

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas

Licenciatura em Matemática

Ronald Pereira Dias

**DERIVADAS FRACIONÁRIAS NO MODELO
MALTHUSIANO PARA CRESCIMENTO TUMORAL:
UMA ABORDAGEM COMPARATIVA**

Vitória da Conquista - BA
2024

Ronald Pereira Dias

Derivadas Fracionárias no Modelo Malthusiano para Crescimento Tumoral: Uma Abordagem Comparativa

Monografia apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - Campus Vitória da Conquista-BA, para obtenção do título de Licenciado em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Fernando dos Santos Silva.

Vitória da Conquista - BA
2024

Ronald Pereira Dias

DERIVADAS FRACIONÁRIAS NO MODELO MALTHUSIANO PARA CRESCIMENTO TUMORAL: UMA ABORDAGEM COMPARATIVA

Monografia apresentada ao Colegiado do Curso de Matemática como requisito parcial para aprovação na disciplina Seminário de Pesquisa II do Curso de Licenciatura em Matemática. Trabalho aprovado em 16 de dezembro de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fernando dos Santos Silva - UESB

Orientador



Prof. Dr. Júlio César dos Reis - UESB

Convidado

Prof. Dr. Genilson Soares de Santana - UESB

Convidado

Vitória da Conquista - BA

2024

“Dedico este trabalho aos meus pais, pelo apoio incondicional; à minha namorada e aos meus amigos, que sempre acreditaram em mim; aos meus professores, que contribuíram para minha formação; e a todos que me ajudaram ao longo dessa trajetória.”

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, por ter me concedido tudo o que foi necessário ao longo desta jornada.

Agradeço profundamente aos meus pais, Maria de Fátima Pereira Dias e José Luiz dos Santos Dias, por todo o apoio, amor incondicional e ensinamentos que me acompanharam durante a minha vida. Sem o incentivo de vocês, não seria possível alcançar essa conquista.

À minha namorada, agradeço pela companhia constante, pelo apoio emocional e pela paciência nos momentos desafiadores. Sua presença foi essencial para que eu pudesse concluir esta etapa.

Agradeço também ao meu irmão e a todos os meus familiares, pelo carinho e encorajamento ao longo de minha trajetória acadêmica.

Expresso minha gratidão aos colegas da minha turma, pelos momentos de amizade, aprendizado e colaboração, que tornaram essa experiência universitária mais agradável.

Agradeço ao meu orientador, Fernando dos Santos Silva, pela orientação, paciência e pelo compartilhamento de conhecimentos valiosos, que foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço a todos os docentes que contribuíram com seu tempo e conhecimento ao longo da minha formação acadêmica e a todas as pessoas que, de alguma forma, tornaram esta jornada possível.

RESUMO

Este estudo é o Trabalho de Conclusão de Curso de um discente do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB). O objetivo deste trabalho é aplicar a teoria de derivada de ordem não inteira no modelo de crescimento populacional malthusiano, utilizando a definição de derivada fracionária de Hilfer-Katugampola, com o uso de funções especiais, como as funções eulerianas de primeira e segunda espécie e a função hipergeométrica e construir o gráficos do modelo deformado pela derivada de ordem α por meio da linguagem de programação *Python* no *software VS Code* para comparar com o modelo malthusiano clássico. Para a aplicação, foram utilizados dados de uma dissertação de mestrado que envolve a análise do crescimento de tumores cancerígenos na mama. Embora o modelo deformado não tenha alcançado os resultados esperados a pesquisa pode contribuir para a divulgação de conceitos associados a derivadas de ordem fracionária, pois atualmente o aumento do interesse acadêmico por derivadas fracionárias tem sido evidenciado pelo crescimento de publicações recentes na área.

Palavras-chave: Cálculo Fracionário; Crescimento populacional; Equações Diferenciais.

ABSTRACT

This study is the Final Project of a student of the Mathematics Degree course at the Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB). The objective of this work is to apply a non-integer derivative to the Malthusian population growth model, using the Hilfer-Katugampola definition of fractional derivative, with the use of special functions, such as the Eulerian functions of the first and second kind and the hypergeometric function. The construction of the graphs of the model deformed by the derivative of order α was performed using the programming language *Python* in *VS Code* software. For the application, data from a master's dissertation involving the analysis of the growth of cancerous tumors in the breast were used. Although the deformed model did not achieve the expected results, the research can contribute to the dissemination of concepts associated with fractional derivatives, since currently the increase in academic interest in fractional derivatives has been evidenced by the growth of recent publications in the area.

Keywords: Fractional Calculus; Population growth; Differential equations.

Lista de Figuras

1.1	Esboço da integral dupla em coordenadas polares	13
1.2	Função Gama	15
1.3	Função Beta	16
5.1	Volume do tumor em função do tempo para diferentes ordens fracionárias de derivada.	37

Lista de Tabelas

5.1	Simulações do Modelo Malthusiano Fracionário para Crescimento Tumoral . . .	36
-----	---	----

Sumário

Introdução	9
1 Funções Especiais	11
1.1 Função Gama	11
1.2 Função Beta	15
1.3 Função hipergeométrica	16
1.4 Integral com funções nos limites de integração	18
2 Equações diferenciais e modelos de crescimento	20
2.1 Equações diferenciais	20
2.2 EDO de Bernoulli	21
2.2.1 Exemplo:	21
2.3 Modelos de crescimento presa-predador	22
2.4 Modelo Malthusiano	23
3 Derivada de ordem fracionária	24
3.1 Exponencial de T-Sallis	24
3.2 Cálculo Fracionário	26
3.3 Propriedades da Derivada Fracionária	27
3.4 Uma nova derivada	29
3.5 Propriedades da nova derivada	29
4 Modelo Malthusino deformado	33
4.1 EDOs q -conformáveis	33
5 Metodologia	36
5.1 Aplicação	36
5.1.1 Análise dos Resultados	37

6		39
6.1	Considerações finais	39
REFERÊNCIAS		40

Introdução

Este trabalho tem como objetivo apresentar sobre algumas funções especiais e uma tentativa de aplicação de uma derivada de ordem fracionária no modelo malthusiano em um estudo que faz uma análise de modelos fracionários utilizados para modelar com mais precisão o crescimento de tumores.

O cálculo fracionário surgiu em 30 de setembro de 1695 numa carta escrita por l'Hospital para Leibniz, em que o conceito de uma derivada de ordem não-inteira é proposto e discutido. A partir da resposta de Leibniz, adicionada da contribuição de inúmeros brilhantes matemáticos chegaram as definições iniciais de derivadas e integrais de ordens não-inteiras. Euler, (1707-1783) por sua vez, no início do século XVII, realizou os primeiros procedimentos para o desenvolvimento do cálculo fracionário [1] em que, em uma dissertação de 1730, escreveu: Quando n é um inteiro positivo e p é uma função de x , a relação $d^n p$ por dx^n pode sempre ser expressa algebricamente, de forma que se $n = 2$ e $p = x^3$, então $d^2 x^3$ por dx^2 é $6x$ por 1 . Assim, quando n é um inteiro positivo, $d^n p$ pode ser obtida a partir de diferenciações sucessivas.

Um dos primeiros e principais registros da derivada de ordem não inteira foi realizado pelo matemático Silvestre François Lacroix[2], que definiu esse tipo de derivada por meio da derivação de um polinômio. O texto a seguir, é um trecho de um dos dos trabalhos de Lacroix que podemos ver um dos primeiros registros da derivada fracionária.

À Teoria das Sequências

...cujas diferenças formam a sequência

$$\frac{4}{1}, \frac{9.4 - 9.1}{4.1}, \frac{16.9 - 4 - 3.5.6}{9.6.1 + 5.6.4.1 - 9.4.1}, \text{etc.}$$

e cujo termo geral $\frac{d}{dx} \left(\frac{1-x}{x} \right)^{n+1}$ se transforma em

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1 - (1-x)^{n+1}}{n+1} \right)$$

quando se realiza a primeira integração, a partir de $x = 0$.

Por meio de integrais definidas, Euler chega ainda a uma interpolação muito digna de nota: trata-se das funções diferenciais. Da mesma forma que, entre as potências inteiras, inserimos, para a extração das raízes, as potências fracionárias, assim também podemos conceber os termos intermediários na série:

$$v, v', v'', v''', \dots, v^n,$$

das diferenciais de uma mesma função, e designar esses termos por um índice fracionário que marque o lugar que ocupam na série proposta. Não será possível interpretar essas quantidades por diferenciações sucessivas, mas apenas explicar as potências fracionárias por meio de multiplicações repetidas; mas as fórmulas de $d^n V$ serão expressões formadas analogamente, uma parte no campo das diferenciais e a outra no campo das potências.

Seja, por exemplo, $V = v^m$; quando n é um número inteiro, temos, para qualquer que seja m :

$$d^n(v^m) = m(m-1)\dots(m-n+1)v^{m-n}dv^n;$$

substituindo por $[m]$ e $[m-n]$ as expressões fornecidas, encontramos:

$$d^n(v^m) = v^{m-n}dv^n \frac{d}{dx} \left(\frac{1-x}{x} \right)^n.$$

Este resultado é suscetível de uma verificação imediata, assegurando-se de que ele se aplica àqueles que já conhecemos para os casos onde n é um número inteiro positivo.

A estrutura deste trabalho é composta por seis capítulos. O primeiro capítulo apresenta algumas funções especiais, como as funções Gama, Beta e Hipergeométrica, além de um teorema relacionado ao cálculo de uma integral com funções nos limites de integração. O segundo capítulo aborda equações diferenciais de primeira ordem, incluindo a resolução de uma equação diferencial classificada como equação de Bernoulli e o modelo Malthusiano. O terceiro capítulo explora o conceito de derivada fracionária de acordo com Hilfer-Katugampola e propõe uma nova derivada baseada nessa abordagem. O quarto capítulo é dedicado à apresentação do modelo Malthusiano deformado e sua solução. O quinto capítulo trata da metodologia utilizada, além da comparação com abordagens fracionárias no modelo Malthusiano clássico, destacando resultados e discussões. Por fim, o sexto capítulo apresenta as considerações finais e as referências.

Capítulo 1

Funções Especiais

1.1 Função Gama

A Função Gama, também conhecida como função de Euler de segunda espécie, foi feita com o objetivo de tornar generalizado o conceito de fatorial de um número natural. Dessa forma, definindo-se adequadamente, é possível computar o fatorial até de números complexos [3]. No entanto, a Função Gama não pode ser usada para se calcular o valor do fatorial de 0 e todos os números inteiros negativos, pois a integral a seguir é divergente para esses valores. A definição mais comum da função Gama é sua forma integral:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt, n \neq 0, -1, -2, -3... \quad (1.1)$$

A seguir, apresentamos algumas propriedades da Função Gama

- Propriedade 1 - $\Gamma(n + 1)$

Demonstração:

$$\Gamma(n + 1) = \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt$$

Substituindo temos:

$$\Gamma(n + 1) = -t^n e^{-t} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-t} n t^{n-1} = -t^n e^{-t} \Big|_0^{\infty} + n \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt$$

Logo $\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n)$.

- Propriedade 2 - $\Gamma(1) = 1$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} t^0 e^{-t} dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-t} dt = \lim_{x \rightarrow \infty} -e^{-t} \Big|_0^x = \lim_{x \rightarrow \infty} -e^{-x} - (-e^0) = -e^{-\infty} - (-1) = 1$$

Aplicando as propriedades 1 e 2 obtemos o fatorial dos demais números naturais:

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 = 3!$$

$$\Gamma(n) = (n-1) \cdot \Gamma(n-1) = (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = (n-1)!$$

...

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Agora observe que o domínio da função Gamma permite calcular o que seria o fatorial de números racionais. Observe o cálculo de $\Gamma(\frac{1}{2})$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt$$

Considerando $t = x^2$, temos: $t = x^2 \rightarrow dt = 2x dx$ Substituindo na equação, temos:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{-1} e^{-x^2} 2x dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

Agora elevando os termos da equação ao quadrado, temos:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right)$$

Devido o resultado da integral indefinida ser independente da variável de integração utilizada, podemos substituí-la por y em uma das integrais que estão se multiplicando. Dessa forma obtemos:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \right)$$

Aplicando o método de resolução para integrais impróprias, temos:

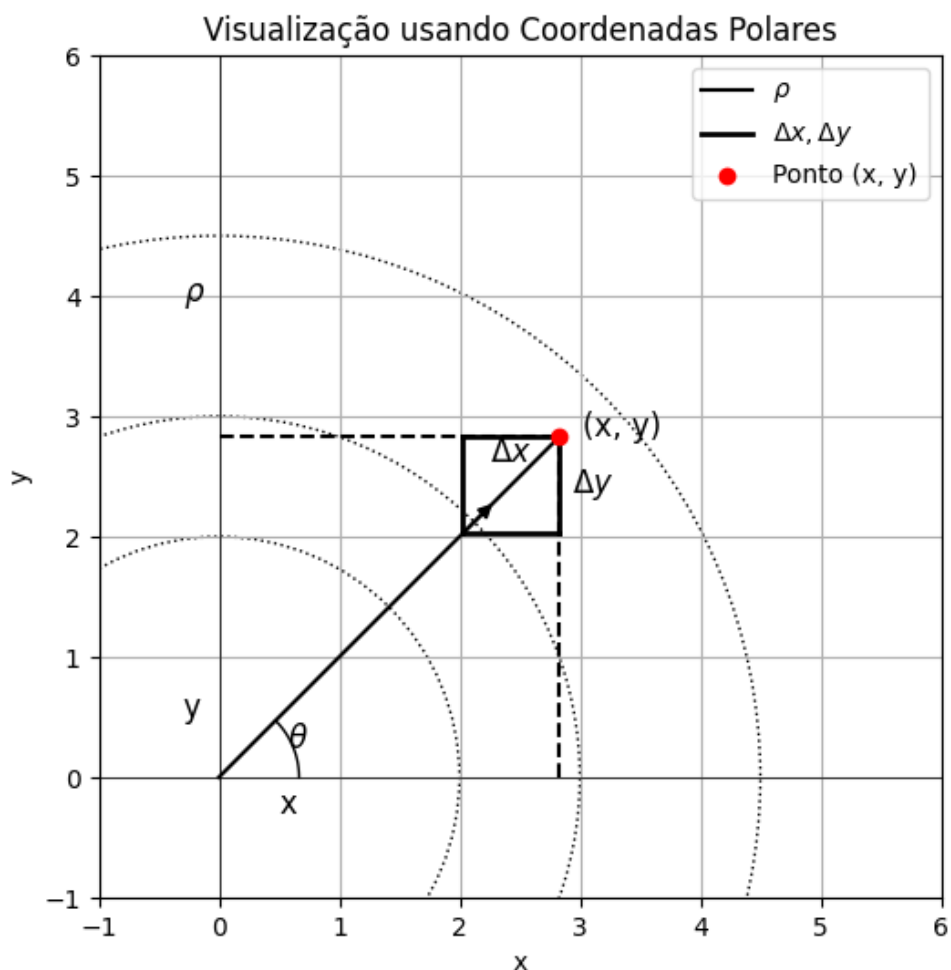
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-x^2} dx \right) \left(\lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y e^{-y^2} dy \right)$$

Assim, podemos agrupar as integrais:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \int_0^y \int_0^x e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

Nesse momento, vamos converter esta integral dupla para um sistema de coordenadas polares. Na figura abaixo, consideremos um ponto de coordenadas cartesianas x e y . Seja ρ a distância do ponto à origem das coordenadas e θ o ângulo formado entre o eixo x e a semirreta. Obviamente, as coordenadas polares desse ponto são dadas ρ e θ .

Figura 1.1: Esboço da integral dupla em coordenadas polares



Fonte: acervo do autor

Notemos que a integral dupla está limitada à região do plano delimitada pelas retas.

$$0 \leq x \leq \infty \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq \infty.$$

Fixando o primeiro quadrante, temos que, em coordenadas polares,

$$0 \leq \rho \leq \infty \quad \text{e} \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$$

No gráfico anterior, percebe-se que se introduzirmos um incremento $\Delta\rho$ no raio ρ , o produto dos incrementos correspondentes Δx e Δy , nos eixos x e y respectivamente, é igual à área A do retângulo. De fato:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^2} \rho d\theta d\rho = 4 \int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

Considerando $u = -\frac{1}{2}e^{-\rho^2}$, temos que:

$$du = \rho e^{-\rho^2} d\rho$$

Substituindo na equação 12, temos:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \int_0^\infty du \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = -4 \int_0^\infty d\left(\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

Resolvendo a equação obtemos

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -2e^{-\rho^2} \Big|_0^\infty \cdot \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

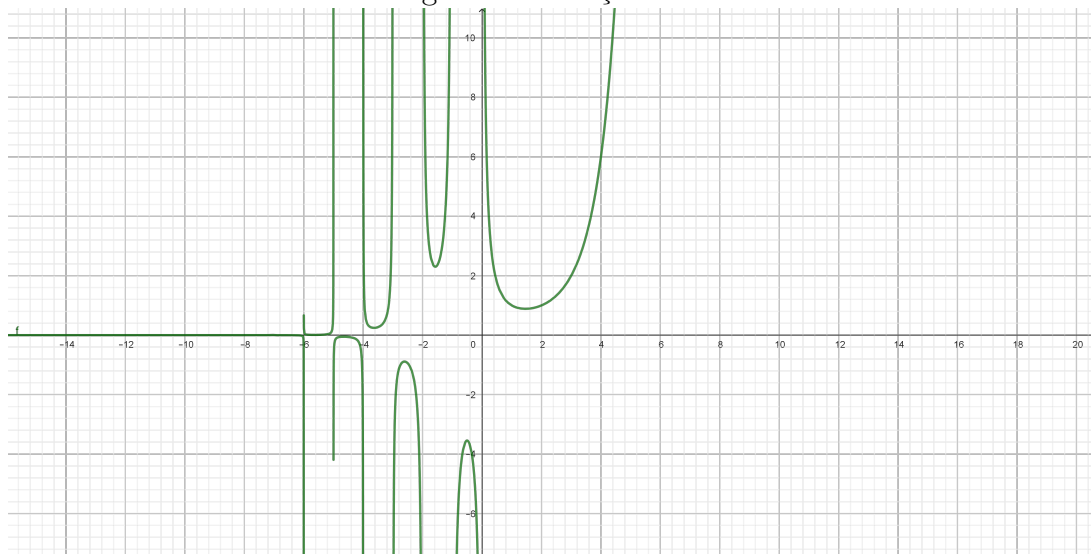
Logo

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

A seguir podemos observar o gráfico da Função Gama

Figura 1.2: Função Gama



Fonte: acervo do autor

Também é possível definir a Função Gama como um limite, ou pela representação de Weierstrass, respectivamente descritas pelas equações a seguir:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{(z)_n}$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}$$

A Função Gama possui utilidade em diversas áreas, particularmente, na definição de integral fracionária e no Cálculo Fracionário de maneira geral. Uma das principais propriedades dessa função é a seguinte relação de recorrência:

$$\Gamma(z + 1) = z \Gamma(z), \quad (1.2)$$

$$\Gamma(n + 1) = n!, \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.3)$$

1.2 Função Beta

A Função Beta, também conhecida como função de Euler de primeira espécie é relevante de forma significativa no Cálculo Fracionário [4]. A definição da função beta na forma integral

é:

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \operatorname{Re}(x) > 0, \operatorname{Re}(y) > 0 \quad (1.4)$$

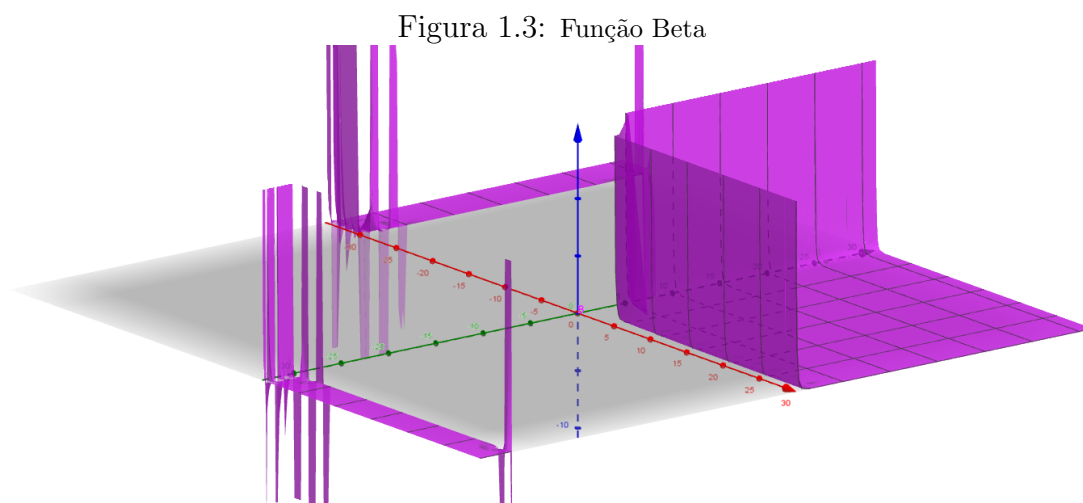
Temos que vale a comutatividade, ou seja,

$$\beta(x, y) = \beta(y, x) \quad (1.5)$$

Um fato importante sobre a Função Beta é como ela se relaciona com a Função Gama [3]:

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (1.6)$$

A seguir podemos observar o gráfico da Função Beta



Fonte: acervo do autor

1.3 Função hipergeométrica

Nessa seção será apresentado sobre a definição da Função Hipergeométrica [4] por meio da equação diferencial de Gauss. A equação diferencial de Gauss é dada por:

$$z(1-z)u'' + [c - (a+b+1)z]u' - abu = 0 \quad (1.7)$$

tal que u' e u'' são respectivamente as derivadas de primeira e segunda ordem de u em relação ao termo independente z e a, b e c são constantes.

Uma outra forma de definir essa equação diferencial é a forma:

$$[\delta(\delta + c - 1) - z(\delta + a)(\delta + b)]u = 0, \quad \text{tal que } \delta = z \frac{d}{dz} \quad (1.8)$$

Considerando a seguinte função uma solução para equação diferencial de Gauss

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+s}, \quad (1.9)$$

temos, a partir de (1.7) , as seguintes relações:

$$s(s + c - 1)a_0 = 0, \quad (1.10)$$

e

$$a_{n+1} = \frac{(n + s)(n + s + a + b) + ab}{(n + s + 1)(n + s + c)} a_n. \quad (1.11)$$

Para obter a solução trivial $u(z) = 0$ basta considerar $a_0 = 0$. Para a solução não trivial, basta considerar $a_0 \neq 0$. As soluções possíveis para a equação (1.10) são $s = 0$ ou $s = 1 - c$. Considerando $s = 0$, a solução de (1.10) é dada por

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} z^n = F(a; b; c; z), \quad |z| < 1, \quad (1.12)$$

Exemplo 1.11.2

A partir de (1.12), podemos exibir os dois exemplos de séries conhecidas respectivamente como série geométrica e expansão binomial

$$F(1; b; b; z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1 \quad (\text{série geométrica}) \quad (1.13)$$

e

$$F(1; b; b; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{r} z^r, \quad |z| < 1 \quad (\text{expansão binomial}). \quad (1.14)$$

1.4 Integral com funções nos limites de integração

Teorema 1.1. *Seja I um intervalo aberto contendo o ponto x_0 , e seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Dado um inteiro positivo n , defina a função $F_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$F_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f(t) dt. \quad (1.15)$$

F_n é de classe $C^{n+1}(I)$, com

$$F_n(x_0) = F_n'(x_0) = \dots = F_n^{(n)}(x_0) = 0,$$

e

$$F_n^{(n+1)}(x) = f(x) \quad \text{para todos } x \in I.$$

Demonstração:

Defina $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad \forall x \in I,$$

note que g está bem definida, uma vez que f é contínua em I , $g(x_0) = 0$ e ainda, pelo Teorema Fundamental do Cálculo (g é derivável em I) com $g'(x) = f(x), \forall x \in I$. Agora, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (fixado), considere, para cada $x \in I$

$$F_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f(t) dt$$

que está bem definida (segue da continuidade de f em I), mostraremos que F_n é de classe $C^{n+1}(I)$. Procederemos por indução sobre n . Note que

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \int_{x_0}^x (x-t)f(t)dt = (x-t)g(x)\Big|_{x_0}^x - \int_{x_0}^x (-1)g(t)dt \\ &= \int_{x_0}^x g(t)dt \end{aligned}$$

Onde usamos integração por partes da primeira igualdade e as informações acima na segunda. Assim, pelo TFC, $F_1'(x) = g(x), \forall x \in I$, ou seja, $F_1''(x) = g'(x) = f(x), \forall x \in I$, logo F_1 é de classe $C^2(I)$ já que f é contínua em I e além disso, $F_1(x_0) = F_1'(x_0) = g(x_0) = 0$. Agora, suponha que $F_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f(t) dt$ seja de classe $C^{n+1}(I)$, mostraremos que F_{n+1} é de

classe $C^{n+2}(I)$. De fato, pela regra de Leibniz [5], para cada $x \in I$,

$$\begin{aligned} F'_{n+1}(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n+1} f(t) dt \right) \\ &= (x-x)f(x) + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x \frac{d}{dx} (x-t)^n f(t) dt \\ &= F_n(x) \end{aligned}$$

logo F_{n+1} é de classe $C^{n+2}(I)$ já que F_n é de classe $C^{n+1}(I)$. Agora, para a segunda parte do Teorema, pela Regra de Leibniz, para $k \in \mathbb{N}$, com $k \in \{1, \dots, n\}$ temos

$$\begin{aligned} F_n^{(k)}(x) &= \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x \frac{d^k}{dx^k} (x-t)^n f(t) dt \\ &= \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x \frac{d^k}{dx^k} (x-t)^n f(t) dt \\ &= \frac{n \cdots (n-k)}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-k} f(t) dt \end{aligned}$$

Assim $F_n^{(k)}(x_0) = 0, \forall k \in \{1, \dots, n-1\}$ e $F_n^{(n+1)}(x) = g(x), \forall x \in I$ e $F_n^{(n)}(x) = g(x), \forall x \in I$, assim $F_n^{(n)}(x_0) = g(x_0) = 0$ e $F_n^{(n+1)}(x) = g'(x) = f(x), \forall x \in I$.

Capítulo 2

Equações diferenciais e modelos de crescimento

Nesse capítulo será apresentada a definição de uma equação diferencial de primeira ordem e um exemplo desse tipo de equação, que recebe o nome de equação diferencial de Bernoulli. Além disso, também serão apresentados os modelos de crescimento presa-predador e o modelo Malthusiano.

2.1 Equações diferenciais

Nessa seção foram retiradas definições do livro *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno* dos autores William E. Boyce, Richard C. DiPrima, Douglas B. Meade [6]. Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma equação que contém uma função como incógnita e uma ou mais das suas derivadas. Equações diferenciais de primeira ordem tem forma:

$$\frac{dy}{dt} + P(t)y(t) = Q(t) \quad (2.1)$$

em que f é uma função dada de duas variáveis. Qualquer função diferenciável $y = \phi(t)$ que satisfaz essa equação para todo t em algum intervalo é chamada de uma solução para a equação (2.1).

Leibniz descobriu que, para solucionarmos alguns tipos de equações diferenciais ordinárias podemos obter um tipo de função que ao multiplicarmos a equação diferencial, a equação transforma-se em uma que é imediatamente integrável usando-se a regra para a derivada de um produto. Essa função é chamada de fator integrante $e^{\int P(x)dx}$. O fator integrante possui a forma $e^{\int P(x)dx}$ pois:

Supondo que a função μ :

$$\mu y' + P(t)y\mu = \mu Q(t)$$

Vamos transformar em uma derivada do produto que satisfaça:

$$\mu y' + P(t)y\mu = (\mu y)'$$

Se isso for verdade:

$$\mu y' + P(t)y = Q(t)$$

$$\mu y' + P(t)y\mu = \mu Q(t)$$

$$(\mu y)' = \mu(t)Q(t)$$

$$\int \frac{d}{dt}(\mu y)dt = \int \mu(t)Q(t)dt$$

Portanto,

$$\mu y = \int \mu Q(t)dt + C, \text{ onde } C \text{ é uma constante}$$

$$y = \frac{1}{\mu} \left(\int \mu Q(t)dt + C \right)$$

,se $\mu \neq 0$

2.2 EDO de Bernoulli

Chamamos de Equação diferencial de Bernoulli [7] toda equação que tem a forma:

$$y' + P(x)y = Q(x) \cdot y^n$$

Para a equação de Bernoulli, além de termos que encontrar o fator integrante, devemos realizar uma substituição na equação por uma variável Z de forma $Z = Y^{1-n}$.

2.2.1 Exemplo:

Encontre a solução geral da EDO

$$y' + \frac{1}{x} \cdot y = x^{-1} \cdot y^{-2}. \tag{2.2}$$

Solução: Considerando, $z = y^{1-n}$, tal que $n = -2$, temos $z = y^{1-(-2)} = y^3$ assim, $y = z^{\frac{1}{3}}$. Logo,

$$y' = \frac{1}{3}z^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{dz}{dx}$$

Substituindo na equação (2.2) temos:

$$\frac{1}{3}z^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{1}{x} \cdot z^{\frac{1}{3}} = x^{-1} \cdot z^{-\frac{2}{3}}$$

Multiplicando a equação por $z^{\frac{2}{3}}$ e por 3, obtemos

$$\frac{dz}{dx} + \frac{3}{x} \cdot z = 3x^{-1}. \quad (2.3)$$

Precisamos agora encontrar o fator de integração para multiplicarmos pelos termos da equação:

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$$

Ao multiplicar a equação (2.3) pelo fator integrante, o primeiro termo se torna a derivada da multiplicação do fator por z . Logo:

$$(x^3 \cdot z)' = 3x^2 \quad (2.4)$$

Integrando em relação a x os termos da equação (2.4), obtemos:

$$x^3 \cdot z = x^3 + c, \text{ onde } c \text{ é uma constante.}$$

Assim

$$z = 1 + \frac{c}{x^3}$$

Como $y = z^{\frac{1}{3}}$, a solução geral da equação (2.2) será $y = (1 + \frac{c}{x^3})^{\frac{1}{3}}$.

2.3 Modelos de crescimento presa-predador

Na área da biomatemática, existem modelos que determinam o crescimento populacional de alguma espécie de ser vivo. Como exemplos, temos a utilização do modelo malthusiano para estimar a taxa de crescimento dos casos de covid 19 [8] e a utilização desse mesmo tipo de modelo para analisar a evolução do câncer de mama [9]. Na próxima seção serão apresentadas mais informações sobre o modelo mencionado, como a equação diferencial que o descreve e sua

solução.

2.4 Modelo Malthusiano

O modelo de crescimento de Malthus é uma das equações mais utilizadas para modelar alguns processos dinâmicos. O modelo é descrito pela equação diferencial ordinária linear de primeira ordem,

$$\frac{dP}{dt} = kP(t) \quad (2.5)$$

onde k é uma constante de proporcionalidade. Supondo que no tempo inicial t_0 a população inicial seja P_0 , temos

$$P(t_0) = P_0.$$

Utilizando a técnica de separação de variáveis obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{P} &= k dt \\ \int \frac{dP}{P} &= \int k dt \\ \ln \left| \frac{1}{P} \right| &= kt + c \end{aligned}$$

Pela propriedade do logaritmo, temos:

$$P(t) = P_0 e^{kt}, \text{ onde } P_0 = e^c.$$

Logo a solução para este Problema de Valor Inicial (PVI) é:

$$P(t) = P_0 e^{k(t-t_0)}. \quad (2.6)$$

Nessa equação (2.6), $P(t)$ representa a quantidade de população em função do tempo, P_0 é a quantidade inicial da população, k é uma constante que indica a taxa de crescimento e o termo $t - t_0$ é o instante de tempo final subtraído do instante de tempo inicial. Caso os parâmetros P_0 , t_0 e k forem conhecidos, então podemos determinar a população no tempo t .

Capítulo 3

Derivada de ordem fracionária

Nesse capítulo será apresentada a definição da exponencial de T-Sallis, o cálculo fracionário e uma derivada de ordem não inteira definida a partir da exponencial de T-Sallis, juntamente com suas propriedades.

3.1 Exponencial de T-Sallis

A exponencial de T-Sallis surge na tentativa de generalizar a entropia na estatística de Boltzmann-Gibbs [10]. Essa exponencial foi definida da seguinte forma:

$$y'(x) = y^q(x), \text{ com } y(0) = 1, \text{ onde } x \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

O termo q dessa equação é o parâmetro de deformação. Note que a equação em 3.1 é uma equação de Bernoulli, assim temos

$$y' = y^q \quad (3.2)$$

Considerando $z = y^{1-q}$, isso implica que, $z = y^{1-q}$. Logo

$$y = z^{\frac{1}{1-q}}$$

$$y' = \frac{1}{1-q} \cdot z^{\frac{q}{1-q}} \cdot z',$$

substituindo em (3.2), temos:

$$\frac{1}{1-q} \cdot z^{\frac{q}{1-q}} \cdot z' = z^{\frac{q}{1-q}}$$

$$z' = 1 - q.$$

Obtemos uma equação diferencial de primeira ordem, que pode ser resolvida por meio do fator integrante. Precisamos agora encontrar o fator de integração para multiplicarmos pelos termos da equação:

$$e^{\int P(x) dx} = e^{\int 0 dx} = e^0 = 1$$

Assim, obtemos

$$\int z' = \int (1 - q) dx$$

$$z = x - qx + c$$

$$y^{1-q} = x(1 - q) + c$$

$$y(x) = [x(1 - q) + c]^{\frac{1}{1-q}} \quad (3.3)$$

Note que quando $q = 1$, teríamos problemas na equação pois o denominador do expoente se tornaria 0. Por isso, ao se pretender utilizar $q = 1$ retornamos ao uso da exponencial usual. Portanto, a solução dessa função obedece o seguinte comportamento:

$$e_q^x = \begin{cases} (1 + (1 - q)x)^{\frac{1}{1-q}}, & \text{para } q \neq 1 \text{ e } 1 + (1 - q)x \geq 0, \\ e^x, & \text{para } q = 1, \\ 1 + x, & \text{para } q = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

De acordo com a expressão (3.4) o domínio e contradomínio da função exponencial de

T-Sallis se comportam da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 q = 0 & : e_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\
 0 < q < 1 & : e_q : \left[\frac{1}{q-1}, \infty \right) \longrightarrow [0, \infty), \\
 q = 1 & : e_1 : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty), \\
 q > 1 & : e_q : \left(-\infty, \frac{1}{q-1} \right] \longrightarrow (0, \infty).
 \end{aligned}$$

3.2 Cálculo Fracionário

Nesta seção, será apresentado a definição da derivada fracionária de uma função em um ponto t desenvolvida por Hilfer-Katugampola. O objetivo desse tipo de cálculo é generalizar o cálculo ordinário [11].

Definição 3.1. *Dada uma função $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Então, a derivada q conformável $D^{\alpha,q} f(t)$ de ordem α de f em t é definida por:*

$$D^{\alpha} f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}, \quad (3.5)$$

$$\forall t > 0, 0 < \alpha \leq 1.$$

Quando $0 < \alpha < 1$, essa derivada se torna um dos tipo de derivada que compõe o que chamamos de cálculo fracionário, onde derivadas e integrais de ordem arbitrária (não inteira) são definidas, apesar de terem discussões se esse tipo de derivada é fracionária ou não. O conceito de operadores fracionários foi introduzido quase simultaneamente ao desenvolvimento dos operadores clássicos [6]. Esses conceitos surgiram oficialmente em 30 de setembro de 1695 numa carta escrita por l'Hôpital para Leibniz, em que o conceito de uma derivada de ordem não-inteira é proposto e discutido [12]. Além disso, quando $\alpha = 1$ retornamos para a definição de derivada clássica [13].

3.3 Propriedades da Derivada Fracionária

A derivada definida por Katugampola satisfaz quase todas as propriedades da derivada clássica [13].

Proposição 3.2. *Considerando $f, g \in C^n(a, b)$. vamos demonstrar algumas das suas propriedades:*

1. $D^\alpha(\beta f + g) = \beta D^\alpha f + D^\alpha g$

Demonstração:

$$\begin{aligned} D^\alpha(\beta f + g) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\beta f + g)(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - (\beta f + g)(t)}{\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\beta f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - \beta f(t)}{\varepsilon} + \frac{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon} \\ &= \beta D^\alpha f + D^\alpha g \end{aligned}$$

Se esses limites existirem.

2. $D^\alpha(k) = 0$, para todo $k \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Considerando $f(t) = k$, tal que $f \in C^n(a, b)$ e $k \in \mathbb{R}$, temos:

$$D^\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

Como $f(t) = k$ é uma função constante:

$$D^\alpha f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{k - k}{\varepsilon} = 0$$

3. $D^\alpha(f \cdot g)(t) = f(t) \cdot D^\alpha g(t) + D^\alpha f(t) \cdot g(t)$

Demonstração:

$$D^\alpha(f \cdot g)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g)(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - (f \cdot g)(t)}{\varepsilon}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) \cdot g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t) \cdot g(t) + g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) \cdot f(t) - g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) \cdot f(t))}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) \cdot [f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)] + f(t) \cdot [g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)]}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha})}{\varepsilon} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(t) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon} \\
&= g(t) \cdot D^\alpha f(t) + f(t) \cdot D^\alpha g(t)
\end{aligned}$$

4. $D^\alpha(f \circ g)(t) = f'(g(t)) \cdot D^\alpha g(t)$ Demonstração:

Sabemos que:

$$D^\alpha(f \circ g)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - (f \circ g)(t)}{\varepsilon}.$$

Utilizando a definição de composição de funções, obtemos:

$$D^\alpha(f \circ g)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(g(t + \varepsilon t^{1-\alpha})) - f(g(t))}{\varepsilon}.$$

Agora, multiplicamos e dividimos pelo termo $g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)$, de modo a separar os limites:

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(g(t + \varepsilon t^{1-\alpha})) - f(g(t))}{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)} \cdot \frac{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon}.$$

Separando os limites e reorganizando os fatores:

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(g(t + \varepsilon t^{1-\alpha})) - f(g(t))}{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon}.$$

A primeira parte do limite é, por definição, a derivada de f avaliada em $g(t)$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(g(t + \varepsilon t^{1-\alpha})) - f(g(t))}{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)} = f'(g(t)).$$

A segunda parte do limite é a definição da derivada $D^\alpha g(t)$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon} = D^\alpha g(t).$$

Logo, podemos escrever:

$$D^\alpha(f \circ g)(t) = f'(g(t)) \cdot D^\alpha g(t).$$

3.4 Uma nova derivada

Nesta seção, será apresentado a definição de uma derivada fracionária semelhante a de Hilfer-Katugampola [14], porém com uma mudança no termo que o está multiplicando ε .

Definição 3.3. Dada uma função $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. A derivada q conformável $D^{\alpha,q} f(t)$ de ordem α de f em t é definida por:

$$D^{\alpha,q} f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f\left(t + \varepsilon e_q^{t^{-\alpha}}\right) - f(t)}{\varepsilon}, \quad (3.6)$$

$$\forall t > 0, 0 < \alpha \leq 1, 0 < q \leq 1.$$

3.5 Propriedades da nova derivada

A nova derivada definida (3.6) satisfaz quase todas as propriedades da derivada clássica .

Proposição 3.4. Considerando $f, g \in C^n[a, b]$ vamos demonstrar algumas dessas propriedades:

$$1. D^{\alpha,q}(\beta f + g) = \beta D^{\alpha,q} f + D^{\alpha,q} g$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\beta f + g)(t + \varepsilon e^{t^{-\alpha}}) - (\beta f + g)(t)}{\varepsilon} = \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\beta f(t + \varepsilon e^{t^{-\alpha}}) - \beta f(t)}{\varepsilon} - \frac{g(t + \varepsilon e^{t^{-\alpha}}) - g(t)}{\varepsilon} \end{aligned}$$

$$= \beta D^{\alpha,q} f + D^{\alpha,q} g$$

Se esses limites existirem.

2. $D^{\alpha,q}(k) = 0$, para todo $k \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Considerando $f(t) = k, \forall t \in [a, b], f \in C^n[a, b]$, temos:

$$D^{\alpha,q} f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon e^{t-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

Como $f(t) = k$ é uma função constante:

$$D^{\alpha,q} f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{k_1 - k}{\varepsilon} = 0, f(t) = k, \text{ para todo } t \in [a, b], \text{ logo } k_1 = k$$

3. $D^{\alpha,q}(f \cdot g)(t) = f(t) \cdot D^{\alpha,q}g(t) + D^{\alpha,q}f(t) \cdot g(t)$

Demonstração:

$$\begin{aligned} D^{\alpha,q} f(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g)(t + \varepsilon e^{t-\alpha}) - (f \cdot g)(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(f(t + \varepsilon e^{t-\alpha}) \cdot g(t + \varepsilon e^{t-\alpha}) - f(t) \cdot g(t) + g(t + \varepsilon e^{t-\alpha}) \cdot f(t) - g(t + \varepsilon e^{t-\alpha}) f(t))}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(t + \varepsilon e^{t-\alpha}) \cdot [f(t + \varepsilon e^{t-\alpha}) - f(t)] + f(t) \cdot [g(t + \varepsilon e^{t-\alpha}) - g(t)]}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(t + \varepsilon e^{t-\alpha})}{\varepsilon} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon e^{t-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(t) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(t + \varepsilon e^{t-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon} \\ &= g(t) \cdot D^{\alpha,q} f(t) + f(t) \cdot D^{\alpha,q} g(t) \end{aligned}$$

4. $D^{\alpha,q}(f \circ g)(t) = f'(g(t)) \cdot D^{\alpha,q}g(t)$

Sabemos que:

$$D^{\alpha,q}(f \circ g)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)(t + \varepsilon e^{t-\alpha}) - (f \circ g)(t)}{\varepsilon}.$$

Utilizando a definição de composição de funções, obtemos:

$$D^{\alpha,q}(f \circ g)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(g(t + \varepsilon e^{t-\alpha})) - f(g(t))}{\varepsilon}.$$

Agora, multiplicamos e dividimos pelo termo $g(t + \varepsilon e^{t-\alpha}) - g(t)$, de modo a separar os limites:

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(g(t + \varepsilon e^{t-\alpha})) - f(g(t))}{g(t + \varepsilon e^{t-\alpha}) - g(t)} \cdot \frac{g(t + \varepsilon e^{t-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon}.$$

Separando os limites e reorganizando os fatores:

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(g(t + \varepsilon e^{t-\alpha})) - f(g(t))}{g(t + \varepsilon e^{t-\alpha}) - g(t)} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(t + \varepsilon e^{t-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon}.$$

A primeira parte do limite é, por definição, a derivada de f avaliada em $g(t)$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(g(t + \varepsilon e^{t-\alpha})) - f(g(t))}{g(t + \varepsilon e^{t-\alpha}) - g(t)} = f'(g(t)).$$

A segunda parte do limite é a definição da derivada $D^{\alpha,q}g(t)$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(t + \varepsilon e^{t-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon} = D^{\alpha,q}g(t).$$

Logo, podemos escrever:

$$D^{\alpha,q}(f \circ g)(t) = f'(g(t)) \cdot D^{\alpha,q}g(t).$$

Teorema 3.5. *Fixando $\alpha, q \in (0, 1]$ e $t > 0$. Uma função $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é Q -diferenciável em t se, e somente se f for diferenciável em t ; nesse caso, tem-se que:*

$$D^{\alpha,q}f(t) = e_q^{t-\alpha} f'(t).$$

Demonstração: Como a função dada é diferenciável, podemos aplicar l'Hôpital.

$$\begin{aligned} D^{\alpha,q} f(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon e_q^{t^{-\alpha}}) - f(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f'(t + \varepsilon e_q^{t^{-\alpha}}) e_q^{t^{-\alpha}} \\ &= e_q^{t^{-\alpha}} \cdot f'(t) \end{aligned}$$

Capítulo 4

Modelo Malthusino deformado

Nesse capítulo será apresentado o modelo Malthusiano deformado de acordo com a derivada fracionária apresentada no capítulo anterior (3.6) e sua solução obtida através da definição do exponencial de T-Sallis e do Teorema de Chebyshev.

4.1 EDOs q -conformáveis

Neste capítulo vamos deformar o modelo maltusiano [8], cuja equação é dada por:

$$\frac{dP}{dt} = kP, P(t_0) = P_0 \quad (4.1)$$

Deformando essa EDO de acordo com a derivada fracionária, temos:

$$D^\alpha(P(t)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P\left(t + \varepsilon e_q^{t-\alpha}\right) - P(t)}{\varepsilon} = kP \quad (4.2)$$

Como visto no Teorema (3.5) podemos escrever $D^\alpha(P(t))$ como:

$$e_q^{t-\alpha} \frac{dP}{dt} = kP$$

Que pode ser resolvida por separação de variáveis:

$$\frac{dP}{P} = k \frac{1}{e_q^{t-\alpha}} dt$$

$$\int \frac{dP}{P} = \int k \frac{1}{e_q^{t-\alpha}} dt$$

Pela condição inicial dada, temos

$$\ln P - \ln P_0 = k \int_0^t \frac{1}{e_q^{t-\alpha}} dt$$

$$\ln \frac{P}{P_0} = k \int_0^t \frac{1}{e_q^{t-\alpha}} dt$$

Para resolver $\int_0^t \frac{1}{e_q^{t-\alpha}} dt$, temos que utilizar da forma apresentada na expressão (3.4) que e_q^x assume para $q \neq 1$ e $1 + (1 - q)x \geq 0$. Assim temos:

$$\int_0^t \frac{1}{e_q^{t-\alpha}} dt = \int_0^t \frac{1}{(1 + (1 - q)t^{-\alpha})^{\frac{-\alpha}{1-q}}} dt = \int_0^t (1 + (1 - q)t^{-\alpha})^{\frac{\alpha}{1-q}} dt \quad (4.3)$$

Considerando $t = x$, $m = 0$, $a = 1$, $b = 1 - q$, $r = -\alpha$, $n = \frac{\alpha}{1-q}$, $dt = dx$ temos que essa integral (4.3) assume a seguinte forma [15]:

$$\int x^m (a + bx^r)^n dx \quad (4.4)$$

Para integrar este tipo de polinômio podemos utilizar o Teorema de Chebyshev [16], que diz que:

Teorema 4.1 (Teorema de Chebyshev). *Sejam m, n, p números racionais e a, b constantes reais não nulas. A primitiva de uma função da forma*

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx$$

pode ser expressa em termos de funções elementares se, e somente se, pelo menos um dos números

$$p + q, \quad p, \quad q$$

for um número inteiro, onde $q = \frac{m+1}{n} - 1$.

Logo, podemos reescrever a integral como :

$$\int x^m(a + bx^r)^n dx = \frac{1}{r} a^{\frac{m+1}{r}+n} b^{-\frac{m+1}{r}} B_y \left(\frac{1+m}{r}, n-1 \right)$$

Que tem solução igual à:

$$= \frac{1}{m+1} a^{\frac{m+1}{r}+n} b^{-\frac{1+m}{r}} y^{\frac{1+m}{r}} F \left(\frac{m+1}{r}, 2-n, \frac{1+m+r}{r}; y \right)$$

Tal que $y = \frac{b}{a}x^r$, e $B \left(\frac{1+m}{r}, q-1 \right)$ e $F \left(\frac{m+1}{r}, 2-q, \frac{1+m+r}{r}; y \right)$ são a função beta incompleta e a função hipergeométrica, respectivamente. Consequentemente, o Teorema de Chebyshev indica que a integração (4.3) é elementar se, e somente se, $-\frac{1}{\alpha}$ ou $\frac{1}{q-1}$ ou $\frac{1}{q-1} - \frac{1}{\alpha}$ for um número inteiro. Inserindo os valores da nossa integral, temos:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{-\alpha} 1^{\frac{1}{-\alpha} + \frac{\alpha}{1-q}} (1-q)^{-\frac{1}{-\alpha}} B \left(\frac{1}{-\alpha}, \frac{\alpha}{1-q} - 1 \right) \\ &= (1-q)^{\frac{1}{-\alpha}} ((1-q)t^{-\alpha})^{\frac{1}{-\alpha}} F \left(\frac{1}{-\alpha}, 2 - \frac{\alpha}{1-q}, \frac{1-\alpha}{-\alpha}; (1-q)^{\frac{1}{-\alpha}} t \right) \\ &= (1-q)^{\frac{1}{-\alpha}} (1-q)^{\frac{1}{-\alpha} t} F \left(\frac{1}{-\alpha}, 2 - \frac{\alpha}{1-q}, \frac{1-\alpha}{-\alpha}; (1-q)^{\frac{1}{-\alpha}} t \right) \\ &= (1-q)^{-\frac{2}{\alpha} t} F \left(\frac{1}{-\alpha}, 2 - \frac{\alpha}{1-q}, \frac{1-\alpha}{-\alpha}; (1-q)^{\frac{1}{-\alpha}} t \right) \end{aligned}$$

Assim conseguimos explicitar $P(t)$ deformada:

$$P(t) = P_0 e^{k \left((1-q)^{-\frac{2}{\alpha} t} F \left(\frac{1}{-\alpha}, 2 - \frac{\alpha}{1-q}, \frac{1-\alpha}{-\alpha}; (1-q)^{\frac{1}{-\alpha}} t \right) \right)} \quad (4.5)$$

Capítulo 5

Metodologia

5.1 Aplicação

Nessa seção, é descrito como foi aplicado o modelo malthusiano deformado, conforme apresentado na equação (4.5) em um estudo que realizou uma análise do crescimento de tumores de câncer de mama, com um outro tipo de derivada fracionária [9].

Para plotar os gráficos da versão fracionária do modelo malthusiano foi utilizado a linguagem de programação *Python* por meio do *software VSCode*, que é um editor de código-fonte gratuito e de código aberto, desenvolvido pela *Microsoft*. Nesse *software* foram utilizadas as bibliotecas *numpy numpy* (importada como `np`), *matplotlib.pyplot* (importada como `plt`) e *scipy.special.hyp2f1*.

A tabela a seguir contém os dados que foram utilizados para realizar a aplicação do modelo no estudo de referência.

Tabela 5.1: Simulações do Modelo Malthusiano Fracionário para Crescimento Tumoral

Dados da Simulação	Valores Utilizados
Volume Inicial (P_0)	200 mm ³
Intervalo de Tempo(t)	0 a 140 dias
Ordens de Derivada Fracionária utilizada	1.0, 0.99, 0.975, 0.95
Taxa de Crescimento (k)	0.00246 dia ⁻¹

Fonte: Paixão, 2023.

A seguir, temos o critério que foi utilizado para comparar e escolher o melhor modelo para descrever o crescimento tumoral no artigo de referência. A métrica nRMSE (Normalized Root Mean Square Error) é utilizada para avaliar o ajuste entre o que é previsto pelo modelo

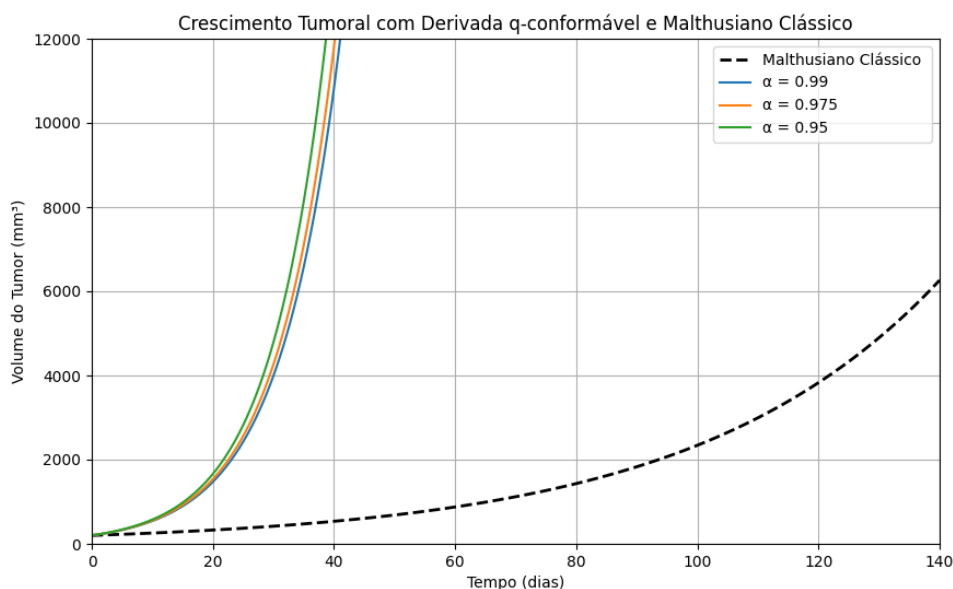
simulado e os dados reais para cada ordem da derivada escolhida. A métrica nRMSE é dada por:

$$\text{nRMSE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{t_i - o_i}{o_i} \right)^2},$$

Nessa métrica: N é o número total de pontos de dados, t_i é o volume previsto pelo modelo, o_i é o volume observado nos dados reais.

O primeiro gráfico a seguir foi gerado utilizando os dados mencionados no artigo de referência, como $k = 0.00246$ e α com os valores 0.95, 0.975, 0.99 e 1.00. O parâmetro $q = 0.5$ foi utilizado para todas as derivadas mencionadas.

Figura 5.1: Volume do tumor em função do tempo para diferentes ordens fracionárias de derivada.



Fonte: acervo do autor

Nesse gráfico é fácil perceber que as funções se distanciam muito da função malthusiana clássica e isso implica que a forma fracionária desenvolvida não serve para melhorar a precisão do modelo de Malthus.

5.1.1 Análise dos Resultados

Ainda foi realizada mais uma tentativa de ajustar o modelo utilizando de derivadas de ordem 0.649, 0.65, 0.6508, 0.6509 e 0.651 para aproximar os gráficos da função clássica. Mas,

essas ordens de derivada só se aproximam quando ao invés de utilizar $k = 0.00246$, tomar a taxa de crescimento $k = 0.0246$. Porém, ao modificar a taxa de crescimento, que é constante, é alterado o tipo de população analisada.

Capítulo 6

6.1 Considerações finais

Apesar dos estudos envolvendo o cálculo fracionário ser um tema muito trabalhado atualmente, nem sempre é possível obter um resultado melhor para o modelo escolhido para ser deformado de acordo a derivada de ordem não inteira. Porém, é possível que outros modelos que, ao serem alterados para a forma fracionária escolhida nesse trabalho se tornem mais próximos dos dados reais.

Referências Bibliográficas

- [1] SOUZA, Nicolý Longaretti de. **Introdução ao cálculo de ordem não inteira**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2022.
- [2] LACROIX, Silvestre François. **Traité du calcul différentiel et du calcul intégral**. Paris: JBM Duprat, 1797.
- [3] ABASCAL, R. **Ecuaciones diferenciales de orden superior, funciones eulerianas**. Buenos Aires: UTN Facultad Regional Avellaneda, 2006.
- [4] MATHAI, Arakaparampil M.; HAUBOLD, Hans J. **Special functions for applied scientists**. New York: Springer, 2008.
- [5] FLANDERS, Harley. Differentiation under the integral sign. **The American Mathematical Monthly**, v. 80, n. 6, p. 615–627, 1973.
- [6] BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Tradução e revisão técnica Valéria de Magalhães Iorio. – 11. ed. – Rio de Janeiro : LTC, 2020.
- [7] ZILL, Dennis G. **Equações diferenciais: com aplicações em modelagem**. Tradução da 10^a edição norte-americana. São Paulo: Cengage Learning Brasil, 2016.
- [8] VERGEL ORTEGA, Mawency; IBARGUEN MONDRAGON, Eduardo; GÓMEZ VERGEL, Carlos Sebastian. Model applied to exponential growth of covid-19. **Revista Boletín Redipe**, v. 9, n. 11, p. 159–164, 2020.
- [9] PAIXÃO, Denilson Nogueira dos Santos. **Análise da dinâmica tumoral via equações diferenciais fracionárias**. Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília. 2023.
- [10] TSALLIS, Constantino. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. **Journal of Statistical Physics**, v. 52, p. 479–487, 1988.

-
- [11] OLIVEIRA, Daniela dos Santos; OLIVEIRA, E. Capelas. Hilfer–Katugampola fractional derivatives. **Computational and Applied Mathematics**, v. 37, n. 3, p. 3672–3690, 2018.
- [12] SILVA JUNIOR, Luciano Bento da. **A integral fracionária de Riemann-Liouville sobre os espaços L^p** . Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2023.
- [13] STEWART, James. **Cálculo**. Tradução Helena Maria Ávila Castr; revisão técnica Eduardo Garibaldi. São Paulo: Cengage Learning, 2021. v. 1. ISBN 978-85-221-0660-8.
- [14] OLIVEIRA, Daniela dos Santos; OLIVEIRA, E. Capelas. Generalizações para derivadas fracionárias. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 6, n. 2, 2018.
- [15] REIS, Cristina de Andrade Santos; SILVA JUNIOR, Rinaldo Vieira. A new non-conformable derivative based on Tsallis’s q -exponential function. **Intermaths**, v. 2, n. 2, p. 106–118, 2021.
- [16] MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro de. “**Professor, qual a primitiva de $e^x/x?! (O problema de integração em termos finitos)$ ”**. *Matemática Universitária*, n. 31, p. 143–161, dez. 2001.