

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas

Licenciatura em Matemática

Gabriel Ruas

Estudo comparativo entre Equações Diferenciais
Ordinárias Clássicas e q -Conformáveis no modelo de
Decaimento Radioativo do Carbono-14

AD PLENAM VITAM

Vitória da Conquista

2024

Gabriel Ruas

**Estudo comparativo entre Equações Diferenciais Ordinárias
Clássicas e q -Conformáveis no modelo de Decaimento
Radioativo do Carbono-14**

Monografia apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - Campus Vitória da Conquista - BA, para obtenção do Título de Licenciado em Matemática, sob orientação do Professor Doutor Fernando dos Santos Silva.

**Vitória da Conquista
2024**

Gabriel Ruas

**Estudo comparativo entre Equações Diferenciais Ordinárias
Clássicas e q -Conformáveis no modelo de Decaimento
Radioativo do Carbono-14**

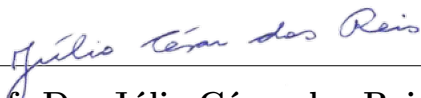
Monografia apresentada ao Colegiado do Curso de Matemática como requisito parcial para aprovação na disciplina Seminário de Pesquisa II do Curso de Licenciatura em Matemática.

Trabalho aprovado em 16 de Dezembro de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fernando dos Santos Silva - UESB

Orientador



Prof. Dr. Júlio César dos Reis - UESB

Convidado



Documento assinado digitalmente
GENILSON SOARES DE SANTANA
Data: 03/01/2025 14:56:54-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Genilson Soares de Santana - UESB

Convidado

Vitória da Conquista

2024

*“Porquanto, Deus não nos concedeu espírito
de covardia, mas de poder, de amor e de
equilíbrio.”*

II Timóteo 1:7

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ouvir minhas orações e ter me dado forças, saúde e perseverança durante todos os desafios do curso.

Aos meus pais, Miraldo e Elisângela, pela educação, pelo apoio e palavras de encorajamento que sempre me motivou a continuar.

Aos meus colegas e amigos, em especial Emanuel, Giselle e Samara, por todo companheirismo, trocas de conhecimento e todas as conversas que tornou esses anos de curso mais especiais.

A minha noiva Renata Cordeiro, que se mostrou sempre disposta a me ajudar em tudo, pelo apoio emocional e motivação para concluir o curso.

Um agradecimento especial para o meu orientador, Fernando dos Santos Silva, por toda paciência, dedicação e pelas orientações, que foram essenciais para a realização desse trabalho. À banca examinadora, por aceitar participar deste momento e por contribuir com este trabalho.

Por fim, estendo os meus agradecimentos a todos os professores e funcionários da UESB, que contribuíram para a minha formação ao longo destes anos, bem como às pessoas que, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização deste projeto.

A todos, o meu mais sincero obrigado.

RESUMO

Este trabalho aborda o desenvolvimento das derivadas de ordem não inteira e suas aplicações em equações diferenciais ordinárias. Após uma introdução histórica que contextualiza o surgimento das integrais e das derivadas fracionárias, são explorados conceitos fundamentais, como integrais iteradas e EDO's clássicas, com destaque para o modelo de decaimento radioativo do Carbono-14. Em seguida, apresenta-se a derivada fracionária generalizada de Katugampola e a derivada q -conformável, enfatizando suas propriedades e teoremas. Aplicando esses conceitos, o estudo analisa a EDO q -conformável no contexto do Carbono-14, variando a ordem da derivada α e comparando suas soluções com as obtidas pelo método clássico. A análise gráfica e numérica apresenta as implicações da generalização q -conformável e destaca seu potencial para modelagem de fenômenos dinâmicos.

Palavras-chave: Derivada q -conformável; Katugampola; Cálculo fracionário; Carbono-14; Decaimento radioativo.

ABSTRACT

This work addresses the development of non-integer order derivatives and their application in ordinary differential equations. After a historical introduction that contextualizes the emergence of fractional integrals and derivatives, fundamental concepts are explored, such as iterated integrals and classical ODEs, with emphasis on the Carbon-14 radioactive decay model. Next, the generalized Katugampola fractional derivative and the q -conformable derivative are presented, highlighting their properties and theorems. Applying these concepts, the study analyzes the q -conformable ODE in the context of Carbon-14, varying the derivative order (α) and comparing its solutions with those obtained through the classical method. Graphical and numerical analysis reveals the implications of the q -conformable generalization and underscores its potential for modeling dynamic phenomena.

Keywords: q -Conformable derivative; Katugampola; Fractional calculus; Carbon-14; Radioactive decay.

Sumário

Introdução	6
1 Integral	8
1.1 Integral simples	8
1.2 Integral Múltipla	9
1.3 Integral Iterada	11
2 Equação Diferencial Ordinária	13
2.1 Equações Separáveis e Exatas	14
2.2 Equações Lineares de Primeira Ordem	15
2.3 Decaimento Radioativo	16
2.4 Equação Diferencial Ordinária de Bernoulli	18
2.5 Exponencial de Tsallis	20
3 Cálculo Fracionário Conformável e q-Conformável	21
3.1 Cálculo Fracionário Conformável	21
3.2 Derivada Fracionária de Katugampola	23
3.3 Cálculo Fracionário q -conformável	25
3.4 A q -Integral	27
4 Equações Diferenciais Ordinárias q-Conformáveis	28
5 Resultados	32
5.1 Análise gráfica	32
5.2 Análise numérica	33
6 Conclusões	34
Referências	37

Introdução

Os problemas resolvidos usando a noção de integração do Cálculo remontam ao século IV a.C, embora o termo “integral” ainda não existisse. Esses problemas eram conhecidos como problemas de quadratura. Determinar a área de uma superfície era um grande obstáculo para os pensadores gregos. Quando começaram a estudar as áreas de figuras planas, eles as comparavam com as áreas de um quadrado devido à simplicidade de seu cálculo [8].

Antifon de Atenas (480-411 a.C.) buscou determinar a área de um círculo [4] e tentou encontrar a quadratura do círculo através de uma sequência infinita de polígonos regulares inscritos. No entanto, havia um problema com esse método: ele nunca ia ter fim, pois a quadratura do círculo é impossível de completar uma vez que π é um número irracional e não pode ser representado com precisão por construções geométricas finitas. Ainda assim, o “método da exaustão”, que consiste em refinar sucessivamente uma figura inscrita até coincidir com a área ou volume desejado, foi desenvolvido a partir desse método.

Por volta de 250 a.C., Arquimedes descobriu que a área da região limitada por uma parábola cortada por uma corda é igual a $\frac{4}{3}$ da área do triângulo que tem a mesma altura da parábola e que tem a corda como base [19].

Outra abordagem para resolver o problema de calcular a área de superfícies trata-se do método de Kepler (1571-1630), que consistia em pensar na área da superfície como a soma de linhas, para calcular volumes de sólidos. O problema era tratado como a soma de fatias planas, com isso conseguiu aplicar essa ideia nos problemas de encontrar o volume de barris de vinho e de diversos sólidos de revolução [8].

Cavalieri (1598-1647) desenvolveu a ideia de Kepler sobre quantidades infinitamente pequenas [3]. Para isso, pensou na área da superfície como uma soma infinita de componentes ou segmentos “indivisíveis”, antecipando, assim, as ideias que mais tarde seriam formalizadas no cálculo integral. Leibniz (1646-1716) foi um dos principais responsáveis pela formalização da integral. Ele descreveu a área de uma figura plana como a soma das áreas de todos os retângulos infinitesimais, definidas pelas ordenadas e as diferenças infinitesimais entre as abscissas, o que levou à expressão:

$$\int f(x) dx.$$

Em 1694, em sua correspondência com Guillaume de l'Hôpital, Leibniz descreveu essa ideia de maneira clara e inovadora: “Eu considero as quantidades infinitamente pequenas como elementos reais da soma, de modo que a soma desses detalhes infinitesimais é, para mim, a área sob a curva” [14]. Esse pensamento foi um marco na construção da integral, uma vez que a ideia de soma de retângulos infinitesimais formou a base do conceito de integral definida.

Após a formalização do esquema de integração de Leibniz, o conceito de derivadas também foi amplamente desenvolvido no século XVIII. Inicialmente, a derivada era entendida simplesmente como a taxa de variação de uma função ou a inclinação da tangente em um ponto de uma curva. Com o tempo, porém, os matemáticos foram capazes de questionar se a ordem da derivada era um número inteiro. Um dos primeiros a abordar essa questão foi Silvestre François Lacroix [13]. Lacroix discutiu a possibilidade de generalizar a noção de derivada para ordens não inteiras, baseando-se em manipulações de séries infinitas e no conceito de fatorial.

Essa linha de pensamento levou ao desenvolvimento das derivadas fracionárias, conceito explorado por Lacroix a partir de manipulações de séries infinitas e do conceito de fatorial. Ele utilizou uma função, conhecida como gamma, para generalizar os fatoriais a valores não inteiros, permitindo a expansão das derivadas para ordens fracionárias. Com essa base, matemáticos como Joseph Liouville, no século XIX, formalizaram a teoria das derivadas fracionárias, lançando as fundações para novos tipos de equações diferenciais, como as EDOs q -conformáveis, que serão abordadas neste trabalho.

Neste contexto, este trabalho visa aplicar o modelo q -conformável ao decaimento radioativo do Carbono-14 (^{14}C), um elemento amplamente utilizado em datação arqueológica e paleontológica devido à sua meia-vida de aproximadamente 5730 anos. O uso do modelo q -conformável para descrever o decaimento do Carbono-14 permite explorar possíveis desvios do comportamento exponencial típico, oferecendo uma visão mais flexível e ajustada ao comportamento experimental. Desta forma, o estudo combina a fundamentação teórica das derivadas fracionárias com a aplicação prática no contexto do decaimento radioativo.

Capítulo 1

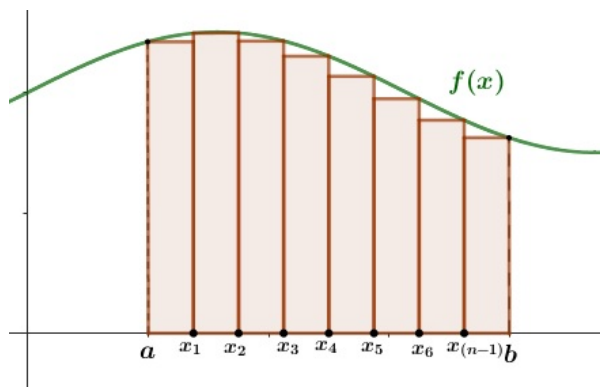
Integral

Neste capítulo, será abordado o conceito de integrais, iniciando com a definição formal e exemplos ilustrativos que auxiliam na compreensão de sua aplicação prática. Em seguida, exploraremos as integrais iteradas, destacando sua importância no cálculo de áreas e volumes em dimensões superiores. Por fim, discutiremos o Teorema de Fubini, um resultado fundamental que permite a simplificação do cálculo de integrais múltiplas ao reorganizar a ordem de integração. Estes tópicos formam a base para o entendimento de técnicas avançadas e aplicações das integrais em diversos contextos.

1.1 Integral simples

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Dividiremos $[a, b]$ em n intervalos de comprimento $\Delta x = \frac{a-b}{n}$ e sejam $x_0 = a$ e $x_n = b$, onde $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Criaremos retângulos em cada intervalo, sendo a base do retângulo Δx e altura $f(x_j)$, onde $(x_j, f(x_j))$ é o ponto do retângulo que toca a função, e $j = 1, 2, 3, \dots, n$, conforme a figura 1.1:

Figura 1.1: Área abaixo da função delimitada por retângulos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Ao somarmos as áreas de cada retângulo, obtêm-se uma aproximação da área da região

delimitada sob o gráfico de f acima do eixo das abscissas entre a e b . Assim, obtemos a soma de Riemann:

$$\sum_{j=1}^n f(x_j) \cdot \Delta x.$$

Percebe-se que, ao aumentarmos o número de retângulos, a área obtida aproxima-se do seu valor real. Se fizermos o valor de n tender ao infinito (caso o limite exista), temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(x_j) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x) dx, \quad (1.1)$$

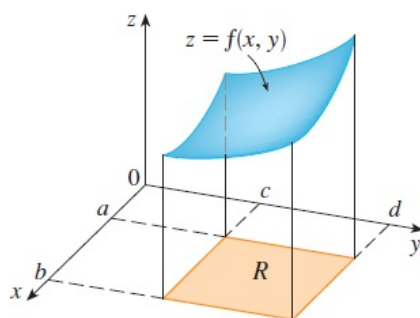
onde (1.1) representa a área da região delimitada sob o gráfico de f acima do eixo das abscissas entre a e b .

A noção de integral simples é essencial para a compreensão das áreas das regiões sob curvas e volumes dos sólidos gerados também por funções. Essas integrais são fundamentais em diversas áreas da Ciência e da Engenharia. No entanto, no contexto de derivadas e integrais fracionárias, é necessário expandir essa ideia para integrais não inteiras, permitindo novas interpretações de taxas de variação. A transição da integral simples para o cálculo fracionário permite modelar fenômenos mais complexos, como veremos no Capítulo 3, onde o cálculo fracionário conformável será introduzido.

1.2 Integral Múltipla

De modo análogo ao discutido na seção anterior, iremos considerar a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e positiva em uma região retangular, onde essa região $R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Seja $z = f(x, y)$ a superfície de f calculada na região R . A figura 1.2 ilustra o sólido delimitado pela região R :

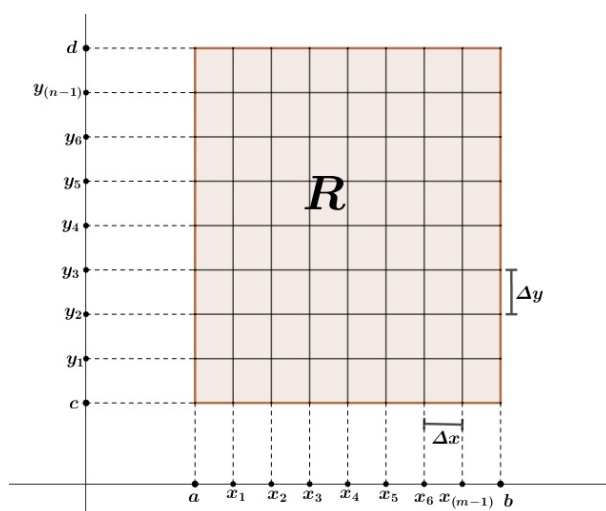
Figura 1.2: Função delimitada pela Região R .



Fonte: Stewart, J. (2016). Cálculo: o conceito de limite (7th ed., p. 874). São Paulo: Cengage Learning.

Seja $f(x, y) \geq 0$ e S o sólido limitado inferiormente pela região R e superiormente pela função $z = f(x, y)$. Para determinarmos o volume desse sólido, de forma semelhante à que discutimos na seção anterior, vamos dividir intervalo $[a, b]$ em m subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, \dots, m, x_0 = a$ e $x_m = a$) de comprimento $\Delta x = \frac{a-b}{m}$ e dividir o intervalo $[c, d]$ em n subintervalos $[y_j, y_{j+1}]$ ($j = 0, \dots, n-1, x_0 = c$ e $x_n = d$) de mesmo comprimento $\Delta y = \frac{c-d}{n}$. Ao traçar retas paralelas aos eixos, passando pelas extremidades serão delimitados retângulos, conforme a Figura 1.3.

Figura 1.3: Região R delimitada por retângulos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Temos que a área de cada retângulo é dada por $\Delta A = \Delta x \cdot \Delta y$ e sua altura $f(x_i, y_j)$, onde (x_i, y_j) é o ponto que o retângulo toca a superfície. Se somarmos o volume dos

paralelepípedos, obteremos um valor aproximado para o volume do sólido S . Sendo assim:

$$V \cong \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}, y_{ij}) \cdot \Delta A, \quad (1.2)$$

se fizermos o valor de m e n tender ao infinito na equação (1.2), caso este limite existe teremos cada vez mais aproximado o volume do sólido limitado pela região R e pela superfície $z = f(x, y)$. Portanto,

$$V = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}, y_{ij}) \cdot \Delta A = \iint_R f(x, y) dA.$$

Se a função $f(x, y) \geq 0$, então o volume V do sólido que está acima da região R e abaixo da superfície $z = f(x, y)$ é:

$$V = \iint_R f(x, y) dA.$$

As integrais múltiplas estendem o conceito de área para volumes e outras quantidades em espaços de dimensões superiores [5]. Em paralelo a essa expansão dimensional, o cálculo fracionário nos dá ferramentas para generalizar o conceito de integral em termos de ordem fracionária. Essa generalização se torna crucial na formulação de novas equações diferenciais com a introdução das derivadas fracionárias conformáveis.

1.3 Integral Iterada

As integrais iteradas, que representam uma extensão das integrais múltiplas, têm suas origens no avanço da Análise Matemática dos séculos XVII e XVIII. Matemáticos como Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz foram os primeiros a desenvolver o conceito de integrais múltiplas, sendo pioneiros no cálculo diferencial e integral [12]. A formalização e o aperfeiçoamento das integrais iteradas, na forma que conhecemos atualmente, ocorreram mais tarde com o progresso da Matemática e da teoria das integrais. Essas integrais possuem a seguinte forma:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$

Exemplo 1.3.1. *O valor da integral iterada*

$$\int_1^2 \int_0^3 x^2 y dx dy$$

é $\frac{27}{2}$

Teorema 1.3.2 (Fubini). *Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ for contínua na região R , então*

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy.$$

De modo geral, esse resultado vale se supusermos também que f é limitada em R , que f tenha descontinuidades apenas em um número finito de curvas suaves e que a integral iterada exista. Para mais detalhes sugerimos [6].

Capítulo 2

Equação Diferencial Ordinária

As equações diferenciais ordinárias são uma parte fundamental da Matemática Aplicada e têm diversas aplicações na modelagem e na resolução de problemas em várias disciplinas científicas e de Engenharia. Elas permitem compreender, por exemplo, como as variáveis de um sistema evoluem ao longo do tempo e são uma ferramenta poderosa para a previsão e análise de comportamentos dinâmicos [15].

Definição 2.0.1. *Uma equação diferencial ordinária (EDO) é uma equação em que as incógnitas são funções e a equação envolve derivadas destas funções. São chamadas de “ordinárias” porque envolvem derivadas em relação a uma única variável independente. A EDO que é geralmente representada na forma geral, chamada também de EDO de primeira ordem:*

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

onde $\frac{dy}{dx}$ representa a derivada de y em relação a x .

Nesta definição, temos que y' é uma função que determina a taxa de variação de y em relação a x . Ela depende tanto da variável independente x quanto da função desconhecida $y(x)$. A função $f(x, y)$ é a que especifica a dinâmica da equação e define como a função y evolui com base nas condições dadas.

Exemplo 2.0.2. *A equação diferencial ordinária*

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2.$$

Uma solução possível para essa equação é $y(x) = x^3 + C$, onde C é uma constante de integração. Quando calcula-se a derivada de y em relação a x da solução, obtém-se $\frac{dy}{dx} = 3x^2$, o que verifica que é uma solução para a EDO.

2.1 Equações Separáveis e Exatas

Em uma equação diferencial separável, a taxa de variação da função desconhecida pode ser expressa como o produto de uma função que depende apenas da variável independente e de outra função que depende apenas da variável dependente. Essa característica simplifica o processo de resolução, pois nos permite reescrever a equação em uma forma que facilita a integração.

Definição 2.1.1. *Sejam $h : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas tais que $\forall y \in J$, tem-se $g(y) \neq 0$. Uma equação ordinária é separável quando o membro da direita é um produto de uma função que depende apenas da variável x por uma função que depende apenas da variável y , da seguinte forma:*

$$y' = h(x) \cdot g(y).$$

Sendo assim, podemos manipular para deixar de modo que as variáveis fiquem de cada membro da igualdade:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= h(x) \cdot g(y) \\ \frac{dy}{g(y)} &= h(x) dx. \end{aligned}$$

Exemplo 2.1.2. *A solução geral da equação diferencial $9yy' + 4x = 0$ é calculada da seguinte maneira:*

Pela definição de equação separável, tem-se

$$9ydy = -4xdx.$$

Integrando em relação à variável x ambos os lados da equação, obtemos

$$\int 9ydy = \int -4xdx \Rightarrow \frac{9y^2}{2} = c_1 \frac{-4x^2}{2} + c_2, \quad c_2 - c_1 = c.$$

Portanto, temos que a solução geral da equação diferencial é $9y^2 + 4x^2 = c$.

As equações diferenciais ordinárias exatas são um tipo específico de equações diferenciais que podem ser resolvidas utilizando o conceito de derivadas parciais. Elas possuem a forma geral $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, onde as funções $M(x, y)$ e $N(x, y)$ satisfazem uma condição de exatidão: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Essa condição garante que existe uma função potencial $\Phi(x, y)$ tal que $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = M$ e $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = N$, permitindo que a solução da equação seja encontrada na forma $\Phi(x, y) = C$, onde C é uma constante arbitrária.

Teorema 2.1.3 (Equações Exatas). *Sejam as funções M , N , $\frac{\partial M}{\partial y}$ e $\frac{\partial N}{\partial x}$ contínuas num domínio retangular $R : \{\alpha < x < \beta, \gamma < y < \delta\}$ do plano. Então a equação diferencial*

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ é exata em R se, e somente se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Exemplo 2.1.4. Verifique se a equação diferencial a seguir é exata.

$$\cos(x + y)dx + (3y^2 + 2y + \cos(x + y))dy = 0$$

Temos que $N(x, y) = \cos(x + y)$ e $M(x, y) = 3y^2 + 2y + \cos(x + y)$. Pelo Teorema 2.1.3, para ser exata é preciso que,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

De fato,

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = -\operatorname{sen}(x + y) \\ \frac{\partial N}{\partial x} = -\operatorname{sen}(x + y) \end{cases}.$$

2.2 Equações Lineares de Primeira Ordem

Definição 2.2.1. Uma equação linear de primeira ordem é uma equação diferencial ordinária (EDO) que envolve apenas a primeira derivada de uma função desconhecida e é expressa na forma geral:

$$y' + p(x)y = q(x). \quad (2.1)$$

Em (2.1), y' é a derivada de primeira ordem da função desconhecida y em relação a x , $p(x)$ e $q(x)$ são funções de x que define a equação.

Exemplo 2.2.2. A equação diferencial $y' + 2y = \frac{1}{2}$ é linear com $p(x) = 2$ e $q(x) = \frac{1}{2}$.

Exemplo 2.2.3. A equação diferencial $\frac{dy}{dx} + 7y^2 = 3$ **não** é linear.

Definição 2.2.4. Um **fator integrante** em equações diferenciais ordinárias (EDOs) é uma função multiplicativa que, quando aplicada à EDO original, a transforma em uma equação mais simples de se resolver ou integrar. Ele é usado para tornar uma EDO exata ou para simplificar a sua solução.

Teorema 2.2.5. A equação diferencial linear de primeira ordem (2.1) admite um fator integrante

$$u(x) = e^{\int p(x)dx}.$$

Exemplo 2.2.6. Calcule a solução da equação diferencial $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 3\cos(2x)$, $x > 0$

Como a equação é linear, primeiro procuramos o fator integrante;

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln(x)} = x.$$

Multiplicando a equação diferencial pelo fator integrante, temos:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx}x + y &= 3x \cos(2x), \\ \frac{d}{dx} (yx) &= 3x \cos(2x). \end{aligned}$$

Integrando ambos os lados da equação, tem-se:

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dx} (yx) &= \int 3x \cos(2x) \\ yx &= 3 \left\{ \frac{1}{2}x \operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{4} \cos(2x) \right\} + c \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral é:

$$y = \frac{3}{2} \operatorname{sen}(2x) - \frac{3 \cos(2x)}{4x} + \frac{c}{x}.$$

2.3 Decaimento Radioativo

No contexto das equações diferenciais lineares de primeira ordem, o modelo de decaimento radioativo surge como uma aplicação fundamental e amplamente utilizada em várias áreas, como na Física Nuclear e na Química [18]. Esse modelo descreve a taxa de decaimento de uma substância radioativa como sendo diretamente proporcional à quantidade presente em um dado instante de tempo. O decaimento radioativo pode ser descrito pela equação diferencial linear de primeira ordem:

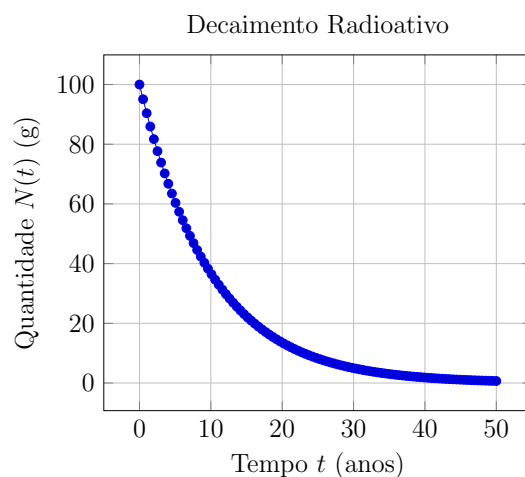
$$\frac{dN}{dt} = -kN(t),$$

onde $N(t)$ representa a quantidade de substância radioativa em um tempo t , e k é a constante de decaimento (positiva), que define a taxa de decaimento.

A solução dessa equação, com a condição $N(0) = N_0$ é dada por:

$$N(t) = N_0 e^{-kt}. \tag{2.2}$$

A solução da equação diferencial do decaimento radioativo é dada por $N(t) = N_0 e^{-kt}$. Para visualizar o comportamento desta função ao longo do tempo, o gráfico a seguir ilustra como a quantidade de material radioativo $N(t)$ decai em função do tempo t :

Figura 2.1: Gráfico da quantidade de material radioativo ao longo do tempo.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Como pode ser observado no gráfico, a quantidade de material radioativo diminui rapidamente nos primeiros anos, refletindo a natureza exponencial do decaimento. A taxa de decaimento λ indica que, em um curto período, uma fração significativa do material se desintegra.

Esse modelo é essencial em várias áreas, como na Medicina, onde isótopos radioativos são usados na Radioterapia, e na Arqueologia, com a datação por carbono [9]. Contudo, é importante notar que essa abordagem assume uma taxa de decaimento constante, o que pode não se aplicar em todos os casos.

Para ilustrar a aplicação desse modelo de decaimento radioativo, consideramos o Carbono-14 (^{14}C), um isótopo radioativo amplamente utilizado na datação de materiais orgânicos, especialmente em Arqueologia. O Carbono-14 possui uma meia-vida de aproximadamente 5730 anos, o que significa que metade de uma amostra de (^{14}C) decai ao longo desse período [6]. Este comportamento é modelado pela equação diferencial de primeira ordem 2.1, onde N_0 é a quantidade inicial de (^{14}C) e k é a constante de decaimento calculada como $k = \ln(2)/5730$. A tabela a seguir exhibe esses valores para tempos de 0, 1000, 5000 e 10000 anos, enquanto o gráfico ilustra a curva de decaimento exponencial, demonstrando a redução de Carbono-14 com o passar do tempo. Esses dados visam exemplificar como o modelo de decaimento radioativo é usado para quantidade de material radioativo remanescente e suas aplicações práticas em diversas áreas como a Arqueologia, para determinar a idade de artefatos orgânicos.

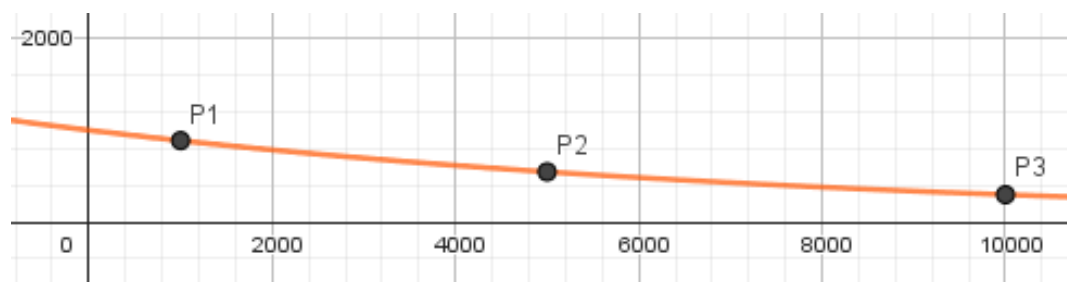


Figura 2.2: Decaimento exponencial do Carbono-14

Tempo t (anos)	Quantidade de Carbono-14 $N(t)$ (unidades)
0	1000.0
1000	868.5
5000	568.9
10000	324.7

Tabela 2.1: Tabela mostrando a quantidade de Carbono-14 ($N(t)$) em função do tempo (t) em anos.

2.4 Equação Diferencial Ordinária de Bernoulli

A equação diferencial de Bernoulli surge frequentemente em contextos onde as taxas de variação de uma quantidade dependem de uma potência dessa mesma quantidade. Esse tipo de comportamento não linear é comum em muitos modelos de crescimento ou decaimento, como em fenômenos biológicos, como o crescimento populacional, ou em processos físicos, como a difusão de substâncias. A utilidade da equação de Bernoulli está no fato de que ela oferece uma forma simples e eficiente de modelar esses fenômenos, ao mesmo tempo em que pode ser transformada em uma equação linear em alguns casos, facilitando a resolução analítica. Essa característica torna a equação de Bernoulli uma ferramenta poderosa para abordar problemas reais de forma eficaz e precisa.

Definição 2.4.1. *Equação diferencial de Bernoulli é uma equação não linear de primeira ordem da forma $y' + P(x) = Q(x)y^n$, onde $0 < n \neq 1$. Esta equação pode ser transformada em uma equação linear com uma substituição $u = y^{1-n}$, o que leva a uma equação linear u , sua resolução fornece a solução para a equação diferencial original.*

Exemplo 2.4.2. *Calcule a solução da equação diferencial $\frac{dy}{dx} - 2xy = 4x^2y^2$.*

Como essa é uma equação não linear de primeira ordem, tome $u = y^{1-n}$ e note que:

$$u = \frac{1}{y} \implies y = u^{-1} \implies y' = \frac{-1}{u^2} \cdot u'.$$

O fator integrante é dado por $e^{\int P(x)dx}$. Sendo assim,

$$e^{\int 2x dx} = e^{x^2}.$$

Multiplicando ambos os lados por e^{x^2} (fator integrante), obtemos:

$$e^{x^2} u' + 2xe^{x^2} u = -e^{x^2}$$

Integrando ambos os lados em relação a x :

$$e^{x^2} u = -\frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

Substituindo $u = \frac{1}{y}$:

$$\frac{1}{y} = -\frac{1}{2} + Ce^{-x^2}.$$

Isolando y :

$$y = \frac{1}{-Ce^{-x^2} + \frac{1}{2}}.$$

Exemplo 2.4.3. Calcule a solução da equação diferencial $y' = y^q$.

Como é uma equação não linear de primeira ordem, tome $u = y^{1-q}$ e note que:

$$u = y^{1-q} \implies y = u^{\frac{1}{1-q}} \implies y' = \frac{1}{1-q} \cdot u^{\frac{q}{1-q}} \cdot u'$$

Substituindo na equação principal, temos:

$$\frac{1}{1-q} \cdot u^{\frac{q}{1-q}} \cdot u' = u^{\frac{q}{1-q}},$$

$$u' = 1 - q.$$

O fator integrante é dado por $e^{\int P(x)dx}$ e com $P(x) = 0$. Sendo assim,

$$e^{\int 0 dx} = e^0 = 1.$$

Multiplicando ambos os lados pelo fator integrante, obtemos:

$$u' = 1 - q.$$

Integrando ambos os lados em relação a variável x :

$$\int u' dx = \int 1 - q dx,$$

$$u = x(1 - q) + C.$$

Substituindo $y = u^{\frac{1}{1-q}}$:

$$y = [x(1 - q) + C]^{\frac{1}{1-q}}. \quad (2.3)$$

Equações diferenciais ordinárias (EDOs) clássicas são ferramentas poderosas para descrever mudanças em sistemas dinâmicos. Neste capítulo, apresentamos o modelo de decaimento radioativo como uma aplicação importante de EDOs de primeira ordem. No entanto, ao lidarmos com fenômenos que não seguem necessariamente as leis clássicas de mudança, como sistemas complexos ou comportamentos não-lineares, o cálculo fracionário conformável surge como uma alternativa robusta. No Capítulo 3, discutiremos como essa teoria generalizada pode ser usada para estender o conceito de derivada a ordens não inteiras.

2.5 Exponencial de Tsallis

A teoria de Tsallis, que envolve a entropia de Tsallis e a função exponencial associada, está sendo explorada em conjunto com o cálculo fracionário. Essa interseção tem aplicações potenciais em várias áreas, como teoria de informação fracionária, modelagem de processos estocásticos fracionários, estatística fracionária e resolução de equações diferenciais fracionárias [20].

A combinação dessas teorias oferece uma abordagem alternativa para compreender sistemas complexos, não gaussianos e anômalos. Apesar de ser uma área de pesquisa em desenvolvimento, essa interação promissora destaca-se especialmente em contextos onde o comportamento fracionário é observado.

Definição 2.5.1. A solução (2.3) quando $C = 1$ é conhecida como **Exponencial de Tsallis**, que é da forma $e_q^x = [1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}}$, onde x é um número real e q um parâmetro. Cujas soluções são dadas por:

$$e_q^x = \begin{cases} (1 + (1 - q)x)^{\frac{1}{1-q}}, & \text{para } q \neq 1 \text{ e } 1 + (1 - q)x \geq 0, \\ e^x, & \text{para } q = 1, \\ 1 + x, & \text{para } q = 0. \end{cases}$$

No próximo capítulo, abordaremos os conceitos fundamentais do cálculo fracionário, com foco na sua aplicação ao modelo de decaimento radioativo. Antes de avançarmos para a definição de derivadas q -conformáveis, é importante considerar algumas propriedades gerais de operadores integrais, que formam a base para o entendimento das derivadas fracionárias.

Capítulo 3

Cálculo Fracionário Conformável e q -Conformável

3.1 Cálculo Fracionário Conformável

O seguinte teorema é essencial para entender como funções contínuas podem ser manipuladas e suas propriedades derivadas de integrais de ordens superiores.

Teorema 3.1.1. *Seja I um intervalo aberto contendo o ponto x_0 , e seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Dado um inteiro positivo n , defina a função $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$F(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f(t) dt.$$

F é de classe $C^{n+1}(I)$, com

$$F(x_0) = F'(x_0) = \dots = F^{(n)}(x_0) = 0,$$

e

$$F^{(n+1)}(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \in I.$$

Demonstração:

Observe que $F(x)$ é uma integral dependente de x . Vamos começar mostrando que $F(x)$ é bem definida e pertence à classe $C^{n+1}(I)$. A função f é contínua por hipótese, e a função $(x-t)^n$ é uma função polinomial em t . Como o produto de uma função contínua por uma função polinomial também é uma função contínua, a integral de $(x-t)^n f(t)$ é contínua para cada $x \in I$. Além disso, a integral de uma função contínua no intervalo $[x_0, x]$ é uma operação contínua em x , o que garante que $F(x)$ é contínua. Vamos agora calcular as derivadas de $F(x)$. Pela regra de Leibniz para diferenciação sob o sinal de integral, temos:

$$F'(x) = \frac{1}{n!} \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x (x-t)^n f(t) dt = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x \frac{d}{dx} ((x-t)^n f(t)) dt.$$

Derivando $(x - t)^n$ em relação a x , obtemos:

$$\frac{d}{dx} ((x - t)^n) = n(x - t)^{n-1}.$$

Logo,

$$F'(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x n(x - t)^{n-1} f(t) dt.$$

Para $F'(x_0)$, basta observar que a integral no lado direito se anula, já que $(x - t)^{n-1}$ é zero quando $x = x_0$. Portanto, $F'(x_0) = 0$. De maneira semelhante, podemos calcular as sucessivas derivadas de $F(x)$ usando a mesma regra de Leibniz. Para a k -ésima derivada de $F(x)$, temos:

$$F^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x \frac{d^k}{dx^k} ((x - t)^n f(t)) dt.$$

A derivada de ordem k de $(x - t)^n$ é dada por:

$$\frac{d^k}{dx^k} ((x - t)^n) = \frac{n!}{(n - k)!} (x - t)^{n-k}.$$

Assim, temos:

$$F^{(k)}(x) = \frac{1}{(n - k)!} \int_{x_0}^x (x - t)^{n-k} f(t) dt.$$

Para $k = n$, a derivada é:

$$F^{(n)}(x) = \frac{1}{0!} \int_{x_0}^x (x - t)^0 f(t) dt = \int_{x_0}^x f(t) dt. \quad (3.1)$$

A integral acima é zero quando $x = x_0$, logo $F^{(n)}(x_0) = 0$. Finalmente, para a derivada de ordem $n + 1$, temos:

$$F^{(n+1)}(x) = f(x),$$

que é obtido aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo (3.1), pois a derivada de $F^{(n)}(x)$ resulta exatamente em $f(x)$. Portanto, $F(x)$ é de classe $C^{n+1}(I)$, e temos que:

$$F(x_0) = F'(x_0) = \dots = F^{(n)}(x_0) = 0,$$

$$F^{(n+1)}(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \in I.$$

Como queríamos demonstrar!

O cálculo fracionário passou a ter um impacto significativo tanto nos aspectos teóricos quanto aplicados das disciplinas científicas e de Engenharia. Esse impacto tem vindo a crescer de forma substancial desde o final do século XX [16, 11].

Muitos pesquisadores utilizam integral para calcular derivadas fracionárias. A seguir apresentamos as duas mais utilizadas:

1) **Definição de Riemann–Liouville.** Seja $n \in \mathbb{N}$. Para $\alpha \in [n - 1, n]$, a derivada de α é da forma:

$$D^\alpha(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(x)}{(t - x)^{\alpha - n + 1}} dx.$$

A definição de derivada fracionária de Riemann-Liouville pode ser expressa como uma integral iterada, que envolve múltiplas integrações sucessivas de uma função. Essa relação pode ser vista como uma extensão da derivada convencional, onde a ordem da derivada é substituída por um parâmetro fracionário α . Formalmente, a derivada de ordem α de Riemann-Liouville pode ser representada por uma integral iterada, onde a operação é realizada sucessivamente até alcançar a ordem desejada de diferenciação, permitindo uma interpretação contínua do decréscimo ou crescimento das funções [7].

2) **Definição de Caputo.** Para $\alpha \in [n - 1, n]$, a derivada de α é da forma:

$$D^\alpha(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(x)}{(t - x)^{\alpha - n + 1}} dx.$$

O autor Thabet Abdeljawad desenvolveu uma nova definição para derivada fracionária e que possui um melhor comportamento [1]. Nesse caso, para $0 < \alpha < 1$ e $t > 0$ um parâmetro, temos:

$$T_\alpha f(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon}.$$

Proposição 3.1.2. *Mostre que que o operador T_α é um operador linear.*

Demonstração:

$$\begin{aligned} T_\alpha(\beta f(t) + g(t)) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(\beta f + g)(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - (\beta f + g)(t)}{\epsilon} \\ &= \beta \cdot \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{g(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\epsilon} \\ &= \beta T_\alpha f(t) + T_\alpha g(t). \end{aligned}$$

3.2 Derivada Fracionária de Katugampola

A derivada fracionária de Katugampola foi desenvolvida como uma alternativa às formulações clássicas de derivadas fracionárias com o objetivo de fornecer uma maior aplicabilidade e flexibilidade em uma variedade de contextos. Introduzida por Katugampola [10], essa derivada foi desenvolvida em 2011 com o objetivo de unificar as características das derivadas fracionárias e conformáveis. Isso permite sua utilização em uma ampla gama de funções, incluindo funções descontínuas e contínuas.

A capacidade de interpolar entre derivadas clássicas e fracionárias e preservar propriedades importantes, como a linearidade e a regra do produto, constitui a principal inovação da derivada de Katugampola. Como resultado, essa é uma ferramenta útil para modelar fenômenos dinâmicos com memória, e particularmente útil em situações em que as derivadas convencionais têm limitações. Para $0 < \alpha \leq 1$, tem-se

$$D^\alpha f(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon} \quad (3.2)$$

Proposição 3.2.1. *Essa definição de derivada, quando f e g são contínuas, dispõe das seguintes propriedades:*

- i. $D^\alpha(\beta f + g) = \beta D^\alpha f + D^\alpha g$
- ii. $D^\alpha k = 0$, onde k é uma constante.
- iii. $D^\alpha(f \cdot g)(t) = f(t) \cdot D^\alpha g(t) + D^\alpha f(t) \cdot g(t)$
- iv. $D^\alpha(f \circ g)(t) = f'(g(t)) \cdot D^\alpha g(t)$

Demonstração

- i. $D^\alpha(\beta f + g) = \beta D^\alpha f + D^\alpha g$

Temos que:

$$\begin{aligned} D^\alpha(\beta f + g)(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(\beta f + g)(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - (\beta f + g)(t)}{\epsilon} \\ &= \beta \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{g(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\epsilon} \\ &= \beta D^\alpha f(t) + D^\alpha g(t). \end{aligned}$$

- ii. $D^\alpha k = 0$, onde k é uma constante.

Seja $f(t) = k$. Sendo assim:

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{k - k}{\epsilon} \\ &= 0. \end{aligned}$$

- iii. $D^\alpha(f \cdot g)(t) = f(t) \cdot D^\alpha g(t) + D^\alpha f(t) \cdot g(t)$

Temos que:

$$\begin{aligned}
D^\alpha f(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g)(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - (f \cdot g)(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) \cdot g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t) \cdot g(t) + g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) \cdot f(t) - g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) \cdot f(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) \cdot [f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)] + f(t) \cdot [g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)]}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha})}{\varepsilon} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(t) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon} \\
&= g(t) \cdot D^\alpha f(t) + f(t) \cdot D^\alpha g(t).
\end{aligned}$$

iv. $D^\alpha(f \circ g)(t) = f'(g(t)) \cdot D^\alpha g(t)$

Temos que:

$$\begin{aligned}
D^\alpha(f \circ g)(t) &= f'(g(t)) \cdot D^\alpha g(t) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - (f \circ g)(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(g(t))}{\varepsilon} \cdot \frac{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(g(t))}{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)} \cdot \frac{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(g(t))}{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)} \cdot D^\alpha g(t)
\end{aligned}$$

Como g é contínua, tome δ tal que $\delta \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(g(t) + \delta) - f(g(t))}{g(t) + \delta - g(t)} \cdot D^\alpha g(t) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(g(t) + \delta) - f(g(t))}{\delta} \cdot D^\alpha g(t) \\
&= f'(g(t)) \cdot D^\alpha g(t).
\end{aligned}$$

3.3 Cálculo Fracionário q -conformável

Além das generalizações da derivada clássica, como a derivada conformável de Katugampola discutida anteriormente, surge, por volta do ano 2000, uma outra abordagem útil em vários contextos: a **derivada q -conformável** [17]. A derivada q -conformável pertence à família das chamadas derivadas de q -diferença, sendo parametrizada por dois números reais, $q \neq 1$ e α , que introduzem deformações discretas e fracionárias ao conceito de derivada. Enquanto o parâmetro q controla a deformação discreta, permitindo modelar interações não locais e fenômenos com memória, o parâmetro α define a ordem

da derivada.

A derivada q -conformável é definida da seguinte forma:

Definição 3.3.1. *Dada uma função $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Então, a derivada controlada conformável $D^{\alpha,q}f(x)$ da ordem α de f em x é definida por:*

$$D^{\alpha,q}f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f\left(x + \varepsilon e_q^{(\alpha-1)x}\right) - f(x)}{\varepsilon}, \quad (3.3)$$

para todo $x > 0$, $0 < \alpha \leq 1$, $0 < q \leq 1$, onde q representa o fator de deformação.

Quando $\alpha \rightarrow 1$, essa derivada recupera a derivada clássica, similarmente à forma como a derivada conformável recupera os resultados do cálculo tradicional em certos limites.

Nesse sentido, o cálculo q -conformável pode ser visto como uma ferramenta poderosa para modelar sistemas em que a dependência temporal ou espacial de uma função se dá por saltos proporcionais ao parâmetro q , o que não seria diretamente tratável com uma derivada convencional.

Essa derivada dispõe de algumas propriedades:

Proposição 3.3.2. *i. $D^{q,\alpha}(\beta f + g)(t) = D^{q,\alpha}\beta f(t) + D^{q,\alpha}g(t)$.*

ii. $D^{q,\alpha}k = 0$, onde k é uma constante.

iii. $D^{q,\alpha}(f \cdot g) = D^{q,\alpha}f(t) \cdot g + f(t) \cdot D^{q,\alpha}g(t)$.

iv. $D^{\alpha,q}(f \circ g)(x) = f'(g(x)) D^{\alpha,q}g(x)$.

Demonstração: A demonstração é análoga à demonstração da Proposição 3.2.1.

Teorema 3.3.3. *Seja $\alpha, q \in (0, 1]$ e $x > 0$ fixos. Uma função $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é q -diferenciável em x se, e somente se, f for diferenciável em x . Neste caso, tem-se que:*

$$D^{\alpha,q}f(x) = e_q^{(\alpha-1)x} f'(x)$$

Demonstração: Suponha que $D^{\alpha,q}f(x)$ exista, então:

$$D^{\alpha,q}f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon e_q^{(\alpha-1)x}) - f(x)}{\varepsilon} = e_q^{(\alpha-1)x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

com $h = \varepsilon e_q^{(\alpha-1)x}$.

Por outro lado, usando a Definição 3.3 e tendo em vista a regra de L'Hôpital, obtem-se que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f\left(x + \varepsilon e_q^{(\alpha-1)x}\right) - f(x)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e_q^{(\alpha-1)x} f'\left(x + \varepsilon e_q^{(\alpha-1)x}\right) = e_q^{(\alpha-1)x} f'(x),$$

como queria-se demonstrar.

3.4 A q -Integral

A integral, como um operador inverso da derivada, tem a mesma relevância no cálculo que a derivada. Esta seção descreve a q -integral como um operador inverso para a derivada 3.3, [2]. A analogia entre o operador integral e o operador derivado é fornecida pela seguinte definição:

Definição 3.4.1. *Seja $a \geq 0$ e $x \geq a$. Seja f uma função definida em $(a, t]$ e $0 < \alpha < 1$. Então, a q -integral de ordem α de uma função f é definida por:*

$$I_a^{\alpha, q} f(x) = \int_a^x f(s) d_{\alpha, q} s = \int_a^x \frac{f(s)}{e_q^{(\alpha-1)s}} ds,$$

com $0 < q \leq 1$.

Teorema 3.4.2. *Seja $a \geq 0$ e $0 < \alpha \leq 1$. também, seja f uma função contínua tal que exista $I_a^{\alpha, q} f$. Então:*

$$D^{\alpha, q}(I_a^{\alpha, q} f(x)) = f(x),$$

com $x \geq a$ e $0 < q \leq 1$.

Demonstração: De fato, usando a Regra da Cadeia e tendo em vista a Definição 3.4.1, tem-se que:

$$\begin{aligned} D^{\alpha, q}(I_a^{\alpha, q} f(x)) &= e_q^{(\alpha-1)x} \frac{d}{dx} (I_a^{\alpha, q} f(x)) \\ &= e_q^{(\alpha-1)x} \frac{d}{dx} \left(\int_a^x \frac{f(s)}{e_q^{(\alpha-1)s}} ds \right) \\ &= e_q^{(\alpha-1)x} \frac{f(x)}{e_q^{(\alpha-1)x}} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Como queria-se demonstrar.

Com base nos conceitos de integrais e derivadas discutidos até aqui, avançamos para o cálculo fracionário conformável, que permite uma generalização das equações diferenciais a ordens fracionárias. Esta abordagem oferece mais flexibilidade para modelar fenômenos físicos e dinâmicos que não podem ser adequadamente descritos por derivadas inteiras. No contexto do decaimento radioativo, já apresentado no Capítulo 2, mostraremos como a EDO q -conformável se comporta e compararemos seus resultados com o modelo clássico.

Capítulo 4

Equações Diferenciais Ordinárias q -Conformáveis

Nesta parte, uma estratégia elementar para a solução de EDO q -conformável é discutida. Então, considere:

$$D^{\alpha,q}f(x) + P(x)f(x) = Q(x),$$

onde $P(x)$ e $Q(x)$ são funções q -diferenciáveis e $f(x)$ é uma função desconhecida. De acordo com o Teorema 3.3.3, tem-se o seguinte:

$$\frac{d}{dx}f(x) + \frac{P(x)}{e_q^{(\alpha-1)x}}f(x) = \frac{Q(x)}{e_q^{(\alpha-1)x}}.$$

Consideremos a equação diferencial não conformável:

$$D_Q^{\alpha,q}u(x) + P(x)u(x) = Q(x),$$

onde $D^{\alpha,q}$ é a derivada q -conformável de ordem α , e $P(x)$ e $Q(x)$ são funções q -diferenciáveis. Transformamos esta equação para:

$$\frac{d}{dx}u(x) + \frac{P(x)}{e_q^{(\alpha-1)x}}u(x) = \frac{Q(x)}{e_q^{(\alpha-1)x}}. \quad (4.1)$$

Esta é uma equação diferencial linear de primeira ordem da forma:

$$\frac{du}{dx} + p(x)u(x) = q(x),$$

onde $p(x) = \frac{P(x)}{e_q^{(\alpha-1)x}}$ e $q(x) = \frac{Q(x)}{e_q^{(\alpha-1)x}}$.

Para resolver esta equação, utilizamos o método do fator integrante. O fator integrante

$\mu(x)$ é dado por:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}.$$

Substituindo $p(x) = \frac{P(x)}{e_q^{(\alpha-1)x}}$, obtemos:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{P(x)}{e_q^{(\alpha-1)x}} dx}.$$

Multiplicamos ambos os lados da equação (4.3) diferencial por $\mu(x)$:

$$\mu(x) \frac{d}{dx} u(x) + \mu(x) \frac{P(x)}{e_q^{(\alpha-1)x}} u(x) = \mu(x) \frac{Q(x)}{e_q^{(\alpha-1)x}}.$$

O lado esquerdo pode ser escrito como a derivada do produto $u(x)\mu(x)$:

$$\frac{d}{dx} (u(x)\mu(x)) = \mu(x) \frac{Q(x)}{e_q^{(\alpha-1)x}}.$$

Integramos ambos os lados:

$$u(x)\mu(x) = \int \mu(x) \frac{Q(x)}{e_q^{(\alpha-1)x}} dx + C,$$

onde C é a constante de integração. Finalmente, para encontrar $u(x)$, dividimos ambos os lados por $\mu(x)$:

$$u(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left(\int \mu(x) \frac{Q(x)}{e_q^{(\alpha-1)x}} dx + C \right).$$

Substituindo o valor de $\mu(x) = e^{\int \frac{P(x)}{e_q^{(\alpha-1)x}} dx}$, obtemos a solução final:

$$u(x) = e^{-\int \frac{P(x)}{e_q^{(\alpha-1)x}} dx} \left(\int e^{\int \frac{P(x)}{e_q^{(\alpha-1)x}} dx} \frac{Q(x)}{e_q^{(\alpha-1)x}} dx + C \right), \quad (4.2)$$

onde C é uma constante arbitrária.

Exemplo 4.0.1. Seja o seguinte problema de valor inicial (PVI) dado por $D_Q^{\alpha,q} y(x) - y(x) = 0$, $y(0) = y_0 > 0$, $0 < \alpha, q < 1$.

Solução: Como visto acima, temos que $P(x) = -1$ e $Q(x) = 0$. Substituindo na equação

(4.2), temos

$$y(x) = e^{\int \frac{1}{e_q^{(\alpha-1)x}} dx} \left(\int e^{\int \frac{(-1)}{e_q^{(\alpha-1)x}} dx} \frac{0}{e_q^{(\alpha-1)x}} dx + C \right)$$

$$y(x) = C \cdot e^{\int \frac{1}{e_q^{(\alpha-1)x}} dx}$$

$$y(x) = y_0 e^{\int \frac{1}{e_q^{(\alpha-1)x}} dx} .$$

onde y_0 é uma constante arbitrária positiva que caracteriza a condição inicial fixada.

Embora as equações diferenciais ordinárias clássicas descrevam muitos fenômenos naturais, elas assumem uma relação linear constante no comportamento dinâmico. No entanto, quando lidamos com sistemas mais complexos ou quando a taxa de mudança de um sistema depende de parâmetros não convencionais, uma generalização dessas equações é necessária. A EDO q -conformável surge como uma alternativa viável, permitindo descrever fenômenos onde a taxa de mudança pode variar de forma não linear ao longo do tempo. Um exemplo disso pode ser observado no decaimento radioativo, já abordado no Capítulo 2, mas agora analisado sob a ótica da EDO q -conformável.

A forma q -conformável da equação do decaimento radioativo pode ser escrita como:

$$D^{\alpha,q}N(t) = -kN(t),$$

onde $D_q^{\alpha,q}$ é a derivada q -conformável, $N(t)$ é a quantidade de substância radioativa, k é a constante de decaimento, α, q são parâmetros ajustáveis. A solução desta equação pode ser obtida seguindo o método de resolução da EDO q -conformável. Como visto no Exemplo 4.0.1, temos que a solução é dada por:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-k \int \frac{1}{e_q^{(\alpha-1)x}} dx} .$$

Como $e_q^{(\alpha-1)x} = e^{(\alpha-1)x}$ quando $q \rightarrow 1$, temos:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-k \cdot \int e^{-(\alpha-1)x} .}$$

Resolvendo a integral, temos $\frac{e^{(\alpha-1)x}}{-(\alpha-1)}$,

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-k \cdot \frac{e^{\alpha-1}}{-(\alpha-1)}} .$$

Agora, vamos substituir a exponencial $e^{-(\alpha-1)t}$ por t^α na solução da EDO q -conformável, pois a deformação da exponencial no contexto da estatística de Tsallis, para $q \neq 1$, leva a um comportamento de decaimento descrito por uma lei de potência t^α , refletindo a natureza não-extensiva do sistema e modificando a dinâmica do decaimento. Sendo assim,

temos:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-kt^\alpha}. \quad (4.3)$$

O gráfico da função 4.3, obtido para a solução da EDO q -conformável do decaimento radioativo, apresenta a evolução temporal da quantidade de substância radioativa $N(t)$ de acordo os parâmetros k e α que ajustam o decaimento. Este comportamento é influenciado pela deformação da função exponencial em t^α o que permite capturar uma dinâmica de decaimento não-extensiva típica de sistemas complexos. O gráfico na Figura 4.1 ilustra como o decaimento é mais rápido ou mais lento para os valores de $\alpha = 0.5, 0.6, 0.7, 0.75, 0.8, 0.85, 0.9, 0.95$ e $k = \ln(2)/5730$. Essa representação gráfica permite visualizar a influência dos parâmetros na evolução da substância ao longo do tempo.

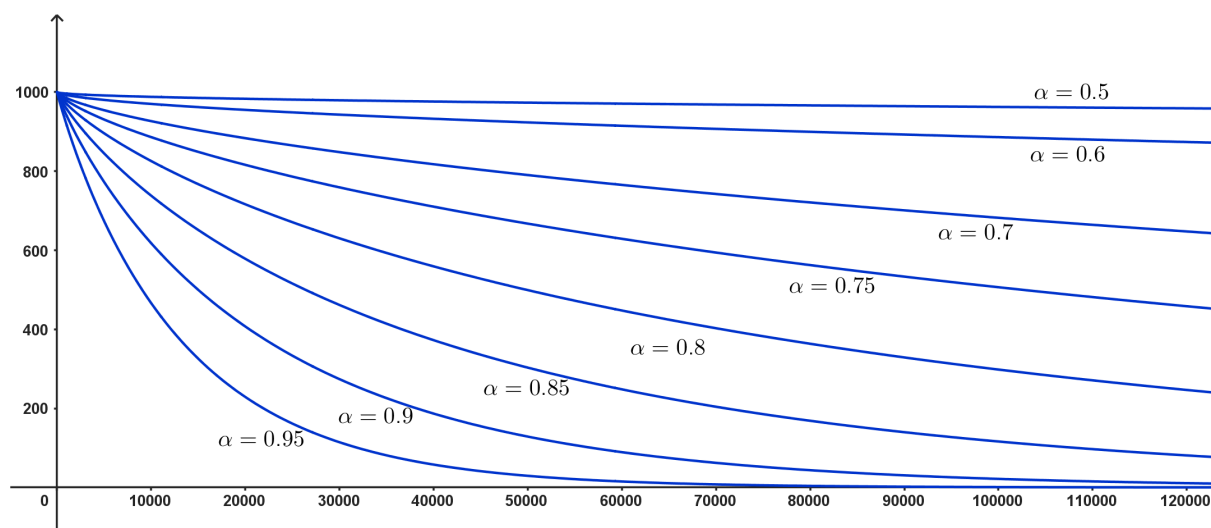


Figura 4.1: Decaimento radioativo do Carbono-14 com diferentes valores de α .

O objetivo do próximo capítulo é realizar uma análise comparativa entre a EDO clássica e a EDO q -conformável no modelo de decaimento radioativo. Iremos analisar as diferenças e semelhanças nas soluções propostas por cada método, identificando de que forma a introdução da derivada fracionária q -conformável altera a interpretação do fenômeno. Serão apresentados gráficos e uma análise numérica para embasar essa comparação.

Capítulo 5

Resultados

5.1 Análise gráfica

A Figura 5.1 apresenta as soluções das equações diferenciais (2.2) e (4.3) para o decaimento radioativo do Carbono-14, para ambos os métodos. No gráfico, a linha vermelha representa a solução obtida pela EDO clássica, enquanto as linhas azuis refletem o modelo baseado na EDO q -conformável. Para a EDO clássica, temos que a solução segue um padrão exponencial típico, decaindo suavemente ao longo do tempo, conforme esperado para um processo radioativo clássico visto no Capítulo 2.

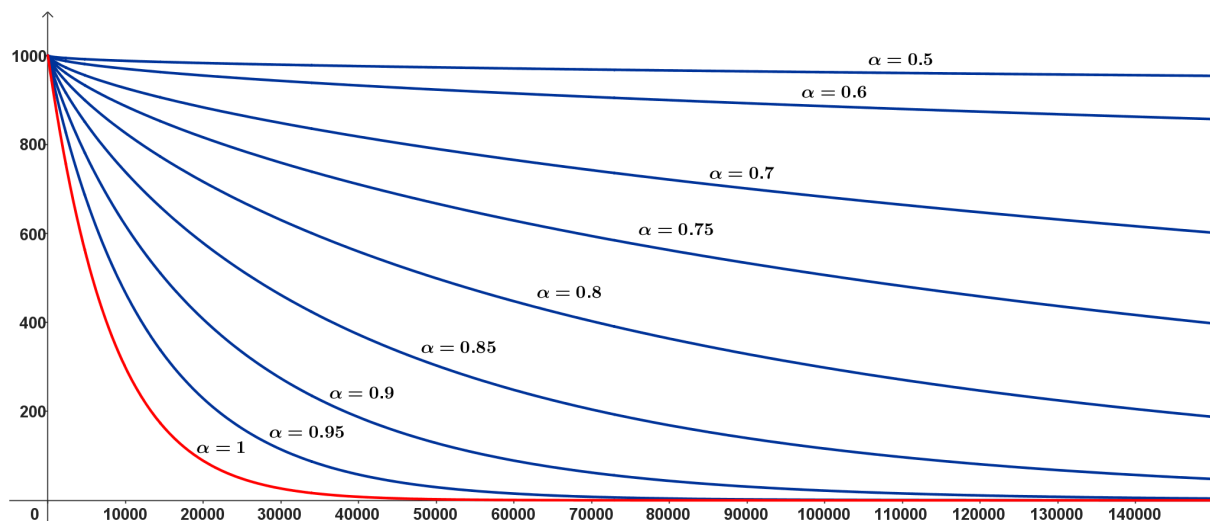


Figura 5.1: Comparação entre EDO e EDO q -conformável.

Como podemos observar no gráfico, os valores de $N(t)$ variam de acordo com o parâmetro α da derivada q -conformável, afetando a taxa de decaimento. Valores de α mais próximos de 1 aproximam o comportamento do modelo ao decaimento radioativo padrão, enquanto valores menores de α indicam uma desaceleração na taxa de decaimento ao longo do tempo. Esse comportamento visual confirma as tendências observadas na tabela da próxima seção, proporcionando uma perspectiva intuitiva sobre como a deri-

vada q -conformável permite uma modulação diferenciada do fenômeno, adaptando-se a interpretações alternativas de estabilidade e persistência de partículas ao longo dos anos.

5.2 Análise numérica

Nesta seção, apresentamos uma análise numérica detalhada das soluções obtidas para o modelo de decaimento radioativo do Carbono-14, considerando tanto a EDO clássica quanto a EDO q -conformável. O objetivo é examinar quantitativamente o impacto da derivada q -conformável nos valores de $N(t)$ ao longo do tempo, além de investigar a influência do parâmetro α na solução. Para isso, são fornecidos valores numéricos comparativos em momentos específicos e gráficos que ilustram o comportamento das soluções sob diferentes configurações, permitindo uma avaliação precisa das diferenças e similaridades entre os modelos. A seguir, apresentamos uma tabela com os valores de $N(t)$ em diferentes instantes para os dois modelos, permitindo uma comparação direta dos resultados numéricos.

t (anos)	$\alpha = 1$	$\alpha = 0.95$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 0.85$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.5$
0	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00
1000	886.06	917.92	941.17	957.98	970.07	978.71	984.88	992.39	996.18
5000	546.16	673.62	772.53	844.86	895.73	930.59	954.10	980.15	991.48
10000	298.29	466.14	617.80	737.96	825.53	886.06	926.51	970.07	987.97

Tabela 5.1: Valores de $N(t)$ para diferentes tempos t e valores de α

Analisando a tabela apresentada, observamos que, para $\alpha = 1$, o modelo tradicional de decaimento radioativo resulta em uma taxa de decaimento significativamente maior do que aquela obtida nos modelos q -conformáveis (com $\alpha < 1$).

À medida que o tempo aumenta, as diferenças entre os valores de $N(t)$ também se tornam mais gradativas, destacando que, quanto menor o valor de α mais lentamente o número de partículas decai ao longo do tempo. Essa variação na taxa de decaimento evidencia como o parâmetro α na derivada q -conformável influencia diretamente a interpretação do fenômeno, permitindo uma flexibilidade no modelo para se adaptar a diferentes cenários de decaimento.

Em resumo, os resultados obtidos, tanto na Tabela 5.1 quanto no gráfico da Figura 5.1, mostram que a introdução do parâmetro α no contexto do cálculo q -conformável oferece uma forma poderosa de ajustar a dinâmica do decaimento radioativo. Ao possibilitar taxas de decaimento que variam de acordo com o valor de α , o modelo q -conformável permite uma representação mais ampla, que pode ser aplicada a cenários onde a taxa de perda de partículas seja mais lenta ou mais rápida que a prevista pelo modelo clássico. Essa flexibilidade indica a aplicabilidade potencial do cálculo q -conformável em diversas áreas, onde diferentes comportamentos de decaimento são observados, ampliando assim o entendimento e as possíveis interpretações de fenômenos de decaimento radioativo.

Capítulo 6

Conclusões

Este trabalho teve como objetivo explorar as equações diferenciais q -conformáveis, em particular, aplicadas ao modelo de decaimento radioativo. Utilizamos métodos de cálculo fracionário e derivadas q -conformáveis para estudar como esses operadores alteram a interpretação e a solução de modelos clássicos.

Os resultados indicaram que, ao incorporar a derivada q -conformável, o modelo de decaimento radioativo é apto para lidar com padrões de comportamento não-lineares, demonstrando ser útil em circunstâncias onde a lei exponencial clássica não é completamente apropriada. Observou-se que a variação dos parâmetros q e α , associada à derivada q -conformável, influencia significativamente na taxa de decaimento, permitindo uma adaptação às características de sistemas físicos e biológicos complexos. Essas observações reforçam a relevância do cálculo fracionário e da estatística de Tsallis em contextos que vão além do decaimento simples, conectando o trabalho a linhas de pesquisa atuais, por exemplo em Arqueologia, Biologia, entre outras áreas da ciência.

Investigações futuras poderiam expandir essa aplicação para outros tipos de sistemas dinâmicos e explorar a variação dos parâmetros de forma mais ampla, possibilitando um entendimento ainda mais robusto das influências e aplicações das derivadas q -conformáveis.

Além disso, como proposta para estudos futuros, poderia-se aprofundar o estudo no uso de derivadas q -conformáveis em sistemas com memória, onde o comportamento de decaimento ou crescimento depende de um histórico do sistema. Essa abordagem pode revelar propriedades que não são capturadas pela modelagem convencional, especialmente em sistemas com comportamento anômalo.

Conclui-se, portanto, que as derivadas q -conformáveis constituem uma ferramenta promissora na modelagem matemática de fenômenos complexos, oferecendo uma alternativa poderosa às metodologias tradicionais. Este trabalho contribuiu para consolidar essa perspectiva, mostrando que, no caso do decaimento radioativo, as EDOs q -conformáveis não só alteram o comportamento das soluções, mas também expandem as possibilidades de interpretação do fenômeno. Essa abordagem pode abrir caminho para novas investigações e

aplicações que se beneficiem da flexibilidade e do rigor matemático do cálculo fracionário.

Referências Bibliográficas

- [1] T. Abdeljawad. On conformable fractional calculus. *Journal of computational and Applied Mathematics*, 279:57–66, 2015.
- [2] R. P. Agarwal and O. E. V. K. The q-calculus: Theory and applications. *Mathematics*, 1(1):23–38, 2013.
- [3] R. G. Araújo and J. M. Melo. A quadratura do círculo e o método da exaustão. In *Anais do 13^o Simpósio Nacional de História da Ciência e da Tecnologia*, São Paulo, 2012. Sociedade Brasileira de História da Ciência.
- [4] I. F. Balieiro Filho and M. R. Soares. A concepção de Área do círculo de antífon e brison sob uma perspectiva da análise matemática, n.d. Ilha Solteira e Bauru.
- [5] P. Boulos. *Introdução ao Cálculo-Vol. 2: Cálculo Integral*, volume 2. Editora Blucher, 2019.
- [6] L. H. C. de Oliveira, C. V. C. Cunha1-carlos, M. V. de Oliveira Silva1-marcelo, and D. M. B. de Almeida. Resolução numérica da edo que modela o decaimento radioativo do carbono-14, usando o método de adams-bashforth-moulton.
- [7] R. Hilfer. *Applications of fractional calculus in physics*. World scientific, 2000.
- [8] Instituto de Física da Universidade de São Paulo. História das Integrais, n.d. Recuperado em 22 de setembro, de [urlhttp://ecalculo.if.usp.br/historia/historiaintegrais.htm](http://ecalculo.if.usp.br/historia/historiaintegrais.htm).
- [9] J. Kalinowski. *Gamma Ray Spectroscopy in Nuclear Physics*. Springer Science Business Media, 2013.
- [10] U. N. Katugampola. New approach to a generalized fractional integral. *Applied Mathematics Letters*, 24(1):25–30, 2011.
- [11] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, and M. Sababheh. A new definition of fractional derivative. *Journal of computational and applied mathematics*, 264:65–70, 2014.

- [12] M. Kline. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press, 1972.
- [13] S. F. Lacroix. *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*. Imprimerie du Cercle-Social, Paris, 1797-1800.
- [14] G. W. Leibniz. Carta a l'hôpital, 21 de junho de 1695. In C. I. Gerhardt, editor, *Os escritos filosóficos de Gottfried Wilhelm Leibniz*, volume II, pages 288–304. Weidmannsche Buchhandlung, Berlin, 1875.
- [15] R. K. Miller and A. N. Michel. *Ordinary differential equations*. Academic press, 2014.
- [16] D. d. S. Oliveira and E. Capelas de Oliveira. Generalizações para derivadas fracionárias. In *Anais do XXXVIII CNMAC*, Campinas - SP, 2018.
- [17] M. Rahman and S. Ghosh. A brief overview of q-calculus and its applications. *Mathematics*, 4(4):70, 2016.
- [18] C. C. Ross and C. C. Ross. Applications of first-order equations. *Differential Equations: An Introduction with Mathematica®*, pages 90–128, 2004.
- [19] M. D. F. Silva. Um método de arquimedes para a quadratura da parábola. *REMA-TEC*, 3(4):35, 2008.
- [20] C. Tsallis. Possible generalization of boltzmann-gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, 52(1-2):479–487, 1988.