do conjunto Ω na iteração k . O arco de projeção pode ser visto como um caminho que segue no interior e na fronteira do conjunto de restrições Ω , formado por projeções de pontos calculados fora do conjunto para diferentes parâmetros de comprimento de passo.

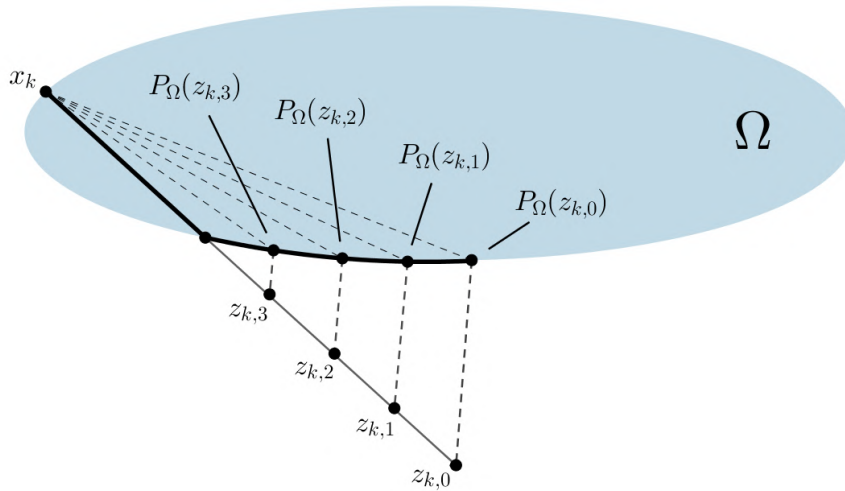


Figura 1.2: Cálculo do parâmetro β_k ao longo do arco de projeção $x_k(\beta)$, com $\beta \in [0, \bar{\beta}]$.

Nota-se que cada iteração de um método do Gradiente Projetado ao longo de arcos de projeção requer o cálculo da projeção sobre o conjunto viável Ω uma vez ou mais. Por isso, a utilização dessa estratégia só é viável quando o cálculo de projeções possui custo computacional relativamente baixo.

Existem outras estratégias de método do Gradiente Projetado, como a que foi proposta por Rosen ([25], [24]), que requerem, em cada iteração, o cálculo de uma projeção apenas. Nesse caso, considerando-se o esquema iterativo (1.1), escolhe-se o parâmetro $\beta_k \in [\tilde{\beta}, \hat{\beta}]$, com $0 < \tilde{\beta} \leq \hat{\beta}$, e calcula-se o parâmetro γ_k por meio de alguma estratégia de busca. O parâmetro γ_k é calculado para se obter o decréscimo da função $\psi_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\psi_k(\gamma) = f(x_k(\gamma))$ e $x_k(\gamma) = x_k + \gamma(x_k(\beta_k) - x_k)$. Se $x_k \in \Omega$ e Ω é um conjunto convexo, podemos considerar a direção $d_k = x_k(\beta_k) - x_k$, de modo que $x_k + \gamma d_k \in \Omega$ para todo $\gamma \in [0, 1]$. Isso significa que as restrições do conjunto são respeitadas nesse intervalo e essa é uma direção viável.

A Figura 1.3 ilustra o processo de busca do parâmetro de comprimento de passo γ_k dessa estratégia. Na iteração k , o algoritmo calcula, a partir do ponto x_k , utilizando um parâmetro β_k dado, o ponto $x_k - \beta_k \nabla f(x_k)$, que pode não estar no interior e nem

na fronteira do conjunto viável Ω . Neste caso, esse ponto é projetado em Ω , obtendo-se $P_{\Omega}(x_k - \beta_k \nabla f(x_k)) = x_k + d_k$. Se esse ponto projetado satisfizer a condição imposta pela estratégia de busca, tomamos $\gamma_k = 1$ e $x_{k+1} = x_k + d_k$ em (1.1). Caso contrário, o parâmetro de comprimento de passo γ é reduzido até que seja obtido um $\gamma_k \in [0, 1]$ adequado. Então, tomamos $x_{k+1} = x_k + \gamma d_k$. A linha em destaque, na Figura 1.3, representa o segmento $x_k(\gamma)$.

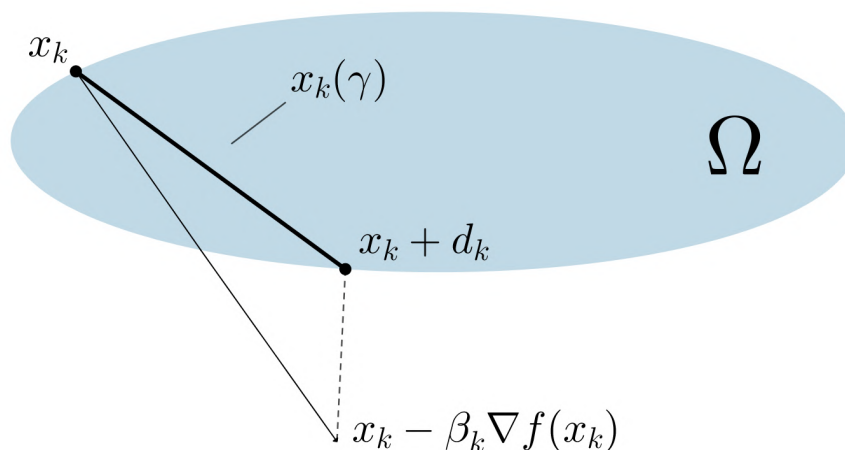


Figura 1.3: Cálculo do parâmetro γ_k ao longo do segmento $x_k(\gamma)$, com $\gamma \in [0, 1]$.

Observa-se que, neste caso, o esquema iterativo exige o cálculo de apenas uma projeção a cada iteração, o que pode resultar num custo computacional mais baixo que o método anterior. A principal diferença entre os esquemas iterativos ao longo de direções viáveis e ao longo de arcos de projeção é que as iterações produzidas pelo último método possuem maior probabilidade de estar na fronteira do conjunto de viável do que as iterações produzidas pelo primeiro, conforme Bertsekas [4].

1.3 Busca de Armijo

Em geral, no processo de minimização de uma função, ao se escolher um método, as estratégias de busca para encontrar parâmetros de comprimentos de passo eficientes são fundamentais para garantir boas propriedades de convergência do algoritmo. Métodos que utilizam buscas no processo iterativo testam uma sequência de valores candidatos para o parâmetro de comprimento de passo, até encontrar um parâmetro que atenda a certas condições.

Uma possível maneira de se empregar uma estratégia de busca, que é frequentemente sugerida na literatura, consiste em começar com uma estimativa inicial para o comprimento do passo e então, se o valor da função resultante não for diminuído o suficiente, reduz-se o tamanho do parâmetro sucessivamente pela multiplicação com um escalar constante até se obter um decréscimo suficiente da função objetivo.

Um tipo de busca linear amplamente empregado trata-se da busca de Armijo [2], que impõe uma condição de decréscimo suficiente da função objetivo. Dada uma função f diferenciável no ponto x_k , uma direção de descida d_k e fixados os parâmetros $\bar{\alpha} > 0$, $\sigma, \theta \in (0, 1)$, essa busca consiste em, escolhermos α_k como o maior entre todos os números da forma $\bar{\alpha}\theta^i$, para $i = 0, 1, 2, \dots$, que satisfaz a desigualdade

$$f(x_k + \alpha_k d_k) \leq f(x_k) + \sigma \alpha_k \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle. \tag{1.3}$$

A Figura 1.4 apresenta uma interpretação geométrica para a busca de Armijo, onde são mostrados valores de α que satisfazem e que não satisfazem a desigualdade (1.3). O valor $\alpha_k \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle$ no lado direito em (1.3) representa o valor de redução da função f , previsto pela sua aproximação linear para o passo de comprimento α_k na direção d_k . Portanto, a desigualdade (1.3) implica que o decréscimo de f deve ser pelo menos a fração, determinada por σ , do previsto. No Capítulo 4, apresentaremos um resultado que mostra que, sob certas condições, a busca de Armijo está bem definida, ou seja, ela produz um parâmetro de comprimento de passo $\alpha_k > 0$ aceitável, após um número finito de reduções do parâmetro inicial $\bar{\alpha}$.

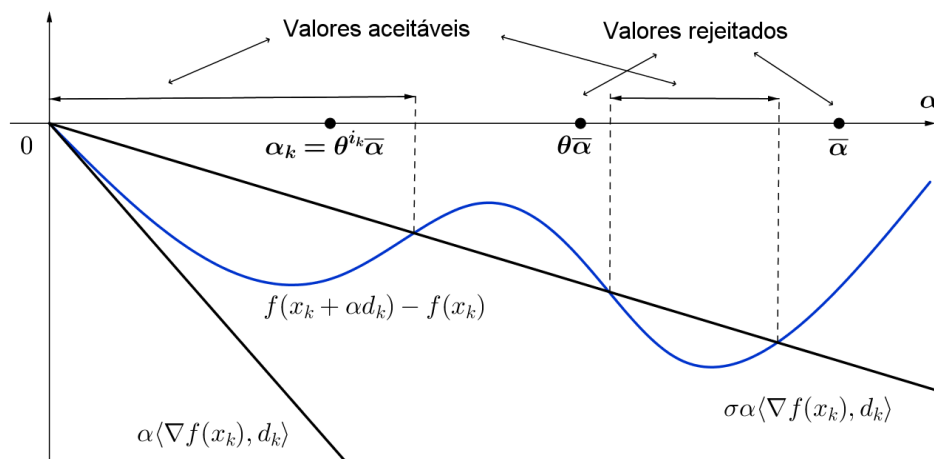


Figura 1.4: Interpretação geométrica da busca de Armijo.

No próximo capítulo, discutiremos sobre os resultados básicos e preliminares necessários para a análise de convergência das estratégias para métodos do Gradiente Projetado empregadas neste trabalho.

Capítulo 2

Resultados básicos e preliminares

Neste capítulo, apresentamos as definições e os resultados básicos que são fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Eles estabelecem as bases teóricas necessárias e serão utilizados ao longo do texto.

2.1 Definições iniciais

Sejam um conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Considerando o problema (1), chamaremos o conjunto Ω de conjunto viável do problema e f será chamada função objetivo. Neste trabalho, denotaremos a norma euclidiana de $x \in \mathbb{R}^n$ por $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno canônico do \mathbb{R}^n .

Uma definição essencial que será utilizada, é a de diferenciabilidade de uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Definição 2.1.1. (Diferenciabilidade) Dada uma função real $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, com $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, e $a \in \Omega$, dizemos que a função f é diferenciável no ponto a quando, para todo vetor $td = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, com $a + td \in \Omega$, se tenha

$$f(a + td) = f(a) + \langle \nabla f(a), td \rangle + o(t),$$

onde $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$.

Definição 2.1.2. (Minimizador) Dizemos que um ponto $\bar{x} \in \Omega$ é

(a) *minimizador (ou solução) global do problema (1), se*

$$f(\bar{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in \Omega \tag{2.1}$$

(b) *minimizador (ou solução) local do problema (1), se existe uma vizinhança U de \bar{x} tal que*

$$f(\bar{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in \Omega \cap U. \tag{2.2}$$

Definição 2.1.3. (Valor ótimo) O valor ótimo do problema (1), $\bar{v} \in \mathbb{R}$ é definido por

$$\bar{v} = \inf\{f(x); x \in \Omega\},$$

caso este ínfimo exista.

Uma função pode admitir vários minimizadores globais, mas o valor ótimo do problema sempre é o mesmo. Nos casos em que $\Omega = \emptyset$ ou a função f é ilimitada inferiormente no conjunto $\Omega \neq \emptyset$, o problema (1) não possui valor ótimo. A seguir, apresentamos algumas condições que garantem a existência de solução global para o problema (1). Ao longo do texto, utilizaremos a notação $\{x_k\}$ para indicar uma sequência $\{x_0, x_1, \dots, x_k, \dots\}$ de pontos em \mathbb{R}^n .

Teorema 2.1.4. (Teorema de Weierstrass) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto não-vazio e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, os problemas de minimizar e maximizar f em Ω têm soluções globais.

Demonstração: Sabe-se que qualquer problema de maximização pode ser transformado em um problema de minimização equivalente. Assim, é suficiente provar a existência de um minimizador ou de um maximizador. Mostraremos a existência de um minimizador. Como a imagem de um conjunto compacto por uma função contínua é compacta, o conjunto $\mathcal{V} = \{v \in \mathbb{R}; v = f(x) \text{ para algum } x \in \Omega\}$ é compacto em \mathbb{R} . Em particular, este conjunto é limitado inferiormente, ou seja,

$$-\infty < \bar{v} = \inf \mathcal{V}.$$

Pela definição de ínfimo, para todo $k \in \mathbb{N}$ existe um $x_k \in \Omega$ tal que

$$\bar{v} \leq f(x_k) \leq \bar{v} + 1/k.$$

Passando ao limite quando $k \rightarrow \infty$, concluímos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \bar{v}. \quad (2.3)$$

Como a sequência $\{x_k\} \subset \Omega$ e Ω é compacto, segue-se que $\{x_k\}$ é uma sequência limitada. Logo, ela possui uma subsequência $\{x_{k_j}\}$ que converge para algum ponto \bar{x} de Ω , ou seja,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_j} = \bar{x} \in \Omega.$$

Pela continuidade de f ,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f(x_{k_j}) = f(\bar{x}).$$

Usando (2.3), temos que $f(\bar{x}) = \bar{v}$, ou seja, f assume o valor mínimo em Ω no ponto $\bar{x} \in \Omega$. Em outras palavras, \bar{x} é um minimizador global do problema (1). \square

Definição 2.1.5. (Conjunto de nível) O conjunto de nível da função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, associado a $c \in \mathbb{R}$, é o conjunto dado por $L_{f,\Omega}(c) = \{x \in \Omega; f(x) \leq c\}$.

Corolário 2.1.6. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no conjunto Ω . Suponhamos que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que o conjunto de nível $L_{f,\Omega}(c)$ seja não-vazio e compacto. Então o problema de minimizar f em Ω possui uma solução global.*

Demonstração: Pelo **Teorema 2.1.4**, o problema

$$\text{minimizar } f(x) \text{ sujeito a } x \in L_{f,\Omega}(c)$$

tem uma solução global, digamos $\bar{x} \in L_{f,\Omega}$. Para todo ponto $x \in \Omega \setminus L_{f,\Omega}(c)$, temos que $f(x) > c \geq f(\bar{x})$, o que mostra que \bar{x} é um minimizador global de f não só em $L_{f,\Omega}(c)$, mas também em Ω . \square

2.2 Convexidade

Definição 2.2.1. (Conjunto convexo) *Um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é chamado conjunto convexo se, para quaisquer $x, y \in \Omega$ e $\alpha \in [0, 1]$, tem-se que $\alpha x + (1 - \alpha)y \in \Omega$. O ponto $\alpha x + (1 - \alpha)y$ chama-se combinação convexa de x e y com parâmetro α .*

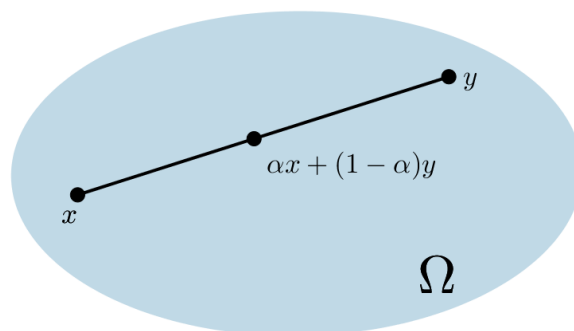


Figura 2.1: Exemplo de conjunto Ω convexo com $\alpha x + (1 - \alpha)y \in \Omega$, $\alpha \in [0, 1]$.

Definição 2.2.2. (Projeção ortogonal) *Dados um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e o ponto $x \in \mathbb{R}^n$, uma projeção ortogonal de x sobre Ω é uma solução global do problema*

$$\min \|y - x\| \text{ sujeito a } y \in \Omega. \quad (2.4)$$

Em outras palavras, uma projeção ortogonal de um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ sobre um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um ponto de Ω que está mais próximo de x . Dependendo das hipóteses sobre o conjunto Ω , pode haver mais de um ponto com esta propriedade, um único ponto ou nenhum. A seguir, mostraremos que a projeção sempre existe quando Ω é não-vazio e fechado e que essa projeção é única se Ω é também convexo.

Teorema 2.2.3. (Teorema da projeção)

- (a) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado. Então para todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$, uma projeção de x sobre Ω existe.*

- (b) Se, além de ser fechado, o conjunto Ω é convexo, então para todo $x \in \mathbb{R}^n$ a projeção de x sobre Ω , denotada por $P_\Omega(x)$, é única. Além disso, $\bar{x} = P_\Omega(x)$ se, e somente se, $\bar{x} \in \Omega$ e vale a desigualdade

$$\langle x - \bar{x}, y - \bar{x} \rangle \leq 0, \quad \forall y \in \Omega. \quad (2.5)$$

Demonstração:

- (a) Fixemos $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrário. Seja \mathbb{R}^+ o conjunto dos números reais não negativos e seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = \|y - x\|$. Evidentemente, f é contínua em \mathbb{R}^n e $L_{f,\Omega}(c) = \Omega \cap B(x, c)$, onde

$$B(x, c) = \{y \in \mathbb{R}^n; \|y - x\| \leq c\} = \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \leq c\},$$

ou seja, o conjunto de nível $L_{f,\Omega}(c)$ é a interseção do conjunto fechado Ω com o conjunto compacto $B(x, c)$. Portanto, $L_{f,\Omega}(c)$ é compacto. Além disso, se escolhermos $c > 0$ suficientemente grande, então o conjunto $B(x, c)$ contém pontos de Ω . Logo, $L_{f,\Omega}(c) \neq \emptyset$. Pelo **Corolário 2.1.6**, temos que o problema de minimizar f em Ω possui uma solução global. Assim, a projeção de x sobre Ω existe.

- (b) Sejam \bar{x} uma solução do problema (2.4) e $y \in \Omega$ qualquer. Como $\bar{x} \in \Omega$ e Ω é convexo, pela definição de combinação convexa temos que $(1 - \alpha)\bar{x} + \alpha y = x(\alpha) \in \Omega$ para todo $\alpha \in (0, 1]$. Assim, temos que

$$\|x - \bar{x}\| \leq \|x - x(\alpha)\|.$$

Elevando a desigualdade acima ao quadrado e reorganizando, obtemos

$$0 \geq \|x - \bar{x}\|^2 - \|x - x(\alpha)\|^2.$$

Somando $\bar{x} - \bar{x}$ no segundo termo,

$$0 \geq \|x - \bar{x}\|^2 - \|(x - \bar{x}) + (\bar{x} - x(\alpha))\|^2.$$

Expandindo o segundo termo e considerando que $\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + 2\langle a, b \rangle + \|b\|^2$, vale

$$0 \geq \|x - \bar{x}\|^2 - (\|x - \bar{x}\|^2 + 2\langle (x - \bar{x}), (\bar{x} - x(\alpha)) \rangle + \|\bar{x} - x(\alpha)\|^2).$$

Eliminando o parênteses e cancelando os termos simétricos, temos,

$$0 \geq -2\langle (x - \bar{x}), (\bar{x} - x(\alpha)) \rangle - \|\bar{x} - x(\alpha)\|^2.$$

Multiplicando o termo $\bar{x} - x(\alpha)$ por -1 , obtemos

$$0 \geq 2\langle (x - \bar{x}), (x(\alpha) - \bar{x}) \rangle - \|x(\alpha) - \bar{x}\|^2.$$

Utilizando o fato de que $(1 - \alpha)\bar{x} + \alpha y = x(\alpha)$ na desigualdade acima,

$$0 \geq 2\langle (x - \bar{x}), ((1 - \alpha)\bar{x} + \alpha y - \bar{x}) \rangle - \|(1 - \alpha)\bar{x} + \alpha y - \bar{x}\|^2.$$

Fazendo a distribuição e cancelando os termos simétricos,

$$0 \geq 2\langle(x - \bar{x}), \alpha(y - \bar{x})\rangle - \|\alpha(y - \bar{x})\|^2.$$

Utilizando a linearidade do produto interno no primeiro termo e isolando α^2 no segundo, obtemos

$$0 \geq 2\alpha\langle(x - \bar{x}), (y - \bar{x})\rangle - \alpha^2\|y - \bar{x}\|^2.$$

Dividindo ambos os lados da desigualdade acima por $2\alpha > 0$, temos

$$0 \geq \langle x - \bar{x}, y - \bar{x} \rangle - \frac{\alpha}{2}\|y - \bar{x}\|^2.$$

Passando ao limite quando $\alpha \rightarrow 0^+$, obtemos

$$0 \geq \langle x - \bar{x}, y - \bar{x} \rangle,$$

sendo que $y \in \Omega$ é arbitrário. Reciprocamente, suponhamos agora que algum \bar{x} satisfaça (2.5). Então, para todo $y \in \Omega$, vale

$$0 \geq \langle x - \bar{x}, y - \bar{x} \rangle.$$

Utilizando a linearidade do produto interno,

$$0 \geq \langle x, y \rangle - \langle \bar{x}, y \rangle - \langle x, \bar{x} \rangle + \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle.$$

Colocando $\frac{1}{2}$ em evidência no segundo membro,

$$0 \geq \frac{1}{2}(2\langle x, y \rangle - 2\langle \bar{x}, y \rangle - 2\langle x, \bar{x} \rangle + 2\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle).$$

Separando os termos na desigualdade acima e somando $\langle x, x \rangle - \langle x, x \rangle$ e $\langle y, y \rangle - \langle y, y \rangle$, obtemos

$$0 \geq \frac{1}{2}(\langle x - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle + \langle y - \bar{x}, y - \bar{x} \rangle - \langle x - y, x - y \rangle).$$

Considerando que $\langle v, v \rangle = \|v\|^2$ e multiplicando ambos os lados por 2,

$$0 \geq \|x - \bar{x}\|^2 + \|y - \bar{x}\|^2 - \|x - y\|^2.$$

Subtraindo o termo $\|y - \bar{x}\|^2 \geq 0$ do segundo membro,

$$0 \geq \|x - \bar{x}\|^2 - \|x - y\|^2.$$

Reorganizando a desigualdade e aplicando a raiz quadrada em ambos os lados,

$$\|x - \bar{x}\| \leq \|x - y\|.$$

Temos então que $\|x - \bar{x}\| \leq \|x - y\|$ para todo $y \in \Omega$, ou seja, \bar{x} é uma projeção de x sobre Ω , conforme a **Definição 2.2.2**. Finalmente, vamos mostrar que a projeção é única. Seja \hat{x} alguma outra solução de (2.4). Aplicando (2.5) para $\bar{x} = P_\Omega(x)$, considerando $y = \hat{x} \in \Omega$, temos

$$\langle x - \bar{x}, \hat{x} - \bar{x} \rangle \leq 0. \quad (2.6)$$

Aplicando (2.5) agora para $\hat{x} = P_{\Omega}(x)$, considerando $y = \bar{x} \in \Omega$,

$$-\langle x - \hat{x}, \hat{x} - \bar{x} \rangle \leq 0. \quad (2.7)$$

Somando (2.6) e (2.7), obtemos

$$0 \geq \langle x - \bar{x}, \hat{x} - \bar{x} \rangle - \langle x - \hat{x}, \hat{x} - \bar{x} \rangle.$$

Pela linearidade do produto interno, vale

$$0 \geq \langle x - \bar{x} - (x - \hat{x}), \hat{x} - \bar{x} \rangle.$$

Cancelando os termos simétricos e utilizando a definição de produto interno,

$$0 \geq \|\hat{x} - \bar{x}\|^2.$$

Removendo a desigualdade e calculando a raiz quadrada,

$$0 = \|\hat{x} - \bar{x}\|.$$

Logo, $\hat{x} = \bar{x}$. □

Definição 2.2.4. (Função convexa) Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo, diz-se que a função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa em Ω quando, para quaisquer $x, y \in \Omega$ e $\alpha \in [0, 1]$, tem-se

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

Uma interpretação geométrica para a desigualdade da definição acima pode ser vista na Figura 2.2. No gráfico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, considerando os pontos $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$, definimos a função afim $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cujo gráfico corresponde à reta secante a esses dois pontos. Considerando $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ uma combinação convexa de x e y com parâmetro $\alpha \in [0, 1]$, temos que $\varphi(z) = (1 - \alpha)f(y) + \alpha f(x)$ pela forma ponto-inclinação de uma reta. Vemos que $f(z) \leq \varphi(z)$.

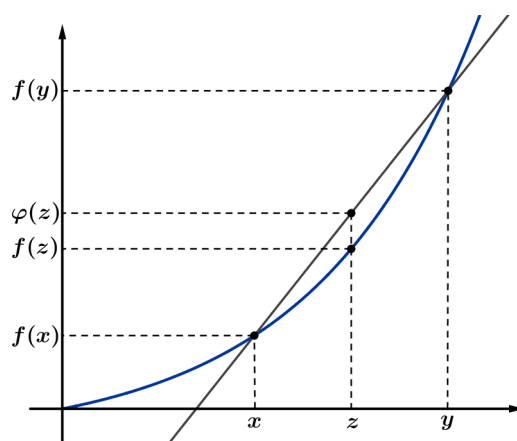


Figura 2.2: Exemplo de função convexa.

Teorema 2.2.5. (Caracterização de funções convexas diferenciáveis) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em Ω . Se f é

convexa em Ω , então, para quaisquer $x, y \in \Omega$,

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle.$$

Demonstração: Pela convexidade de f , dados $x, y \in \Omega$ e $\alpha \in (0, 1]$ quaisquer, definindo $d = y - x$, temos que

$$f(x + \alpha d) = f(\alpha y + (1 - \alpha)x) \leq \alpha f(y) + (1 - \alpha)f(x) = \alpha(f(y) - f(x)) + f(x),$$

isto é,

$$\alpha(f(y) - f(x)) \geq f(x + \alpha d) - f(x).$$

Dividindo ambos os lados da desigualdade acima por $\alpha > 0$ e passando ao limite quando $\alpha \rightarrow 0^+$, obtemos

$$f(y) - f(x) \geq \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \alpha d) - f(x)}{\alpha} = \langle \nabla f(x), d \rangle = \langle \nabla f(x), y - x \rangle,$$

ou seja,

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle.$$

□

Em relação à viabilidade de uma direção num conjunto de restrições e ao comportamento da função objetivo no problema de minimização, as definições e a proposição a seguir são fundamentais.

Definição 2.2.6. (Direção viável) Dizemos que $d \in \mathbb{R}^n$ é uma direção viável em relação ao conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, no ponto $\bar{x} \in \Omega$, quando existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\bar{x} + td \in \Omega, \text{ para todo } t \in [0, \varepsilon].$$

A Figura 2.3 ilustra a definição de direções viáveis num conjunto. As direções d_1 e d_2 são viáveis em relação ao conjunto Ω no ponto $\bar{x} \in \Omega$, enquanto a direção d_3 não é viável nesse ponto. Por exemplo, tem-se que $\bar{x} + td_1 \in \Omega$ para todo $t \in [0, \varepsilon]$, mas $\bar{x} + td_3 \notin \Omega$ para nenhum $t > 0$.

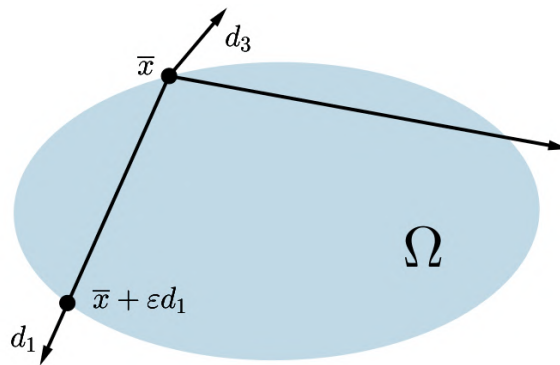


Figura 2.3: Exemplo de direções viáveis e não viáveis num conjunto Ω .

Observação 2.2.7. O número real positivo t , na definição anterior, é denominado parâmetro de comprimento de passo.

Definição 2.2.8. (Direção de descida) Dizemos que $d \in \mathbb{R}^n$ é uma direção de descida de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ no ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, se existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(\bar{x} + td) < f(\bar{x}), \quad \forall t \in (0, \varepsilon].$$

Denotamos por $\mathcal{D}_f(\bar{x})$ o conjunto de todas as direções de descida da função f no ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Podemos dizer então que $d \in \mathcal{D}_f(\bar{x})$ se, e somente se, todo comprimento de passo suficientemente pequeno a partir do ponto \bar{x} , na direção d , resulta em algum decréscimo da função f . Nesse contexto, o comprimento de passo é um parâmetro positivo que controla o deslocamento na direção d a partir do ponto \bar{x} .

Proposição 2.2.9. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Então:

- (a) Para todo $d \in \mathcal{D}_f(\bar{x})$, tem-se que $\langle \nabla f(\bar{x}), d \rangle \leq 0$.
- (b) Se $d \in \mathbb{R}^n$ satisfaz $\langle \nabla f(\bar{x}), d \rangle < 0$, tem-se que $d \in \mathcal{D}_f(\bar{x})$.

Demonstração: Seja $d \in \mathcal{D}_f(\bar{x})$. Para todo t suficientemente pequeno, a diferenciabilidade de f implica em

$$0 > f(\bar{x} + td) - f(\bar{x}) = t\langle \nabla f(\bar{x}), d \rangle + o(t).$$

Colocando t em evidência do lado direito, temos

$$0 > t(\langle \nabla f(\bar{x}), d \rangle + o(t)/t).$$

Dividindo ambos os lados da desigualdade por t e passando ao limite quando $t \rightarrow 0^+$, obtemos

$$0 \geq \langle \nabla f(\bar{x}), d \rangle,$$

o que prova o item (a). Agora, vamos mostrar o item (b). Suponhamos que $\langle \nabla f(\bar{x}), d \rangle < 0$. Temos que

$$f(\bar{x} + td) - f(\bar{x}) = t(\langle \nabla f(\bar{x}), d \rangle + o(t)/t).$$

Em particular, para todo $t > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\langle \nabla f(\bar{x}), d \rangle + o(t)/t \leq \frac{1}{2}\langle \nabla f(\bar{x}), d \rangle < 0,$$

o que implica que $f(\bar{x} + td) - f(\bar{x}) < 0$, ou seja, $d \in \mathcal{D}_f(\bar{x})$. □

A Figura 2.4 ilustra a **Proposição 2.2.9**. Como $\langle \nabla f(\bar{x}), d \rangle < 0$, segue-se que d é uma direção de descida da função f no ponto \bar{x} , ou seja, $f(\bar{x} + td) < f(\bar{x})$ para todo $t > 0$ suficientemente pequeno.

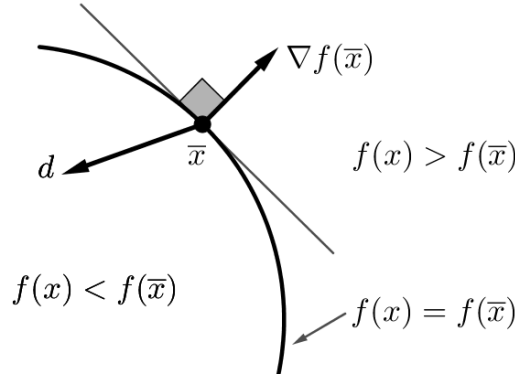


Figura 2.4: Ilustração da Proposição 2.2.9.

O resultado a seguir define condições de otimalidade de primeira ordem quando o conjunto viável Ω é convexo, que deve ser satisfeita quando $\bar{x} \in \Omega$ dado é minimizador local do problema (1). Sua demonstração pode ser vista em [17].

Proposição 2.2.10. (Condições de otimalidade de primeira ordem no caso do conjunto viável convexo) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e fechado, e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $\bar{x} \in \Omega$. Se \bar{x} é um minimizador local de f no conjunto Ω , então*

$$\langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad (2.8)$$

ou, equivalentemente,

$$P_{\Omega}(\bar{x} - \alpha \nabla f(\bar{x})) = \bar{x}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_+. \quad (2.9)$$

Além disso, se f é uma função convexa, $\bar{x} \in \Omega$ e vale (2.8) ou (2.9), então \bar{x} é um minimizador local de f em Ω .

Definição 2.2.11. (Ponto estacionário) *Dizemos que um ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ é um ponto estacionário do problema (1) se $\bar{x} \in \Omega$ e vale (2.8) ou (2.9).*

A definição de ponto estacionário é fundamental e será utilizada na análise de convergência no próximo capítulo. A **Proposição 2.2.10** mostra que, para um ponto ser uma solução local do problema (1), ele tem que ser estacionário. Por meio desse resultado, podemos estabelecer critérios de parada para métodos do Gradiente Projetado que se baseiam na distância entre os termos obtidos do algoritmo no processo iterativo.

2.3 Convergência

Introduziremos a noção de sequência quasi-Fejér, [13], e apresentaremos um resultado que utilizaremos no próximo capítulo, especificamente na análise de convergência para o caso convexo.

Definição 2.3.1. (Sequência quasi-Fejér) Seja $T \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não vazio. Dizemos que uma sequência $\{a_k\} \subset \mathbb{R}^n$ é **quasi-Fejér** com relação a T se, para todo $z \in T$, existe uma sequência $\{\varepsilon_k\} \subset \mathbb{R}_+$ tal que a série $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k$ é convergente e ocorre

$$\|a_{k+1} - z\|^2 \leq \|a_k - z\|^2 + \varepsilon_k, \quad (2.10)$$

para todo k .

Proposição 2.3.2. Seja $T \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não-vazio e $\{a_k\} \subset \mathbb{R}^n$ uma sequência quasi-Fejér convergente. Então:

- (a) $\{a_k\}$ é limitada.
- (b) Se um ponto de acumulação \bar{a} de $\{a_k\}$ pertence a T , então a sequência completa $\{a_k\}$ converge para \bar{a} .

Demonstração:

- (a) Fixando $z \in T$ e aplicando (2.10) iterativamente, temos:

$$\begin{aligned} \|a_k - z\|^2 &\leq \|a_{k-1} - z\|^2 + \varepsilon_{k-1} \\ &\leq \|a_{k-2} - z\|^2 + \varepsilon_{k-1} + \varepsilon_{k-2} \\ &\quad \vdots \\ &\leq \|a_0 - z\|^2 + \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_j \\ &\leq \|a_0 - z\|^2 + \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j. \end{aligned}$$

Como $\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j$ é convergente, podemos tomar $M = \|a_0 - z\|^2 + \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j$. Daí:

$$\|a_k - z\|^2 \leq M \implies \|a_k - z\| \leq \sqrt{M},$$

e segue que

$$\|a_k\| = \|a_k - z + z\| \leq \|a_k - z\| + \|z\| \leq \sqrt{M} + \|z\|.$$

Logo, $\{a_k\}$ é limitada.

- (b) Sejam $\bar{a} \in T$ um ponto de acumulação de $\{a_k\}$ e $\delta > 0$ arbitrário. Seja $\{a_{\ell_k}\}$ uma subsequência de $\{a_k\}$ que converge para \bar{a} . Como $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k$ é convergente, então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{j=k_0}^{\infty} \varepsilon_j < \delta/2$ e existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\ell_{k_1} \geq k_0$ e $\|a_{\ell_k} - \bar{a}\|^2 < \delta/2$ para todo $k \geq k_1$, uma vez que \bar{a} é o limite de $\{a_{\ell_k}\}$. Então, para qualquer $k > \ell_{k_1}$, temos

$$\begin{aligned}\|a_k - \bar{a}\|^2 &\leq \|a_{k-1} - \bar{a}\|^2 + \varepsilon_{k-1} \\ &\leq \|a_{k-2} - \bar{a}\|^2 + \varepsilon_{k-1} + \varepsilon_{k-2} \\ &\quad \vdots \\ &\leq \|a_{\ell_{k_1}} - \bar{a}\|^2 + \sum_{j=\ell_{k_1}}^{k-1} \varepsilon_j \\ &\leq \|a_{\ell_{k_1}} - \bar{a}\|^2 + \sum_{j=\ell_{k_1}}^{\infty} \varepsilon_j \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.\end{aligned}$$

Concluimos que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \bar{a}$. □

No próximo capítulo, apresentaremos os métodos do Gradiente Projetado empregados neste trabalho, equipados com buscas lineares monótonas e não monótonas.

Capítulo 3

Buscas monótonas e não monótonas em métodos do Gradiente Projetado

Diversas escolhas são possíveis em métodos do Gradiente Projetado para os parâmetros de comprimento de passo do esquema iterativo

$$x_{k+1} = x_k + \gamma_k(x_k(\beta_k) - x_k). \quad (3.1)$$

Neste capítulo, introduziremos as estratégias analisadas neste trabalho para a escolha desses parâmetros de comprimento de passo. No caso do método do Gradiente Projetado ao longo de direções viáveis, empregamos buscas lineares monótonas e não monótonas, baseadas na busca de Armijo, [14]. Já para o método do Gradiente Projetado ao longo de arcos de projeção, empregamos a busca de Armijo monótona, [16].

3.1 Buscas lineares ao longo de direções viáveis

De forma geral, buscas lineares para métodos computacionais buscam assegurar um decréscimo suficiente da função f em um ponto x_{k+1} em relação ao valor de $f(x_k)$. Uma estratégia possível para o esquema iterativo (3.1) de método do Gradiente Projetado consiste em utilizar a busca de Armijo ao longo das direções viáveis do conjunto Ω para a escolha do parâmetro γ_k .

Inicialmente, considerando o esquema iterativo (3.1), para todo $k \in \mathbb{N}$, escolhemos $\beta_k \in [\tilde{\beta}, \hat{\beta}]$ para $0 < \tilde{\beta} \leq \hat{\beta}$. Fixados os escalares $\theta, \sigma \in (0, 1)$, escolhemos $\gamma_k = \theta^{m_k}$, onde m_k é o menor inteiro não negativo satisfazendo a desigualdade

$$f(x_k + \theta^{m_k}(x_k(\beta_k) - x_k)) \leq f(x_k) + \sigma \theta^{m_k} \langle \nabla f(x_k), x_k(\beta_k) - x_k \rangle + \nu_k. \quad (3.2)$$

O parâmetro ν_k , em (3.2), introduz a não-monotonicidade da busca linear e satisfaz o seguinte: dado $\delta_{min} \in [0, 1)$, temos que $\delta_{k+1} \in [\delta_{min}, 1]$ e $\nu_{k+1} \in \mathbb{R}$ satisfaz a condição

$$0 \leq \nu_{k+1} \leq (1 - \delta_{k+1})[f(x_k) + \nu_k - f(x_{k+1})]. \quad (3.3)$$

Gostaríamos de observar que, desde que $x_k(\beta_k) - x_k$ seja uma direção de descida, (3.2)

implica que $f(x_k) + \nu_k - f(x_{k+1}) \geq 0$. Embora a condição (3.3) não seja utilizada diretamente na implementação do método, ela desempenha um papel fundamental nos resultados teóricos que serão discutidos. Em particular, essa condição garante que a sequência $\{f(x_k) + \nu_k\}$ é monótona não crescente, o que será explorado na análise de convergência.

A seguir, apresentamos três casos particulares para a escolha do parâmetro $\nu_k \geq 0$, baseadas em [14].

1. Busca de Armijo monótona

Tomando $\nu_k = 0$, a busca linear em (3.2) é a conhecida busca de Armijo monótona. Essa busca é amplamente utilizada em problemas de otimização. Neste caso, podemos tomar $\delta_k = 1$ e a condição (3.3) será satisfeita para todo k .

2. Busca não monótona do tipo Máximo

Seja $M > 0$ um parâmetro inteiro. Nessa estratégia, toma-se, a cada iteração k , o máximo entre os valores $f(x_k)$ nas M iterações anteriores. Essa busca requer um comprimento de passo $\gamma_k > 0$ satisfazendo

$$f(x_k + \gamma_k(x_k(\beta_k) - x_k)) < \max_{0 \leq j \leq \min\{k, M-1\}} f(x_{k-j}) + \sigma \gamma_k \langle \nabla f(x_k), x_k(\beta_k) - x_k \rangle. \quad (3.4)$$

Para simplificar as notações, definimos $f(x_{\ell(k)}) = \max_{0 \leq j \leq \min\{k, M-1\}} f(x_{k-j})$. A fim de identificar (3.4) como um caso particular de (3.2), tomamos $\nu_k = f(x_{\ell(k)}) - f(x_k)$ e $\delta_{min} = 0$. Note que $\nu_0 = f(x_0) - f(x_0) = 0$. Assim, reescrevendo (3.3), obtemos

$$\delta_{k+1}[f(x_k) + \nu_k - f(x_{k+1})] \leq (f(x_k) + \nu_k) - (f(x_{k+1}) + \nu_{k+1}).$$

Considerando que $\nu_k = f(x_{\ell(k)}) - f(x_k)$, temos que

$$\delta_{k+1}[f(x_{\ell(k)}) - f(x_{k+1})] \leq f(x_{\ell(k)}) - f(x_{\ell(k+1)}).$$

Dividindo ambos os lados por $f(x_{\ell(k)}) - f(x_{k+1})$, obtemos

$$\delta_{k+1} \leq \frac{f(x_{\ell(k)}) - f(x_{\ell(k+1)})}{f(x_{\ell(k)}) - f(x_{k+1})}.$$

de modo que $\nu_k = f(x_{\ell(k)}) - f(x_k)$ e $\delta_{k+1} \leq (f(x_{\ell(k)}) - f(x_{\ell(k+1)})) / (f(x_{\ell(k)}) - f(x_{k+1}))$ satisfazem a condição (3.3).

3. Busca não monótona do tipo Média

Essa estratégia de busca não monótona consiste em tomar, a cada iteração $k \in \mathbb{N}$, uma média ponderada dos valores de $f(x_k)$ nas iterações anteriores. Seja $C_0 = f(x_0)$ e $Q_0 = 1$. Nessa estratégia, toma-se $\eta_k \in [0, 1)$ e define-se

$$Q_{k+1} = \eta_k Q_k + 1, \quad C_{k+1} = \frac{\eta_k Q_k C_k + f(x_{k+1})}{Q_{k+1}}. \quad (3.5)$$

Uma vez que $\eta_k Q_k / Q_{k+1} = 1 - 1/Q_{k+1}$, então (3.5) é equivalente a

$$C_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{Q_{k+1}}\right) C_k + \frac{f(x_{k+1})}{Q_{k+1}}. \quad (3.6)$$

Temos também que a condição (3.3) é equivalente a

$$f(x_{k+1}) + \nu_{k+1} \leq (1 - \delta_{k+1})(f(x_k) + \nu_k) + \delta_{k+1}f(x_{k+1}). \quad (3.7)$$

Segue então de (3.6) que, tomando $\nu_k = C_k - f(x_k)$ e $\delta_{k+1} = 1/Q_{k+1}$, a condição (3.7) é satisfeita. Note que, nesse caso, também temos $\nu_0 = f(x_0) - f(x_0) = 0$. Além disso, considerando $Q_0 = 1$ e $\eta_{\max} < 1$, a definição da sequência $\{Q_k\}$ se torna

$$\begin{aligned} Q_{k+1} &= \eta_k Q_k + 1 \\ &= \eta_k(\eta_{k-1} Q_{k-1} + 1) + 1 \\ &= \eta_k \eta_{k-1} Q_{k-1} + \eta_k + 1 \\ &= \eta_k \eta_{k-1}(\eta_{k-2} Q_{k-2} + 1) + \eta_k + 1 \\ &= \eta_k \eta_{k-1} \eta_{k-2} Q_{k-2} + \eta_k \eta_{k-1} + \eta_k + 1 \\ &\quad \vdots \\ &= \sum_{j=0}^k \prod_{i=0}^j \eta_{k-i} + 1 \leq \sum_{j=0}^k \eta_{\max}^j \leq \sum_{j=0}^{\infty} \eta_{\max}^j = \frac{1}{1 - \eta_{\max}}. \end{aligned}$$

Neste caso, devido a $\delta_{k+1} = 1/Q_{k+1}$, podemos tomar $\delta_{\min} = 1 - \eta_{\max} > 0$.

A seguir, apresentamos formalmente o Algoritmo 1 referente às estratégias descritas empregadas no Método do Gradiente Projetado ao longo de direções viáveis.

Algoritmo 1: MÉTODO DO GRADIENTE PROJETADO (DIREÇÕES VIÁVEIS)

- 1 Tome um ponto inicial $x_0 \in \Omega$, $\theta, \sigma \in (0, 1)$, $\varepsilon > 0$, $0 < \tilde{\beta} \leq \hat{\beta}$, $\beta_0 \in [\tilde{\beta}, \hat{\beta}]$, $C_0 = f(x_0)$, $Q_0 = 1$, $M > 0$ inteiro, $\nu_0 = 0$ e faça $k = 0$.
 - 2 Se $\|x_0 - x_0(1)\| < \varepsilon$, então pare e declare que x_0 é um ponto estacionário.
 - 3 Senão, calcule ν_k de acordo com a estratégia de escolha do parâmetro de comprimento de passo (Busca de Armijo monótona, busca não monótona do tipo Máximo ou busca não monótona do tipo Média).
 - 4 Determine $\beta_k \in [\tilde{\beta}, \hat{\beta}]$ e γ_k por (3.2).
 - 5 Calcule $x_k(\beta_k) = P_{\Omega}(x_k - \beta_k \nabla f(x_k))$ e $x_{k+1} = x_k + \gamma_k(x_k(\beta_k) - x_k)$.
 - 6 Se $\|x_k - x_{k+1}\| < \varepsilon$, então pare e declare que x_k é um ponto estacionário.
 - 7 Senão, faça $k = k + 1$ e retorne para o passo 3.
-

Na próxima seção, discutiremos o emprego da busca de Armijo no método do Gradiente Projetado ao longo de arcos de projeção.

3.2 Busca de Armijo ao longo do arco de projeção

Considerando o esquema (1.2), que trata do método do Gradiente Projetado ao longo de arcos de projeção, empregamos a busca de Armijo monótona para o cálculo do parâ-

metro de comprimento de passo. Nesse caso, fixados os escalares $\bar{\beta}$, θ e σ , com $\bar{\beta} > 0$, $\theta, \sigma \in (0, 1)$, calculamos $\beta_k = \theta^{m_k} \bar{\beta}$ em (1.2), onde m_k é o menor inteiro não negativo satisfazendo

$$f(x_k(\theta^{m_k} \bar{\beta})) \leq f(x_k) + \sigma \langle \nabla f(x_k), x_k(\theta^{m_k} \bar{\beta}) - x_k \rangle. \quad (3.8)$$

Essa estratégia pode ser vista como um caso particular do esquema iterativo (3.1), onde tomamos $\gamma_k = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e calculamos β_k por meio da busca de Armijo.

Gostaríamos de ressaltar que a estratégia de busca ao longo de arcos de projeção requer uma projeção no conjunto Ω para cada ponto teste da busca de Armijo. Esse fato pode acarretar no cálculo de muitas projeções para cada iteração, o que pode causar maior esforço computacional, a depender da projeção empregada. A estratégia de busca ao longo de direções viáveis, por outro lado, requer apenas uma projeção por iteração.

O Algoritmo 2, a seguir, formaliza a busca de Armijo empregada no método do Gradiente Projetado ao longo de arcos de projeção.

Algoritmo 2: MÉTODO DO GRADIENTE PROJETADO (ARCOS DE PROJEÇÃO)

- 1 Tome um ponto inicial $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$, $\sigma, \theta \in (0, 1)$, $\bar{\beta} > 0$ e faça $k = 0$.
 - 2 Se $\|x_0 - x_0(1)\| < \varepsilon$, então pare e declare que x_0 é um ponto estacionário.
 - 3 Senão, determine β_k por meio da busca de Armijo.
 - 4 Calcule $x_{k+1} = P_\Omega(x_k - \beta_k \nabla f(x_k))$.
 - 5 Se $\|x_k - x_{k+1}\| < \varepsilon$, então pare e declare que x_k é um ponto estacionário.
 - 6 Senão, faça $k = k + 1$ e retorne para o passo 3.
-

O processo iterativo definido pelo Algoritmo 2 requer o cálculo de uma projeção em Ω para cada ponto teste da busca de Armijo, de modo que essa opção só é viável quando o cálculo da projeção em Ω possui custo computacional relativamente baixo.

Além disso, nessa estratégia de método do Gradiente Projetado, a distância entre dois pontos teste consecutivos na busca linear pode ser muito pequena em certas regiões do conjunto viável Ω . Em particular, a distância entre as projeções de dois pontos em Ω pode ser pequena, ainda que os pontos estejam distantes um do outro. Conforme Birgin et al. [6], a avaliação da função objetivo em dois pontos muito próximos representa um mau uso das informações disponíveis, o que pode não ser eficiente em termos de convergência.

No próximo capítulo, apresentamos uma análise de convergência para o Algoritmo 1 e para o Algoritmo 2.

Capítulo 4

Análise de convergência

Neste capítulo, apresentamos uma análise de convergência para métodos do Gradiente Projetado com o emprego das estratégias de buscas lineares ao longo das direções viáveis e ao longo de arcos de projeção, discutidas no Capítulo 3. Relembramos que, neste trabalho, estamos considerando o problema

$$\text{minimizar } f(x) \text{ sujeito a } x \in \Omega \subsetneq \mathbb{R}^n. \quad (4.1)$$

O resultado clássico de convergência para métodos do Gradiente Projetado estabelece que pontos de acumulação da sequência $\{x_k\}$, gerada pelo algoritmo, são pontos estacionários para o problema (4.1). No entanto, esse resultado não assegura nem a existência nem a unicidade desses pontos, conforme [16].

Iusem, [16], apresenta um resultado mais forte no caso convexo para métodos do Gradiente Projetado ao longo de direções viáveis e ao longo de arcos de projeção, considerando uma busca linear monótona. A ideia central é provar que a sequência completa $\{x_k\}$ gerada pelo algoritmo, e não apenas os pontos de acumulação, converge para uma solução do problema (4.1), apenas assumindo que o problema possui soluções e que a função objetivo f é convexa.

Ferreira et al., [14], apresenta resultados de convergência análogos para o caso de métodos do Gradiente Projetado ao longo de direções viáveis, mas abrangendo o caso de buscas lineares não monótonas e considerando uma projeção inexata no conjunto Ω , isto é, uma projeção que permite uma tolerância relativa de erro.

Para o caso dos métodos do Gradiente Projetado ao longo de direções viáveis, apresentamos uma adaptação dos resultados dos mencionados, fornecendo uma prova alternativa da Proposição 12 em [14] e do Teorema 1 em [16], considerando a projeção ortogonal empregada no presente trabalho. Os resultados apresentados nas próximas seções são baseados em [4], [14] e [16].

4.1 Buscas lineares ao longo das direções viáveis

Inicialmente, vamos mostrar que as buscas definidas na Seção 3.1 do Capítulo 3, ao longo de direções viáveis, estão bem definidas. Isso significa que, sob certas hipóteses, sempre é possível encontrar um parâmetro de comprimento de passo positivo que satisfaça a condição de decrescimento da função.

Proposição 4.1.1. *Sejam $\sigma \in (0, 1)$, $\nu \geq 0$, $x \in \Omega$ e $d \in \mathbb{R}^n$ tais que $\langle \nabla f(x), d \rangle < 0$. Então, existe $0 < \bar{\gamma} < 1$ tal que $f(x + \gamma d) < f(x) + \sigma\gamma\langle \nabla f(x), d \rangle + \nu$ para todo $\gamma \in (0, \bar{\gamma}]$.*

Demonstração: Pela diferenciabilidade de f , temos que

$$f(x + \gamma d) - f(x) = \gamma\langle \nabla f(x), d \rangle + o(\gamma).$$

Somando $\sigma\gamma\langle \nabla f(x), d \rangle - \sigma\gamma\langle \nabla f(x), d \rangle$ do lado direito, obtemos

$$f(x + \gamma d) - f(x) = \sigma\gamma\langle \nabla f(x), d \rangle - \sigma\gamma\langle \nabla f(x), d \rangle + \gamma\langle \nabla f(x), d \rangle + o(\gamma).$$

Colocando $\gamma\langle \nabla f(x), d \rangle$ em evidência,

$$f(x + \gamma d) - f(x) = \sigma\gamma\langle \nabla f(x), d \rangle + (1 - \sigma)\gamma\langle \nabla f(x), d \rangle + o(\gamma).$$

Colocando γ em evidência nas duas últimas parcelas,

$$f(x + \gamma d) - f(x) = \sigma\gamma\langle \nabla f(x), d \rangle + \gamma[(1 - \sigma)\langle \nabla f(x), d \rangle + o(\gamma)/\gamma]. \quad (4.2)$$

Pela condição $\langle \nabla f(x), d \rangle < 0$, temos que, para todo γ suficientemente pequeno, vale

$$(1 - \sigma)\langle \nabla f(x), d \rangle + \frac{o(\gamma)}{\gamma} < \frac{1 - \sigma}{2}\langle \nabla f(x), d \rangle < 0.$$

Assim, assumindo que γ é suficientemente pequeno, usando que $\gamma[(1 - \sigma)\langle \nabla f(x), d \rangle + o(\gamma)/\gamma] < 0$ e que $\nu \geq 0$, obtemos de (4.2):5

$$f(x + \gamma d) < f(x) + \sigma\gamma\langle \nabla f(x), d \rangle + \nu.$$

Tomando $0 < \bar{\gamma} < 1$ como o maior valor que satisfaz a desigualdade acima, ela será válida para todo $\gamma \in (0, \bar{\gamma}]$. \square

No próximo resultado, vamos mostrar que a direção $x_k(\beta_k) - x_k$ é uma direção de descida, onde $x_k(\beta_k) = P_\Omega(x_k - \beta_k \nabla f(x_k))$.

Proposição 4.1.2. *Sejam x_k e $x_k(\beta_k)$ definidos pelo Algoritmo 1. Então*

- (a) $x_k \in \Omega$, para todo $k \in \mathbb{N}$.
- (b) Se $\nabla f(x_k) \neq 0$, então $\langle \nabla f(x_k), x_k(\beta_k) - x_k \rangle < 0$.

Demonstração:

- (a) Vamos aplicar indução sobre k . Temos que $x_0 \in \Omega$ pela inicialização do Algoritmo 1. Vamos assumir que $x_k \in \Omega$ para um k arbitrário. Já que $x_k(\beta_k) = P_\Omega(x_k -$

$\beta_k \nabla f(x_k)$), então $x_k(\beta_k) \in \Omega$. Como $\gamma_k = \theta^{m_k}$ e $\theta \in (0, 1)$, então $\gamma_k \in [0, 1]$. Assim, $x_{k+1} = x_k + \gamma_k(x_k(\beta_k) - x_k)$ é uma combinação convexa entre x_k e $x_k(\beta_k)$, o que nos permite concluir que $x_{k+1} \in \Omega$, pela convexidade de Ω .

(b) Pelo item (b) do **Teorema 2.2.3**, se $P_\Omega(u)$ é uma projeção de u em Ω , então, para todo $u \in \mathbb{R}^n$ e $v \in \Omega$, vale $\langle u - P_\Omega(u), v - P_\Omega(u) \rangle \leq 0$. Pelo item (a), temos que $x_k \in \Omega$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Então, tomamos $v = x_k$ e $u = x_k - \beta_k \nabla f(x_k)$, considerando que $x_k(\beta_k) = P_\Omega(x_k - \beta_k \nabla f(x_k))$. Assim,

$$\langle x_k - \beta_k \nabla f(x_k) - x_k(\beta_k), x_k - x_k(\beta_k) \rangle \leq 0.$$

Reorganizando a desigualdade acima,

$$\langle -\beta_k \nabla f(x_k) + (x_k - x_k(\beta_k)), x_k - x_k(\beta_k) \rangle \leq 0.$$

Utilizando a linearidade do produto interno,

$$-\beta_k \langle \nabla f(x_k), x_k - x_k(\beta_k) \rangle + \langle x_k - x_k(\beta_k), x_k - x_k(\beta_k) \rangle \leq 0.$$

Como $\langle x_k - x_k(\beta_k), x_k - x_k(\beta_k) \rangle = \|x_k - x_k(\beta_k)\|^2 \geq 0$, subtraímos esse termo do lado esquerdo, donde

$$-\beta_k \langle \nabla f(x_k), x_k - x_k(\beta_k) \rangle \leq 0.$$

Dividindo ambos os membros por $-\beta_k < 0$, obtemos

$$\langle \nabla f(x_k), x_k - x_k(\beta_k) \rangle \geq 0.$$

Utilizando novamente a linearidade do produto interno,

$$\langle \nabla f(x_k), x_k(\beta_k) - x_k \rangle \leq 0,$$

obtendo o resultado desejado. \square

Vamos mostrar um resultado parcial de convergência para a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo Algoritmo 1, isto é, vamos mostrar que cada ponto de acumulação de $\{x_k\}$ é estacionário para o problema (4.1). Para isso, utilizaremos o resultado a seguir, que segue diretamente da condição (3.3).

Lema 4.1.3. *Para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que*

$$0 \leq \delta_{k+1}[f(x_k) + \nu_k - f(x_{k+1})] \leq (f(x_k) + \nu_k) - (f(x_{k+1}) + \nu_{k+1}). \quad (4.3)$$

Como consequência, a sequência $\{f(x_k) + \nu_k\}$ é não crescente, isto é, para todo $k \in \mathbb{N}$, vale $f(x_{k+1}) + \nu_{k+1} \leq f(x_k) + \nu_k$.

Demonstração: Considerando a condição (3.3), temos que

$$\nu_{k+1} \leq (1 - \delta_{k+1})[f(x_k) + \nu_k - f(x_{k+1})].$$

Expandindo os termos,

$$\nu_{k+1} \leq f(x_k) + \nu_k - f(x_{k+1}) - \delta_{k+1}f(x_k) - \delta_{k+1}\nu_k + \delta_{k+1}f(x_{k+1}).$$

Reorganizando a desigualdade acima,

$$\delta_{k+1}f(x_k) + \delta_{k+1}\nu_k - \delta_{k+1}f(x_{k+1}) \leq (f(x_k) + \nu_k) - (f(x_{k+1}) + \nu_{k+1}).$$

Colocando δ_{k+1} em evidência no primeiro membro,

$$\delta_{k+1}[f(x_k) + \nu_k - f(x_{k+1})] \leq (f(x_k) + \nu_k) - (f(x_{k+1}) + \nu_{k+1}).$$

Agora, levando em conta a primeira desigualdade em (3.3), ou seja, $0 \leq (1 - \delta_{k+1})[f(x_k) + \nu_k - f(x_{k+1})]$, podemos afirmar que $0 \leq \delta_{k+1}[f(x_k) + \nu_k - f(x_{k+1})]$, uma vez que $\delta_{\min} \in [0, 1]$ e $\delta_{k+1} \in [\delta_{\min}, 1]$, o que implica que $1 - \delta_{k+1}$ e δ_{k+1} são positivos. Assim, obtemos o resultado desejado:

$$0 \leq \delta_{k+1}[f(x_k) + \nu_k - f(x_{k+1})] \leq (f(x_k) + \nu_k) - (f(x_{k+1}) + \nu_{k+1}).$$

□

Proposição 4.1.4. *Seja $\{x_k\}$ a sequência gerada pelo Algoritmo 1 e assuma que o problema (4.1) tenha soluções e que $\lim \nu_k = 0$. Então, o Algoritmo 1 para com um número finito de iterações em um ponto estacionário para o problema (4.1). Caso contrário, gera uma sequência $\{x_k\}$ infinita, para a qual cada ponto de acumulação \bar{x} é um ponto estacionário para o problema (4.1).*

Demonstração: Primeiramente, assuma que $\{x_k\}$ é finita. Nesse caso, pela condição de parada do algoritmo, isto é, $\|x_k - x_{k+1}\| < \varepsilon$, segue da **Definição 2.2.11** que x_k é estacionário para o problema (4.1). Assuma agora que $\{x_k\}$ é infinita. Seja \bar{x} um ponto de acumulação de $\{x_k\}$ e seja $\{x_{k_j}\}$ uma subsequência de $\{x_k\}$ tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_j} = \bar{x}$. Uma vez que $\{x_k\} \subset \Omega$ pela **Proposição 4.1.2**, então \bar{x} é um ponto aderente a Ω , pois, para todo $\varepsilon > 0$, pode-se obter uma bola $B(\bar{x}, \varepsilon)$ tal que $B(\bar{x}, \varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset$, já que $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_j} = \bar{x}$. Como Ω é fechado, então possui todos os seus pontos de aderência, donde $\bar{x} \in \Omega$. Além disso, considerando a continuidade de f e que $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k = 0$, temos que $\lim_{j \rightarrow \infty} (f(x_{k_j}) + \nu_{k_j}) = f(\bar{x})$. Portanto, assumindo que o problema (4.1) tem solução, ou seja, f possui um minimizador em Ω , então a sequência $\{f(x_k) + \nu_k\}$ é limitada inferiormente, além de ser monótona não crescente pelo **Lema 4.1.3**, o que implica que ela converge. Assim, assumindo que $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k = 0$, concluímos que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x_k) + \nu_k) = f(\bar{x})$. Além disso, (3.1) e (3.2) implicam que, para todo k ,

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \sigma \gamma_k \langle \nabla f(x_k), x_k(\beta_k) - x_k \rangle + \nu_k.$$

Pela **Proposição 4.1.2**, considerando $\nabla f(x_k) \neq 0$, vale $\langle \nabla f(x_k), x_k(\beta_k) - x_k \rangle < 0$. Além disso, uma vez que $\gamma_k, \sigma > 0$, temos

$$0 < -\sigma \gamma_k \langle \nabla f(x_k), x_k(\beta_k) - x_k \rangle \leq f(x_k) + \nu_k - f(x_{k+1}). \quad (4.4)$$

Agora, devido a $\gamma_k \in [0, 1]$ e $\beta_k \in [\tilde{\beta}, \hat{\beta}]$ para todo k , então as sequências $\{\gamma_k\}$ e $\{\beta_k\}$ são limitadas, de modo que possuem subsequências convergentes. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\lim_{j \rightarrow \infty} \gamma_{k_j} = \hat{\gamma} \in [0, 1]$ e $\lim_{j \rightarrow \infty} \beta_{k_j} = \bar{\beta} > 0$ para algum

$\bar{\beta} \in [\tilde{\beta}, \hat{\beta}]$. Agora, passemos ao limite em (4.4) ao longo das subsequências $\{x_{k_j}\}$, $\{\gamma_{k_j}\}$ e $\{\beta_{k_j}\}$, isto é,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [f(x_k) + \nu_k - f(x_{k+1})] \geq \lim_{k \rightarrow \infty} [-\sigma \gamma_k \langle \nabla f(x_k), x_k(\beta_k) - x_k \rangle] \geq 0.$$

Uma vez que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(\bar{x})$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k = 0$, e considerando a continuidade de ∇f e de P_Ω e que $x_k(\beta_k) = P_\Omega(x_k - \beta_k \nabla f(x_k))$, o limite acima resulta em

$$0 \geq -\sigma \hat{\gamma} \langle \nabla f(\bar{x}), P_\Omega(\bar{x} - \bar{\beta} \nabla f(\bar{x})) - \bar{x} \rangle \geq 0.$$

Mas isso implica que

$$-\sigma \hat{\gamma} \langle \nabla f(\bar{x}), P_\Omega(\bar{x} - \bar{\beta} \nabla f(\bar{x})) - \bar{x} \rangle = 0.$$

Dividindo ambos os lados por $-\sigma \neq 0$, obtemos

$$\hat{\gamma} \langle \nabla f(\bar{x}), P_\Omega(\bar{x} - \bar{\beta} \nabla f(\bar{x})) - \bar{x} \rangle = 0. \quad (4.5)$$

Consideremos dois casos. Primeiro, vamos supor que $\hat{\gamma} = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_{k_j} > 0$. Seja $\bar{u} = \bar{x} - \bar{\beta} \nabla f(\bar{x})$. Então, dividindo (4.5) por $\hat{\gamma}$ obtemos

$$\langle \nabla f(\bar{x}), P_\Omega(\bar{u}) - \bar{x} \rangle = 0. \quad (4.6)$$

Multiplicando e dividindo a igualdade acima por $\bar{\beta} \neq 0$ e somando $\bar{x} - \bar{x}$ no produto interno,

$$\bar{\beta}^{-1} \langle \bar{x} - (\bar{x} - \bar{\beta} \nabla f(\bar{x})), P_\Omega(\bar{u}) - \bar{x} \rangle = 0.$$

Utilizando $\bar{u} = \bar{x} - \bar{\beta} \nabla f(\bar{x})$ e dividindo por $\bar{\beta}^{-1} \neq 0$, temos

$$\langle \bar{x} - \bar{u}, P_\Omega(\bar{u}) - \bar{x} \rangle = 0. \quad (4.7)$$

Como $\bar{x} \in \Omega$, pelo **Teorema 2.2.3**, vale

$$0 \geq \langle P_\Omega(\bar{u}) - \bar{u}, P_\Omega(\bar{u}) - \bar{x} \rangle.$$

Somando (4.7) na desigualdade acima,

$$0 \geq \langle P_\Omega(\bar{u}) - \bar{u}, P_\Omega(\bar{u}) - \bar{x} \rangle + \langle \bar{u} - \bar{x}, P_\Omega(\bar{u}) - \bar{x} \rangle.$$

Pela linearidade do produto interno, temos

$$0 \geq \langle P_\Omega(\bar{u}) - \bar{u} + \bar{u} - \bar{x}, P_\Omega(\bar{u}) - \bar{x} \rangle.$$

Cancelando os termos simétricos e considerando que $\langle v, v \rangle = \|v\|^2$, temos

$$0 \geq \|P_\Omega(\bar{u}) - \bar{x}\|^2,$$

donde $\bar{x} = P_\Omega(\bar{u})$. Utilizando novamente o **Teorema 2.2.3**, considerando que $\bar{u} = \bar{x} - \bar{\beta} \nabla f(\bar{x})$, vale, para todo $x \in \Omega$,

$$\langle \bar{u} - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle \leq 0 \implies \langle \bar{x} - \bar{\beta} \nabla f(\bar{x}) - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle \leq 0.$$

Cancelando os termos \bar{x} e $-\bar{x}$ e utilizando a linearidade do produto interno,

$$-\bar{\beta} \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \leq 0.$$

Dividindo por $-\bar{\beta} < 0$, temos

$$\langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \geq 0.$$

Como a desigualdade acima é válida para todo $x \in \Omega$, pela **Definição 2.2.11**, obtemos que \bar{x} é um ponto estacionário para o problema (4.1). Vamos considerar agora o caso em que $\hat{\gamma} = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 0$. Seja $q \in \mathbb{N}$ fixo. Uma vez que $\gamma_k = \theta^{m_k}$, com $\theta \in (0, 1)$ e m_k inteiro, existe um k tal que $m_k > q$. Uma vez que m_k é o menor inteiro não negativo que satisfaz (3.2) e $q < m_k$, vale

$$f(x_k + \theta^q(x_k(\beta_k) - x_k)) > f(x_k) + \sigma\theta^q \langle \nabla f(x_k), x_k(\beta_k) - x_k \rangle + \nu_k.$$

Passando ao limite quando $k \rightarrow \infty$, pela continuidade das funções, temos que

$$f(\bar{x} - \theta^q(\bar{x}(\bar{\beta}) - \bar{x})) \geq f(\bar{x}) + \sigma\theta^q \langle \nabla f(\bar{x}), \bar{x}(\bar{\beta}) - \bar{x} \rangle. \quad (4.8)$$

Pela contrapositiva da **Proposição 4.1.1**, se $\sigma \in (0, 1)$, $\nu \geq 0$, $x \in \Omega$, $d \in \mathbb{R}^n$ e não existe $\bar{\gamma} < 1$ tal que $f(x + \gamma d) < f(x) + \sigma\gamma \langle \nabla f(x), d \rangle + \nu$ para todo $\gamma \in (0, \bar{\gamma}]$, então $\langle \nabla f(x), d \rangle \geq 0$, donde (4.8) implica que $\langle \nabla f(\bar{x}), \bar{x}(\bar{\beta}) - \bar{x} \rangle \geq 0$. Porém, pela **Proposição 4.1.2**, assumindo que $\nabla f(x_k) \neq 0$, temos que $\langle \nabla f(x_k), x_k(\beta_k) - x_k \rangle < 0$. Assim, passando ao limite quando $k \rightarrow \infty$, temos $\langle \nabla f(\bar{x}), \bar{x}(\bar{\beta}) - \bar{x} \rangle \leq 0$ e, deve ocorrer que

$$0 = \langle \nabla f(\bar{x}), \bar{x}(\bar{\beta}) - \bar{x} \rangle = \langle \nabla f(\bar{x}), P_\Omega(\bar{u}) - \bar{x} \rangle.$$

Então, a igualdade (4.6) também é válida para este caso e concluímos que \bar{x} é estacionário para o problema (4.1) pelos mesmos argumentos. \square

O parâmetro de tolerância $\nu_k > 0$, que introduz a não-monotonicidade da busca linear, deve se tornar cada vez menor quando a sequência $\{x_k\}$ tende a um ponto estacionário. O resultado a seguir apresenta uma condição geral para essa propriedade.

Proposição 4.1.5. *Seja δ_{\min} tal que $\delta_{k+1} \in [\delta_{\min}, 1]$ satisfaz a condição (3.3). Se $\delta_{\min} > 0$, então a série $\sum_{k=0}^{\infty} \nu_k$ é convergente. Consequentemente, $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k = 0$.*

Demonstração: Seja \hat{x} o minimizador de f em Ω , ou seja, $f(\hat{x}) \leq f(x_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Considerando que $\nu_0 = 0$ pela inicialização do Algoritmo 1, somamos a desigualdade (4.3) do **Lema 4.1.3** com k entre 0 e $N \in \mathbb{N}$ arbitrário, obtendo

$$\sum_{k=0}^N \delta_{k+1}(f(x_k) + \nu_k - f(x_{k+1})) \leq \sum_{k=0}^N [(f(x_k) + \nu_k) - (f(x_{k+1}) + \nu_{k+1})].$$

Expandindo a soma do lado direito e cancelando os termos simétricos, obtemos

$$\sum_{k=0}^N \delta_{k+1}(f(x_k) + \nu_k - f(x_{k+1})) \leq f(x_0) - f(x_{N+1}) - \nu_{N+1}.$$

Somando $\nu_{N+1} \geq 0$ no segundo membro, temos

$$\sum_{k=0}^N \delta_{k+1}(f(x_k) + \nu_k - f(x_{k+1})) \leq f(x_0) - f(x_{N+1}).$$

Como \hat{x} é o minimizador de f em Ω , então $f(\hat{x}) \leq f(x_{N+1})$, donde

$$\sum_{k=0}^N \delta_{k+1}(f(x_k) + \nu_k - f(x_{k+1})) \leq f(x_0) - f(\hat{x}).$$

Passando ao limite com $N \rightarrow \infty$, obtemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta_{k+1}(f(x_k) + \nu_k - f(x_{k+1})) \leq f(x_0) - f(\hat{x}). \quad (4.9)$$

Agora, consideremos a condição (3.3), dada por

$$0 \leq \nu_{k+1} \leq (1 - \delta_{k+1})[f(x_k) + \nu_k - f(x_{k+1})].$$

Passando à soma infinita nessa desigualdade e considerando que $\sum_{k=0}^{\infty} \nu_{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \nu_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \delta_{k+1})[f(x_k) + \nu_k - f(x_{k+1})].$$

Multiplicando e dividindo o lado direito por δ_{k+1} ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \nu_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1 - \delta_{k+1}}{\delta_{k+1}} \right) \delta_{k+1} [f(x_k) + \nu_k - f(x_{k+1})].$$

Agora, como $\delta_{k+1} \geq \delta_{\min}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, onde $\delta_{\min} > 0$, temos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \nu_k \leq \left(\frac{1 - \delta_{\min}}{\delta_{\min}} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{k+1} [f(x_k) + \nu_k - f(x_{k+1})]$$

Utilizando (4.9) na desigualdade acima, vale

$$\sum_{k=0}^{\infty} \nu_k \leq \left(\frac{1 - \delta_{\min}}{\delta_{\min}} \right) (f(x_0) - f(\hat{x})).$$

Portanto, a série $\sum_{k=0}^{\infty} \nu_k$ é convergente, o que implica que $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k = 0$. \square

A busca linear de Armijo monótona e a busca do tipo Média, apresentadas no Capítulo 3, satisfazem a hipótese da **Proposição 4.1.5**, ou seja, $\delta_{\min} > 0$. No entanto, para a busca não monótona do tipo Máximo, nós só podemos garantir que $\delta_{\min} \geq 0$, de modo que não podemos aplicar a **Proposição 4.1.5** para garantir que $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k = 0$. Trataremos deste caso separadamente no resultado a seguir.

Proposição 4.1.6. *Considere a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo Algoritmo 1 com a busca linear não monótona do tipo Máximo, definida por (3.4), ou seja, $\nu_k = f(x_{\ell(k)}) - f(x_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, onde $f(x_{\ell(k)}) = \max_{0 \leq j \leq \min\{k, M-1\}} f(x_{k-j})$. Além disso, assuma que o conjunto de nível $L_{f, \Omega}(f(x_0)) = \{x \in \Omega; f(x) \leq f(x_0)\}$ é limitado e $\nu_0 = 0$. Então, $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k = 0$.*

Demonstração: Seja $z_k = x_k(\beta_k) = P_{\Omega}(x_k - \beta_k \nabla f(x_k))$. Considerando que $x_k \in \Omega$ para todo k , pelo **Teorema 2.2.3**, temos que

$$\langle x_k - \beta_k \nabla f(x_k) - z_k, x_k - z_k \rangle \leq 0.$$

Utilizando a linearidade do produto interno, reescrevemos a desigualdade acima como

$$\langle x_k - z_k, x_k - z_k \rangle - \beta_k \langle \nabla f(x_k), x_k - z_k \rangle \leq 0.$$

Considerando que $\langle v, v \rangle = \|v\|^2$, obtemos

$$\|x_k - z_k\|^2 - \beta_k \langle \nabla f(x_k), x_k - z_k \rangle \leq 0.$$

Reorganizando a desigualdade e utilizando novamente a linearidade do produto interno,

$$\|x_k - z_k\|^2 \leq -\beta_k \langle \nabla f(x_k), z_k - x_k \rangle.$$

Levando em conta que $\beta_k \in [\tilde{\beta}, \hat{\beta}]$, com $0 < \tilde{\beta} \leq \hat{\beta}$, e que $\langle \nabla f(x_k), z_k - x_k \rangle < 0$ pelo item (b) da **Proposição 4.1.2**, desde que $\nabla f(x_k) \neq 0$,

$$\|x_k - z_k\|^2 \leq -\hat{\beta} \langle \nabla f(x_k), z_k - x_k \rangle.$$

Dividindo a desigualdade acima por $\hat{\beta} > 0$,

$$\frac{\|x_k - z_k\|^2}{\hat{\beta}} \leq -\langle \nabla f(x_k), z_k - x_k \rangle. \quad (4.10)$$

Por outro lado, devido a $f(x_{\ell(k)}) = f(x_k) + \nu_k$, o **Lema 4.1.3** implica que $\{f(x_{\ell(k)})\}$ é não crescente. Além disso, uma vez que $\nu_0 = 0$ e $\nu_k \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_{k+1}) + \nu_{k+1} \leq f(x_k) + \nu_k \leq f(x_0) + \nu_0 = f(x_0). \quad (4.11)$$

Portanto, a sequência $\{x_k\} \subset L_{f,\Omega}(f(x_0))$. Sabemos que a sequência $\{f(x_k)\}$ é limitada superiormente por $f(x_0)$ e, uma vez que $L_{f,\Omega}(f(x_0))$ é limitado, então $\{f(x_k)\}$ é limitada também inferiormente, devido à continuidade de f . Portanto, de (4.11) obtemos que $\{f(x_{\ell(k)})\}$ é limitada e monótona, logo converge. Relembramos que, da definição de $f(x_{\ell(k)})$, $\ell(k)$ é um inteiro satisfazendo

$$k - \min\{k, M - 1\} \leq \ell(k) \leq k. \quad (4.12)$$

Do esquema iterativo (1.1), temos que

$$x_{\ell(k)} = x_{\ell(k)-1} + \gamma_{\ell(k)-1} (z_{\ell(k)-1} - x_{\ell(k)-1}).$$

Daí, (3.4) implica que

$$f(x_{\ell(k)}) \leq f(x_{\ell(k)-1}) + \sigma \gamma_{\ell(k)-1} \langle \nabla f(x_{\ell(k)-1}), z_{\ell(k)-1} - x_{\ell(k)-1} \rangle,$$

para todo $k > M$ (se $k \leq M$, pode ocorrer que $\ell(k) = 0$ e não poderemos obter $\ell(k) - 1$).

Reorganizando a desigualdade acima, obtemos

$$-\sigma \gamma_{\ell(k)-1} \langle \nabla f(x_{\ell(k)-1}), z_{\ell(k)-1} - x_{\ell(k)-1} \rangle \leq f(x_{\ell(k)-1}) - f(x_{\ell(k)}).$$

Utilizando (4.10), vale

$$\frac{\sigma}{\hat{\beta}} \gamma_{\ell(k)-1} \|z_{\ell(k)-1} - x_{\ell(k)-1}\|^2 \leq f(x_{\ell(k)-1}) - f(x_{\ell(k)}).$$

Considerando que $\{f(x_{\ell(k)})\}$ é convergente, passando ao limite quando $k \rightarrow \infty$, obtemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{\hat{\beta}} \gamma_{\ell(k)-1} \|z_{\ell(k)-1} - x_{\ell(k)-1}\|^2 = 0.$$

Dividindo a equação acima por $\frac{\sigma}{\beta}$, temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_{\ell(k)-1} \|z_{\ell(k)-1} - x_{\ell(k)-1}\|^2 = 0.$$

Levando em conta que $\gamma_{\ell(k)-1} \in (0, 1]$, pela definição de limite,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_{\ell(k)-1} \|z_{\ell(k)-1} - x_{\ell(k)-1}\| = 0. \quad (4.13)$$

Vamos mostrar que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{\ell(k)})$. Para isso, como estratégia, definiremos $\hat{\ell}(k) = \ell(k + M + 2)$. Primeiro, vamos mostrar por indução que, para todo $j \geq 1$, as seguintes igualdades são válidas:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_{\hat{\ell}(k)-j} \|z_{\hat{\ell}(k)-j} - x_{\hat{\ell}(k)-j}\| = 0, \quad (4.14)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{\hat{\ell}(k)-j}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{\ell(k)}), \quad (4.15)$$

onde estamos considerando $k \geq j - 1$. Assuma que $j = 1$. Note que $\{\hat{\ell}(k); k \in \mathbb{N}\} \subset \{\ell(k); k \in \mathbb{N}\}$, visto que, para $k = 0$, temos $\hat{\ell}(0) = \ell(M + 2)$. Assim, a igualdade (4.14) segue diretamente de (4.13). Pelo esquema iterativo (1.1), a validade de (4.14) implica que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{\hat{\ell}(k)} - x_{\hat{\ell}(k)-1}\| = 0$. Uma vez que f é contínua, então $L_{f,\Omega}(f(x_0))$ é fechado e, uma vez que é limitado, então é compacto. Disso, decorre que f é uniformemente contínua nesse conjunto. Assim, temos que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{\hat{\ell}(k)-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{\hat{\ell}(k)})$ e, utilizando novamente o fato de que $\{\hat{\ell}(k); k \in \mathbb{N}\} \subset \{\ell(k); k \in \mathbb{N}\}$, isso implica em (4.15). Assuma agora que (4.14) e (4.15) sejam válidas para algum j arbitrário. Devido a

$$x_{\hat{\ell}(k)-j} = x_{\ell(k)-j-1} + \gamma_{\ell(k)-j-1} (z_{\ell(k)-j-1} - x_{\ell(k)-j-1}),$$

a desigualdade (3.4) implica que

$$f(x_{\hat{\ell}(k)-j}) \leq f(x_{\ell(k)-(j+1)}) + \sigma \gamma_{\ell(k)-(j+1)} \langle \nabla f(x_{\ell(k)-(j+1)}), z_{\ell(k)-(j+1)} - x_{\ell(k)-(j+1)} \rangle. \quad (4.16)$$

Utilizando argumentos similares aos que utilizamos para obter (4.13), podemos obter

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_{\ell(k)-(j+1)} \|z_{\ell(k)-(j+1)} - x_{\ell(k)-(j+1)}\| = 0.$$

Portanto, (4.14) é válida para $j + 1$, o que implica que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{\hat{\ell}(k)-j} - x_{\ell(k)-(j+1)}\| = 0$. Novamente, a continuidade uniforme de f em $L_{f,\Omega}(f(x_0))$ fornece

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{\hat{\ell}(k)-(j+1)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{\hat{\ell}(k)-j}),$$

o que mostra que (4.15) é válida para $j + 1$, e aqui finalizamos a indução. Considerando agora (4.12) e que $\hat{\ell}(k) = \ell(k + M + 2)$, obtemos

$$\ell(k + M + 2) \leq k + M + 2 \implies \hat{\ell}(k) \leq k + M + 2 \implies \hat{\ell}(k) - (k + 1) \leq M + 1.$$

Reescrevendo (1.1), temos que $x_k = x_{k+1} - \gamma_k (z_k - x_k)$. Aplicando essa igualdade recur-

sivamente, obtemos

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_{k+2} - \gamma_{k+1}(z_{k+1} - x_{k+1}) \\
&= x_{k+3} - \gamma_{k+2}(z_{k+2} - x_{k+2}) - \gamma_{k+1}(z_{k+1} - x_{k+1}) \\
&= x_{k+4} - \gamma_{k+3}(z_{k+3} - x_{k+3}) - \gamma_{k+2}(z_{k+2} - x_{k+2}) - \gamma_{k+1}(z_{k+1} - x_{k+1}) \\
&\quad \vdots \\
&= x_{\hat{\ell}(k)} - \sum_{j=1}^{\hat{\ell}(k)-k-1} \gamma_{\hat{\ell}(k)-j} (z_{\hat{\ell}(k)-j} - x_{\hat{\ell}(k)-j}).
\end{aligned}$$

Reorganizando a igualdade obtida acima e utilizando a desigualdade triangular, obtemos

$$\|x_{k+1} - x_{\hat{\ell}(k)}\| \leq \sum_{j=1}^{\hat{\ell}(k)-k-1} \gamma_{\hat{\ell}(k)-j} \|z_{\hat{\ell}(k)-j} - x_{\hat{\ell}(k)-j}\|.$$

Agora, passando ao limite quando $k \rightarrow \infty$ e levando em conta (4.14), temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{k+1} - x_{\hat{\ell}(k)}\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\hat{\ell}(k)-k-1} \gamma_{\hat{\ell}(k)-j} \|z_{\hat{\ell}(k)-j} - x_{\hat{\ell}(k)-j}\| \implies \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{k+1} - x_{\hat{\ell}(k)}\| \leq 0,$$

donde obtemos $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{k+1} - x_{\hat{\ell}(k)}\| = 0$. Portanto, novamente devido à continuidade uniforme de f em $L_{f,\Omega}(f(x_0))$ e considerando que $\{f(x_{\ell(k)})\}$ é convergente, concluímos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{\hat{\ell}(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{\ell(k)}),$$

e considerando que $\nu_k = f(x_{\ell(k)}) - f(x_k)$, segue que $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k = 0$. \square

No resultado a seguir, vamos mostrar que, quando a função f é convexa, então a sequência gerada pelo Algoritmo 1, nos casos da busca de Armijo monótona e da busca não monótona do tipo Média, converge para uma solução do problema (4.1), apenas sob a hipótese de existência de soluções do problema.

Teorema 4.1.7. *Assuma que o problema (4.1) tenha soluções e que f é convexa. Então, o Algoritmo 1, que gera a sequência $\{x_k\}$, nos casos da busca de Armijo monótona e da busca não monótona do tipo Média, para em alguma iterada k , no caso em que x_k é uma solução do problema (4.1). Caso contrário, gera uma sequência $\{x_k\}$ infinita que converge para uma solução x^* do problema.*

Demonstração: No caso em que o algoritmo para em alguma iterada k , a condição de parada do Algoritmo 1 garante que x_k é estacionário. Uma vez que f é convexa, pontos estacionários são soluções para o problema (4.1), de acordo com a **Proposição 2.2.10**. Vamos assumir, então, que o algoritmo gera uma sequência $\{x_k\}$ infinita. Seja \hat{x} qualquer solução do problema (4.1), ou seja, $f(\hat{x}) \leq f(x)$ para todo $x \in \Omega$. Considere o termo $S = \|x_{k+1} - x_k\|^2 + \|x_k - \hat{x}\|^2 - \|x_{k+1} - \hat{x}\|^2$. Utilizando o fato de que $\|v, v\|^2 = \langle v, v \rangle$, obtemos

$$S = \langle x_{k+1} - x_k, x_{k+1} - x_k \rangle + \langle x_k - \hat{x}, x_k - \hat{x} \rangle - \langle x_{k+1} - \hat{x}, x_{k+1} - \hat{x} \rangle.$$

Pela linearidade do produto interno, vale

$$S = \langle x_{k+1}, x_{k+1} \rangle - 2\langle x_{k+1}, x_k \rangle + 2\langle x_k, x_k \rangle - 2\langle x_k, \hat{x} \rangle + \langle \hat{x}, \hat{x} \rangle - \langle x_{k+1}, x_{k+1} \rangle + 2\langle x_{k+1}, \hat{x} \rangle - \langle \hat{x}, \hat{x} \rangle.$$

Cancelando os termos simétricos e colocando 2 em evidência, obtemos

$$S = 2(\langle x_k, x_k \rangle - \langle x_k, \hat{x} \rangle - \langle x_{k+1}, x_k \rangle + \langle x_{k+1}, \hat{x} \rangle).$$

Mais uma vez, pela linearidade do produto interno,

$$S = 2\langle x_k - x_{k+1}, x_k - \hat{x} \rangle.$$

Considerando que $x_{k+1} = x_k + \gamma_k(x_k(\beta_k) - x_k)$, temos

$$S = 2\langle x_k - (x_k + \gamma_k(x_k(\beta_k) - x_k)), x_k - \hat{x} \rangle.$$

Cancelando os termos simétricos e utilizando a linearidade do produto interno, obtemos

$$S = 2\gamma_k \langle x_k(\beta_k) - x_k, \hat{x} - x_k \rangle. \quad (4.17)$$

Agora, pelo **Teorema 2.2.3** e considerando que $x_k(\beta_k) = P_\Omega(x_k - \beta_k \nabla f(x_k))$ e que $\hat{x} \in \Omega$, vale

$$0 \leq \langle x_k(\beta_k) - (x_k - \beta_k \nabla f(x_k)), \hat{x} - x_k(\beta_k) \rangle.$$

Somando $x_k - x_k$ no produto interno,

$$0 \leq \langle x_k(\beta_k) - x_k + \beta_k \nabla f(x_k), (\hat{x} - x_k) + (x_k - x_k(\beta_k)) \rangle.$$

Pela linearidade do produto interno,

$$0 \leq \langle x_k(\beta_k) - x_k + \beta_k \nabla f(x_k), \hat{x} - x_k \rangle + \langle x_k(\beta_k) - x_k + \beta_k \nabla f(x_k), x_k - x_k(\beta_k) \rangle.$$

Novamente, pela linearidade do produto interno, podemos escrever

$$0 \leq \langle x_k(\beta_k) - x_k, \hat{x} - x_k \rangle - \beta_k \langle \nabla f(x_k), x_k - \hat{x} \rangle + \langle x_k(\beta_k) - x_k + \beta_k \nabla f(x_k), x_k - x_k(\beta_k) \rangle.$$

Rearranjando a desigualdade acima, obtemos

$$\langle x_k(\beta_k) - x_k, \hat{x} - x_k \rangle \geq \beta_k \langle \nabla f(x_k), x_k - \hat{x} \rangle - \langle x_k(\beta_k) - x_k + \beta_k \nabla f(x_k), x_k - x_k(\beta_k) \rangle.$$

Utilizando o **Teorema 2.2.5** e o fato de que $x_k \in \Omega$,

$$\langle x_k(\beta_k) - x_k, \hat{x} - x_k \rangle \geq \beta_k [f(x_k) - f(\hat{x})] + \langle x_k(\beta_k) - x_k + \beta_k \nabla f(x_k), x_k(\beta_k) - x_k \rangle.$$

Pelo fato de \hat{x} ser solução do problema (4.1), temos que $f(x_k) - f(\hat{x}) \geq 0$. Como $\beta_k > 0$, segue que

$$\langle x_k(\beta_k) - x_k, \hat{x} - x_k \rangle \geq \langle x_k(\beta_k) - x_k + \beta_k \nabla f(x_k), x_k(\beta_k) - x_k \rangle.$$

Utilizando a linearidade do produto interno no lado direito, obtemos

$$\langle x_k(\beta_k) - x_k, \hat{x} - x_k \rangle \geq \langle x_k(\beta_k) - x_k, x_k(\beta_k) - x_k \rangle + \beta_k \langle \nabla f(x_k), x_k(\beta_k) - x_k \rangle.$$

Pelo fato de $\langle v, v \rangle = \|v\|^2$, temos

$$\langle x_k(\beta_k) - x_k, \hat{x} - x_k \rangle \geq \|x_k(\beta_k) - x_k\|^2 + \beta_k \langle \nabla f(x_k), x_k(\beta_k) - x_k \rangle. \quad (4.18)$$

Além disso, do esquema iterativo (1.1), temos que

$$x_k(\beta_k) - x_k = \frac{x_{k+1} - x_k}{\gamma_k}.$$

Tomando a norma ao quadrado na igualdade acima,

$$\|x_k(\beta_k) - x_k\|^2 = \left\| \frac{x_{k+1} - x_k}{\gamma_k} \right\|^2.$$

Colocando γ_k^{-2} em evidência no segundo membro,

$$\|x_k(\beta_k) - x_k\|^2 = \gamma_k^{-2} \|x_{k+1} - x_k\|^2. \quad (4.19)$$

Combinando os resultados (4.17), (4.18) e (4.19), segue que

$$\|x_{k+1} - x_k\|^2 + \|x_k - \hat{x}\|^2 - \|x_{k+1} - \hat{x}\|^2 \geq 2\gamma_k \left[\gamma_k^{-2} \|x_{k+1} - x_k\|^2 + \beta_k \langle \nabla f(x_k), x_k(\beta_k) - x_k \rangle \right].$$

Utilizando a distributividade no segundo membro,

$$\|x_{k+1} - x_k\|^2 + \|x_k - \hat{x}\|^2 - \|x_{k+1} - \hat{x}\|^2 \geq 2\gamma_k^{-1} \|x_{k+1} - x_k\|^2 + 2\gamma_k \beta_k \langle \nabla f(x_k), x_k(\beta_k) - x_k \rangle.$$

Rearranjando a desigualdade acima,

$$\|x_{k+1} - \hat{x}\|^2 \leq \|x_{k+1} - x_k\|^2 + \|x_k - \hat{x}\|^2 - 2\gamma_k^{-1} \|x_{k+1} - x_k\|^2 - 2\gamma_k \beta_k \langle \nabla f(x_k), x_k(\beta_k) - x_k \rangle.$$

Colocando o termo $\|x_{k+1} - x_k\|^2$ em evidência, temos

$$\|x_{k+1} - \hat{x}\|^2 \leq \|x_k - \hat{x}\|^2 + (1 - 2\gamma_k^{-1}) \|x_{k+1} - x_k\|^2 - 2\gamma_k \beta_k \langle \nabla f(x_k), x_k(\beta_k) - x_k \rangle.$$

Agora, como $\gamma_k \in (0, 1]$, temos que $-2\gamma_k^{-1} \leq -2 \implies 1 - 2\gamma_k^{-1} \leq -1$, donde

$$\|x_{k+1} - \hat{x}\|^2 \leq \|x_k - \hat{x}\|^2 - 2\gamma_k \beta_k \langle \nabla f(x_k), x_k(\beta_k) - x_k \rangle. \quad (4.20)$$

Agora, vamos considerar especificamente a maneira pela qual os parâmetros de comprimento de passo γ_k 's são determinados. Pela desigualdade (3.2), referente ao processo de busca linear, temos que, para todo $p \in \mathbb{N}$,

$$f(x_p + \gamma_p(z_p - x_p)) \leq f(x_p) - \sigma \gamma_p \langle \nabla f(x_p), x_p - x_p(\beta_p) \rangle + \nu_p.$$

Reorganizando a desigualdade acima e considerando que $x_{p+1} = x_p + \gamma_p(z_p - x_p)$, temos

$$-\sigma \gamma_p \langle \nabla f(x_p), x_p(\beta_p) - x_p \rangle \leq f(x_p) - f(x_{p+1}) + \nu_p.$$

Multiplicando a desigualdade acima por $2\beta_p/\sigma$,

$$-2\beta_p \gamma_p \langle \nabla f(x_p), x_p(\beta_p) - x_p \rangle \leq \frac{2\beta_p}{\sigma} [f(x_p) - f(x_{p+1}) + \nu_p].$$

Vamos definir

$$\varepsilon_p = -2\beta_p \gamma_p \langle \nabla f(x_p), x_p(\beta_p) - x_p \rangle. \quad (4.21)$$

Uma vez que $x_p(\beta_p) - x_p$ é uma direção de descida, isto é, $\langle \nabla f(x_p), x_p(\beta_p) - x_p \rangle \leq 0$, e β_p e γ_p são positivos, temos que $\varepsilon_p > 0$. Considerando que $\beta_p \in [\tilde{\beta}, \hat{\beta}]$ para $0 < \tilde{\beta} \leq \hat{\beta}$, então $\beta_p \leq \hat{\beta}$, donde obtemos

$$\varepsilon_p \leq \frac{2\beta_p}{\sigma} [f(x_p) - f(x_{p+1}) + \nu_p] \leq \frac{2\hat{\beta}}{\sigma} [f(x_p) - f(x_{p+1}) + \nu_p].$$

Somando a desigualdade acima com p entre 0 e k e levando em conta que \hat{x} é solução do problema (4.1), temos

$$\sum_{p=0}^k \varepsilon_p \leq \frac{2\hat{\beta}}{\sigma} \left[f(x_0) - f(x_{k+1}) + \sum_{p=0}^k \nu_p \right] \leq \frac{2\hat{\beta}}{\sigma} \left[f(x_0) - f(\hat{x}) + \sum_{p=0}^k \nu_p \right].$$

Passando ao limite quando $k \rightarrow \infty$, e considerando o resultado da **Proposição 4.1.5**,

$$\sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p \leq \frac{2\hat{\beta}}{\sigma} \left[f(x_0) - f(\hat{x}) + \left(\frac{1 - \delta_{\min}}{\delta_{\min}} \right) (f(x_0) - f(\hat{x})) \right].$$

Portanto, a série $\sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p$ é convergente. Levando em conta (4.20) e (4.21), obtemos

$$\|x_{k+1} - \hat{x}\|^2 \leq \|x_k - \hat{x}\|^2 + \varepsilon_k. \quad (4.22)$$

Seja S^* o conjunto de soluções do problema (4.1). Uma vez que \hat{x} é um elemento arbitrário de S^* e $\sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p < \infty$, (4.22) implica que $\{x_k\}$ é quasi-Fejér com relação a S^* , de acordo com a **Definição 2.3.1**. Já que S^* é não vazio por hipótese, segue da **Proposição 2.3.2** que $\{x_k\}$ é limitada e, portanto, possui pontos de acumulação. Pela **Proposição 4.1.4**, todos os pontos de acumulação de $\{x_k\}$ são estacionários. Pela convexidade de f , esses pontos estacionários são soluções para o problema (4.1), ou seja, pertencem a S^* . Pela **Proposição 2.3.2**, a sequência $\{x_k\}$ completa, isto é, indexando k a \mathbb{N} , converge para uma solução do problema (4.1). \square

4.2 Busca de Armijo ao longo de arcos de projeção

Apresentaremos agora os resultados de convergência correspondentes à busca de Armijo ao longo de arcos de projeção, que seguem diretamente dos resultados para a estratégia ao longo de direções viáveis desenvolvidos anteriormente, com algumas modificações. Os resultados a seguir são válidos sem assumir a convexidade de f .

Lema 4.2.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e fechado. Para todo $x \in \Omega$ e $z \in \mathbb{R}^n$, a função $\varphi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por*

$$\varphi(\beta) = \frac{\|P_{\Omega}(x + \beta z) - x\|}{\beta},$$

é monótona não crescente.

Demonstração: Vamos tomar dois escalares β_1 e β_2 com $\beta_1 > 0$ e $\beta_2 > \beta_1$ e mostrar que

$$\frac{\|P_{\Omega}(x + \beta_2 z) - x\|}{\beta_2} \leq \frac{\|P_{\Omega}(x + \beta_1 z) - x\|}{\beta_1}. \quad (4.23)$$

Para isso, consideremos as seguintes mudanças de variáveis: $y = \beta_1 z$, $\lambda = \beta_2/\beta_1$, $a = x + y$ e $b = x + \lambda y$. Assim, (4.23) pode ser reescrita como

$$\left\| P_{\Omega} \left(x + \frac{\beta_2}{\beta_1} \beta_1 z \right) - x \right\| \leq \frac{\beta_2}{\beta_1} \|P_{\Omega}(x + \beta_1 z) - x\| \implies \|P_{\Omega}(b) - x\| \leq \lambda \|P_{\Omega}(a) - x\|. \quad (4.24)$$

Vamos analisar separadamente os possíveis casos.

- Se $P_\Omega(a) = x$, temos $\|P_\Omega(b) - x\| = 0 \implies P_\Omega(b) = x$ e a desigualdade (4.24) é válida.
- Se $a \in \Omega$, então $P_\Omega(a) = a = x + y$, de modo que (4.24) se torna $\|P_\Omega(b) - x\| \leq \lambda\|y\| = \|b - x\|$, que também é válido para uma projeção ortogonal.
- Se $P_\Omega(a) = P_\Omega(b)$, então (4.24) também é válida, pois $\lambda > 1$.

Portanto, é suficiente mostrar que (4.24) é válida no caso em que $P_\Omega(a) \neq P_\Omega(b)$, $P_\Omega(a) \neq x$, $P_\Omega(b) \neq x$ e $a \notin \Omega$. Sejam H_a e H_b os dois hiperplanos que são ortogonais a $P_\Omega(b) - P_\Omega(a)$ e passam por $P_\Omega(a)$ e $P_\Omega(b)$, respectivamente. Pelo **Teorema 2.2.3**, valem as desigualdades

$$\begin{aligned} \langle P_\Omega(a) - P_\Omega(b), b - P_\Omega(b) \rangle &\leq 0, \\ \langle P_\Omega(b) - P_\Omega(a), a - P_\Omega(a) \rangle &\leq 0. \end{aligned}$$

Da definição de produto interno, isso significa que o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{P_\Omega(b)P_\Omega(a)}$ e $\overrightarrow{P_\Omega(b)b}$ e entre os vetores $\overrightarrow{P_\Omega(a)P_\Omega(b)}$ e $\overrightarrow{aP_\Omega(a)}$ são ângulos maiores ou iguais a $\pi/2$. Isso implica que nem a e nem b se encontram estritamente entre os dois hiperplanos H_a e H_b . Além disso, x se encontra do mesmo lado de H_a que a está, então $x \notin H_a$. Sejam s_a e s_b as interseções da reta $\{x + \alpha(b - x); \alpha \in \mathbb{R}\}$ com H_a e H_b , respectivamente. Seja w a interseção da reta $\{x + \alpha(P_\Omega(a) - x); \alpha \in \mathbb{R}\}$ com H_b . A Figura 4.1 representa o caso que estamos analisando.

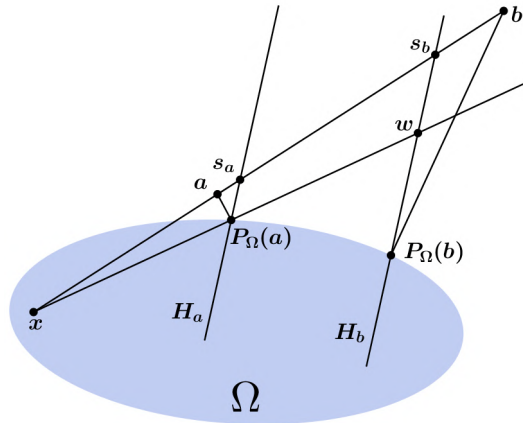


Figura 4.1: Interpretação geométrica para o **Lema 4.2.1**.

Note que os triângulos $\triangle s_a x P_\Omega(a)$ e $\triangle s_b x w$ são semelhantes, de modo que

$$\frac{\|s_b - x\|}{\|s_a - x\|} = \frac{\|w - x\|}{\|P_\Omega(a) - x\|}. \tag{4.25}$$

Além disso, os segmentos $\overline{wP_\Omega(b)}$ e $\overline{P_\Omega(b)P_\Omega(a)}$ são ortogonais, ou seja, o triângulo $\triangle P_\Omega(a)P_\Omega(b)w$ é retângulo, donde

$$\|w - P_\Omega(a)\| \geq \|P_\Omega(b) - P_\Omega(a)\|. \quad (4.26)$$

Considerando os fatos acima e desde que $y \neq 0$, vamos reescrever a variável $\lambda = \beta_2/\beta_1$ da seguinte maneira:

$$\lambda = \lambda \frac{\|y\|}{\|y\|} = \frac{\|\lambda y\|}{\|y\|} = \frac{\|b - x\|}{\|a - x\|}. \quad (4.27)$$

Além disso, como os pontos x , a , b , s_a e s_b são colineares, já que pertencem à reta $\{x + \alpha(b - x); \alpha \in \mathbb{R}\}$, e a não se encontra estritamente entre os dois hiperplanos H_a e H_b , temos que a está entre x e s_a (ou então é o próprio s_a). Isso implica que $\|a - x\| \leq \|s_a - x\|$, donde $\frac{1}{\|a - x\|} \geq \frac{1}{\|s_a - x\|}$. Utilizando argumentos semelhantes, obtemos que s_b está entre x e b , o que implica que $\|b - x\| \geq \|s_b - x\|$. Multiplicando essas desigualdades e considerando (4.27), obtemos

$$\lambda = \frac{\|b - x\|}{\|a - x\|} \geq \frac{\|s_b - x\|}{\|s_a - x\|}.$$

Utilizando (4.25), obtemos

$$\lambda \geq \frac{\|w - x\|}{\|P_\Omega(a) - x\|}.$$

Uma vez que x , $P_\Omega(a)$ e w são colineares e $P_\Omega(a)$ está entre x e w (pois $P_\Omega(a) \in H_a$ e $w \in H_b$), o segmento \overline{xw} pode ser dividido nos segmentos $\overline{xP_\Omega(a)}$ e $\overline{P_\Omega(a)w}$, de modo que

$$\lambda \geq \frac{\|w - x\|}{\|P_\Omega(a) - x\|} = \frac{\|w - P_\Omega(a)\| + \|P_\Omega(a) - x\|}{\|P_\Omega(a) - x\|}.$$

Utilizando agora (4.26), obtemos

$$\lambda \geq \frac{\|w - P_\Omega(a)\| + \|P_\Omega(a) - x\|}{\|P_\Omega(a) - x\|} \geq \frac{\|P_\Omega(b) - P_\Omega(a)\| + \|P_\Omega(a) - x\|}{\|P_\Omega(a) - x\|}.$$

Pela desigualdade triangular, temos que $\|P_\Omega(b) - P_\Omega(a)\| + \|P_\Omega(a) - x\| \geq \|P_\Omega(b) - x\|$, donde

$$\lambda \geq \frac{\|P_\Omega(b) - P_\Omega(a)\| + \|P_\Omega(a) - x\|}{\|P_\Omega(a) - x\|} \geq \frac{\|P_\Omega(b) - x\|}{\|P_\Omega(a) - x\|} \implies \lambda \geq \frac{\|P_\Omega(b) - x\|}{\|P_\Omega(a) - x\|}.$$

Multiplicando a desigualdade acima por $\|P_\Omega(a) - x\|$, obtemos (4.24), o que conclui a prova. \square

Proposição 4.2.2. *Seja $\{x_k\}$ a sequência gerada pelo Algoritmo 2. Então:*

- (a) $x_k \in \Omega$, para todo k .
- (b) Se $\nabla f(x_k) \neq 0$, então $\langle \nabla f(x_k), x_k(\beta_k) - x_k \rangle < 0$.

Demonstração:

- (a) Como $x_0 \in \Omega$ pela inicialização do algoritmo e $x_{k+1} = P_\Omega(x_k - \beta_k \nabla f(x_k))$, é imediato que $x_k \in \Omega$ para todo k .

(b) Uma vez que $x_k \in \Omega$ pelo item anterior, aplicando o **Teorema 2.2.3**, temos que

$$\langle x_k - x_k(\beta_k), (x_k - \beta_k \nabla f(x_k)) - x_k(\beta_k) \rangle \leq 0.$$

Utilizando a linearidade do produto interno e reorganizando a desigualdade, obtemos

$$\langle x_k - x_k(\beta_k), x_k - x_k(\beta_k) \rangle \leq \beta_k \langle \nabla f(x_k), x_k - x_k(\beta_k) \rangle.$$

Pelo fato de $\langle v, v \rangle = \|v\|^2$ e como $\beta \neq 0$, obtemos

$$0 < \frac{\|x_k - x_k(\beta_k)\|^2}{\beta_k} \leq \langle \nabla f(x_k), x_k - x_k(\beta_k) \rangle. \quad (4.28)$$

Assim, concluímos que

$$\langle \nabla f(x_k), x_k(\beta_k) - x_k \rangle < 0,$$

onde assumimos que x_k não é estacionário, ou seja, $\|x_k - x_k(\beta_k)\| \neq 0$. \square

No próximo resultado, vamos mostrar que a busca linear de Armijo ao longo de arcos de projeção está bem definida, isto é, sob certas hipóteses, sempre é possível encontrar um parâmetro de comprimento de passo positivo que satisfaça a condição de decrescimento da função.

Proposição 4.2.3. *Sejam $\sigma \in (0, 1)$ e $x \in \Omega$. Então existe $\beta^* > 0$ tal que*

$$f(x(\beta)) \leq f(x) - \sigma \langle \nabla f(x), x - x(\beta) \rangle \quad (4.29)$$

para todo $\beta \in (0, \beta^*]$, onde $x(\beta) = P_\Omega(x - \beta \nabla f(x))$.

Demonstração: Se x é estacionário, então $\|x - x(\beta)\| = 0$, o que implica que $x = x(\beta)$. Nesse caso, (4.29) é válida para β^* sendo qualquer escalar positivo. Vamos assumir então que x não é estacionário, ou seja, $\|x - x(\beta)\| \neq 0$ para todo $\beta > 0$. Pelo Teorema do Valor Médio, temos que

$$f(x) - f(x(\beta)) = \langle \nabla f(\xi_\beta), x - x(\beta) \rangle,$$

onde ξ_β pertence ao segmento de extremidades x e $x(\beta)$. Somando $\nabla f(x) - \nabla f(x)$ no produto interno, obtemos

$$f(x) - f(x(\beta)) = \langle \nabla f(\xi_\beta) - \nabla f(x) + \nabla f(x), x - x(\beta) \rangle.$$

Pela linearidade do produto interno, vale

$$f(x) - f(x(\beta)) = \langle \nabla f(x), x - x(\beta) \rangle + \langle \nabla f(\xi_\beta) - \nabla f(x), x - x(\beta) \rangle, \quad (4.30)$$

Reorganizando (4.29),

$$f(x) - f(x(\beta)) \geq \sigma \langle \nabla f(x), x - x(\beta) \rangle.$$

Utilizando (4.30),

$$\langle \nabla f(x), x - x(\beta) \rangle + \langle \nabla f(\xi_\beta) - \nabla f(x), x - x(\beta) \rangle \geq \sigma \langle \nabla f(x), x - x(\beta) \rangle.$$

Reorganizando a desigualdade acima e colocando o termo $\langle \nabla f(x), x - x(\beta) \rangle$ em evidência,

$$(1 - \sigma)\langle \nabla f(x), x - x(\beta) \rangle \geq -\langle \nabla f(\xi_\beta) - \nabla f(x), x - x(\beta) \rangle.$$

Pela linearidade do produto interno,

$$(1 - \sigma)\langle \nabla f(x), x - x(\beta) \rangle \geq \langle \nabla f(x) - \nabla f(\xi_\beta), x - x(\beta) \rangle. \quad (4.31)$$

Da equação (4.28) e do **Lema 4.2.1**, temos que, para todo $\beta \in (0, 1]$, vale

$$\langle \nabla f(x), x - x(\beta) \rangle \geq \|x - x(\beta)\| \frac{\|x - x(\beta)\|}{\beta} \geq \|x - x(\beta)\| \|x - x(1)\|,$$

ou seja,

$$\langle \nabla f(x), x - x(\beta) \rangle \geq \|x - x(\beta)\| \|x - x(1)\|.$$

Portanto, substituindo $\langle \nabla f(x), x - x(\beta) \rangle$ em (4.31), temos que, todo $\beta \in (0, 1]$ que satisfizer a equação

$$(1 - \sigma)\|x - x(1)\| \geq \left\langle \nabla f(x) - \nabla f(\xi_\beta), \frac{x - x(\beta)}{\|x - x(\beta)\|} \right\rangle, \quad (4.32)$$

irá satisfazer também a equação (4.31). Tomando β suficientemente pequeno, temos que $x(\beta) \rightarrow x$ e, portanto, $\xi_\beta \rightarrow x$, uma vez que ξ_β pertence ao segmento de extremidades x e $x(\beta)$. Disso, decorre que $\nabla f(x) - \nabla f(\xi_\beta)$ em (4.32) tende a zero e, portanto, o lado direito dessa desigualdade também tende a zero quando β tende a zero. Assim, tomando algum β^* suficientemente pequeno, (4.32) será satisfeita e, como consequência, (4.29) também será satisfeita para todo $\beta \in (0, \beta^*]$. \square

Proposição 4.2.4. *Se o problema (4.1) possui soluções e \bar{x} é um ponto de acumulação da sequência $\{x_k\}$, então \bar{x} é um ponto estacionário para o problema.*

Demonstração: A proposição anterior garante que β_k está bem definido como um número positivo para todo $k \in \mathbb{N}$. Seja \bar{x} um ponto de acumulação de $\{x_k\}$ e seja $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ com \mathbb{N}_1 infinito tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}$ para $k \in \mathbb{N}_1$. Considerando (3.8), temos que

$$f(x_k(\beta_k)) \leq f(x_k) - \sigma \langle \nabla f(x_k), x_k - x_k(\beta_k) \rangle.$$

Reorganizando a desigualdade acima e considerando $\sigma \in (0, 1)$, $x_k(\beta_k) = x_{k+1}$ e o item (b) da **Proposição 4.2.2**, temos que

$$f(x_k) - f(x_{k+1}) \geq \sigma \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle > 0. \quad (4.33)$$

Assim, podemos afirmar que

$$f(x_k) - f(x_{k+1}) > 0,$$

donde segue que $\{f(x_k)\}$ é monótona decrescente e, portanto, $f(x_k) \rightarrow f(\bar{x})$ quando $k \rightarrow \infty$, para $k \in \mathbb{N}_1$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = \hat{\beta} \geq 0$, para $k \in \mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}$ com \mathbb{N}_2 infinito. Vamos considerar dois casos possíveis. Se ocorrer

$\liminf_{k \rightarrow \infty} \beta_k = \widehat{\beta}$ para algum $\widehat{\beta} > 0$, então, das equações (4.28) e (4.33), obtemos

$$f(x_k) - f(x_{k+1}) \geq \frac{\sigma \|x_k - x_{k+1}\|^2}{\beta_k}.$$

Multiplicando o segundo membro pelo termo β_k/β_k , obtemos

$$f(x_k) - f(x_{k+1}) \geq \sigma \beta_k \left(\frac{\|x_k - x_k(\beta_k)\|}{\beta_k} \right)^2.$$

Utilizando o **Lema 4.2.1**, uma vez que $\bar{\beta}$ é o comprimento de passo inicial, isto é, $\bar{\beta} \geq \beta_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, segue que

$$f(x_k) - f(x_{k+1}) \geq \sigma \beta_k \left(\frac{\|x_k - x_k(\bar{\beta})\|}{\bar{\beta}} \right)^2.$$

Uma vez que $\liminf_{k \rightarrow \infty} \beta_k = \widehat{\beta}$, então $\widehat{\beta} \leq \beta_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, de modo que

$$f(x_k) - f(x_{k+1}) \geq \frac{\sigma \widehat{\beta}}{\bar{\beta}^2} \|x_k - x_k(\bar{\beta})\|^2.$$

Passando ao limite quando $k \rightarrow \infty$, temos que

$$\frac{\sigma \widehat{\beta}}{\bar{\beta}^2} \|\bar{x} - \bar{x}(\bar{\beta})\|^2 \leq 0.$$

Dividindo ambos os lados por $\sigma \widehat{\beta}/\bar{\beta}^2$, e calculando a raiz quadrada, obtemos

$$\|\bar{x} - \bar{x}(\bar{\beta})\| = 0 \implies \bar{x} = \bar{x}(\bar{\beta}),$$

donde segue que \bar{x} é estacionário. Vejamos agora o caso em que $\liminf_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 0$. Nesse caso, existe uma subsequência $\{\beta_k\}$, com $k \in \mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}$, sendo \mathbb{N}_2 infinito, tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 0$. Isso significa que, para todo $k \in \mathbb{N}_2$ suficientemente grande, a desigualdade da busca de Armijo falha pelo menos uma vez, ou seja, $m_k \geq 1$ em (3.8). Isso significa que

$$f(x_k) - f(x_k(\theta^{-1}\beta_k)) < \sigma \langle \nabla f(x_k), x_k - x_k(\theta^{-1}\beta_k) \rangle. \quad (4.34)$$

Além disso, para todo $k \in \mathbb{N}_2$, x_k não é estacionário. De fato, se fosse x_k estacionário, teríamos $x_k = x_k(\bar{\beta})$ e a desigualdade da busca de Armijo seria satisfeita para $\beta_k = \bar{\beta}$, o que é absurdo, já que estamos tomando $k \in \mathbb{N}_2$ suficientemente grande. Portanto, x_k não é estacionário e deve ocorrer

$$\|x_k - x_k(\theta^{-1}\beta_k)\| > 0. \quad (4.35)$$

Pelo Teorema do Valor Médio, temos que

$$f(x_k) - f(x_k(\theta^{-1}\beta_k)) = \langle \nabla f(\xi_k), x_k - x_k(\theta^{-1}\beta_k) \rangle,$$

onde ξ_k pertence ao segmento de extremidades x_k e $x_k(\theta^{-1}\beta_k)$. Somando $\nabla f(x_k) - \nabla f(x_k)$ no produto interno, obtemos

$$f(x_k) - f(x_k(\theta^{-1}\beta_k)) = \langle \nabla f(\xi_k) - \nabla f(x_k) + \nabla f(x_k), x_k - x_k(\theta^{-1}\beta_k) \rangle.$$

Pela linearidade do produto interno,

$$f(x_k) - f(x_k(\theta^{-1}\beta_k)) = \langle \nabla f(x_k), x_k - x_k(\theta^{-1}\beta_k) \rangle + \langle \nabla f(\xi_k) - \nabla f(x_k), x_k - x_k(\theta^{-1}\beta_k) \rangle.$$

Combinando a equação acima com (4.34), obtemos

$$\langle \nabla f(x_k), x_k - x_k(\theta^{-1}\beta_k) \rangle + \langle \nabla f(\xi_k) - \nabla f(x_k), x_k - x_k(\theta^{-1}\beta_k) \rangle < \sigma \langle \nabla f(x_k), x_k - x_k(\theta^{-1}\beta_k) \rangle.$$

Colocando o termo $\langle \nabla f(x_k), x_k - x_k(\theta^{-1}\beta_k) \rangle$ em evidência,

$$(1 - \sigma) \langle \nabla f(x_k), x_k - x_k(\theta^{-1}\beta_k) \rangle < \langle \nabla f(x_k) - \nabla f(\xi_k), x_k - x_k(\theta^{-1}\beta_k) \rangle. \quad (4.36)$$

Pela equação (4.28), vale

$$\langle \nabla f(x_k), x_k - x_k(\theta^{-1}\beta_k) \rangle \geq \frac{\|x_k - x_k(\theta^{-1}\beta_k)\|^2}{\theta^{-1}\beta_k}.$$

Reescrevendo o lado direito da desigualdade acima,

$$\langle \nabla f(x_k), x_k - x_k(\theta^{-1}\beta_k) \rangle \geq \frac{\|x_k - x_k(\theta^{-1}\beta_k)\|}{\theta^{-1}\beta_k} \|x_k - x_k(\theta^{-1}\beta_k)\|.$$

Utilizando o **Lema 4.2.1**, considerando que $\bar{\beta} \geq \theta^{-1}\beta_k$,

$$\langle \nabla f(x_k), x_k - x_k(\theta^{-1}\beta_k) \rangle \geq \frac{\|x_k - x_k(\bar{\beta})\|}{\bar{\beta}} \|x_k - x_k(\theta^{-1}\beta_k)\|. \quad (4.37)$$

Combinando (4.35), (4.36) e (4.37), obtemos

$$(1 - \sigma) \left(\frac{\|x_k - x_k(\bar{\beta})\|}{\bar{\beta}} \|x_k - x_k(\theta^{-1}\beta_k)\| \right) < \langle \nabla f(x_k) - \nabla f(\xi_k), x_k - x_k(\theta^{-1}\beta_k) \rangle.$$

Reorganizando o membro esquerdo e utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz do lado direito, obtemos

$$\frac{1 - \sigma}{\bar{\beta}} \|x_k - x_k(\bar{\beta})\| \|x_k - x_k(\theta^{-1}\beta_k)\| < \|\nabla f(x_k) - \nabla f(\xi_k)\| \|x_k - x_k(\theta^{-1}\beta_k)\|.$$

Dividindo ambos os lados por $\|x_k - x_k(\theta^{-1}\beta_k)\| \neq 0$, obtemos

$$\frac{1 - \sigma}{\bar{\beta}} \|x_k - x_k(\bar{\beta})\| < \|\nabla f(x_k) - \nabla f(\xi_k)\|. \quad (4.38)$$

Passando ao limite quando $k \rightarrow \infty$ em (4.38), temos que $\beta_k \rightarrow 0$ e $x_k(\theta^{-1}\beta_k) \rightarrow \bar{x}$, donde $\xi_k \rightarrow \bar{x}$. Portanto, obtemos

$$\|\bar{x} - \bar{x}(\bar{\beta})\| \leq 0 \implies \|\bar{x} - \bar{x}(\bar{\beta})\| = 0 \implies \bar{x} = \bar{x}(\bar{\beta}),$$

e concluímos que \bar{x} é estacionário. \square

Assim como no caso das buscas lineares ao longo de direções viáveis, no resultado a seguir, mostraremos que, quando f é convexa, a sequência $\{x_k\}$, gerada pelo Algoritmo 2, converge para uma solução do problema (4.1).

Teorema 4.2.5. *Assuma que o problema (4.1) tenha soluções e que f é convexa. Então, o Algoritmo 2, que gera a sequência $\{x_k\}$, para em alguma iterada k , no caso em que x_k é uma solução do problema (4.1). Caso contrário, gera uma sequência $\{x_k\}$ infinita que converge para uma solução x^* do problema.*

Demonstração: No caso em que o algoritmo para em alguma iterada k , a condição de parada garante que x_k é estacionário. Uma vez que f é convexa, pontos estacionários são soluções para o problema (4.1), de acordo com a **Proposição 2.2.10**. Para o caso de uma sequência infinita, primeiramente, observamos que os cálculos feitos na demonstração do **Teorema 4.1.7**, até a desigualdade (4.20), não consideram a maneira específica pela qual os parâmetros β_k 's e γ_k 's são definidos. Então, esses cálculos são válidos para a sequência que estamos considerando aqui, onde agora $\gamma_k = 1$ para todo k e β_k é dado por (3.8). Portanto, para toda solução \hat{x} do problema (4.1), vale

$$\|x_{k+1} - \hat{x}\|^2 \leq \|x_k - \hat{x}\|^2 + \varepsilon_k, \quad (4.39)$$

onde

$$\varepsilon_k = 2\beta_k \langle \nabla f(x_k), x_k - P_\Omega(x_k - \beta_k \nabla f(x_k)) \rangle. \quad (4.40)$$

Note que, para todo k , $\varepsilon_k \geq 0$ pela **Proposição 4.2.2** e pela positividade de β_k . Vamos mostrar que a série $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k$ é convergente. Considerando (3.8), temos que

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \sigma \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle.$$

Reorganizando a desigualdade acima e levando em conta que $x_{k+1} = P_\Omega(x_k - \beta_k \nabla f(x_k))$,

$$\sigma \langle \nabla f(x_k), x_k - P_\Omega(x_k - \beta_k \nabla f(x_k)) \rangle \leq f(x_k) - f(x_{k+1}).$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{2\beta_k}{\sigma}$, obtemos

$$2\beta_k \langle \nabla f(x_k), x_k - P_\Omega(x_k - \beta_k \nabla f(x_k)) \rangle \leq \left(\frac{2\beta_k}{\sigma} \right) (f(x_k) - f(x_{k+1})).$$

Considerando (4.40), podemos reescrever

$$\varepsilon_k \leq \left(\frac{2\beta_k}{\sigma} \right) (f(x_k) - f(x_{k+1})) \leq \left(\frac{2\bar{\beta}}{\sigma} \right) (f(x_k) - f(x_{k+1})). \quad (4.41)$$

Somando a desigualdade acima com k entre 0 e j , e considerando a otimalidade de \hat{x} ,

$$\sum_{k=0}^j \varepsilon_k \leq \left(\frac{2\bar{\beta}}{\sigma} \right) (f(x_0) - f(x_{k+1})) \leq \left(\frac{2\bar{\beta}}{\sigma} \right) (f(x_0) - f(\hat{x})).$$

Passando ao limite quando $k \rightarrow \infty$, obtemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \leq \left(\frac{2\bar{\beta}}{\sigma} \right) (f(x_0) - f(\hat{x})).$$

Portanto, a série $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k$ é convergente. Considerando (4.39), segue que, assim como no **Teorema 4.1.7**, a sequência $\{x_k\}$ é quasi-Fejér com relação ao conjunto de soluções S^* , conforme a **Definição 2.3.1**. Então, a **Proposição 2.3.2** implica que $\{x_k\}$ é limitada, logo possui pontos de acumulação. Pela **Proposição 4.2.4** e pela convexidade de f , todos esses pontos de acumulação são estacionários e, portanto, soluções para o problema (4.1). Finalmente, a **Proposição 2.3.2** implica que a sequência $\{x_k\}$ completa, ou seja, indexando k a \mathbb{N} , converge para uma solução do problema. \square

Capítulo 5

Resultados numéricos

Neste capítulo, apresentaremos o estudo numérico realizado para comparar as estratégias discutidas no Capítulo 3 na minimização de uma função. Os experimentos numéricos foram desenvolvidos utilizando-se a linguagem de programação Julia e foram realizados em um computador com processador Intel Core i5 de 2.11 GHz, 8 GB de RAM e sistema operacional Windows. Os códigos utilizados neste trabalho estão livremente disponibilizados em https://github.com/EmanuelMQueiroz/Projected_Gradient_Method e podem também ser acessados pelo QR code abaixo.



Inicialmente, apresentaremos a ferramenta que empregamos na comparação dos diferentes algoritmos e, nas seções subsequentes, apresentaremos os resultados numéricos obtidos.

5.1 Comparação de diferentes algoritmos

Para comparar o desempenho de diferentes algoritmos de otimização, pode-se pensar em resolver um único problema utilizando esses algoritmos. No entanto, uma análise mais completa pode ser obtida ao comparar o desempenho desses algoritmos em uma coleção de problemas. Muitas vezes, a análise é feita por meio de tabelas que exibem o desempenho de cada algoritmo, em cada problema, para um conjunto de medidas de desempenho, como tempo de CPU, número de avaliações de função ou número de iterações. No entanto, para conjuntos grandes de testes, essas tabelas podem ser excessivamente grandes e dificultar

a análise dos resultados.

Neste trabalho, utilizamos a análise de desempenho introduzida por Dolan e Moré [10], que propõe um meio de avaliar o desempenho de um conjunto de algoritmos aplicados a um conjunto de problemas teste. Como exemplo, considere um conjunto \mathcal{P} com n_p problemas teste e um conjunto \mathcal{S} com n_s algoritmos. Seja $t_{p,s}$ o tempo de CPU necessário para resolver o problema $p \in \mathcal{P}$ pelo algoritmo $s \in \mathcal{S}$. Caso o algoritmo não resolva o problema p , consideramos $t_{p,s} = \infty$. Definimos o índice de desempenho $r_{p,s}$ como a razão entre $t_{p,s}$ e o tempo mais eficiente $t_{p,j}$ entre todos os algoritmos $j \in \mathcal{S}$, isto é,

$$r_{p,s} = \frac{t_{p,s}}{\min\{t_{p,j}, j \in \mathcal{S}\}}.$$

Para o algoritmo mais eficiente na resolução do problema p , ou seja, o que necessitou de menos tempo de CPU, o índice $r_{p,s}$ é igual a 1. Quanto menos eficiente for um algoritmo, maior será o valor desse índice. Além disso, para cada algoritmo s , consideramos a função de desempenho $\rho_s : [1, \infty) \rightarrow [0, 1]$ que, para cada valor de índice de desempenho, retorna o percentual de problemas na coleção \mathcal{P} resolvidos com índice de desempenho menor ou igual a ele. Essa função é definida por

$$\rho_s(\tau) = \frac{\text{card}\{p \in \mathcal{P}; r_{p,s} \leq \tau\}}{n_p},$$

onde $\text{card}\{p \in \mathcal{P}; r_{p,s} \leq \tau\}$ é a quantidade de problemas $p \in \mathcal{P}$ tais que os índices de desempenho $r_{p,s}$ sejam menores ou iguais que τ .

Por exemplo, $\rho_s(1)$ é o percentual de problemas que o algoritmo s resolve em menor tempo, já que 1 é o menor índice de desempenho. De forma geral, considerando outras medidas de desempenho (número de iterações ou número de avaliações de função, por exemplo), $\rho_s(\tau)$ é o percentual de problemas que o algoritmo s resolve em τ vezes o valor da medida de desempenho do algoritmo mais eficiente. A partir dos dados obtidos, geramos um gráfico, chamado perfil de desempenho, da função ρ para cada um dos algoritmos $s \in \mathcal{S}$.

A Figura 5.1 ilustra um exemplo de perfil de desempenho de percentual de problemas resolvidos em função do tempo de CPU, de dois algoritmos, na resolução de uma coleção de problemas. Observa-se que o Algoritmo 1 resolve 100% dos problemas, sendo mais rápido em cerca de 80% deles, enquanto o Algoritmo 2 resolve pouco menos de 100% dos problemas. Além disso, o Algoritmo 1 resolve todos os problemas utilizando 4 vezes o melhor tempo.

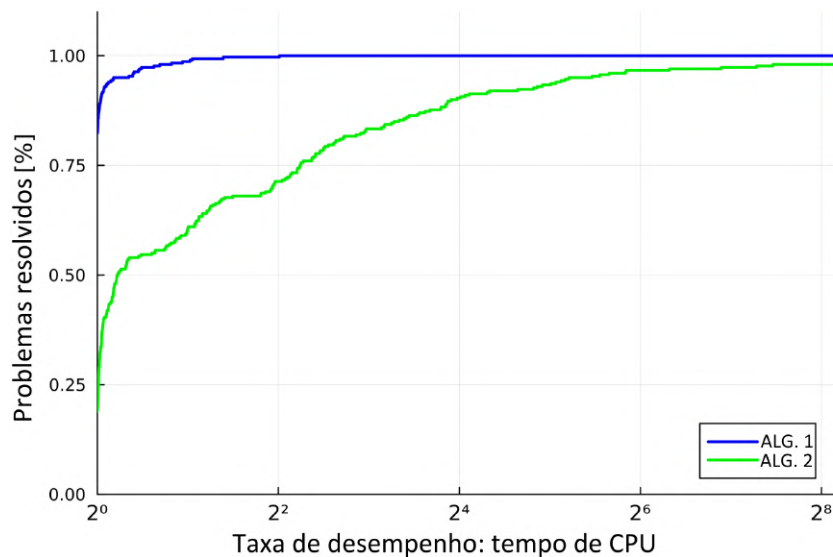


Figura 5.1: Perfil de desempenho de percentual de problemas resolvidos em função do tempo de CPU do Algoritmo 1 e do Algoritmo 2.

5.2 Minimização da função de Rosenbrock

Existem problemas de Otimização que, embora não sejam fruto de alguma aplicação, são muito importantes em procedimentos de teste de algoritmos, de modo que eles destacam as virtudes ou eventuais problemas nesses algoritmos.

A função de Rosenbrock, [26], é um problema popular para testar algoritmos com direções de descida baseadas no gradiente. Essa função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} [100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2]. \quad (5.1)$$

O ponto crítico de f está localizado em um vale, que é uma região onde existem variações do valor da função objetivo significativas em certas direções e muito pequenas em outras. Conforme [21], mesmo quando esse vale pode ser facilmente encontrado, a convergência da sequência gerada por algum algoritmo de minimização para o ponto crítico é mais difícil, pois pequenas variações na direção de descida em cada iteração podem levar a um aumento significativo no valor de f , o que torna mais desafiador encontrar a direção de descida adequada em certos casos.

A função de Rosenbrock possui apenas um ponto crítico, que é $f(x^*) = 0$ em $x^* = (1, 1, \dots, 1)$. A superfície e as curvas de nível da função de Rosenbrock (5.1) para o caso bidimensional estão representadas na Figura 5.2.

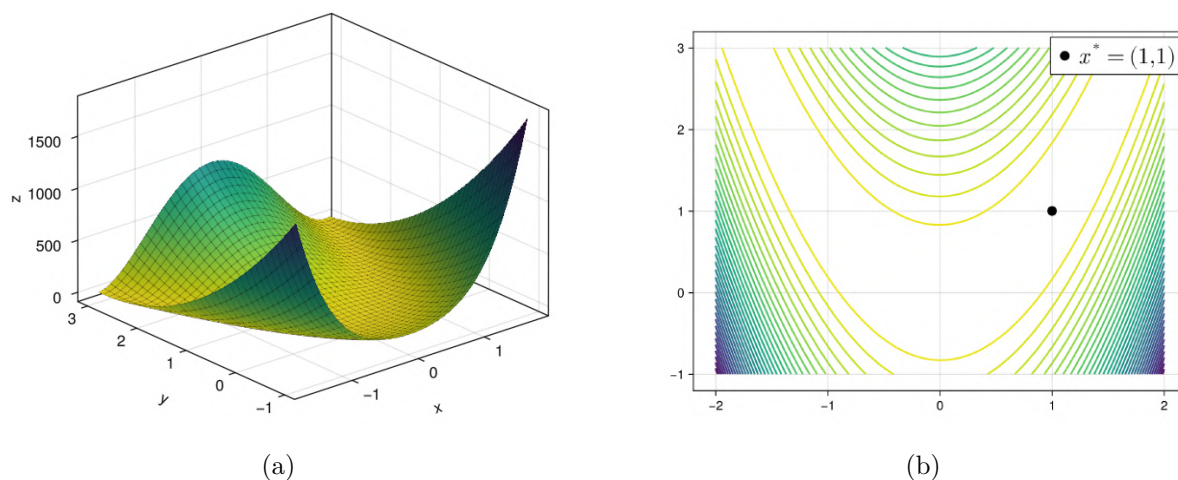


Figura 5.2: Superfície (a) e curvas de nível (b) da função de Rosenbrock definida por (5.1), considerando $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Considerando o Algoritmo 1 e o Algoritmo 2, denominamos da seguinte forma as estratégias empregadas, a fim de facilitar a análise dos resultados:

- **PG1** \rightarrow Método do Gradiente Projetado ao longo de direções viáveis com a busca linear monótona de Armijo.
- **PG2** \rightarrow Método do Gradiente Projetado ao longo de direções viáveis com a busca linear não monótona do tipo Máximo.
- **PG3** \rightarrow Método do Gradiente Projetado ao longo de direções viáveis com a busca linear não monótona do tipo Média.
- **PG4** \rightarrow Método do Gradiente Projetado ao longo de arcos de projeção com a busca linear monótona de Armijo.

Nos testes numéricos realizados, minimizamos a função de Rosenbrock (5.1) sujeito a $x \in \Omega$, onde consideramos 12 diferentes conjuntos de restrição Ω . Esses conjuntos foram escolhidos de modo a conter ou não o ponto crítico da função Rosenbrock em seu interior. Os operadores de projeção implementados para esses conjuntos são dados por fórmulas explícitas, fornecidas em [18].

Na Tabela 5.1, a seguir, definimos os conjuntos de restrição implementados e suas respectivas fórmulas para a o operador de projeção ortogonal. Os conjuntos de índice ímpar possuem o ponto crítico da função de Rosenbrock e os de índice par não o possuem.

| Conjunto viável | Projeção |
|--|---|
| $\Omega_1 = B(\hat{x}, \delta),$ $\hat{x} = x^* = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ e $\delta = 10$ | $P_{\Omega}(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in \Omega \\ \hat{x} - \delta(\hat{x} - x)/\ \hat{x} - x\ , & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$ |
| $\Omega_2 = B(\hat{x}, \delta),$ $\hat{x} = (10, 10, \dots, 10) \in \mathbb{R}^n$ e $\delta = 15$ | |
| $\Omega_3 = \{x \in \mathbb{R}^n; x_j \in (-\infty, a], j = 1, \dots, n\}$ e $a = 5$ | $(P_{\Omega}(x))_j = \min\{a, x_j\}, j = 1, \dots, n$ |
| $\Omega_4 = \{x \in \mathbb{R}^n; x_j \in (-\infty, a], j = 1, \dots, n\}$ e $a = 0, 5$ | |
| $\Omega_5 = \{x \in \mathbb{R}^n; x_j \in [a, b], j = 1, \dots, n\}, a = -5$ e $b = 10$ | $(P_{\Omega}(x))_j = \begin{cases} a, & \text{se } x_j < a \\ x_j, & \text{se } a \leq x_j \leq b, \quad j = 1, \dots, n \\ b, & \text{se } x_j \geq b \end{cases}$ |
| $\Omega_6 = \{x \in \mathbb{R}^n; x_j \in [a, b], j = 1, \dots, n\}, a = 2$ e $b = 10$ | |
| $\Omega_7 = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle a, x \rangle = b\},$ $a = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ e $b = n$ | $P_{\Omega}(x) = x + \left(\frac{b - \langle a, x \rangle}{\ a\ ^2} \right) a$ |
| $\Omega_8 = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle a, x \rangle = b\},$ $a = (10, 10, \dots, 10) \in \mathbb{R}^n$ e $b = 10$ | |
| $\Omega_9 = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle a, x \rangle \leq b\},$ $a = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ e $b = 100$ | $P_{\Omega}(x) = x + \left(\frac{\min\{0, b - \langle a, x \rangle\}}{\ a\ ^2} \right) a$ |
| $\Omega_{10} = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle a, x \rangle \leq b\},$ $a = (10, 10, \dots, 10) \in \mathbb{R}^n$ e $b = 1$ | |
| $\Omega_{11} = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = b\}, b = Ax^*,$ $A \in \mathbb{R}_{3 \times n}$ tem posto 3 | $P_{\Omega}(x) = x - A^{\top}(AA^{\top})^{-1}(Ax - b)$ |
| $\Omega_{12} = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = b\}, b = (1, 1, 1)$ e $A \in \mathbb{R}_{3 \times n}$ tem posto 3 | |

Tabela 5.1: Conjuntos viáveis e projeções.

As dimensões implementadas para essa função foram 5, 10, 20, 70 e 100. Para cada caso, tomamos 50 chutes iniciais, gerados aleatoriamente e projetados em Ω . Assim, foram testados 250 problemas para cada conjunto Ω .

Consideramos, no Algoritmo 1 e no Algoritmo 2, a tolerância de convergência da sequência sendo $\varepsilon = 10^{-5}$ e o parâmetro das buscas lineares $\sigma = 10^{-4}$. Os algoritmos são interrompidos quando o número de iterações atinge 50000 ou quando o parâmetro de comprimento de passo atinge um valor menor que 10^{-5} na busca linear. Assumimos

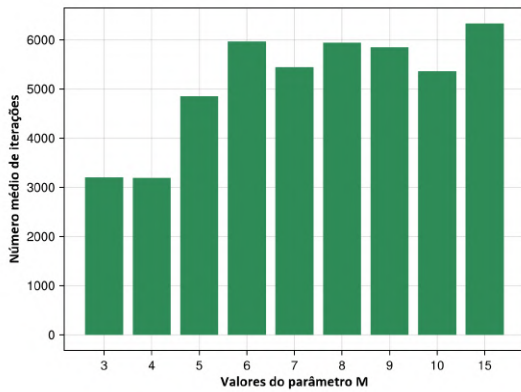
também, no Algoritmo 1, $\bar{\beta} = 1.0$ e $\theta = 0.5$, que são parâmetros geralmente empregados para a busca de Armijo, e tomamos $\tilde{\beta} = 0.1$, $\hat{\beta} = 0.9$ e $\beta_0 = 0.9$, que são parâmetros sugeridos em [5]. Além disso, o cálculo do parâmetro β_k no Algoritmo 1 foi realizado por meio de interpolação quadrática, isto é, dado $\beta_0 \in [\tilde{\beta}, \hat{\beta}]$, tomamos, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\beta_{k+1} = \frac{-\tilde{\beta}_k^2 \langle \nabla f(x_k), x_k(\beta_k) - x_k \rangle}{2[f(x_k + \beta_k(x_k(\beta_k) - x_k)) - f(x_k) - \tilde{\beta}_k \langle \nabla f(x_k), x_k(\beta_k) - x_k \rangle]}. \quad (5.2)$$

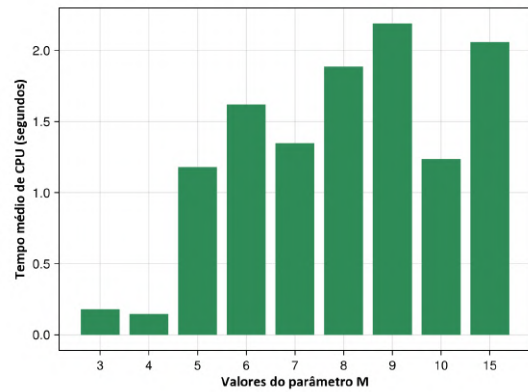
Quando o cálculo de β_k resulta em um parâmetro fora do intervalo $[\tilde{\beta}, \hat{\beta}]$, tomamos β_k igual a algum dos extremos do intervalo. Isto é, quando o cálculo de β_{k+1} , em alguma iteração, resulta em $\beta_{k+1} < \tilde{\beta}$, tomamos $\beta_{k+1} = \tilde{\beta}$. Quando $\beta_{k+1} > \hat{\beta}$, tomamos $\beta_{k+1} = \hat{\beta}$.

Para escolher os parâmetros que introduzem a não monotonicidade da sequência $\{x_k\}$ nas estratégias PG2 e PG3, resolvemos parte da coleção dos problemas mencionados com essas estratégias empregando diferentes valores para esses parâmetros. Detalharemos, a seguir, um exemplo de como esses parâmetros foram selecionados.

Para o conjunto Ω_1 , por exemplo, a fim de selecionar o parâmetro M no conjunto $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15\}$ que fornecesse o melhor desempenho para a estratégia PG2, resolvemos 100, dos 250 problemas selecionados para cada conjunto, utilizando cada um desses parâmetros. Em seguida, fizemos uma comparação do desempenho da estratégia com cada um dos parâmetros, considerando o número médio de iterações e o tempo médio de CPU gastos. Podemos observar, na Figura 5.3, que o parâmetro $M = 4$ forneceu um melhor desempenho nesse caso, tanto em relação ao número médio de iterações quanto em relação ao tempo médio de CPU. Assim, escolhemos $M = 4$ para comparar o desempenho da estratégia PG2 com as outras estratégias nos testes para o conjunto Ω_1 .



(a) Número médio de iterações.



(b) Tempo médio de CPU.

Figura 5.3: Variação do número médio de iterações e do tempo médio de CPU em função da variação do parâmetro M para a estratégia PG2 empregada no conjunto Ω_1 .

Ainda considerando o conjunto Ω_1 , a fim de selecionar o parâmetro η no conjunto $\{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9\}$ que fornecesse o melhor desempenho para a estratégia PG3, resolvemos os mesmos problemas do teste anterior com cada um desses parâ-

metros e fizemos a mesma comparação do desempenho da estratégia com cada um dos parâmetros. Na Figura 5.4, podemos ver que a estratégia PG3 obteve um desempenho similar em relação ao número médio de iterações para os parâmetros $\eta = 0.3, 0.4$ e que $\eta = 0.3$ foi o parâmetro que forneceu melhor desempenho em relação ao tempo médio de CPU. Assim, escolhemos $\eta = 0.3$ para comparar o desempenho da PG3 com as outras estratégias nos testes para o conjunto Ω_1 .

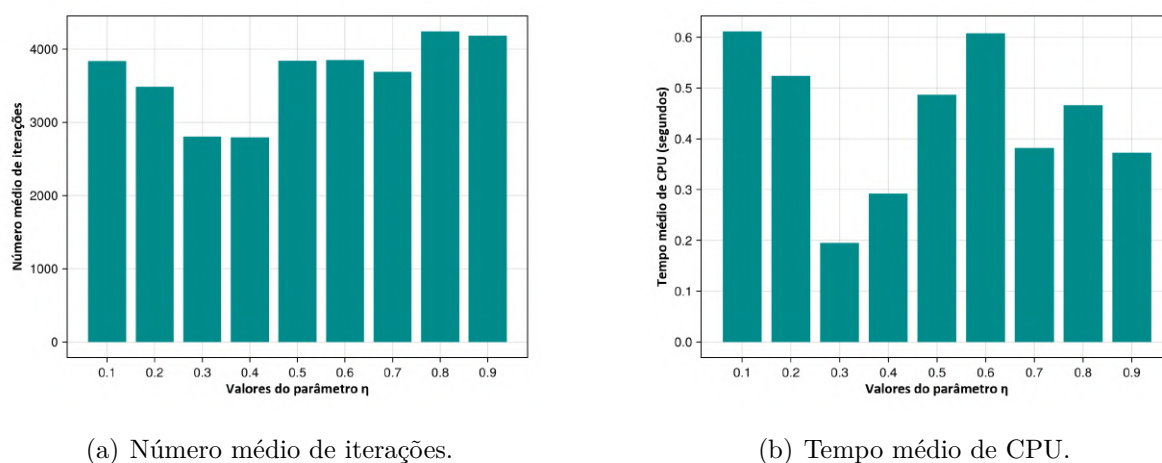


Figura 5.4: Variação do número médio de iterações e do tempo médio de CPU em função da variação do parâmetro η para a estratégia PG3 empregada no conjunto Ω_1 .

Realizamos os testes descritos acima para cada um dos conjuntos onde a função de Rosenbrock foi minimizada. A Tabela 5.2 mostra os parâmetros η e M utilizados em cada caso.

| Conjunto Ω | Ω_1 | Ω_2 | Ω_3 | Ω_4 | Ω_5 | Ω_6 | Ω_7 | Ω_8 | Ω_9 | Ω_{10} | Ω_{11} | Ω_{12} |
|-------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|---------------|---------------|---------------|
| Valor de M | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 3 | 3 | 3 |
| Valor de η | 0.3 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.6 | 0.3 | 0.1 | 0.1 | 0.3 | 0.4 | 0.6 | 0.2 |

Tabela 5.2: Valores dos parâmetros das estratégias não monótonas PG2 e PG3 que forneceram o melhor desempenho em cada conjunto viável.

A fim de analisar e comparar as estratégias discutidas, foram realizados perfis de desempenho em relação à diferentes medidas de desempenho. A seguir, apresentamos os resultados obtidos para cada um dos conjuntos testados.

5.2.1 Conjunto viável Ω_1

O conjunto $\Omega_1 = B(x^*, \delta)$ trata-se da bola aberta no \mathbb{R}^n de raio $\delta = 10$, cujo centro é o ponto crítico da função Rosenbrock, $x^* = (1, 1, \dots, 1)$. Na Figura 5.5, pode ser visto que as estratégias PG2 e PG3, que utilizam buscas não monótonas, se destacaram em

relação ao tempo de CPU e ao número de iterações. Em particular, a estratégia PG2 (busca do tipo Máximo) resolveu cerca de 60% dos problemas mais rapidamente e com menos iterações do que as demais estratégias. A estratégia PG4, ao longo de arcos de projeção, obteve o pior desempenho nesses aspectos.

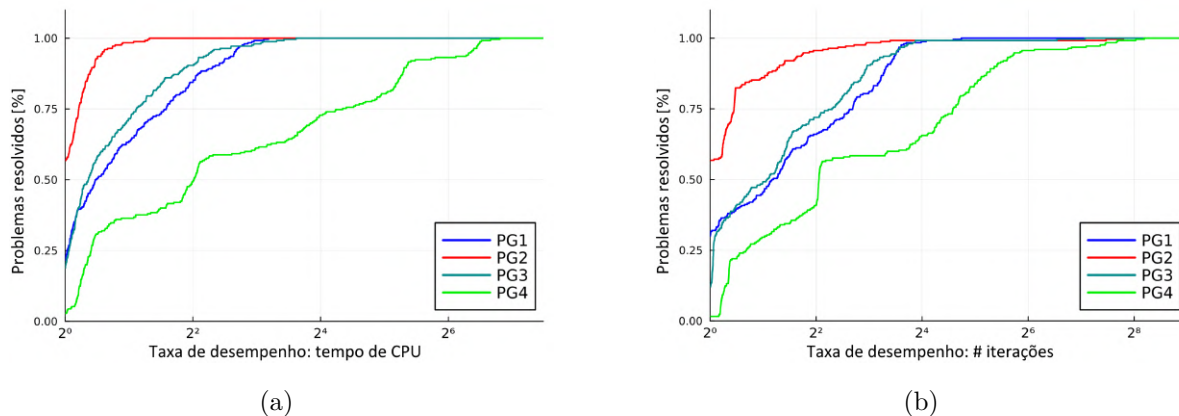


Figura 5.5: Perfis de desempenho das estratégias PG1, PG2, PG3 e PG4 em relação ao tempo de CPU e ao número de iterações.

Na Figura 5.6, ao analisar o desempenho das estratégias em relação ao número de avaliações de função e de projeção, observa-se que ocorreu um comportamento similar ao anterior: a estratégia PG2 obteve o melhor desempenho e a estratégia PG4 foi a menos eficiente. Em particular, em relação ao número de avaliações de projeção, a estratégia PG4 obteve um desempenho ainda pior que nas avaliações de função, devido à característica de seu esquema iterativo, que pode calcular mais de uma projeção a cada iteração.

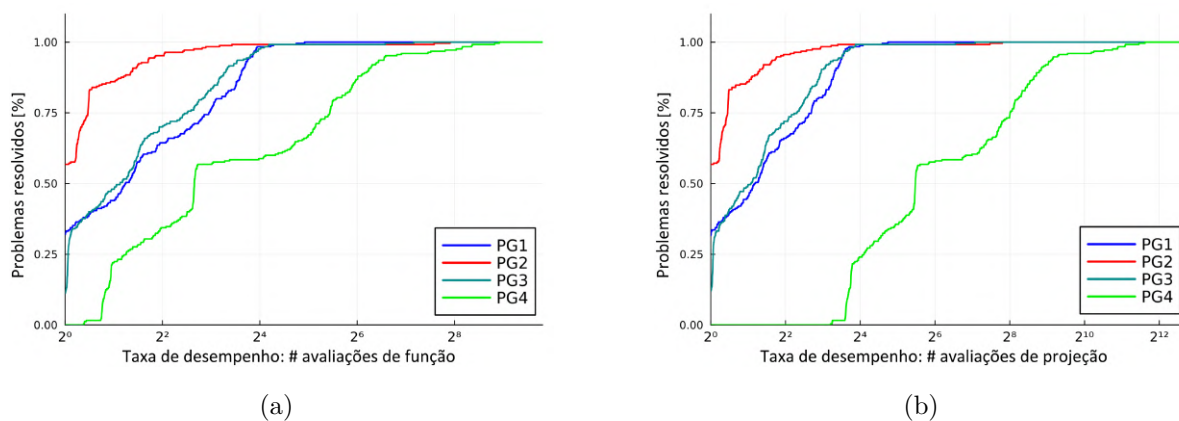


Figura 5.6: Perfis de desempenho das estratégias PG1, PG2, PG3 e PG4 em relação ao número de avaliações de função e de avaliações de projeção.

5.2.2 Conjunto viável Ω_2

O conjunto $\Omega_2 = B(\hat{x}, \delta)$ é a bola aberta no \mathbb{R}^n de raio $\delta = 15$, cujo centro é o ponto $\hat{x} = (10, 10, \dots, 10)$ e não contém o ponto crítico $x^* = (1, 1, \dots, 1)$ da função de

Rosenbrock. Na Figura 5.7, pode ser visto que as estratégias PG1, PG3 e PG4 tiveram desempenho similar em relação ao tempo de CPU, enquanto a PG2 foi pior. Já em relação ao número de iterações, a estratégia PG4 se destacou, resolvendo cerca de 80% dos problemas com menos iterações do que as demais, enquanto a PG2 também teve o pior desempenho.

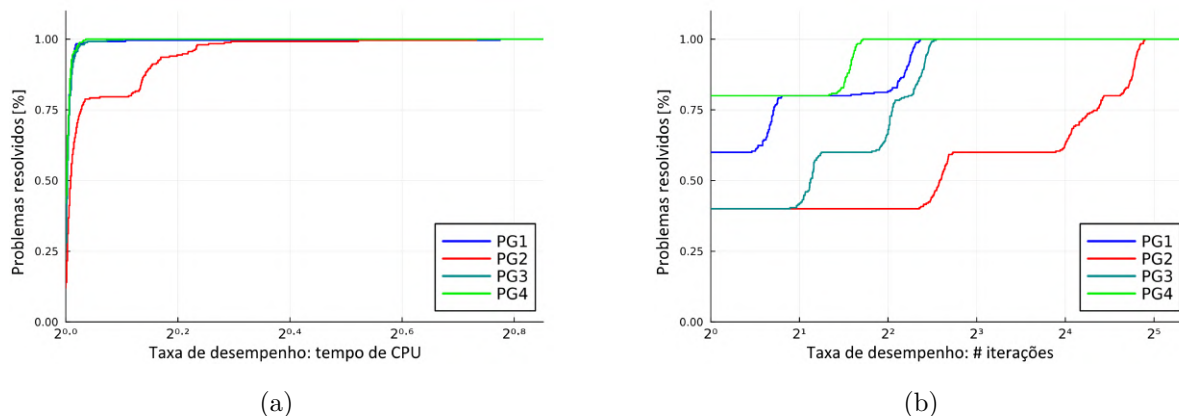


Figura 5.7: Perfis de desempenho das estratégias PG1, PG2, PG3 e PG4 em relação ao tempo de CPU e ao número de iterações.

Na Figura 5.8, ao analisar o desempenho das estratégias em relação ao número de avaliações de função e de projeção, observa-se que a estratégia PG1 teve um melhor desempenho nos dois aspectos, resolvendo cerca de 80% dos problemas com menos avaliações de função e cerca de 60% com menos avaliações de projeção. As estratégias PG2 e PG4 tiveram desempenho inferior para essas medidas avaliadas.

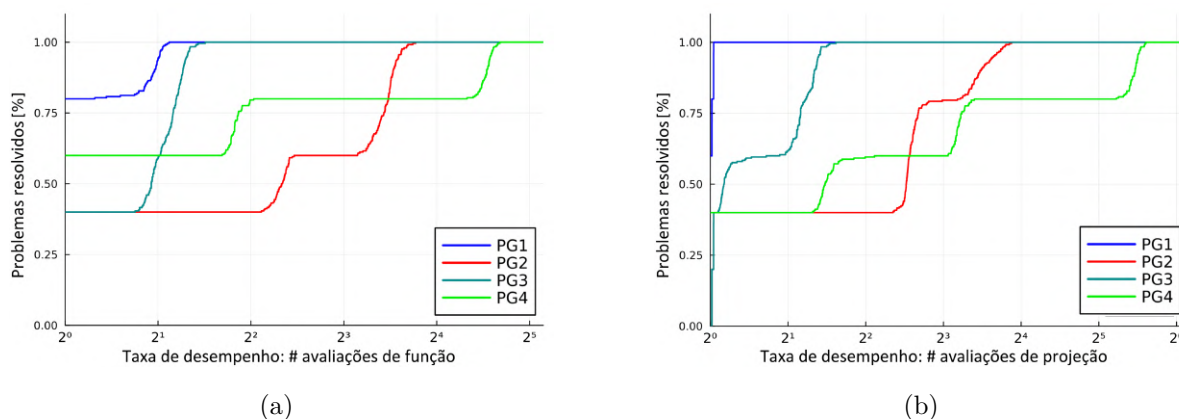


Figura 5.8: Perfis de desempenho das estratégias PG1, PG2, PG3 e PG4 em relação ao número de avaliações de função e de avaliações de projeção.

5.2.3 Conjunto viável Ω_3

O conjunto $\Omega_3 = \{x \in \mathbb{R}^n; x_j \in (-\infty, 5], j = 1, \dots, n\}$ é um conjunto ilimitado inferiormente e possui o ponto crítico da função Rosenbrock, $x^* = (1, 1, \dots, 1)$. Na Figura

5.9, pode ser visto que a estratégia PG1 obteve o melhor desempenho, resolvendo cerca de 65% dos problemas mais rapidamente e cerca de 90% com menos iterações. A estratégia PG3 ficou em segundo lugar nesses aspectos e a PG2 teve o pior desempenho.

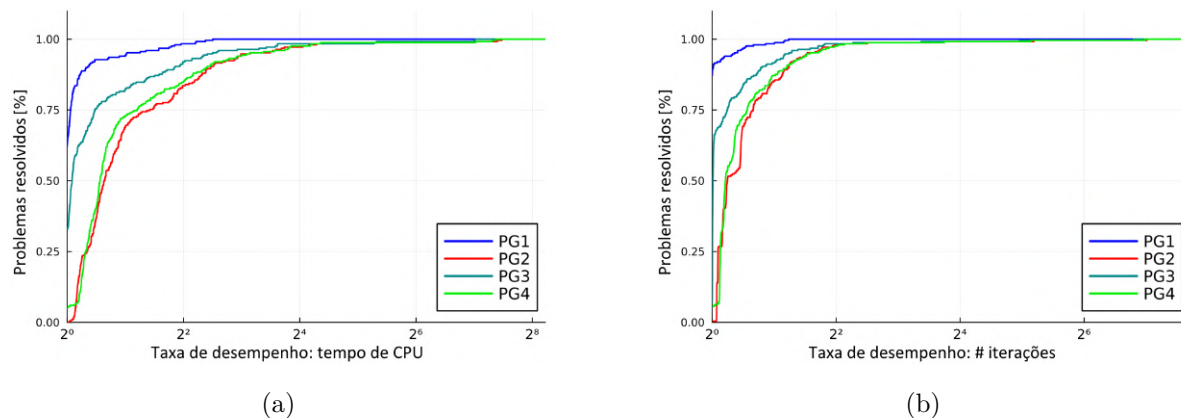


Figura 5.9: Perfis de desempenho das estratégias PG1, PG2, PG3 e PG4 em relação ao tempo de CPU e ao número de iterações.

Em relação ao número de avaliações de função e de projeção, na Figura 5.10, observa-se que a estratégia PG1 também obteve o melhor desempenho nos dois aspectos, resolvendo mais de 90% dos problemas com menos avaliações de função e de projeção. A estratégia PG4 teve o pior desempenho nesses quesitos.

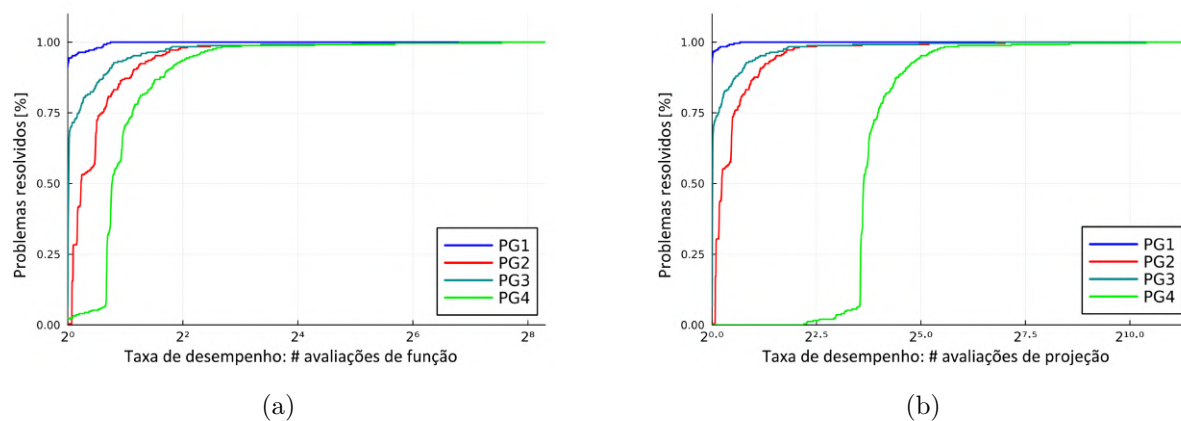


Figura 5.10: Perfis de desempenho das estratégias PG1, PG2, PG3 e PG4 em relação ao número de avaliações de função e de avaliações de projeção.

5.2.4 Conjunto viável Ω_4

O conjunto $\Omega_4 = \{x \in \mathbb{R}^n; x_j \in (-\infty, 0.5], j = 1, \dots, n\}$ é também um conjunto ilimitado inferiormente, mas não possui o ponto crítico $x^* = (1, 1, \dots, 1)$ da função de Rosenbrock. Na Figura 5.11, pode ser visto que as estratégias PG1, PG3 e PG4 tiveram desempenhos similares em relação ao tempo de CPU, enquanto a PG2 teve o pior

desempenho. Já em relação ao número de iterações, a estratégia PG4 teve o melhor desempenho, resolvendo cerca de 85% dos problemas com menos iterações. A estratégia PG2 teve o pior desempenho também para o número de iterações.

Embora a estratégia PG4 tenha obtido o melhor desempenho em relação ao número de iterações, na Figura 5.12, podemos ver que essa estratégia foi pior em relação às avaliações de projeção comparada às estratégias PG1 e PG3, o que justifica o fato de essas três estratégias terem obtido desempenho similar em relação ao tempo de CPU. Além disso, a estratégia PG2 teve o pior desempenho também para o número de avaliações de função e de projeção.

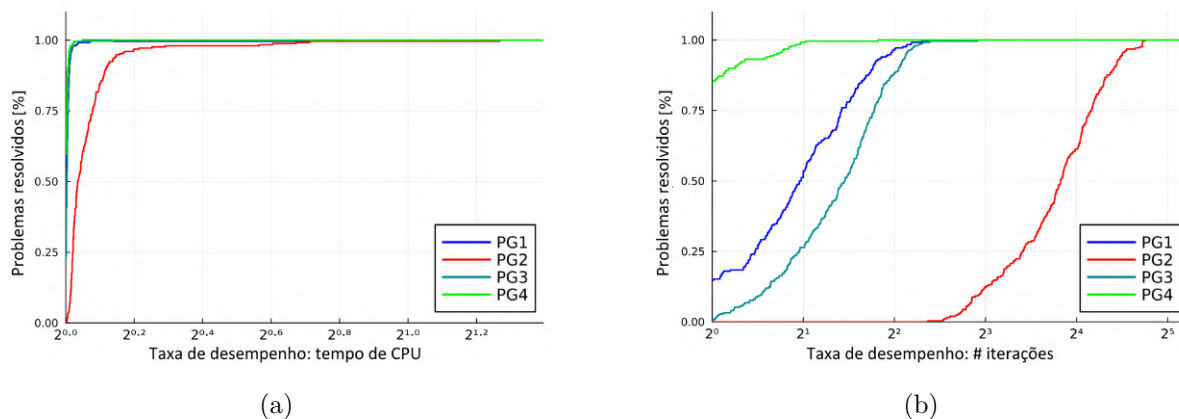


Figura 5.11: Perfis de desempenho das estratégias PG1, PG2, PG3 e PG4 em relação ao tempo de CPU e ao número de iterações.

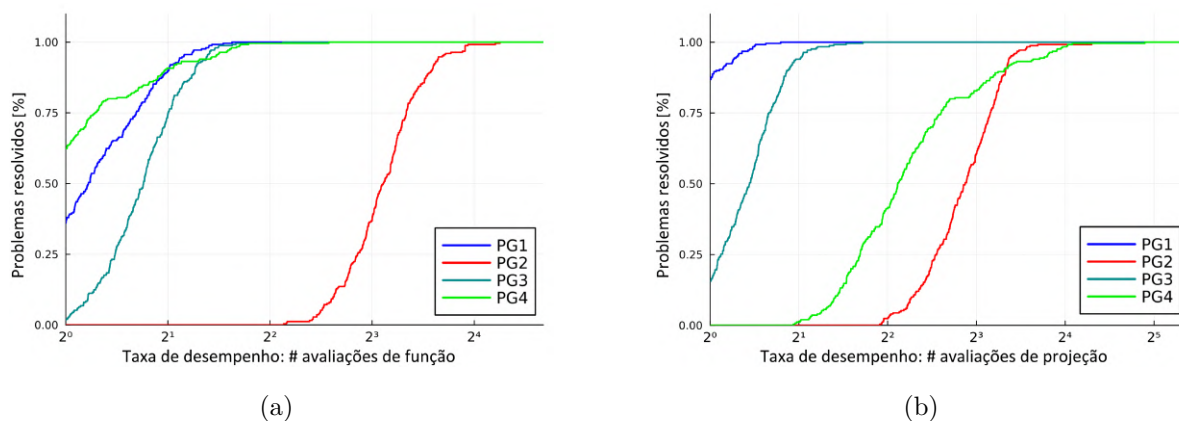


Figura 5.12: Perfis de desempenho das estratégias PG1, PG2, PG3 e PG4 em relação ao número de avaliações de função e de avaliações de projeção.

5.2.5 Conjunto viável Ω_5

O conjunto $\Omega_5 = \{x \in \mathbb{R}^n; x_j \in [-5, 10], j = 1, \dots, n\}$ é um conjunto de restrições do tipo caixa (ou hipercubo) e possui o ponto crítico da função de Rosenbrock $x^* =$

$(1, 1, \dots, 1)$. Podemos observar, na Figura 5.13, que a estratégia PG4 obteve o melhor desempenho em relação ao tempo de CPU e ao número de iterações, resolvendo cerca de 45% dos problemas em menos tempo e utilizando menos iterações. As outras estratégias tiveram desempenhos similares entre si.

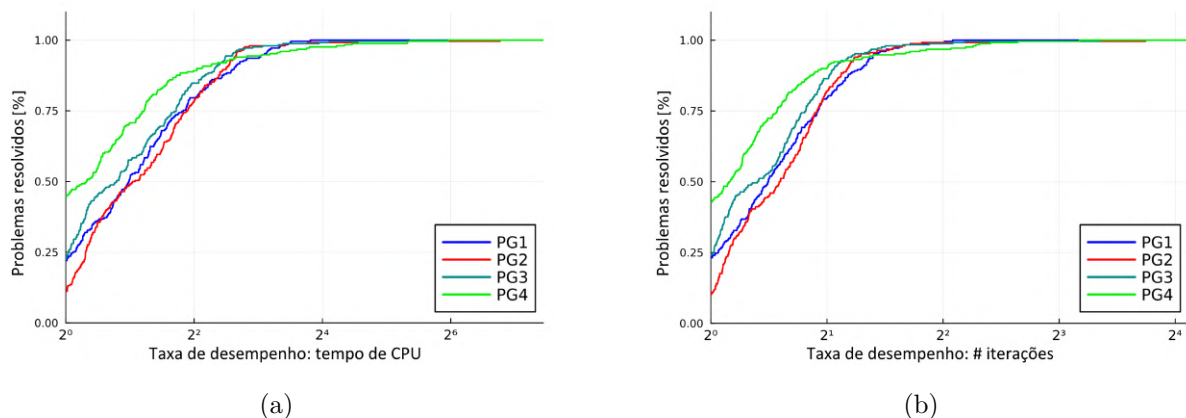


Figura 5.13: Perfis de desempenho das estratégias PG1, PG2, PG3 e PG4 em relação ao tempo de CPU e ao número de iterações.

Na Figura 5.14, nota-se que, em relação ao número de avaliações de função e de projeção, a estratégia não monótona PG3 teve um desempenho um pouco superior em relação às demais, enquanto a PG4 teve o pior desempenho, sobretudo nas avaliações de projeção, pois calcula uma projeção para cada ponto teste da busca linear.

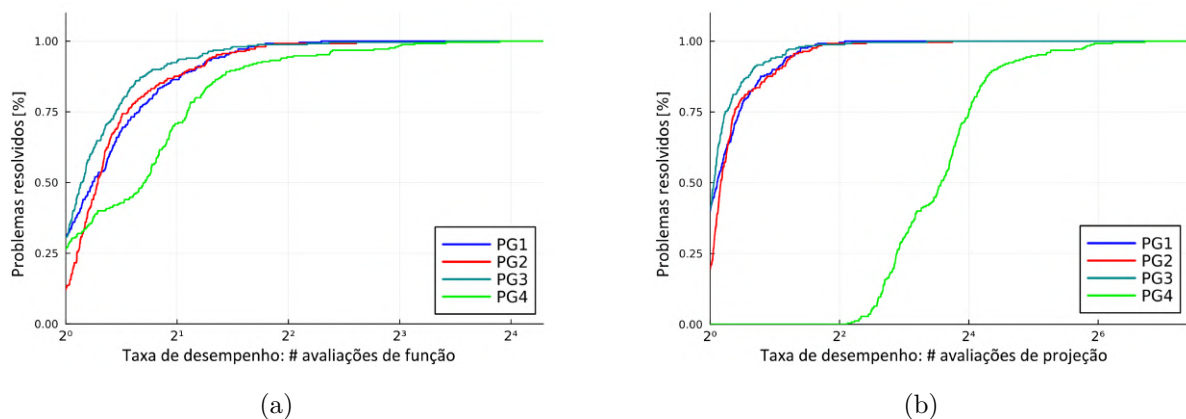


Figura 5.14: Perfis de desempenho das estratégias PG1, PG2, PG3 e PG4 em relação ao número de avaliações de função e de avaliações de projeção.

5.2.6 Conjunto viável Ω_6

O conjunto $\Omega_6 = \{x \in \mathbb{R}^n; x_j \in [2, 10], j = 1, \dots, n\}$ também é um conjunto de restrições do tipo caixa, mas não possui o ponto crítico da função de Rosenbrock. Podemos observar, na Figura 5.15, que a estratégia PG4 obteve um desempenho muito superior em

relação ao tempo de CPU e ao número de iterações, resolvendo 100% dos problemas mais rapidamente e com menos iterações.

Na Figura 5.16, ocorre o mesmo comportamento em relação ao número de avaliações de função e de projeção: a estratégia PG4 teve desempenho muito superior que as demais e as estratégias PG1 e PG3 tiveram o mesmo desempenho. Nota-se que, em relação ao número de projeções, a estratégia PG4 resolveu cerca de 80% dos problemas com menos projeções.

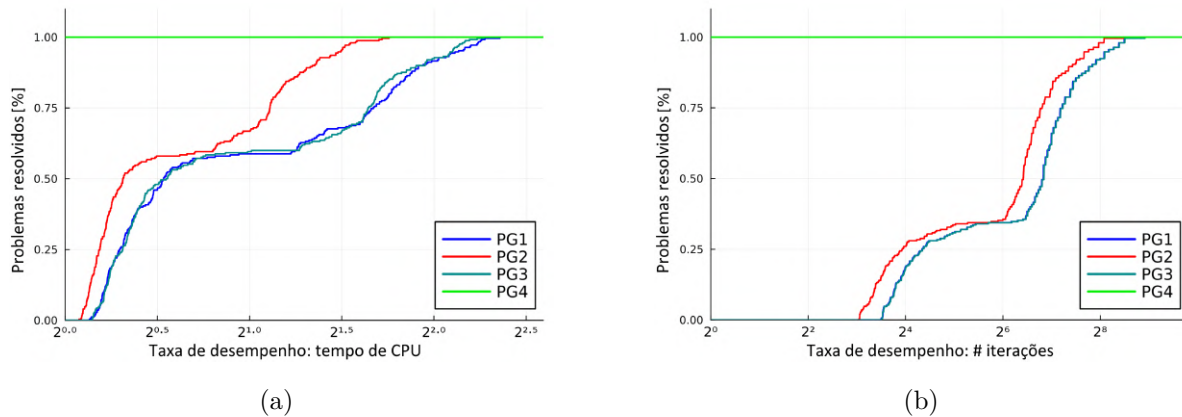


Figura 5.15: Perfis de desempenho das estratégias PG1, PG2, PG3 e PG4 em relação ao tempo de CPU e ao número de iterações.

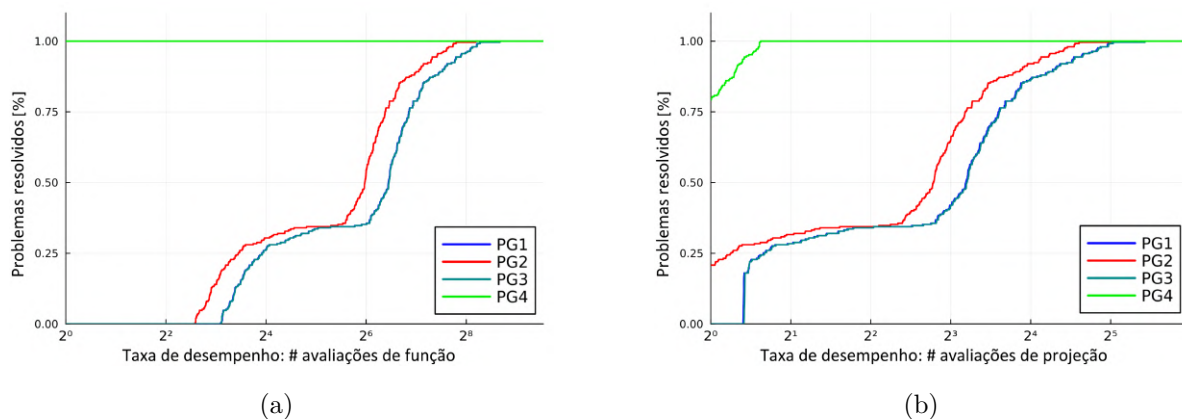


Figura 5.16: Perfis de desempenho das estratégias PG1, PG2, PG3 e PG4 em relação ao número de avaliações de função e de avaliações de projeção.

Pode-se observar que estratégias PG1 e PG3 tiveram desempenhos muito similares em todos os aspectos avaliados (as curvas estão sobrepostas no perfil de desempenho relativo às iterações). Esse comportamento pode ser atribuído à utilização do parâmetro $\eta = 0.1$ para esse caso. Apesar de ter sido o parâmetro que obteve o melhor desempenho dentre os testados, como a estratégia PG3 realiza a busca analisando uma média ponderada das últimas iterações, utilizar um parâmetro η próximo de zero aproxima o comportamento

da busca do tipo Média ao da busca monótona, que é a busca da estratégia PG1. Para este conjunto, esse comportamento foi bem similar com a utilização desse parâmetro.

5.2.7 Conjunto viável Ω_7

O conjunto $\Omega_7 = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle a, x \rangle = n\}$, onde $a = x^* = (1, 1, \dots, 1)$ e n é a dimensão de x , é um conjunto de restrição linear de igualdade envolvendo o produto interno entre vetores. Esse conjunto possui o ponto crítico $x^* = (1, 1, \dots, 1)$ da função de Rosenbrock. Podemos notar, na Figura 5.17, que as quatro estratégias tiveram desempenhos similares em relação ao tempo de CPU e número de iterações. A estratégia PG2 teve desempenho um pouco superior que as demais para o tempo de CPU e um pouco inferior para número de iterações.

Na Figura 5.18, nota-se que a estratégia PG4 teve o pior desempenho em relação ao número de avaliações de função e de projeção, sobretudo em relação às avaliações de projeção, o que se deve à sua característica de realizar projeções para cada ponto teste. As demais estratégias tiveram desempenhos similares.

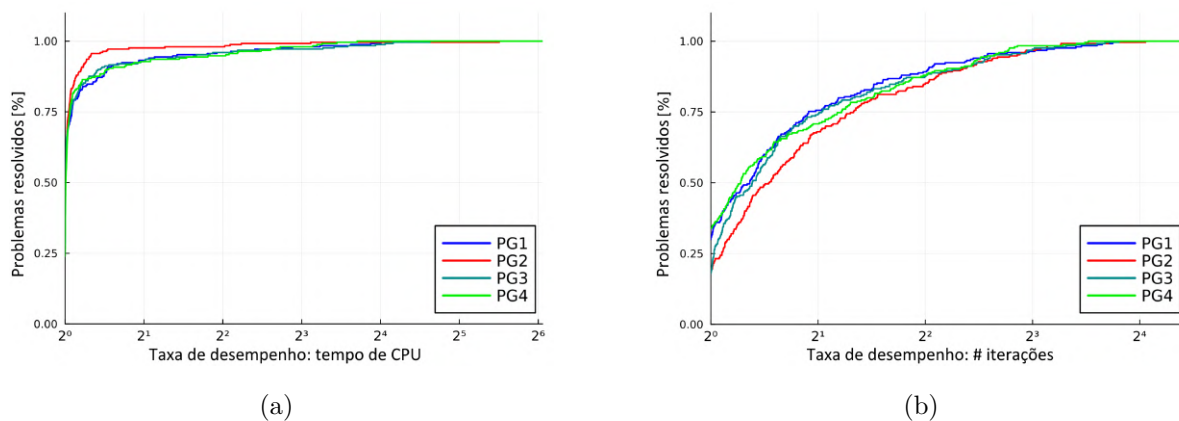


Figura 5.17: Perfis de desempenho das estratégias PG1, PG2, PG3 e PG4 em relação ao tempo de CPU e ao número de iterações.

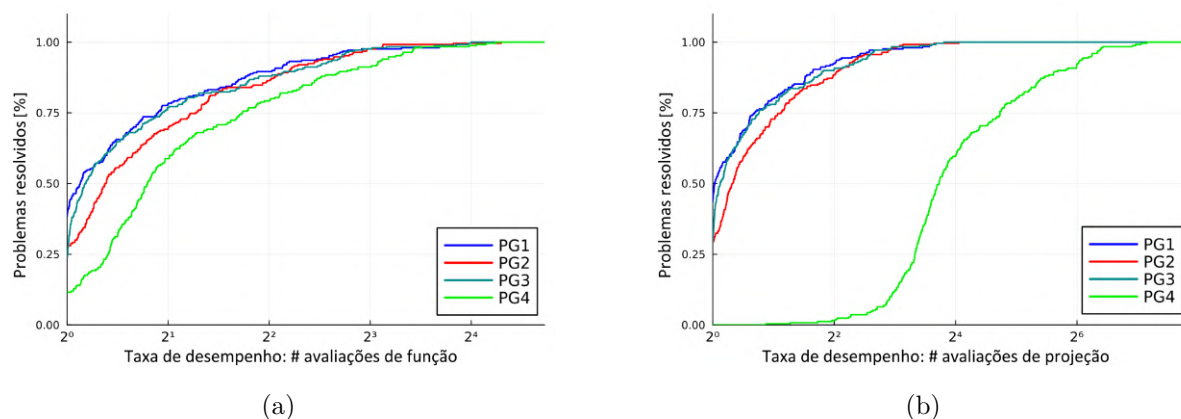


Figura 5.18: Perfis de desempenho das estratégias GP1, GPA2, GPA3 e GPA4 em relação ao número de avaliações de função e de avaliações de projeção.

5.2.8 Conjunto viável Ω_8

O conjunto $\Omega_8 = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle a, x \rangle = 10\}$, onde $a = (10, 10, \dots, 10)$, também é um conjunto de restrição linear de igualdade envolvendo o produto interno entre vetores, mas não possui o ponto crítico $x^* = (1, 1, \dots, 1)$ da função de Rosenbrock.

Podemos observar, na Figura 5.19, que as quatro estratégias tiveram desempenhos similares em relação ao tempo de CPU. Já em relação ao número de iterações, as estratégias PG1 e PG3 tiveram um melhor desempenho e resolveram, cada uma, cerca de 30% dos problemas com menos iterações que as demais. A estratégia PG2 teve o pior desempenho nesse aspecto.

De maneira similar aos resultados para o conjunto Ω_4 , na Figura 5.20, podemos ver que a estratégia PG4 foi pior em relação às avaliações de projeção comparada às demais, enquanto a estratégia PG2 teve o pior desempenho em relação às avaliações de função. Essa inversão de comportamentos pode ter levado ao desempenho parecido das estratégias em relação ao tempo de CPU.

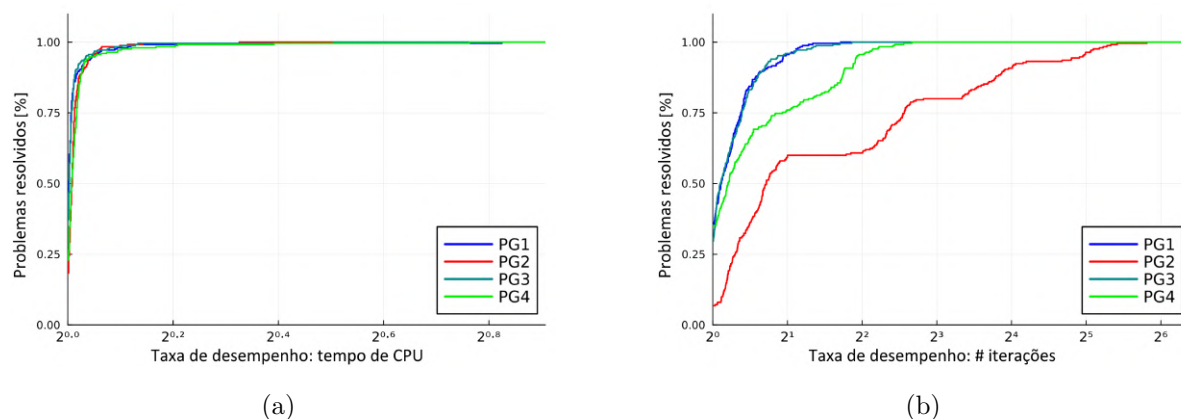


Figura 5.19: Perfis de desempenho das estratégias PG1, PG2, PG3 e PG4 em relação ao tempo de CPU e ao número de iterações.

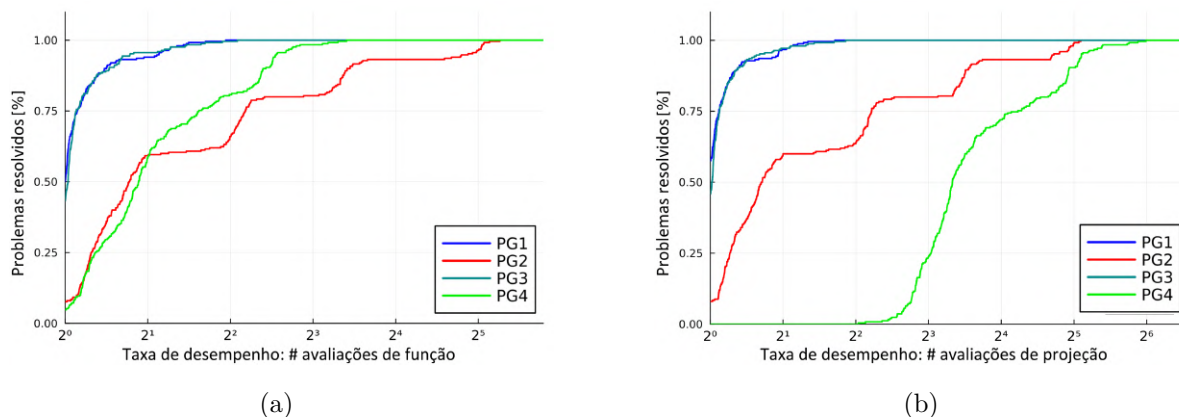


Figura 5.20: Perfis de desempenho das estratégias PG1, PG2, PG3 e PG4 em relação ao número de avaliações de função e de avaliações de projeção.

5.2.9 Conjunto viável Ω_9

O conjunto $\Omega_9 = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle a, x \rangle \leq 100\}$, onde $a = x^* = (1, 1, \dots, 1)$, é um conjunto de restrição linear de desigualdade envolvendo o produto interno entre vetores, e possui o ponto crítico da função Rosenbrock. Pode-se observar, na Figura 5.21, que as quatro estratégias tiveram desempenhos similares em relação ao tempo de CPU e ao número de iterações. Em particular, as estratégias PG1 e PG3 tiveram desempenho melhor, enquanto as estratégias PG2 e PG4 foram menos eficientes para essas medidas de desempenho.

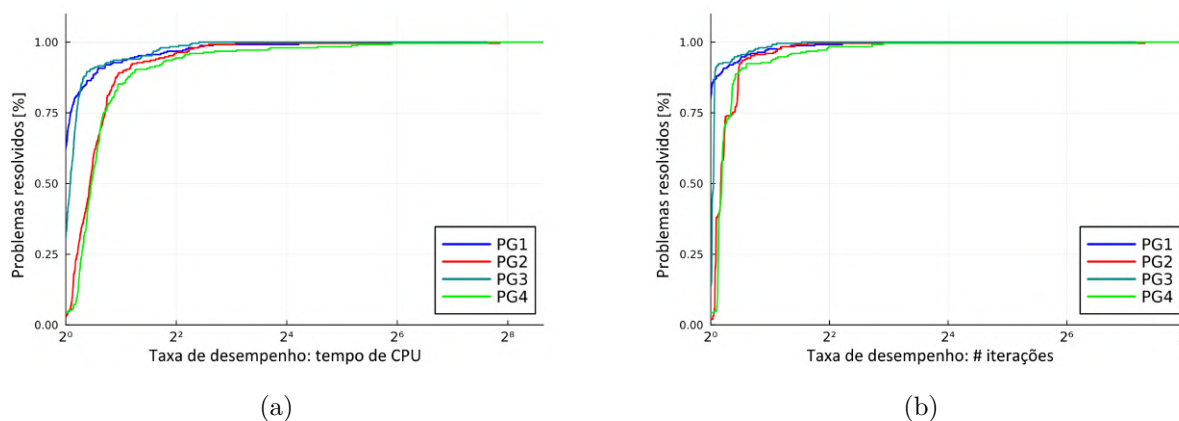


Figura 5.21: Perfis de desempenho das estratégias PG1, PG2, PG3 e PG4 em relação ao tempo de CPU e ao número de iterações.

Na Figura 5.22, podemos observar que a estratégia PG1 teve o melhor desempenho em relação ao número de avaliações de função e de projeção, resolvendo cerca de 80% dos problemas com menos recursos do que as demais estratégias. Além disso, a estratégia PG4 teve o pior desempenho nesses aspectos.

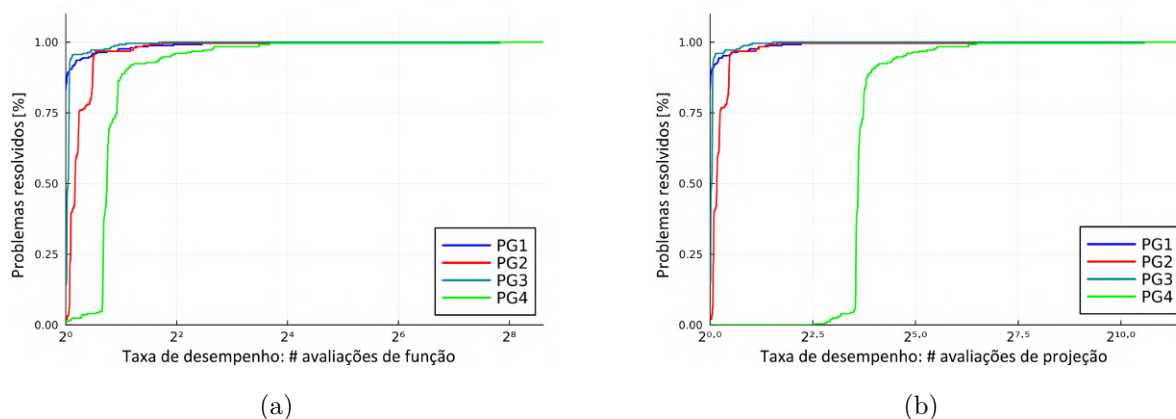


Figura 5.22: Perfis de desempenho das estratégias PG1, PG2, PG3 e PG4 em relação ao número de avaliações de função e de avaliações de projeção.

5.2.10 Conjunto viável Ω_{10}

O conjunto $\Omega_{10} = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle a, x \rangle \leq 1\}$, onde $a = (10, 10, \dots, 10)$, também é um conjunto de restrição linear de desigualdade envolvendo o produto interno entre vetores, mas não possui o ponto crítico $x^* = (1, 1, \dots, 1)$ da função de Rosenbrock.

Podemos observar, na Figura 5.23, que as quatro estratégias tiveram desempenhos muito parecidos em relação ao tempo de CPU. Já em relação ao número de iterações, a estratégia PG4 se destacou, resolvendo cerca de 85% dos problemas com menos iterações. As estratégias PG2 e PG3 tiveram o pior desempenho nesse aspecto. Além disso, em relação ao número de avaliações de projeção, a estratégia PG1 obteve o melhor desempenho, enquanto a estratégia PG4 teve o pior desempenho, como pode ser visto na Figura 5.24.

Embora a estratégia PG4 tenha obtido o melhor desempenho em relação ao número de iterações, na Figura 5.24 podemos ver que essa estratégia foi pior em relação às avaliações de projeção comparada às demais estratégias, o que está relacionado ao fato das quatro estratégias terem obtido desempenho similar em relação ao tempo de CPU.

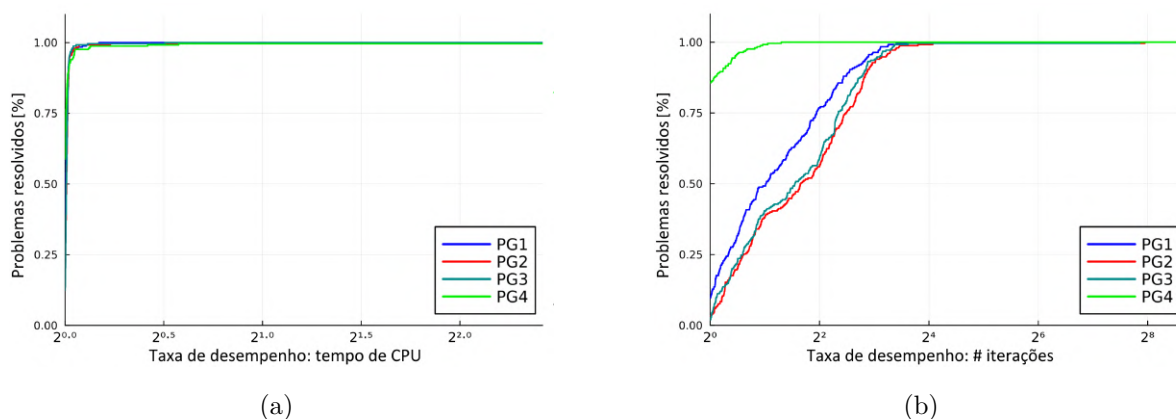


Figura 5.23: Perfis de desempenho das estratégias PG1, PG2, PG3 e PG4 em relação ao tempo de CPU e ao número de iterações.

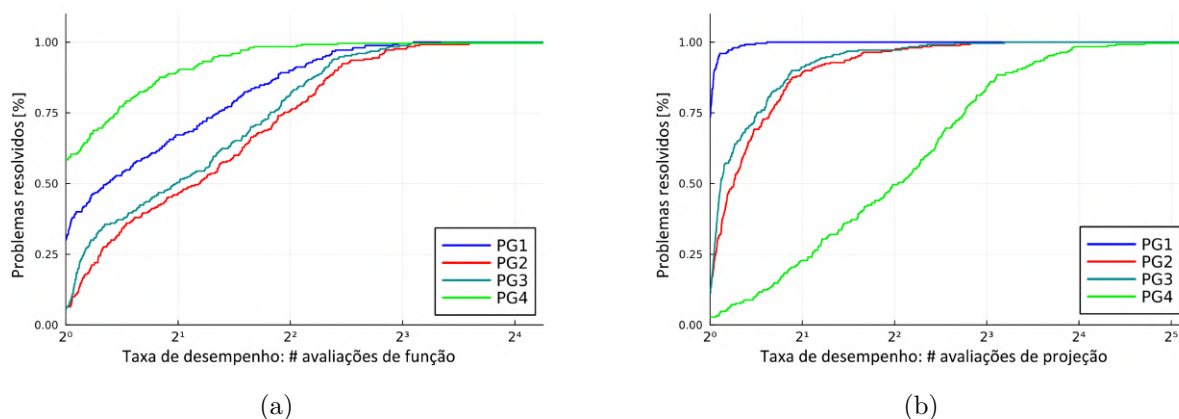


Figura 5.24: Perfis de desempenho das estratégias GP1, GPA2, GPA3 e GPA4 em relação ao número de avaliações de função e de avaliações de projeção.

5.2.11 Conjunto viável Ω_{11}

O conjunto $\Omega_{11} = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = Ax^*\}$, onde $A \in \mathbb{R}_{3 \times n}$, trata-se do conjunto de soluções de um sistema linear do tipo $Ax = b$, onde a matriz A é fixada para cada dimensão. Em particular, A é uma matriz que tem posto 3, isto é, todas as suas linhas são vetores linearmente independentes, e $x^* = (1, 1, \dots, 1)$ é o ponto crítico da função de Rosenbrock.

Na Figura 5.25, observa-se que as quatro estratégias tiveram desempenhos similares em relação ao tempo de CPU. Já em relação ao número de iterações, as estratégias PG1 e PG4 superaram as demais, resolvendo, cada uma, cerca de 35% dos problemas com menos iterações do que as demais.

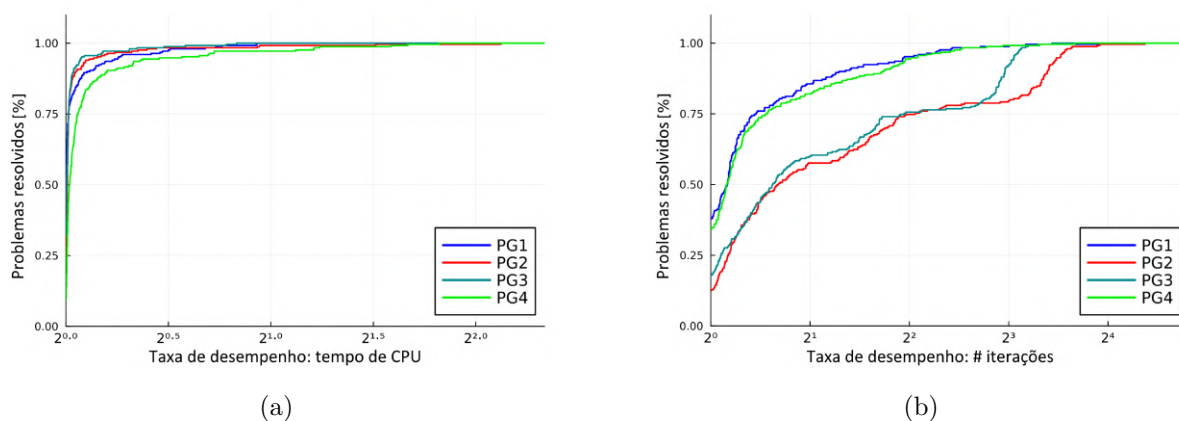


Figura 5.25: Perfis de desempenho das estratégias PG1, PG2, PG3 e PG4 em relação ao tempo de CPU e ao número de iterações.

Em relação ao número de avaliações de função e de projeção, na Figura 5.26, podemos ver que a estratégia PG1 teve o melhor desempenho, resolvendo cerca de 60% dos problemas com menos recursos que as demais.

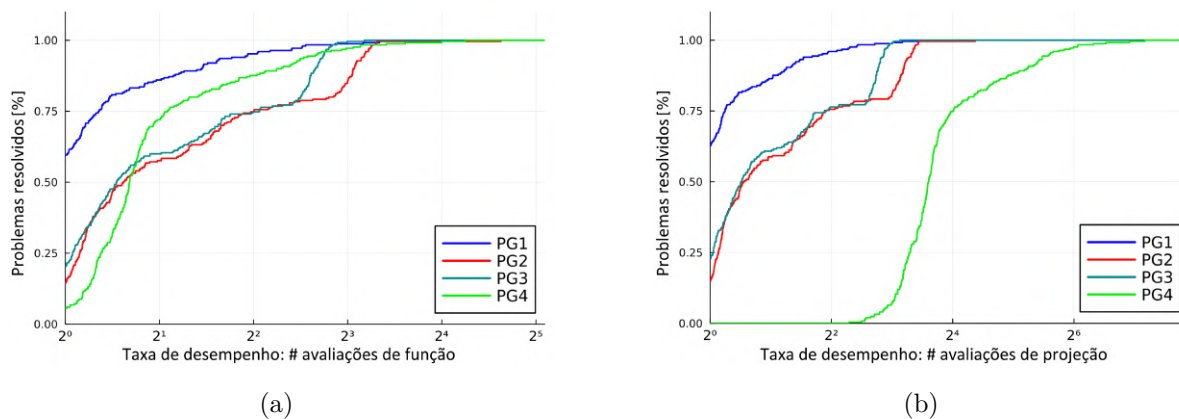


Figura 5.26: Perfis de desempenho das estratégias PG1, PG2, PG3 e PG4 em relação ao número de avaliações de função e de avaliações de projeção.

5.2.12 Conjunto viável Ω_{12}

O conjunto $\Omega_{12} = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = (1, 1, 1)\}$, onde $A \in \mathbb{R}_{3 \times n}$, trata-se também do conjunto de soluções de um sistema linear do tipo $Ax = b$, onde a matriz A é fixada para cada dimensão e $b = (1, 1, 1)$. Em particular, o ponto crítico $x^* = (1, 1, \dots, 1)$ da função de Rosenbrock não está nesse conjunto e estamos considerando A uma matriz que tem posto 3, isto é, todas as suas linhas são vetores linearmente independentes.

Podemos observar, na Figura 5.27, que as quatro estratégias foram muito similares em relação ao tempo de CPU. Já em relação ao número de iterações, a estratégia PG1 se destacou das demais, resolvendo mais de 50% dos problemas com menos iterações. A estratégia PG3 ficou em segundo lugar nesse quesito e a estratégia PG2 teve o pior desempenho.

Embora a estratégia PG4 tenha obtido um desempenho superior em relação ao número de iterações comparada à estratégia PG2, ela foi inferior em relação às avaliações de projeção, como pode ser visto na Figura 5.28. Além disso, as estratégias PG1 e PG3 tiveram desempenhos relativamente próximos ao número de iterações, avaliações de função e de projeção. Esses comportamentos estão relacionados ao desempenho similar das quatro estratégias em relação ao tempo de CPU. Acrescentamos, ainda, que a estratégia PG1 teve desempenho superior às demais estratégias em relação ao número de avaliações de função e de projeção.

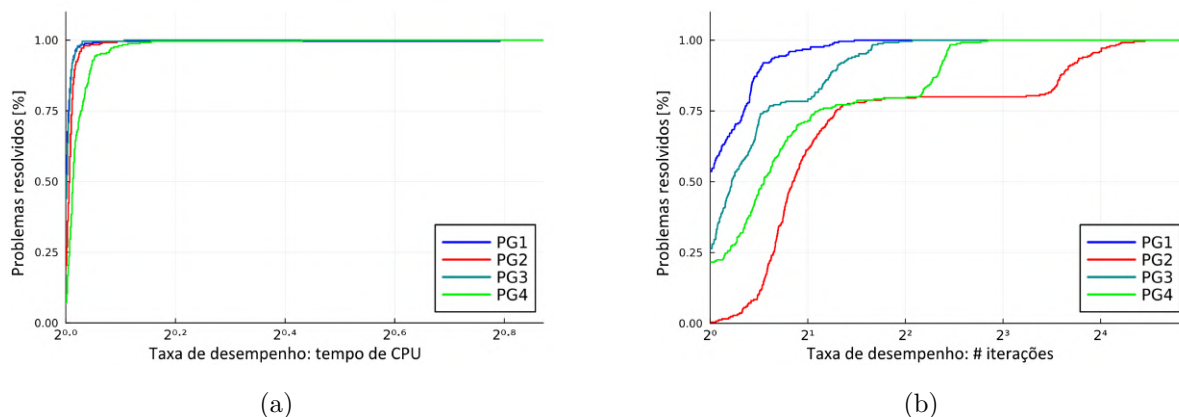


Figura 5.27: Perfis de desempenho das estratégias PG1, PG2, PG3 e PG4 em relação ao tempo de CPU e ao número de iterações.

Na Figura 5.28, pode ser visto que a estratégia PG1 teve um desempenho superior, tanto em relação ao número de avaliações de função quanto ao número de avaliações de projeção. As estratégias PG2 e PG4 tiveram o pior desempenho em relação a esses aspectos.

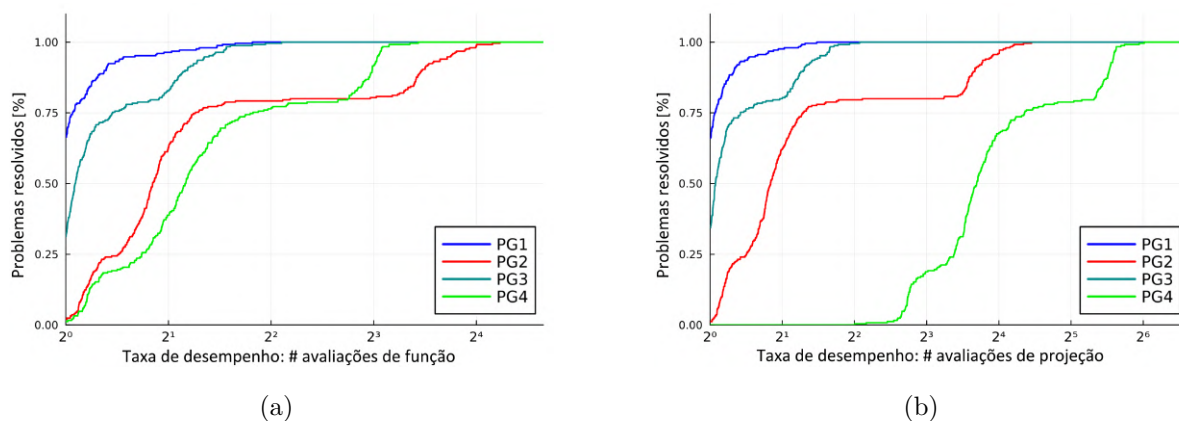


Figura 5.28: Perfis de desempenho das estratégias PG1, PG2, PG3 e PG4 em relação ao número de avaliações de função e de avaliações de projeção.

5.3 Considerações gerais

Em relação aos conjuntos viáveis e às dimensões avaliados, a Figura 5.29 mostra *heatmaps* onde a cor de cada célula representa o número médio de iterações utilizadas na minimização da função de Rosenbrock para uma dimensão e um conjunto viável específicos. Por exemplo, a média de iterações que a estratégia PG1 gastou para resolver 50 problemas em dimensão 70 no conjunto Ω_9 está em torno de 15000, conforme a Figura 5.29(a). A utilização desse tipo de gráfico permitiu uma análise mais abrangente do comportamento das quatro estratégias em relação ao número de iterações, e de como as di-

mensões e os conjuntos viáveis influenciaram na convergência em cada uma das estratégias empregadas.

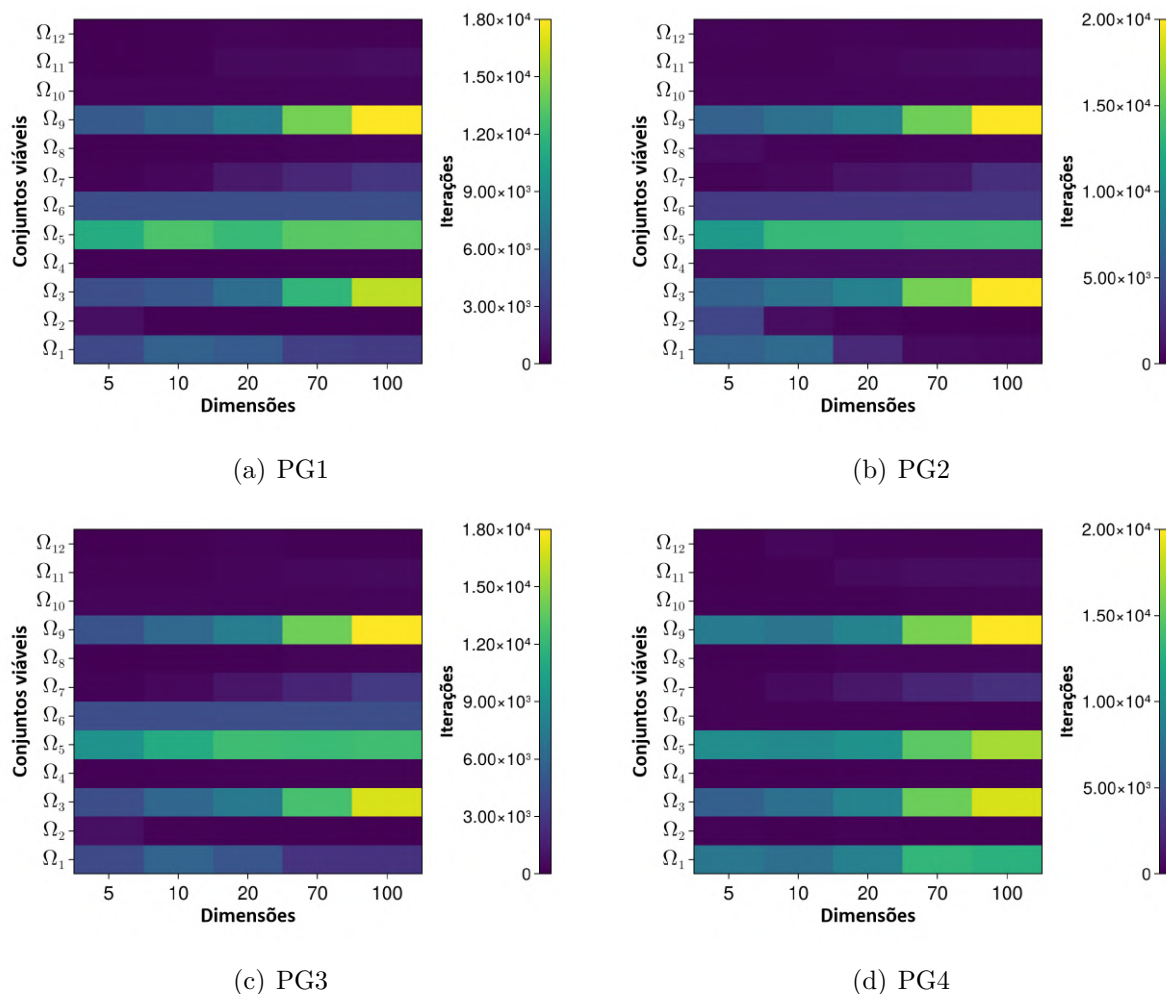


Figura 5.29: Número médio de iterações na minimização da função Rosenbrock em relação aos conjuntos viáveis e dimensões avaliados.

De maneira geral, os comportamentos das estratégias foram similares. No entanto, podemos notar que os conjuntos viáveis que as estratégias utilizaram mais iterações para convergir para o ponto estacionário foram os conjuntos Ω_3 , Ω_5 e Ω_9 , todos contendo o ponto crítico da função de Rosenbrock. A estratégia PG4 utilizou mais iterações também no conjunto Ω_1 . Esse comportamento pode ser atribuído à possibilidade de convergência lenta na região do domínio próxima ao ponto crítico da função de Rosenbrock, devido à sua própria característica, conforme [21].

Além disso, notamos também que os casos em que as estratégias utilizaram o maior número de iterações para satisfazer o critério de convergência foram os casos das estratégias PG2 e PG4 com dimensões mais altas nos conjuntos Ω_3 e Ω_9 . Em particular, a estratégia PG4 teve uma média de iterações igual a 19426 para a dimensão 100.

De modo geral, dos resultados obtidos e discutidos para todos os conjuntos viáveis que

analisamos, podemos fazer algumas considerações. Em primeiro lugar, ressaltamos que, nos conjuntos que não possuíam o ponto crítico da função de Rosenbrock, o ponto estacionário encontrado pelas estratégias pertencia à fronteira dos conjuntos, o que justifica o destaque da estratégia PG4 na maioria desses conjuntos, devido à característica intrínseca da busca ao longo de arcos de projeção, em que as iterações são calculadas justamente na fronteira do conjunto, conforme a teoria discutida no Capítulo 1.

Além disso, ressaltamos também que as estratégias com buscas lineares não monótonas (PG2 e PG3) se destacaram principalmente nos conjuntos Ω_1 e Ω_5 , isto é, a bola e a caixa no \mathbb{R}^n contendo o ponto crítico da função de Rosenbrock em seu interior.

Por fim, os experimentos numéricos evidenciam que, em todos os conjuntos testados, a estratégia PG4 teve desempenho inferior em relação ao número de avaliações de projeção, o que é previsto pela teoria. Isso reforça que, de fato, essa estratégia só é viável quando o operador de projeção ortogonal possui custo computacional relativamente baixo.

O próximo capítulo apresenta as conclusões gerais deste trabalho.

Conclusões

Neste trabalho, discutimos métodos do Gradiente Projetado, abordando seu surgimento e suas principais características, além de analisar numericamente seu desempenho em um problema de otimização não linear.

Em relação à contribuição deste trabalho, buscamos realizar uma comparação detalhada do desempenho de diferentes estratégias de métodos do Gradiente Projetado na minimização de uma função não linear sujeito a diferentes conjuntos viáveis, o que permite identificar as estratégias que apresentam maior eficiência e robustez em problemas que possuem características similares.

Além disso, apresentamos uma adaptação dos resultados contidos em [16] e [14] para um método do Gradiente Projetado para no caso em que a função objetivo é convexa. Os resultados apresentados em [14] consideram o caso de métodos do Gradiente Projetado ao longo de direções viáveis, abrangendo buscas lineares monótonas e não monótonas e considerando uma projeção inexata no conjunto de restrições Ω . Apresentamos uma adaptação desses resultados, com base em [16], considerando as especificidades das estratégias que empregamos.

Em relação aos experimentos numéricos, foi possível evidenciar alguns resultados previstos pela teoria, como a ineficiência de métodos do Gradiente Projetado ao longo de arcos de projeção em relação às avaliações de projeções, o que reforça que esse método só é viável quando a projeção possui custo computacional baixo. Por outro lado, foi possível também identificar a eficiência dessa estratégia na maioria dos conjuntos testados que possuíam o minimizador em sua fronteira, o que se deve à característica própria da busca ao longo de arcos de projeção. Além disso, o emprego de buscas não monótonas forneceu melhor desempenho em alguns conjuntos de restrição, o que reforça a necessidade de se considerar diferentes tipos de busca, a depender do problema.

Testar algoritmos de otimização para problemas desenvolvidos particularmente para essa finalidade é essencial para avaliar a eficácia e as limitações de diferentes métodos. A avaliação de medidas de desempenho como tempo de CPU, número de iterações e número de avaliações de projeção, permite distinguir algoritmos que convergem mais rapidamente e com baixo custo computacional daqueles que são menos eficientes. Além disso, muitos problemas teste simulam importantes aspectos de problemas reais, gerando uma avaliação de desempenho do algoritmo em situações similares às muitas situações de

aplicação prática.

Por fim, cabe mencionar que, para um trabalho futuro, uma possível extensão do presente trabalho seria analisar a eficiência dos métodos do Gradiente Projetado utilizados para outras classes de problemas e estudar o impacto de diferentes parâmetros. Além disso, pode-se analisar outras variações dos métodos apresentados, como o emprego de buscas não monótonas ao longo de arcos de projeção.

Referências bibliográficas

- [1] M. Ahookhosh e S. Ghaderi. On efficiency of nonmonotone Armijo-type line searches. Em: *Applied Mathematical Modelling* 43 (2017), pp. 170–190.
- [2] L. Armijo. Minimization of functions having Lipschitz continuous first partial derivatives. Em: *Pacific Journal of mathematics* 16.1 (1966), pp. 1–3.
- [3] D. P. Bertsekas. On the Goldstein-Levitin-Polyak gradient projection method. Em: *IEEE Transactions on automatic control* 21.2 (1976), pp. 174–184.
- [4] D. P. Bertsekas. Nonlinear programming. Em: *Journal of the Operational Research Society* 48.3 (1997), pp. 334–334.
- [5] E. G. Birgin, J. M. Martinez e M. Raydan. Spectral projected gradient methods: review and perspectives. Em: *Journal of Statistical Software* 60 (2014), pp. 1–21.
- [6] E. G. Birgin, J. M. Martinez e M. Raydan. Nonmonotone spectral projected gradient methods on convex sets. Em: *SIAM Journal on Optimization* 10.4 (2000), pp. 1196–1211.
- [7] K. Bryan e T. Leise. The \$25,000,000,000 eigenvector: The linear algebra behind Google. Em: *SIAM review* 48.3 (2006), pp. 569–581.
- [8] P. Comon e G. H. Golub. Tracking a few extreme singular values and vectors in signal processing. Em: *Proceedings of the IEEE* 78.8 (1990), pp. 1327–1343.
- [9] Y.-H. Dai. On the nonmonotone line search. Em: *Journal of Optimization Theory and Applications* 112 (2002), pp. 315–330.
- [10] E. D. Dolan e J. J. Moré. Benchmarking optimization software with performance profiles. Em: *Mathematical programming* 91 (2002), pp. 201–213.
- [11] D.-Z. Du, F. Wu e X.-S. Zhang. On Rosen’s gradient projection methods. Em: *Annals of Operations Research* 24.1 (1990), pp. 9–28.
- [12] D.-Z. Du e X.-S. Zhang. A convergence theorem of Rosen’s gradient projection method. Em: *Mathematical programming* 36 (1986), pp. 135–144.
- [13] J. Ermol’ev e A. Tuniev. Random Fejér and quasi-Fejér sequences. Em: *Select. Translat. math. Statist. Probab* 13 (1973), pp. 143–148.

- [14] O. P. Ferreira, M. Lemes e L. F. Prudente. On the inexact scaled gradient projection method. Em: *Computational Optimization and Applications* (2022), pp. 1–35.
- [15] A. A. Goldstein. Convex programming in Hilbert space. Em: *Bulletin of the American Mathematical Society* 70 (1964), pp. 709–710.
- [16] A. N. Iusem. On the convergence properties of the projected gradient method for convex optimization. Em: *Computational & Applied Mathematics* 22 (2003), pp. 37–52.
- [17] A. Izmailov e M. Solodov. Otimização, volume 1: condições de otimalidade, elementos de análise convexa e de dualidade. IMPA, 2005.
- [18] A. Izmailov e M. Solodov. Otimização, volume 2: métodos computacionais. IMPA, 2007.
- [19] B. A. Murtagh e R. Sargent. A constrained minimization method with quadratic convergence. Em: *Optimization* (1969), pp. 215–246.
- [20] J. Nocedal e S. J. Wright. Numerical optimization. Springer, 1999.
- [21] V. Picheny, T. Wagner e D. Ginsbourger. A benchmark of kriging-based infill criteria for noisy optimization. Em: *Structural and multidisciplinary optimization* 48 (2013), pp. 607–626.
- [22] B. T. Polyak e E. Levitin. Constrained minimization methods. Em: *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* 6.5 (1966), pp. 1–50.
- [23] A. A. Ribeiro e E. W. Karas. Otimização Contínua: aspectos teóricos e computacionais. Em: *Cengage Learning, São Paulo* (2013).
- [24] J. B. Rosen. The gradient projection method for nonlinear programming. Part II. Nonlinear constraints. Em: *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* 9.4 (1961), pp. 514–532.
- [25] J. B. Rosen. The gradient projection method for nonlinear programming. Part I. Linear constraints. Em: *Journal of the society for industrial and applied mathematics* 8.1 (1960), pp. 181–217.
- [26] H. Rosenbrock. An automatic method for finding the greatest or least value of a function. Em: *The computer journal* 3.3 (1960), pp. 175–184.