Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas

Licenciatura em Matemática

Giselle Lopes da Cruz

Estudo do conceito de equação a partir do livro didático

Vitória da Conquista
2024

Giselle Lopes da Cruz

Estudo do conceito de equação a partir do livro didático

Monografia apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - Campus Vitória da Conquista-BA, para obtenção do Título de Licenciada em Matemática, sob orientação da Profª. Drª Roberta D'Angela Menduni Bortoloti.

Vitória da Conquista
2024

Giselle Lopes da Cruz

Estudo do conceito de equação a partir do livro didático

Monografia apresentada ao Colegiado do Curso de Matemática como requisito parcial para aprovação na disciplina Seminário de Pesquisa II do Curso de Licenciatura em Matemática.
Trabalho aprovado em 16 de dezembro de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Roberta D' Angela Menduni - Bortoloti

Prof.ª Dr.ª Roberta D'Angela Menduni-Bortoloti - Orientadora
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

Galvina Maria de Souza

Prof.ª Dr.ª Galvina Maria De Souza
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

Gerson dos Santos Farias

Prof. Me. Gerson Dos Santos Farias
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

Vitória da Conquista
2024

O Senhor é minha força e minha fortaleza, meu refúgio no dia da tribulação! Jr 16,9

AGRADECIMENTOS

A Jesus Cristo e a Nossa Senhora pela proteção, saúde e força concedidas para vencer os desafios desta etapa.

À Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, pelo suporte oferecido para a conclusão dos meus estudos.

À minha professora orientadora, Roberta D'Angela Menduni Bortoloti, por todos os ensinamentos e pela paciência durante este período. Sem as suas correções e incentivos, o caminho teria sido muito mais árduo.

Ao meu esposo, Ycaro, amor da minha vida, por sempre me dar força e motivação para nunca desistir. À minha mãe, Maria, ao meu pai, Francisco, e ao meu irmão, Adriano, pelo amor, incentivo e apoio em todas as fases da minha vida, sobretudo nos últimos quatro anos.

À minha avó (Dinha), pelas orações realizadas neste período. Tenho certeza de que foram fundamentais para me proteger e fortalecer ao longo desta jornada.

Aos meus amigos Emanuel, Gabriel e Samara, por tanto me ajudarem e tornarem o caminho na universidade mais leve e repleto de alegrias. Aos meus colegas de turma, pelos momentos e aprendizados compartilhados. Aos meus companheiros do PETIMAT e ao professor Márcio Bortoloti, por todos os ensinamentos e contribuições à minha formação durante o período em que participei do programa.

À banca avaliadora, pelas valiosas contribuições e por aceitar estar presente neste momento tão importante da minha vida.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo realizar um estudo do conceito de equação, utilizando como fonte de dados uma coleção de livro didático do 6° ao 9° anos do ensino fundamental. O referencial teórico teve como base o ensino da álgebra e os multisignificados das equações. Foi utilizada uma pesquisa qualitativa do tipo documental, pois está sendo adotado o livro didático como fonte para produção dos dados. A pesquisa tem como foco o estudo dos livros didáticos de matemática dos últimos dois PNLD, editais 2022 e 2023 no município de Vitória da Conquista-BA, a fim de saber, com base nos conteúdos dos livros didáticos, como o conceito de equação está sendo comunicado aos estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental. A análise tem como parâmetro a classificação proposta por Alessandro Ribeiro em que apresenta seis conceitos distintos para equação. A partir do estudo dos livros pôde ser percebido que o conceito de equação foi comunicado de cinco formas distintas: intuitiva-pragmática, processual-tecnicista, estrutural-conjuntista, dedutivo-geométrico e estrutural-generalista. Com base no estudo realizado, espera-se que os atuais e futuros professores reconheçam a importância do ensino de equações, pois é um conteúdo primordial para o bom andamento dos demais conteúdos de matemática que utilizam em diversos momentos a resolução de equações para se obter o resultado desejado, a partir da utilização dos variados conceitos, favorecendo o ensino e aprendizado dos estudantes.

Palavras-chave: Ensino de Álgebra; Multisignificados; Formação de professores de Matemática;

ABSTRACT

This work aims to conduct a study on the concept of equations, using a collection of textbooks for grades 6 to 9 of elementary school as the data source. The theoretical framework was based on the teaching of algebra and the multiple meanings of equations. A qualitative, documentary-type research was conducted, as the textbook was adopted as the source for data production. The research focuses on the study of mathematics textbooks from the last two PNLD cycles, 2022 and 2023 editions, in the municipality of Vitória da Conquista-BA, to determine how the concept of equations is communicated to students in the final years of elementary school based on the content of the textbooks. The analysis follows the classification proposed by Alessandro Ribeiro, which presents six distinct concepts for equations. From the study of the textbooks, it was observed that the concept of equations was communicated in five distinct ways: intuitive-pragmatic, procedural-technocratic, structural-set-theoretic, deductive-geometric, and structural-generalist. Based on the conducted study, it is hoped that current and future teachers will recognize the importance of teaching equations, as it is a fundamental topic for the smooth progression of other mathematical topics that often require solving equations to achieve the desired results. This recognition, through the use of various concepts, enhances the teaching and learning processes for students.

Keywords: Teaching Algebra; Multiple Meanings; Mathematics Teacher Education;

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Se perguntamos para diversas pessoas o que lhes vem à mente quando questionadas sobre o significado de uma equação, muitos diriam que se trata de uma igualdade, cujo objetivo é encontrar o famoso valor de x. Essa percepção foi a que eu nutri ao longo de todo meu Ensino Fundamental e Médio. Porém, o momento que parei e refleti, de maneira mais formal, sobre as equações foi quando saí do Ensino Médio (EM) e me deparei com o fato de que não tinha assimilado o que estava por trás da resolução de uma simples equação. Isso porque eu reconhecia a relevância desse conteúdo para o andamento dos estudos.

Ademais, a disciplina de Estágio Supervisionado, na graduação, foi determinante para que eu pudesse me debruçar sobre como o ensino e aprendizado de equações estava acontecendo. percebi o quanto é difícil apresentar as noções de equações para os diferentes níveis de ensino que estagiei, desde o ensino fundamental ate a Educação de Jovens e Adultos (EJA).

A importância do estudo das equações se dá pela relevância da álgebra no ensino de matemática. Pois é uma forma de generalizar os conceitos da Aritmética, desenvolver o pensamento para compreender e interpretar os diversos cenários do cotidiano (Bianchini; Lima, 2021). Além disso, as equações podem ser um meio para que os estudantes comecem a ter apreço pelo ensino da álgebra e, consequentemente, pelos demais conteúdos que estão estritamente ligados, tais como geometria, funções, grandezas e medidas, entre outros. As equações não representam um ensino isolado, mas permeiam todo o ensino, fato este que reforça ainda mais o seu valor.

Na matemática, problemas com equações são abordados de diferentes formas e ocorrem por meio de uma situação em que a pessoa queira chegar a uma solução, mesmo não conhecendo todos os caminhos possíveis (Newell, 1972). E com isso, as formas de ensino tendem a ser por meios mais fáceis que cheguem a respostas rápidas, e o processo se torna cada vez mais mecânico e menos reflexivo (Díaz-Rodríguez, 2011). Ou seja, sem que o estudante esteja sabendo o porquê de cada passo que ele faz para chegar a resposta. O processo para resolver é muitas vezes ignorado, mas é o mais importante, visto que é progredindo para a resposta que o conhecimento vai sendo adquirido, a resposta é meramente uma consequência.

A matemática para o ensino visa abordar um conteúdo de forma que possa facilitar a aprendizagem dos estudantes, essa abordagem pode ser feita de diferentes maneiras, que vai desde uso de metodologias diferentes à melhorias nas metodologias usadas, exemplo disso é na melhoria da aprendizagem baseada em problemas que pode ser aperfeiçoada. Além do mais, de acordo com Rangel (2015) é um conhecimento essencial para o professor da Educação Básica. E uma das maneiras de ter um ensino de qualidade é apresentar para os estudantes os conceitos matemáticos de forma correta, para que os estudantes possam assimilar o que está sendo ensinado.

Podemos descatar, que um dos documetos mais importante sobre o ensino é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que é um documento normativo que rege a Educação Básica no Brasil. Esse documento foi homologado em 2017 pelo Ministério da Educação, em que determina as habilidades, competências e a principais aprendizagens que os estudantes terão que desenvolver durante os anos de ensino-Educação Infantil, Ensino Fundametal e Ensino Médio.

Como o estudo sobre as equações é importantíssimo para o ensino, visto que na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) o aprendizado de equações aparece em várias habilidades da unidade temática álgebra, assim, é fundamental que o estudante entenda o conceito de forma clara. Em virtude disso, Ribeiro (2007) em sua tese aborda como o conceito desse tópico pode ser retratado e elenca seis maneiras diferentes. O **Intuitivo-Pragmático** tem a ideia de equação como dada por uma noção de igualdade; o **Dedutivo-Geométrico** a noção de equação está ligada a ideias geométricas como segmentos e curvas; a **Estrutural-Generalista** tem como característica conceber a equação como uma estrutura que possui propriedades determinadas; a **Estrutural-Conjuntista**, concede a ideia de equação ligada a noção de conjuntos; a **Processual-Tecnicista** é dada pelos seus métodos, técnicas para resolver as equações; o **Axiomático- Postulacional**, concede a equação como uma noção primitiva que não precisa de uma definição, assim como Euclides ao falar de ponto, por exemplo. Tendo em vista esses multisignificados é possível aprimorar o ensino das equações na Educação Básica, pois é viável fazer uso de todos eles de acordo com o contexto da aula.

Na Educação Básica, uma das formas mais utilizadas para repassar os conteúdos aos estudantes, utilizado pelos professores, é o livro didático, visto que contribui para direcionar o processo de ensino aprendizagem (Brandão, 2013). É relevante escolher bons livros, pois o estudante irá acompanhar os conteúdos por eles transmitidos. No ensino de matemática é importante que os professores fiquem atentos não só aos conteúdos abordados, mas também a maneira com que é colocado, principalmente os conceitos para que seja feita uma boa escolha.

A partir do interesse de saber como as equações são conceituadas e por meio do estudo de Ribeiro (2007) sobre os multisignificados de equação, e objetivando desmistificar a visão de que uma equação seja apenas uma igualdade, na qual procuramos encontrar uma solução para x, surgiu o interesse em estudar o tema abordado. Assim, fez-se necessário o seguinte questionamento: “Como o Conceito de Equação é abordado no livro didático?”

Com o propósito de saber como o conceito de equação é tratado nos livros didáticos, este trabalho de abordagem qualitativa, de caráter documental, tem como fonte uma edição de livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental do município de Vitória da Conquista- BA. Essa escolha teve como base o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) que é destinado a avaliar e a disponibilizar obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à prática educativa nos diferentes segmentos da Educação Básica no Brasil. Com isso, percebemos que nos editais de 2022 e 2023 a escolha foi pela mesma coleção. Além disso, o município tem como política padronizar o mesmo livro em todas as escolas da rede municipal, a partir de uma assembleia realizada por todos os professores. Diante disso, a coleção para o estudo neste trabalho foi “A conquista-Matemática”(Giovanni Júnior, 2022a,b,c,d)

Ademais, após o estudo dos livros didáticos, foi feita uma análise crítica de como o Ensino do Conceito de Equação está sendo comunicado no livro didático. Com isso, proporcionar aos profissionais de educação maneiras para abordar esse conteúdo tão importante para o desenvolvimento dos estudantes. E ser uma forma de contribuir para as pesquisas futuras que queiram aprimorar o estudo em relação ao Conceito de Equação.

Diante desse trabalho espera-se que os professores possam ter maior cuidado diante da exposição do Conceito de Equação ao longo dos conteúdos. Além do mais, é uma maneira de perceberem que os conceitos matemáticos possuem grande relevância para a aprendizagem dos estudantes, não é apenas uma mera informação que deve ser passada de forma superficial, e cada vez mais ir deixando de lado a mecanização do ensino de matemática.

Assim, este trabalho está organizado em três capítulos. O primeiro apresenta a revisão bibliográfica tendo como base o ensino de álgebra voltado para as equações, apresenta os multisignificados propostos por Ribeiro (2007), além disso uma abordagem sobre a matemática para o ensino. No segundo capítulo é apresentada a metodologia. No capítulo três é apresentada a análise dos livros didáticos e o estudo de como cada multisignificado é abordado. Para finalizar, as conclusões do trabalho foram apresentados nas considerações finais.

Capítulo 1

Revisão bibliográfica

Esse tópico é dividido em três seções, sendo a primeira um breve contexto do ensino de álgebra nos anos finais, visto que se trata da área de matemática em que as equações são trabalhadas. Na segunda seção será abordada os multisignificados das equações de acordo Ribeiro (2007). Já a terceira seção tem como finalidade abordar a Matemática para o Ensino do Conceito de Equação.

1.1 O ensino de Álgebra nos anos finais do ensino fundamental

Um dos grandes desafios no ensino de matemática é a inserção da Álgebra no decorrer do ensino e como ensinar de forma que os estudantes compreendam as relações de igualdade, desigualdade, entre outras . E assim, não acharem o conhecimento irrelevante para o seu dia a dia, visto que a todo momento o professor é questionado sobre o porquê de aprender um determinado assunto.

A BNCC (BRASIL, 2018) compreende a Álgebra como uma das unidades temáticas que os alunos devem estudar durante o ensino fundamental, tanto nos anos iniciais quanto nos finais. Assim, é um conhecimento que os estudantes vão construindo ao passar dos anos de forma que o aprendizado esteja interligado com o próximo, por conta disso, a importância de compreender os conceitos de forma clara para que facilite a aquisição de novos conteúdos.

Sabe-se que o contexto histórico com que os fundamentos da matemáticas foram sendo criados é de grande importância para o ensino da álgebra, pois segundo Lopes (2021, p. 22)

> O entendimento da história da Álgebra é um elemento básico para o professor fundamentar sua prática, utilizar como um mecanismo de aprendizagem que permita auxiliar seus alunos na compreensão de conceitos e na construção do pensamento algébrico.

Como isso, os professores, como forma de melhorar o ensino, poderiam fazer uso da história dos egípcios, babilônios, mulçumanos, árabes, hindus, chineses, gregos, entre outros para iniciarem os conteúdos que envolvessem a álgebra. Ribeiro (2007), por exemplo, utiliza da história de alguns povos para contextualizar os multisignificados das equações.

Assim, é importante o professor ter em mente que o pensamento algébrico não está internalizado no ambiente escolar (Almeida, 2006) e que para isso acontecer é preciso um esforço tanto do professor de inovar a forma de ensinar, como a abertura dos estudantes em aprender. Essa fase do ensino fundamental é bastante tumultuada, pois os estudantes estão na fase da adolescência e o ensino mudou comparado aos anos iniciais.

Ademais, tendo uma boa preparação, os estudantes não irão ter dificuldades no andamento dos estudos, e conseguirão aprender as relações algébricas tão importantes ao longo do ensino e da aprendizagem. E diante disso, entender as equações de forma correta, ou seja, por meio das relações fundamentadas pela lógica matemática e através dos multisignificados entender como as equações podem ser expressas de diferentes maneiras.

1.1.1 O ensino das equações

As equações possuem muita importância no ensino de matemática, e também é por elas que as grandes dificuldades na aprendizagem aparecem, visto que os estudantes não compreendem o conceito da maneira correta e torna o estudo das equações uma mecanização no momento de resolver os problemas. Assim,

> A resolução de problemas, em meio às equações matemáticas, é vista como uma situação onde o problema é desencadeador do processo de aprendizagem. Uma vez que o aluno será inserido num movimento de pensamento e elaboração de conhecimentos visando resolver o problema enfrentando-o, por meio de utilização de conceitos matemáticos (Negromonte *e outros*, 2019, p. 20.616).

O processo de resolução de problemas que envolve equações é propício para o ensino aprendizagem dos estudantes, pois é o momento em que os estudantes compreendem as regras matemáticas que estão por trás de cada passo dado até a resposta final. Um fato interesse de ser abordado é quando os estudantes vão resolver uma equação do tipo $x + 10 = 20$ e no livro "Os Elementos" de Euclides traduzido por Bicudo (2009) no tópico denominado "Noções comuns" é abordado o seguinte,

> 1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
> 2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
> 3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
> 4. E, caso iguais sejam adicionadas a dessiguais, os todos são desiguais.

Diante dessas noções de Euclides é possível resolver a equação mencionada acima utilizando as noções relativas a igualdade como propostas em Os elementos, explicando que a regra usualmente utilizada pelos professores no processo de ensino das equações: passar o número para o outro lado com sinal trocado, tem fundamento nessas noções. Os estudantes precisam compreender que as operações realizadas decorrem do fato de poder adicionar ou subtrair quantidades iguais aos membros de uma equação, uma vez que ela apresenta uma igualdade entre dois membros. Dessa forma, o estudante tem a oportunidade de compreender o significado e propriedades das equações.

Assim, umas das formas de contornar os problemas em relação ao aprendizado é apresentando o conceito de equações de forma coerente, até que o estudante compreenda a resolução dos problemas. Ribeiro (2007) apresenta diferentes maneiras de abordar a noção de equação, a fim de auxiliar no ensino de matemática, principalmente nos anos finais do ensino fundamental. O próximo tópico tem por objetivo discorrer sobre esses multisignificados.

1.2 Os multisignificados de equação segundo Ribeiro

Ribeiro (2007), ao perceber que a forma como conceber as equações foi evoluindo de acordo com a evolução da matemática de cada civilização, decidiu conceituar as equações em seis significados diferentes. Com o intuito de deixar o aprendizado mais sólido, ou seja, que proporcione que o estudante aprenda o conteúdo de forma eficaz e tenha um senso crítico diante das questões. A seguir, será feita uma breve explicação de cada conceito.

1. **Intuitivo-Pragmático**- Essa forma de conceber as equações tem como exemplo os babilônios e egípcios utilizavam e a maioria dos livros didáticos inclusive o que está sendo utilizado na pesquisa. Se dá concebendo a equação como uma ideia intuitiva e extremamente interligada com o fato de ser uma igualdade. Além do mais, está relacionada com problemas práticos do cotidiano. Veja o seguinte exemplo,

   Exemplo: Numa brincadeira de final de ano um grupo de amigos decidiu brincar de caça tesouros e pediu a ajuda de uma pessoa adulta para fazer enigmas e para abrir o baú, a pessoa fez o seguinte : Para encontrar o número que irá abrir o baú, pense que esse número quando somado a 5 resulta em 12. Qual é esse número que irá abrir o baú? Explique de que forma foi utilizada a ideia de igual para se chegar a essa resposta. (Adaptada pela autora)

2. **Dedutivo-Geométrico**- Essa forma de conceber as equações tem como exemplo os Gregos e o matemático Omar Khayyam. Se dá concebendo as equações tendo em vista as figuras geométricas, segmentos e curvas. E com isso envolver as operações com segmentos e medidas dos lados de figuras geométricas. "Os Elementos" de Euclides faz bastante uso dessa forma de conceituar as equações. Veja o seguinte exemplo,

Exemplo: Marcelo comprou um terreno que possui formato um retângulo, com dimensões de 27 metros de comprimento e 12 metros de largura. Sua irmã Tatiane comprou um terreno com a mesma área, entretanto, com formato quadrado. Qual a medida do lado do terreno de Tatiane? (Adaptada pela autora)

3. **Estrutural-Generalista**- Essa forma de conceber as equações tem como exemplo os matemáticos al-Khwarizmi, Descartes, Abel e Galois. As equações são concebidas com uma estrutura bem definida, propriedades e características próprias. Tem como base encontrar soluções gerais, fato bastante usado pelos matemáticos árabes. Exemplo disso são as fórmulas fechadas para resolver equações de primeiro e segundo grau. Veja o seguinte exemplo,

   Exemplo: Seja a equação $ax + b = cx + d$, com $a \neq c$. Encontre uma forma geral para o valor de x. Depois responda qual valor de x satisfaz $3x+7 = 6x-4$ utilizando a generalização. (Adaptada pela autora)

4. **Estrutural-Conjuntista**- Essa forma de conceber as equações tem como exemplo os matemáticos Rogalski, Warusfel, Bourbaki. As equações apesar de estarem dentro de uma estrutura é concebida diretamente com a noção de conjunto. Tal forma se mostra na resolução de questões que envolvam operações entre conjuntos. Veja o seguinte exemplo,

   Exemplo: Determine o conjunto solução da seguinte equação, $x + 5 = 87 + a$ para $a \in \mathbb{R}$. (Adaptada pela autora)

5. **Processual-Tecnicista**- Essa forma de conceber as equações tem como exemplo as pesquisas feitas em Educação Matemática, como po exxemplo em Cotret (1997). As equações são concebidas de forma a dar ênfase para sua resolução, e nas técnicas que são utilizadas para chegar na resolução. De acordo com Ribeiro (2007, p. 126), "Diferentemente dos estruturalistas, não enxergam a equação como um ente matemático". Essas é umas das formas que o ensino utiliza com bastante frequência. Veja o seguinte exemplo,

   Exemplo: Resolva a seguinte equação $5x + 10 = 2$.(Adaptada pela autora)

6. **Axiomático-Postulacional**- Essa forma de conceber as equações tem como exemplo Chevallard, e de acordo com os pesquisadores este deveria ser o primeiro conceito de equação que deveria ser ensinado aos estudantes. As equações seria dada como uma noção que precisa ser definida, ou seja, dada como Noção Primitiva, assim como é feito em geometria euclidiana, como por exemplo a noção de ponto e reta (Ribeiro, 2007). Veja o seguinte exemplo,

   Exemplo: Um comerciante está vendendo frutas em sua banca. Ele sabe que, se somar o valor de 5 laranjas e 3 bananas, o total será $15,00$ reais. Ele também sabe que o preço de cada banana é $2,00$ reais . Qual é o preço de uma laranja? Pergunte aos estudantes qual será o valor de cada banana de forma intuitiva sem dizer o conceito de equação. (Adaptada pela autora)

Diante desses multisignificados das equações, pretende-se fazer um estudo dos livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental e elencar quais são os multisignificados que estão sendo abordados ao longo do livro.

1.3 A Matemática para o Ensino do Conceito de Equação

O ensino da matemática é algo que vem sendo estudado há muito tempo por diversos estudiosos, a fim de encontrar uma melhor forma de conceber esse ensino nos diferentes níveis de escolaridade, pois a matemática, enquanto disciplina, possui características diferentes de outras profissões, como a engenharia, arquitetura, entre outros, fato este abordado por De Macêdo Santana, Menduni-Bortoloti e Giraldo (2024).

Com isso, é importante que o professor de matemática assuma uma postura que colabore para o aprendizado dos estudantes. Para isso, é preciso que o professor possua conhecimento matemático, ou seja, as estruturas matemáticas, as definições, propriedades. Tal conhecimento é adquirido ao longo dos anos de estudo e é de fundamental importância. É indispensável que o professor possua um ensino especializado para a matemática, isto é, domínio sobre as metodologias de ensino, sabendo utilizá-las de forma correta, no momento correto de acordo com o público em que aquele conteúdo está sendo abordado. Assim, garantirá que o aprendizado seja efetivo e os estudantes consigam obter um maior aproveitamento. Além disso, é fundamental que o professor tenha conhecimento do currículo, saiba como desenvolver as avaliações, conheça os estudantes, o que implica em saber suas principais dificuldades diante da matemática, e, a partir daí, procurar soluções para uma melhor forma de ensino.

Um dos conteúdos mais abordados durante o ensino fundamental envolve a resolução de equações, seja ela do primeiro ou segundo grau. Por isso, o professor deverá abordar tal conteúdo de maneira sólida para que os estudantes desde os primeiros anos do ensino fundamental, visando um melhor desempenho nos anos seguintes. Por essa razão, a importância de que o professor esteja preparado para aplicar esse conteúdo. Assim, segundo De Macêdo Santana, Menduni-Bortoloti e Giraldo (2024), é importante que o professor estude, investigue, problematize, projete, intérprete, sistematize, socialize, reflita, compreenda e explique as diferentes formas de conceber o ensino de matemática.

Como já foi mencionado, o ensino das equações, muitas vezes, é feito de forma mecanizada, e assim não ajuda na aprendizagem. Em vista disso, uma das formas de considerar essa questão é analisar como as equações são conceituadas, de acordo com Ribeiro (2007).

Dessa maneira, surge o interesse em ter uma Matemática para o Ensino do Conceito de Equação.

Assim como Menduni-Bortoloti (2016, p. 87), iremos identificar o conceito de equação nos livros didáticos de matemática. A autora ainda menciona que: “A expressão empregada - matemática para o ensino - demarca um tipo de matemática, isto é, a que é utilizada com o propósito de ensino pelo professor.”. Daí a importância dos professores se preparem para dar aulas, fato que é amplamente discutido no curso de licenciatura em matemática.

É fundamental que os professores possuam conhecimento formal dos conceitos matemáticos e, além disso, dominem as maneiras como o conteúdo será repassado para os estudantes (Oliveira, 2024). É primordial que os professores impulsionem o pensamento crítico dos estudantes, ou seja, que não apenas aplique o conteúdo de forma que o estudante fique de maneira passiva e não gere conhecimento do que está sendo abordado. Caso contrário, os estudantes podem ser levados a acreditar que aprender matemática é apenas decorar um amontoado de fórmulas para serem aplicadas nos exercícios e avaliações (Moreira; Silva; Alves, 2021).

Esse fenômeno de apenas explicar o conteúdo para memorização de fórmulas que acomete muitos professores, têm grande influência da formação na qual esses professores foram inseridos, isto é, da maneira pela qual o ensino deve ser conduzido. Outros perdem a gestão da sala de aula, ignoram o aprendizado dos estudantes e priorizam apenas a finalização dos conteúdos. Assim, podemos perceber que o ensino é contínuo e precisa ser aperfeiçoado continuamente para alcançar melhores resultados.

Capítulo 2

Metodologia

Este estudo é de cunho qualitativo e é do tipo documental, tendo em vista que o documento neste caso é o livro didático de matemática. De acordo com Denzin e Lincoln (2006, p. 17),

> A pesquisa qualitativa tem um significado diferente em cada um desses momentos. No entanto, pode-se oferecer uma definição genérica, inicial: a pesquisa qualitativa é uma atividade situada que localiza o observador no mundo. Consiste em um conjunto de práticas materiais e interpretativas que dão visibilidade ao mundo. Essas práticas transformam o mundo em uma série de representações, incluindo as notas de campo, as entrevistas, as conversas, as fotografias, as gravações e os lembretes.

Além de ser de cunho qualitativo, a pesquisa é do tipo documental, que de acordo com Pádua (2019, p. 62), se dá da seguinte forma,

> Pesquisa documental é aquela realizada a partir de documentos, contemporâneos ou retrospectivos, considerados cientificamente autênticos (não fraudados); tem sido largamente utilizada nas ciências sociais, na investigação histórica, a fim de descrever/comparar fatos sociais, estabelecendo suas características tendências [...]

Com isso os livros didáticos é uma fonte documental que se encaixa nessas características citadas acima por Pádua. Os livros didáticos que utilizamos foram do 6°, 7°, 8° e 9° anos do ensino fundamental, a coleção intitulada "A conquista - Matemática" (Giovanni Júnior, 2022a,b,c,d). Essa seleção foi embasada na escolha consecutiva do município de Vitória da Conquista nos últimos dois editais do PNLD da mesma coleção. Além do mais, o município adota uma única coleção para todas as escolas da rede municipal.

O estudo dos livros foi feito em três fases segundo Godoy (1995) a pré-análise, exploração do material e o tratamentos dos resultados. A pré-análise é o primeiro contato com o livro, procurando saber quais assuntos foram abordados e as partes mais relevantes da pesquisa. Nesse momento foi realizado um rastreamento dos capítulos em que é abordada as equações, visto que não foi realizada a análise do livro inteiro.

A exploração do material foi feita já tendo em vista os multisignificados das equações segundo Ribeiro (2007). Com cada livro foi realizado um resumo individual e já sendo feita a separação dos multisignificados. Por fim, com o resultado em mãos, foi feita uma análise crítica sobre como os multisignificados foram abordados nos livros didáticos de Giovanni Júnior (2022).

Para o estudo dos livros, na pré-análise, os capítulos selecionados foram os que tinham como foco o estudo das equações, o livro do 6° foi o único que não tinha um capítulo específico para se falar de equação, assim, analisei a parte que aborda as operações com números reais em que o autor mostra as propriedades das operações. Já no 7°, 8° e 9° anos utilizei capítulos específicos que abordam as equações. Por exemplo, no 7° ano ocorre a introdução ao conceito de equação e ao estudo das equações do 1° grau, destaca-se, nesse capítulo, a ideia de igualdade, a noção de equação, o conjunto universo e solução de uma equação, as equações equivalentes e, em seguida as equações do 1° aplicadas à resolução de problemas. O 8° ano inicia com as equações do primeiro grau, dando ênfase na resolução. Em seguida, aborda as equações fracionárias, equações do primeiro grau com duas incógnitas, e utiliza para introdução de sistemas de duas equações de grau um e a suas resoluções. Após isso, apresenta, de forma introdutória, as equações do 2° grau. O livro do 9° dedica-se ao estudo das equações do segundo grau. Inicialmente, apresenta a equação de grau dois, seguida das diversas maneiras de resolvê-las. Na sequência, faz uma rápida abordagem sobre as equações biquadradas e irracionais.

Ao explorar o material me dediquei em analisar como o conceito de equação estava sendo comunicado, ou seja, observei quais multisignificados o autor utilizou para explorar o conceito de equação, isto foi realizado por ano. E após isso, utilizei uma tabela para observar quais multisignificados foram encontrados em cada ano.

Ao analisarmos cada livro didático percebemos que apenas um dos conceitos propostos por Ribeiro (Ribeiro, 2007) não apareceu, que foi o axiomático-postulacional que conceitua equação como uma noção primitiva. Já os demais conceitos aparecem de forma diversificada em cada ano, como é possível observar no quadro 1 abaixo:

Livro didático (Ano) / Conceitos	6°	7°	8°	9°
Intuitivo-Pragmático	X	X	X	
Processual-Tecnicista		X	X	X
Estrutural-Conjuntista		X		
Dedutivo-Geométrico		X	X	X
Estrutural-Generalista			X	X
Axiomático-Postulacional	—	—	—	—

Quadro 1: Relação entre conceitos e livros didáticos por ano.

E, para tratar dos resultados, realizamos uma análise de cada multisignificado, identificando quais foram as diferenças de abordagem em cada ano e o porquê de tais mudanças.

Para observar essas diferenças, separamos os exercícios por multisignificados e, em seguida, discorremos sobre como o conteúdo avançou em cada ano, utilizando o multisignificado de equação analisado, ou seja, a evolução do conteúdo em termos de complexidade. Com isso, finalizamos a análise do conceito de equação nos livros didáticos.

Capítulo 3

Estudo dos livros e discussões

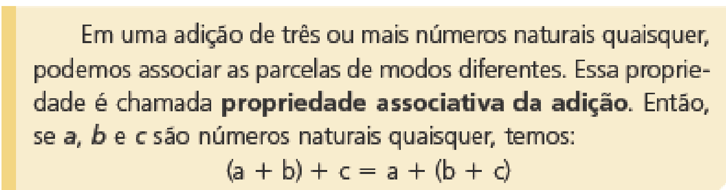
Nessa parte será realizada a análise e discussões recorrentes aos livros didáticos. Para análise foi utilizada a coleção A Conquista Matemática de José Ruy Giovanni Júnior do 6°, 7°, 8° e 9° ano do Ensino Fundamental. Além do mais, a análise e discussão será realizada por ordem de ano em seções separadas para um melhor entendimento e em seguinda de por cada multisignificado. Para que não haja confusão entre os livros será colocado (a), (b), (c) e (d) para as edições do 6°, 7°, 8° e 9° anos, respectivamente.

3.1 O conceito de equação nos livros didáticos

3.1.1 6º ano do Ensino Fundamental

Temos que no livro do 6° ano do Ensino fundamental, o estudo das equações ainda não é realizado de forma explícita, mas apenas por trás do conteúdos que vão sendo abordados como no caso das propriedades da adição e multiplicação.Veja a figura 1

Figura 1: Propriedade da adição


Em uma adição de três ou mais números naturais quaisquer, podemos associar as parcelas de modos diferentes. Essa propriedade é chamada **propriedade associativa da adição**. Então, se ***a***, ***b*** e *c* são números naturais quaisquer, temos:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Fonte: (Giovanni Júnior, 2022a, p. 38)

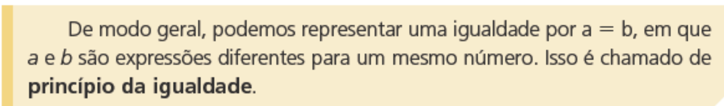
Tal abordagem é conceituada por Ribeiro (2007) como **intuitivo-pragmático**, que é justamente à noção de igualdade entre duas quantidades, como é possível visualizar na figura 1. Com isso, teremos uma abordagem superficial das equações ao longo deste livro didático de Giovanni Júnior (2022), pois não possui algo específico que priorize as equações.

Nesse momento, os estudantes irão compreender os conceitos básicos das propriedades de adição, subtração, multiplicação e divisão. O conceito de equação, de forma mais detalhada, será abordado nos anos posteriores, com maior ênfase. Porém, ele já deveria ser discutido desde este momento, visto que é imprescindível para o desenvolvimento dos alunos. De acordo com a BNCC, na unidade temática Álgebra os alunos devem desenvolver a habilidade EF06MA14, que propõe "Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas."(BRASIL, 2018), por isso que não tem muito foco no ensino restrito das equações.

3.1.2 7º ano do Ensino Fundamental

No livro do 7° ano, Giovanni Júnior (2022) apresenta um capítulo específico somente para o conteúdo de equações e equações do 1° grau, iniciando com a abordagem das expressões algébricas e a ideia de variável. Em seguida, já define o que é igualdade e qual símbolo é utilizado para representar uma igualdade. De acordo com Ribeiro (2007), esse caso já inicia a conceituação tendo em vista o modo **intuitivo-pragmático**, que conceberá as equações como sendo igualdade entre dois membros, a definição proposta pelo autor pode ser observada na figura 2.

Figura 2: Definição de igualdade.


De modo geral, podemos representar uma igualdade por a = b, em que *a* e *b* são expressões diferentes para um mesmo número. Isso é chamado de **princípio da igualdade**.

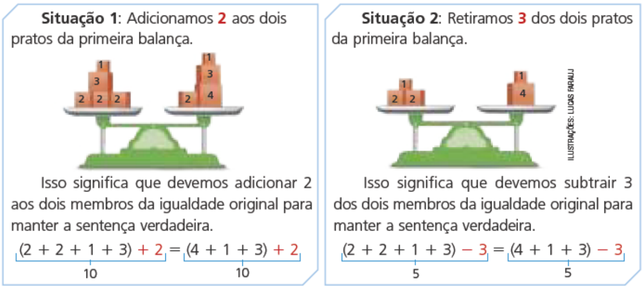
Fonte: (Giovanni Júnior, 2022b, p. 137)

Os estudantes terão contato com uma definição sobre igualdade que já é um prelúdio para a aprendizagem do conceito de equação. É importante esse primeiro contato com a noção de igualdade para que seja possível compreender a lógica por trás das equações.

Dando andamento, Giovanni Júnior (2022) mostra a ideia de equivalência utilizando como instrumento didático o uso de balanças, em que são comparados pesos de formatos diferentes, mas que possuem a mesma massa, que pode-se ser visualizada na figura 3.

A utilização de balanças é uma forma do estudante ter contato direto com a noção de "equilíbrio" que está por trás do conceito de equação, visto que é um instrumento que pode facilitar o aprendizado, principalmente dos estudantes que necessitam de algo concreto para efetivar o conhecimento. E a matemática tem muitas coisas abstratas na maioria das vezes que dificultam a aprendizagem, exemplo disso é abordar a procura do x na equação de forma direta sem contextualizar com coisas práticas e ir acrescentando as formalizações matemáticas com a evolução do conteúdo.

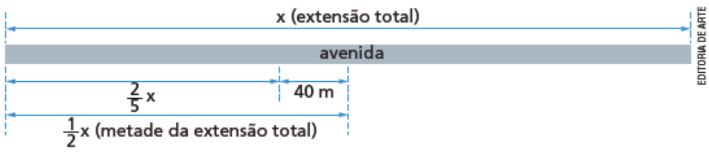
Figura 3: Utilização de balanças como noção de equivalência.



Fonte: (Giovanni Júnior, 2022b, p. 138)

Essa noção de equivalência utilizada pelo autor será de fundamental importância para que os estudantes possam compreender o conceito de equação tendo em vista a conceituação através do modelo **intuitivo-pragmático**. E Giovanni Júnior (2022) inicia falando das equações no sentido de encontrar um valor desconhecido, que tem como base a conceituação utilizando a forma **processual-tecnicista**, ou seja, conceber a equação através de suas técnicas de resolução. Ele utiliza como exemplo o que é posto na figura 4.

Figura 4: Comprimento de uma avenida.



Fonte: (Giovanni Júnior, 2022b, p. 140)

E equaciona as informações dispostas na figura 4 da seguinte maneira,

$$\frac{2}{5}x + 40 = \frac{1}{2}x$$

Tal procedimento requer do estudante um senso de interpretação aguçado para perceber as relações de distância com os valores de x para que seja possível modelar uma equação e encontrar o valor de x.

Em seguida (Giovanni Júnior, 2022b) mostra o conjunto universo e solução de uma equação, que tem como base o modo de conceituar **estrutural-conjuntivista**, que segundo (Ribeiro, 2007) é a equação concebida dentro de uma visão estrutural, porém diretamente ligada à noção de conjunto. Giovanni Júnior (2022), aborda o seguinte exemplo mostrado na figura 5.

Figura 5: Conjunto solução e universo de uma equação.

1 Que elemento do conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ pode-se colocar no lugar da letra *x* para tornar verdadeira a igualdade $x + 2 = 6$?

Fazendo a substituição, temos:

$x + 2 = 6 \longrightarrow (0) + 2 = 6$ (F)
$x + 2 = 6 \longrightarrow (1) + 2 = 6$ (F)
$x + 2 = 6 \longrightarrow (2) + 2 = 6$ (F)
$x + 2 = 6 \longrightarrow (3) + 2 = 6$ (F)
$x + 2 = 6 \longrightarrow (4) + 2 = 6$ (V)
$x + 2 = 6 \longrightarrow (5) + 2 = 6$ (F)

Verificamos que apenas o número 4 torna a sentença verdadeira, ou seja, o 4 é o elemento que satisfaz a equação dada.

- O conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, formado por todos os elementos que a incógnita *x* pode assumir, é denominado **conjunto universo** da equação.
- O número 4 é a **solução** ou a **raiz** da equação.

Fonte: (Giovanni Júnior, 2022b, p. 143)

Adiante, Giovanni Júnior (2022) apresenta o que são equações equivalentes e define do seguinte modo, conforme disposto na figura 6.

Figura 6: Definição de equações equivalentes.

Em um mesmo conjunto universo, duas ou mais equações que apresentam a mesma raiz ou solução são denominadas **equações equivalentes**.

Fonte: (Giovanni Júnior, 2022b, p. 147)

Com isso, é retomada a ideia da utilização de balanças como recurso para o ensino das equações que são equivalentes, além disso Giovanni Júnior (2022) mostra como é feita a resolução desse tipo de equação utilizando para isso o que Ribeiro (2007) chama de **processual- tecnicista**, isto é, mostra as técnicas de resolução de uma determinada equação passo a passo tendo em vista as verdades matemáticas, veja a figura 7.

Figura 7: Resolução de uma equação.

$x + 3 = 8 \longrightarrow$ **Equação dada, para a qual $S = \{5\}$.**
$x + 3 + (-3) = 8 + (-3) \longrightarrow$ **Adicionamos (-3) aos dois membros da equação.**
$x + 3 - 3 = 8 - 3 \longrightarrow$ **Anulamos números opostos que estão no mesmo membro.**
$x = 5 \longrightarrow$ **Obtemos uma equação mais simples equivalente à equação dada, pois $S = \{5\}$.**

As equações $x + 3 = 8$ e $x = 5$ são equivalentes, pois ambas apresentam a mesma solução, o número 5.

Fonte: (Giovanni Júnior, 2022b, p. 147)

Tal processo é importante para que os estudantes compreendam que cada manipulação realizada em uma equação está de acordo com as verdades matemáticas e com isso eles irão perceber que os resultados não aparecem com os números ou incógnitas sendo "jogados" de um lado para o outro como se voassem. E isso, não garante que o estudante consiga realizar as ligações matemáticas para resolver qualquer tipo de questão.

Assim, a discussão de equações é finalizada com Giovanni Junior (2022) definindo o que é equação do 1° grau. E depois mostrando como resolver essas equações utilizando o modo **processual-tecnicista**, fazendo uso do princípio aditivo e multiplicativo, análogo ao mostrado na figura 7. E depois faz uma abordagem das equações em modelos do dia a dia, veja a figura 8 uma explicação de como proceder para a resolução de problemas contextualizados.

Figura 8: Tutorial para resolução de problemas do dia a dia

1º passo: Ler com atenção o problema e anotar os dados.
2º passo: Traduzir o enunciado para a linguagem algébrica, obtendo uma equação correspondente.
3º passo: Resolver a equação estabelecida.
4º passo: Analisar o resultado obtido e dar a resposta conveniente.

Fonte: (Giovanni Júnior, 2022b, p. 156)

Isso é essencial para que os estudantes não fiquem apenas na teoria, mas consiga perceber a relevância das equações nas situações do dia a dia em que se encaixa o conceito **intuitivo-pragmático**.

Essa maneira pela qual as equações do primeiro grau são tratadas é uma maneira de aproximar os estudantes com a matemática do cotidiano, facilitando a forma de construir o conceito de uma maneira correta.

3.1.3 8º ano do Ensino Fundamental

No livro do 8° ano Giovanni Júnior (2022) retoma o conceito de equação do 1° grau com o seguinte questionamento "Uma quantidade, sua metade, seus dois terços ,todos juntos são 26. Diga-me: qual é essa quantidade?". Diante dessa pergunta e com os conhecimentos adquiridos no livro do 7° ano os estudantes deverão montar a seguinte equação para encontrar essa quantidade, que denotaremos de x,

$$x + \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x = 26.$$

Essa pergunta é uma forma do professor investigar se os estudantes do 8° ano estão sabendo modelar e resolver uma equação, a partir dos dados oferecidos pelo problema. Isso contribui para que os estudantes façam o exercício de lembrar o que foi aprendendo no ano anterior. Pois, o ensino de matemática é uma construção que é realizada ano após ano e se as bases não estiverem bem fortalecidas, os estudantes não conseguirão fazer as ligações necessárias com os anos seguintes.

Em seguida, é discutido a importância da Álgebra, a aplicação de técnicas matemáticas para a resolução de equações (Giovanni Júnior, 2022c), que tem como base a conceituação **processual-tecnicista**. E mais uma vez mostra o passo a passo de resolução de uma equação do 1° grau e estende para resolução de problemas contextualizados. Veja na figura 9:

Figura 9: Resolução de uma equação do 1° grau.

3 Resolver a equação, $\frac{y-3}{8}+\frac{y+1}{6}=\frac{y-1}{12}$, em que $U = \mathbb{R}$.

$\frac{y-3}{8}+\frac{y+1}{6}=\frac{y-1}{12}$

$\frac{3(y-3)+4(y+1)}{24}=\frac{2(y-1)}{24}$ → **Reduzimos todos os termos ao mesmo denominador.**

$3(y-3)+4(y+1)=2(y-1)$ → **Usamos o princípio multiplicativo para eliminar os denominadores.**

$3y-9+4y+4=2y-2$ → **Eliminamos os parênteses.**

$7y-5=2y-2$

$7y-2y=-2+5$ → **Usamos o princípio aditivo.**

$5y=+3$

$y=\frac{3}{5}$ → **Usamos o princípio multiplicativo.**

A solução da equação é o número real $\frac{3}{5}$.

Fonte: (Giovanni Júnior, 2022c, p. 147)

Esta maneira de ensinar a resolver uma equação do primeiro grau, garante um aprendizado significativo proposto por Ausubel apud Barbosa (1982). No entanto, Giovanni Júnior (2022) coloca uma resolução bem detalhada, respeitando os princípios matemáticos, o princípio multiplicativo e aditivo. Os estudantes aprendendo dessa forma, terão uma base sólida e conseguirão resolver qualquer outro problema desse tipo sem dificuldades.

À frente Giovanni Júnior (2022) define o que é equação fracionária conforme exposta na figura 10, fazendo uso do multisignificado denominado por Ribeiro (2007) como **estrutural-generalista**, que tem como base a equação dado atráves de suas propriedades e estrutura.

Figura 10: Resolução de uma equação fracionária.

Uma equação é fracionária quando tem pelo menos uma incógnita no denominador, sempre fora de radical.

Fonte: (Giovanni Júnior, 2022c, p. 150)

Da mesma forma, para definir equações literais do 1° grau na incógnita x, as equações literais tem como principal característica o aparecimento de outras letras, além da incógnita x e a solução se dará em função dessa letra no conjunto dos números reais, veja a figura 11.

Figura 11: Equação literal do 1° grau na incógnita x.

1 Considerando x a incógnita, resolver a equação $8x + 7a = 2x + 25a$, em que $a \in \mathbb{R}$.

$8x + 7a = 2x + 25a$
$8x = 2x + 25a - 7a$
$8x = 2x + 18a$
$8x - 2x = 18a$
$6x = 18a$
$x = \frac{18a}{6} = 3a$

A solução da equação é $3a$.

Fonte: (Giovanni Júnior, 2022c, p. 154)

Esta maneira de ensinar é análoga a dada na figura 9, porém de maneira mais resumida, pois o estudante já tem um base formada anteriormente de como resolver uma equação. Mas seria interessante para a construção do conceito se tivesse nesse exemplo o passo a passo que foi realizado antes. Veja uma forma de resolver,

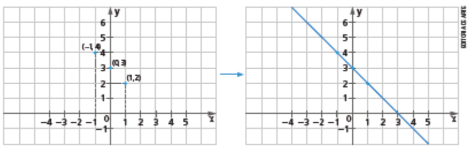
$$\begin{aligned}
&8x + 7a = 2x + 25a\\
&8x + 7a - 7a = 2x + 25a - 7a\\
&8x - 2x = 2x - 2x + 18a\\
&6x = 18a\\
&6x \cdot \frac{1}{6} = 18a \cdot \frac{1}{6}\\
&x = 3a
\end{aligned}$$

Em seguida Giovanni Júnior (2022) mostra a representação geométrica de uma equação do 1° grau com duas incógnitas que é uma reta, dado um par ordenado (x, y). Com isso, de acordo com Ribeiro (2007) é a forma de conceituar equações da maneira **dedutivo-geométrico**, ou seja, utilização da conceituação relacionada à situações envolvendo cálculos e operações com segmentos, com medida de lados de figuras geométricas e intersecção de curvas. Para a equação $x + y = 3$, por exemplo, a representação gráfica é dada na figura 12.

Figura 12: Representação gráfica da equação $x + y = 3$.

x	y	Par ordenado (x, y)
−1	$-1 + y = 3 \Rightarrow y = 3 + 1 = 4$	(−1, 4)
0	$0 + y = 3 \Rightarrow y = 3 - 0 = 3$	(0, 3)
1	$1 + y = 3 \Rightarrow y = 3 - 1 = 2$	(1, 2)

Depois, localizamos os pontos correspondentes a esses pares ordenados no plano cartesiano. Com o auxílio de uma régua, traçamos a reta que passa por esses pontos.



Fonte: (Giovanni Júnior, 2022c, p. 158)

A representação gráfica é uma forma do estudante fazer um *link* entre a álgebra e a geometria. O estudante perceberá que uma equação de duas incógnitas x e y pode ser representada por uma reta dados os pares ordenados (x, y). Além disso, é feita uma revisão de plano cartesiano e pares ordenados na reta real. Na BNCC, destaca-se a habilidade EF08MA08, que fala em resolver problemas com equações do 1° grau utilizando o plano cartesiano como recurso para interpretação (BRASIL, 2018).

Essa discussão proposta por Giovanni Júnior (2022) da representação gráfica da equação do 1° grau com duas incógnitas, será de fundamental importância para iniciar a próxima seção que será a resolução de sistema de duas equações do 1° grau com duas incógnitas. E a solução é dada utilizando novamente a conceituação **dedutivo-geométrico**, em que a solução desse sistema será a intersecção das retas que representam as equações, além disso é mostrado também a forma **estrutural-generalista** que é a maneira de resolver utilizando as técnicas algébricas divididas em: Método da Substituição e Método da Adição.

E para finalizar o 8° ano é dado uma pequana introdução sobre as equações do 2° grau (Giovanni Júnior, 2022c) que é da forma **estrutural-generalista** pois aborda a as propriedades e características em uma estrutura bem definida das equações, veja a figura 13.

Figura 13: Definição de equação do 2° grau.

SAIBA QUE

Uma equação do 2º grau completa é definida na forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, em que *a* é o coeficiente que multiplica x^2, *b* é o coeficiente que multiplica *x*, e *c* é o coeficiente independente. Nesse momento, vamos estudar apenas as soluções de equações do 2º grau incompletas da forma $ax^2 + c = 0$.

Fonte: (Giovanni Júnior, 2022c, p. 171)

Para isso, Giovani Júnior mostra como resolver equações do 2° da forma $ax^2 + c = 0$, que tem como base a conceituação processual-tecnicista, que a maneira que mais se utiliza em sala de aula. Veja a figura 14.

Figura 14: Solução de equação do 2° da forma $ax^2 + c = 0$

$2x^2 - 72 = 0$ → Usamos o princípio aditivo.

$2x^2 = 72$

$\frac{2x^2}{2} = \frac{72}{2}$ → Usamos o princípio multiplicativo.

$x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm\sqrt{36} = \pm 6$

Utilizamos a notação $x = \pm\sqrt{a}$ para representar $x = +\sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$.

A equação tem como soluções $x = -6$ ou $x = 6$, que indicamos assim: $S = \{-6, 6\}$.

Fonte: (Giovanni Júnior, 2022c, p. 171)

3.1.4 9º ano do Ensino Fundamental

No livro do 9°, Giovanni Júnior (2022) começa a parte específica de equações com as do 2° grau, abordando inicialmente o contexto histórico ao redor das equações de segundo grau, passando pelos babilônicos, gregos e árabes. Para início de conversa é dada uma equação de segundo grau que representa o movimento em queda livre de um corpo. Esta é uma maneira em que os alunos irão perceber a aplicabilidade das equações do segundo grau e se motivarem a estudarem o conteúdo de forma mais eficiente.

Temos que Giovanni Júnior (2022) irá mostrar a definição de uma equação do 2° grau, para que o conteúdo prossiga, veja na figura 15. A forma como ele conceitua é classificada de acordo com Ribeiro (2007) como **estrutural-generalista**, pois concede a noção de equação de forma estruturada e com propriedades e características próprias.

Figura 15: Definição de equação do 2° grau.

Denomina-se **equação do 2º grau na incógnita *x*** toda equação da forma ax² + bx + + c = 0, em que *a*, *b* e *c* são números reais, e a ≠ 0.

Fonte: (Giovanni Júnior, 2022d, p. 91)

Adiante, é abordado a forma **processual-tecnicista**, maneira em que dá ênfase para resolução e técnicas que são utilizadas. Na figura 16 é mostrada a resolução de uma equação do segundo grau que está incompleta.

Figura 16: Resolução equação do segundo grau incompleta.

Um número real é tal que seu quadrado é igual ao seu triplo. Qual é esse número?
Representando por *x* o número procurado, podemos escrever a equação x² = 3x.
x² − 3x = 0 → **forma reduzida**
x (x − 3) = 0 → **Colocamos *x* em evidência.**
Pela propriedade dos números reais, temos:
x = 0 → **uma raiz da equação**
ou
x − 3 = 0
x = 3 → **outra raiz da equação**
O número procurado é 0 ou 3.

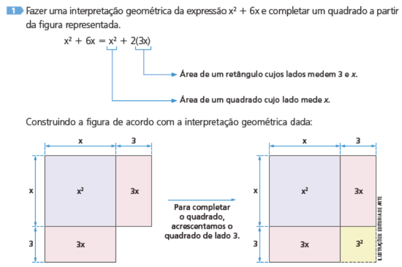
AS CORES NÃO SÃO REAIS.

Fonte: (Giovanni Júnior, 2022d, p. 94)

Em seguida, é exibido dois multisignificados diferentes que são o **dedutivo-geométrico** e **processual-tecnicista** ao resolver as equações do segundo grau. Na primeira é abordado o completamento de quadrados a partir de uma certa expressão de uma equação do segundo grau dada determinada pelo matemático indiano al-Khwarizmi, veja um exemplo na figura 17.

A junção de geometria e álgebra é muito importante para que os estudantes vejam que as duas áreas não estão separadas, mas que se complementam. No exemplo da figura 17, o quadrado maior é dividido em retângulos e quadrados menores, e para cada um é dada a área, e para fazer interpretação geométrica da expressão $x^2 + 6x$ é realizado o completamento de quadrados, uma técnica muito utilizada pelos gregos e antigos.

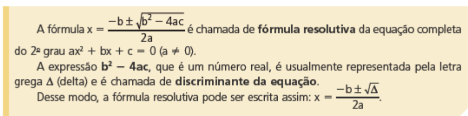
Figura 17: Completamento de quadrados.



Fonte: (Giovanni Júnior, 2022d, p. 97)

Anos mais tarde, um outro matemático indiano chamado Bhaskara desenvolveu uma **forma resolutiva** (Giovanni Júnior, 2022d) em que utiliza a conceituação **estrutural-generalista**, proposta por Ribeiro (2007) tal forma resolutiva ficou comumente conhecida no Brasil por fórmula de Bhaskara, mas desde muito antes já havia conhecimento sobre a resolução de equações do segundo grau. Veja a definição da forma resolutiva dada por Giovanni Júnior (2022) na figura 18.

Figura 18: Forma resolutiva da equação do segundo grau.



A fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ é chamada de **fórmula resolutiva** da equação completa do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

A expressão $\mathbf{b^2 - 4ac}$, que é um número real, é usualmente representada pela letra grega Δ (delta) e é chamada de **discriminante da equação**.

Desse modo, a fórmula resolutiva pode ser escrita assim: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Fonte: (Giovanni Júnior, 2022d, p. 103)

A tão famigerada, “fórmula de Bhaskara” é uma das mais famosas no contexto escolar, e que a maioria dos professores já abordam de forma direta sem explicar ao estudante como é possível, atráves de manipulações algébricas, chegar ao resultado de,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ademais, Giovanni Júnior (2022) aborda outras formas de resolver uma equação do segundo grau que é pela soma e produto das raízes, ou seja $x^2 - Sx + P = 0$, isto é, pelo forma **processual-tecnicista**, pois concebe equação como a sua própria resolução, com os métodos e técnicas que são utilizados para resolvê-la. Essa maneira de encontrar as raízes de uma equação do segundo grau em alguns casos é muito útil para que o estudante ganhe tempo e pratique o cálculo mental, pois terá que encontrar dois números, tais que a soma (S) é igual ao produto (P), esses dois números serão as raízes da equação de segundo grau.

Para finalizar Giovanni Júnior (2022) aborda outros tipos de equações como: equações biquadradas e equações irracionais. Tudo isso tendo em vista a forma **estrutural-generalista**, tendo em vista a definição de acordo com as formalizações matemáticas.

Veja nas figuras 19 e 20 as devidas definições.

Figura 19: Definição de equações biquadradas

EQUAÇÕES BIQUADRADAS

Denomina-se **equação biquadrada** na incógnita *x* toda equação da forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, em que *a*, *b* e *c* são números reais e $a \neq 0$.

As equações a seguir são biquadradas.

- $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
- $x^4 + 20x^2 - 3 = 0$
- $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
- $16x^4 - 2 = 0$
- $9x^4 - 6x^2 = 0$

Fonte: (Giovanni Júnior, 2022d, p. 111)

Figura 20: Definição de equações irracionais

EQUAÇÕES IRRACIONAIS

Toda equação que apresenta a incógnita no radicando é chamada de **equação irracional**.

Para transformar uma equação irracional em uma equação racional, elevamos os dois membros da equação a uma potência conveniente.

Fonte: (Giovanni Júnior, 2022d, p. 112)

3.2 Estudo de cada multisignificado para equação nos livros didáticos estudados

A pergunta que norteou essa análise foi: de que forma os conceitos de equação apareceram em cada livro didático e quais foram as diferenças nas abordagens a depender do grau de ensino? Para responder a essa pergunta vamos analisar as informações pelos multisignificados e não por série dos livros como fizemos na seção anterior.

3.2.1 Intuitivo-Pragmático

Ao olharmos para o quadro 1, apresentado na metodologia, podemos perceber que o intuitivo-pragmático é encontrado em todos os livros didáticos, exceto no 9° ano.

Podemos perceber que os exercícios envolvendo esse conceito no sexto ano tem por objetivo saber como está a noção de igualdade fazendo uso das propriedades da adição. Veja a figura 21

Figura 21: Questão que envolve a noção de igualdade.

3. Identifique a propriedade da adição de números naturais que foi aplicada em cada uma das sentenças matemáticas a seguir.

a) $75 + 105 = 105 + 75$ Comutativa.

b) $250 + 0 = 0 + 250$ Elemento neutro.

c) $90 + (130 + 100) = (90 + 130) + 100$ Associativa.

Fonte: (Giovanni Júnior, 2022a, p. 39)

Além do mais, podemos perceber em mais um exercício, dessa vez envolvendo uma situação do dia a dia, no livro do sexto ano, veja a figura 22.

Figura 22: Questão que envolve a noção de igualdade no dia a dia.

5. O professor de Matemática pediu a dois estudantes que calculassem a soma dos números 2 107 e 5 096. Calcule o resultado obtido por eles.

- Caio fez 2 107 + 5 096.
- Theo fez 5 096 + 2 107.

a) Você pode afirmar que 2 107 + 5 096 = = 5 096 + 2 107? Sim.

b) A afirmação "A ordem das parcelas não altera a soma" é verdadeira ou falsa?

Fonte: (Giovanni Júnior, 2022a, p. 39)

Já no sétimo ano é possível perceber um avanço quando este conceito é utilizado, ou seja, por estarmos um ano a frente existe um certa complexidade, pois existe uma maior dificuldade nos exercícios tendo em vista os sexto ano, veja a figura 23.

Figura 23: Exercício que utiliza a noção de igualdade.

1. Explique por que as igualdades matemáticas a seguir não são equações.

$3^2 + 1 = 2 + 2^3$ $\quad$ $2^5 + 2^3 = 2^2 \cdot 10$

2. Que sentenças matemáticas a seguir representam equações?

$x + 5 = 12$ $\quad$ $x + 10 > 10$

$x - 10 \neq 0$ $\quad$ $x - 5 = 2$

$x = -10$ $\quad$ $10x = 1$

Fonte: (Giovanni Júnior, 2022b, p. 142)

O livro do oitavo é apresentado questões que envolvem fatos do dia a dia, então está classificada como intuitiva-pragmática, pois está relacionada a problemas práticos do cotidiano. Veja a figura 24

Figura 24: Exercício que envolve o cotidiano

3. Para comprar um computador, Valdir precisa de 200 reais a mais do que tem. Se ele tivesse o dobro da quantia que tem, compraria esse computador e ainda ficaria com 300 reais.

a) Qual é a quantia que Valdir tem? 500 reais

b) Qual é o preço do computador? 700 reais

Fonte: (Giovanni Júnior, 2022c, p. 149)

O livro do nono ano não apresenta questões que envolvam o conceito intuitivo-pragmático, visto que são questões de introdução do conteúdo de equações e esses anos já mostra o conceito mais avançado.

3.2.2 Processual-Tecnicista

Fazendo uso do quadro 1 percebemos que a forma processual-tecnicista só não aparece no 6° ano.

Diante desse conceito, o livro do sétimo ano aborda questão que remete ao modo resolutório de forma direta sem uso de fórmulas generalizadas, veja a figura 25

Figura 25: Exercício que envolve processo sem generalização.

3. São dados os números $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{6}$.
Qual deles é a raiz da equação
$2x - \frac{1}{2} = 3x - \frac{2}{3}$? $\frac{1}{6}$

Fonte: (Giovanni Júnior, 2022b, p. 145)

Essa questão solicita do aluno apenas o aprendizado de como se constrói uma equação do primeiro grau para que possa ser resolvida fazendo uso de técnicas de resolução usadas pelo professor em sala de aula.

No oitavo ano as questões abordam de forma mais direta o seu objetivo, que é chegar em uma solução para x, e para isso os estudantes deverão usar das técnicas de resolução que são comumente utilizadas no conceito processual-tecnicista, veja um exemplo na figura 26.

Figura 26: Exercício envolvendo resolução equações do 1° grau.

2. Considerando $U = \mathbb{R}$, determine a solução das seguintes equações do 1º grau com uma incógnita.
a) $21x - 17 = 109$ 6
b) $73x + 100 = 53x$ −5
c) $1{,}7 + 2{,}5x = 4{,}2$ 1
d) $23x - 22 = 19x + 6$ 7
e) $12x - 16 = -21 + 10x$ −2,5
f) $1{,}9x - 3{,}6 = x - 10{,}8$ −8
g) $7(2 + x) = 5(x - 1{,}2) + 35$ 7,5
h) $3(x + 1) - 2(x - 1) = -(x + 5)$ −5

Fonte: (Giovanni Júnior, 2022c, p. 97)

Para se resolver os estudantes deverão realizar o seguinte processo resolutivo.

$$\text{(a) } 21x - 17 = 109 \Rightarrow 21x - 17 + 17 = 109 + 17 \Rightarrow 21x = 126 \Rightarrow x = \frac{126}{21} = 6$$

A diferença do 7° ano para o 8° é dada na maneira que os exercícios são cobrados, ou seja, no 7° é mais simples a forma resolutiva, já no 8° demanda mais tempo para ser resolvida.

Para o nono ano, é apresentado problemas mais avançados que envolvem a resolução de equações do segundo grau fazendo uso das generalizações, por conta disso há poucas questões envolvendo o conceito processual-tecnicista, veja na figura 27:

Figura 27: Exercício de substituir os valores na equação.

19. Usando a fórmula matemática $d = \frac{n(n-3)}{2}$, que relaciona a quantidade de diagonais (d) e a quantidade de lados (n) de um polígono, calcule a quantidade de lados do polígono que tem:

a) 9 diagonais. 6 lados.

b) 20 diagonais. 8 lados.

Fonte: (Giovanni Júnior, 2022d, p. 105)

Assim, percebemos que diante desse multisignificado possui também uma evolução tendo em vista os anos de ensino. Do sétimo para o nono ano as questões vão ficando mais contextualizadas, chegando no nono e sendo poucas questões utilizando esse multisignificado e fazendo mais uso na explicação do conteúdo. Isso acontece porque as questões envolvendo a resolução de equações do segundo grau necessitam de generalizações para serem resolvidas, como por exemplo utilizando a "fórmula de Bhaskara".

3.2.3 Estrutural-Conjuntista

Algo ocorre de interessante, pois apenas no 7° ano aparece a forma estrutural conjuntista. No sétimo ano os estudantes entram em contato com outros conjuntos numéricos e não apenas os números naturais ($\mathbb{N}$). Veja a figura 28.

Figura 28: Exercício que seleciona o conjunto universo da solução.

1. Escreva a raiz ou solução das seguintes equações.

a) $x - 7 = 0$, $U = \mathbb{N}$ 7

b) $x + 9 = 0$, $U = \mathbb{Z}$ -9

c) $x - \frac{3}{8} = 0$, $U = \mathbb{Q}$ $\frac{3}{8}$

d) $x + 1 = 0$, $U = \mathbb{N}$ Não tem raiz em N.

e) $x - 10 = 3$, $U = \mathbb{Q}$ 13

Fonte: (Giovanni Júnior, 2022b, p. 145)

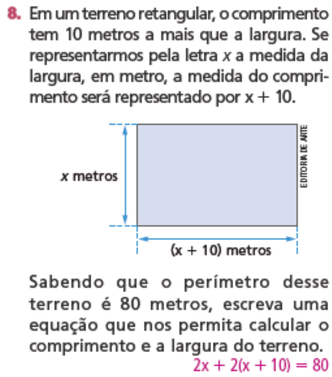
Os estudantes nessa questão deverão utilizar o conhecimento de resolução de equações do primeiro grau e encontrar um conjunto de soluções das equações considerando o conjunto universo. Isso fará com que eles possam compreender que os assuntos de conjuntos e equações estão interligados, isso será importante quando estiverem estudando a teoria de conjuntos no Ensino Médio, pois aparecerá as operações com conjuntos bem definidas.

3.2.4 Dedutivo-Geométrico

Percebe-se que a forma dedutivo-geométrico, de acordo com o quadro 1, aparece no oitavo e nono ano na explicação do conteúdo, porém percebemos o uso nos exercícios do sétimo ano.

No livro do sétimo ano é dada uma questão de interpretação envolvendo os conceitos geométricos para resolução fazendo uso da equação de primeiro grau. Veja na figura 29

Figura 29: Exercício envolvendo perímetro de retângulo.

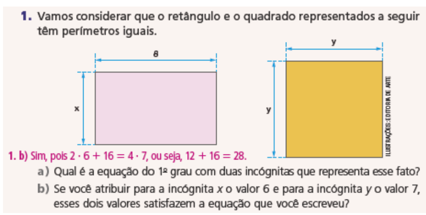


Fonte: (Giovanni Júnior, 2022b, p. 142)

Para responder essa questão os estudantes necessitam ter em mente as propriedades de perímetro de um retângulo. Por isso, que esse multisignificado dedutivo-geométrico existe, para fazer a junção da álgebra com a geometria.

No oitavo ano, uma das questões utiliza as propriedades do perímetro de um retângulo para ser usada nas equações de primeiro grau, porém com um grau maior de complexidade, em relação a dada no sétimo ano. Pois, além de montar as equações pedidas no item a) é necessário testar se as equações são satisfeitas se atribuir valores para x e y como é dado no item b) vão torná-las verdadeiras. Veja a figura 30.

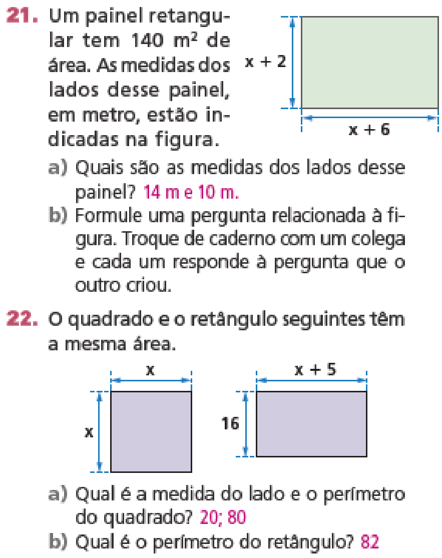
Figura 30: Exercício com perímetro de retângulo e quadrado.



Fonte: (Giovanni Júnior, 2022c, p. 156)

No nono ano é possível perceber a evolução das questões envolvendo o multisignificado dedutivo-geométrico, pois são abordadas as equações do segundo grau. Os estudantes necessitarão pensar com maior cuidado para as questões que envolvem o conceito de área de figuras planas, mais especificamente do retângulo. Veja a figura 31.

Figura 31: Exercício envolvendo área e perímetro de figuras ratângulos e quadrados.



21. Um painel retangular tem 140 m² de área. As medidas dos lados desse painel, em metro, estão indicadas na figura.

a) Quais são as medidas dos lados desse painel? 14 m e 10 m.

b) Formule uma pergunta relacionada à figura. Troque de caderno com um colega e cada um responde à pergunta que o outro criou.

22. O quadrado e o retângulo seguintes têm a mesma área.

a) Qual é a medida do lado e o perímetro do quadrado? 20; 80

b) Qual é o perímetro do retângulo? 82

Fonte: (Giovanni Júnior, 2022d, p. 97)

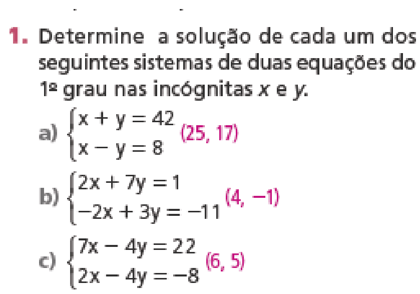
3.2.5 Estrutural-Generalista

O conceito estrutural-generalista aparece apenas no 8° e ano 9° ano, fato este que pode ser entendido pelo sentido de que é os dois últimos anos do ensino fundamental e é necessário preparar os estudante para o Ensino médio apresentando uma matemática mais generalista. Por isso, o fato de abordar o multisignificado de forma estrutural-generalista.

Nos anos anteriores, o professor apresenta as equações de uma forma mais lúdica e visual, a fim de que os estudantes compreendam o conceito de equação por etapas, de acordo com a complexidade do ano de estudo.

No 8° ano os estudantes precisam resolver problemas envolvendo sistemas lineares de grau um, que envolve procedimentos generalizados, como o método da substituição, da soma, entre outros. Veja na figura 32.

Figura 32: Exercício envolvendo resolução de sistemas lineares



1. Determine a solução de cada um dos seguintes sistemas de duas equações do 1º grau nas incógnitas *x* e *y*.

a) $\begin{cases} x + y = 42 \\ x - y = 8 \end{cases}$ (25, 17)

b) $\begin{cases} 2x + 7y = 1 \\ -2x + 3y = -11 \end{cases}$ (4, −1)

c) $\begin{cases} 7x - 4y = 22 \\ 2x - 4y = -8 \end{cases}$ (6, 5)

Fonte: (Giovanni Júnior, 2022c, p. 170)

Podemos perceber que ao chegar no conteúdo de equações do segundo grau é necessário que seja utilizado generalizações de soluções para que as questões sejam resolvidas com mais facilidade, para isso que se utiliza a "fórmula de Bhaskara", pois como estamos falando de equações de grau dois, o conjunto solução possui dois valores para x em que denotamos x_1 e x_2. Veja na figura 33, no livro do nono ano.

Figura 33: Exercício envolvendo a "fórmula de Bhaskara".

1. Aplicando o processo algébrico de Bhaskara, determine as raízes das equações do 2º grau no conjunto dos números reais.

a) $x^2 + 4x - 5 = 0$ -5 e 1.

b) $2x^2 - 9x + 4 = 0$ $\frac{1}{2}$ e 4.

c) $x^2 + 8x + 16 = 0$ -4

Fonte: (Giovanni Júnior, 2022d, p. 104)

Tais questões os estudantes irão responder da seguinte forma,

$$
\begin{aligned}
&\text{a)}x^2 + 4x - 5 = 0\\
&\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 36\\
&x = \frac{-4 \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{6}}{2 \cdot 1}\\
&\Rightarrow x_1 = -5 \ \text{ e } \ x_2 = 1.
\end{aligned}
$$

Com isso, é possível responder diversas questões que envolvem a procura de equações de raízes de equações do segundo grau e fazendo uso do multisignificado estrutural-generalista, pois procede com o uso de generalizações, como é a "fórmula de Bhaskara" e as maneiras de resolver sistemas lineares, como vimos.

Capítulo 4

Considerações finais

Tivemos como objetivo deste trabalho o estudo do conceito de equação segundo Ribeiro (2007) nos livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental. Sabemos que o estudo das equações é muito importante para que os estudantes compreendam como funciona grande parte dos outros conteúdos da matriz curricular disposta na BNCC.

Percebemos que cinco dos seis conceitos propostos por Ribeiro (2007) aparecem no decorrer dos quatro livros didáticos, o que é interessante, visto que o autor dá diversas possibilidades aos professores de ensinar e aos alunos em aprender sobre as equações. Além disso, vale ressaltar que a maneira como um mesmo conceito se apresenta em livros diferentes se diferem aumentando em complexidade, fato que se justifica por conta do avanço dos anos de estudo. Fato este que fica mais presente ao se usar o conceito dedutivo-geométrico em que a complexidade aumenta da equação de primeiro grau para a de segundo grau.

Vimos também que os exercícios apresentam maneiras distintas de conceber os diferentes multisignificados, assim, planejar como abordar o conteúdo de equações fica mais fácil com os variados multisignificados. E assim os estudantes ficarão mais aptos a responderem qualquer tipo de questão envolvendo as equações.

Além do mais, a matemática para o ensino contribui para que a abordagem do conteúdo de equações seja ensinado de maneira coerente e possa beneficiar os estudantes numa melhor construção do aprendizado referente às equações.

Destacamos que foi possível cumprir o objetivo desse trabalho em estudar os conceitos de equação no livro didático. Espera-se, que esse estudo contribua para o ensino aprendizagem e para o lecionar dos professores perante este conteúdo. Assim, pressupõe-se que mais pesquisas sejam realizadas nessa área para que o ensino avance cada vez mais em qualidade.

Portanto esse estudo do conceito de equação no livro didático proporcionou uma nova visão frente a maneira que se aborda esse conteúdo em sala de aula, visto que é um conteúdo que os professores focam, na maioria das vezes, na memorização em detrimento do significado das coisas.

Capítulo 5

Referências Bibliográficas

ALMEIDA, Cínthia Soares de. Dificuldades de aprendizagem em Matemática e a percepção dos professores em relação a fatores associados ao insucesso nesta área. **Brasília (DF): curso de Graduação em Matemática, Universidade Católica de Brasília**, 2006.

BARBOSA, D de F. A Aplicação do Método de Ensino de Ausubel na Licenciatura em Matemática. **São Paulo**, 1982.

BIANCHINI, Barbara Lutaif; LIMA, Gabriel Loureiro de. A Álgebra e seu papel: reflexões a partir das produções do GT 04 da SBEM. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, SciELO Brasil, v. 35, p. 981–999, 2021.

BICUDO, Irineu *e outros*. **Os elementos**. [*S. l.*]: Unesp, 2009.

BRANDÃO, Jefferson Dagmar Pessoa. **O papel do livro didático no processo de ensino aprendizagem: uma introdução do conceito de função**. 2013. 84f. Monografia (Especialização em Educação Matemática para Professores do Ensino Médio) – Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), Campina Grande.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Acesso em: 4 dez. 2024. Disponível em: `http://basenacionalcomum.mec.gov.br`.

COTRET, RS. Problématique à propos de la mise en équation de problèmes écrits. **SEMINAIRE FRANCO-ITALIEN DE DIDACTIQUE DE ALGÈBRE**, v. 9, 1997.

DENZIN, Norman Kent; LINCOLN, Yvonna Sessions. **O planejamento da pesquisa qualitativa: teorias e abordagens**. [*S. l.*]: Artmed, 2006.

DÍAZ-RODRÍGUEZ, Félix Marcial. O processo de aprendizagem e seus transtornos. Edufba, 2011.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. **A conquista matemática: 6º ano: ensino fundamental: anos finais**. 1. ed. São Paulo: FTD, 2022.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. **A conquista matemática: 7º ano: ensino fundamental: anos finais**. 1. ed. São Paulo: FTD, 2022.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. **A conquista matemática: 8º ano: ensino fundamental: anos finais**. 1. ed. São Paulo: FTD, 2022.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. **A conquista matemática: 9º ano: ensino fundamental: anos finais**. 1. ed. São Paulo: FTD, 2022.

GODOY, Arlida Schmidt. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. **Revista de administração de empresas**, SciELO Brasil, v. 35, p. 57–63, 1995.

LOPES, Suzany Rocha Teles. O ensino da álgebra na educação básica sob um olhar de professores da rede estadual de Goiás, 2021.

MACÊDO SANTANA, Flávia Cristina de; MENDUNI-BORTOLOTI, Roberta D'Angela; GIRALDO, Victor Augusto. Matemática Específica da Ação do Sujeito-Professor (a): Entre o Poder e o Saber. **Boletim GEPEM**, n. 84, p. 29–54, 2024.

MENDUNI-BORTOLOTI, Roberta D'Angela. Um estudo sobre a matemática para o ensino de proporcionalidade, 2016.

MOREIRA, Marília Maia; SILVA, Amsranon Guilherme Felício Gomes da; ALVES, Francione Charapa. **O ensino de matemática na educação contemporânea: o devir entre a teoria e a práxis**. Edição: Marília Maia Moreira, Amsranon Guilherme Felício Gomes da Silva e Francione Charapa Alves. Iguatu, CE: Quipá Editora, 2021.

NEGROMONTE, Mayra Aliete Oliveira *e outros*. A importância do uso das equações na resolução de problemas matemáticos. **Brazilian Journal of Development**, v. 5, n. 10, p. 20611–20620, 2019.

NEWELL, Allen. Human problem solving. **Upper Saddle River/Prentive Hall**, 1972.

OLIVEIRA, Alana Santiago. **Matemática para o ensino do conceito de polinômios sob lentes da recontextualização pedagógica**. 2024. Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana. Programa de Pós-Graduação em Educação.

PÁDUA, Elisabete Matallo Marchesini de. **Metodologia da pesquisa: abordagem teórico-prática**. [*S. l.*]: Papirus Editora, 2019.

RANGEL, Leticia Guimarães. **Teoria de Sistemas: Matemática Elementar e Saber Pedagógico de Conteúdo–Estabelecendo Relações em um Estudo Colaborativo**. 2015. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro Rio de Janeiro.

RIBEIRO, Alessandro Jacques. Equação e seus multisignificados no ensino de Matemática: contribuições de um estudo epistemológico. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.