

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas

Licenciatura em Matemática

Hermínia Laura Amaral Santos

Curvas no Espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 : Uma Abordagem
Introdutória à Geometria Diferencial

Vitória da Conquista - BA
2025

Herminia Laura Amaral Santos

**CURVAS NO ESPAÇO EUCLIDIANO \mathbb{R}^3 : UMA ABORDAGEM
INTRODUTÓRIA À GEOMETRIA DIFERENCIAL**

Monografia apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - Campus Vitória da Conquista-BA, para obtenção do título de Licenciado em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Leandro Correia Araújo.

AD PLENAM VITAM

Vitória da Conquista - BA

2025

Herminia Laura Amaral Santos

Curvas no Espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 : Uma Abordagem Introdutória à Geometria
Diferencial

Monografia apresentada ao Colegiado do Curso de Matemática como requisito parcial para aprovação na disciplina Seminário de Pesquisa II do Curso de Licenciatura em Matemática. Trabalho aprovado em 05 de dezembro de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Leandro Correia Araújo - UESB
Orientador

Prof. Dr. Genilson Soares de Santana - UESB
Convidado

Prof. Dr. Júlio César dos Reis - UESB
Convidado

Vitória da Conquista - BA
2025

Nenhum caminho é longo demais quando o propósito guia os passos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me sustentado até aqui, por me fortalecer nos momentos de dificuldade e por permitir que eu chegasse ao fim desta etapa tão importante da minha vida acadêmica.

Agradeço à minha mãe Ana (em memória), que sempre buscou o melhor para mim e cuja memória continua sendo fonte de inspiração diária. Ao meu pai Joaquim e aos meus irmãos Romeu, Ronan e Ana, pelo apoio ao longo desta jornada.

Expresso minha gratidão ao meu marido Bruno, pelo incentivo constante, pela paciência e por caminhar ao meu lado em todos os desafios.

Agradeço aos amigos que a universidade me deu, Débora, Diógenes, Lucas, Matheus e James, pelo companheirismo, pelas trocas de conhecimento e por terem tornado essa caminhada mais leve.

Registro também minha sincera gratidão ao meu orientador, Prof. Leandro, pela compreensão, pela disponibilidade e pelas orientações fundamentais para a construção deste trabalho.

Por fim, agradeço aos professores Gonçalo, Júlio, Sérgio e Altemar (em memória), pois cada um, à sua maneira, contribuiu para minha formação e para o entendimento dos conteúdos que fundamentam este estudo.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma introdução à Geometria Diferencial das curvas no espaço tridimensional, com foco nos conceitos fundamentais que descrevem sua estrutura geométrica. O estudo inicia pela definição de curva parametrizada diferenciável, seguido da análise do vetor tangente, da noção de curva regular e da construção do comprimento de arco. Em seguida, desenvolve-se o processo de reparametrização pelo comprimento de arco, que permite uma descrição geométrica independente do parâmetro inicial. A partir dessa base, introduzem-se as principais quantidades geométricas associadas a uma curva: curvatura, torção e os vetores que formam o triedro de Frenet. As fórmulas de Frenet são apresentadas com deduções detalhadas, interpretações geométricas e exemplos ilustrativos, com destaque para a hélice circular, cuja curvatura e torção constantes permitem uma visualização clara do comportamento espacial da curva. Os resultados evidenciam que as funções $\kappa(s)$ e $\tau(s)$ determinam completamente a geometria local de uma curva regular, confirmando a importância do formalismo de Frenet–Serret no estudo das curvas no espaço. O trabalho conclui que a Geometria Diferencial oferece uma estrutura conceitual sólida para compreender como curvas se deformam, se inclinam e se movem no espaço, constituindo um ponto de partida essencial para investigações mais avançadas.

Palavras-chave: Curvas; Diferencial; Frenet.

ABSTRACT

This work presents an introduction to the Differential Geometry of curves in three-dimensional space, emphasizing the fundamental concepts that describe their geometric structure. The study begins with the definition of differentiable parametrized curves, followed by the analysis of the tangent vector, the notion of regular curves, and the construction of arc length. Next, the reparametrization by arc length is developed, providing a geometric description independent of the original parameter. Based on this framework, the main geometric quantities associated with a curve are introduced: curvature, torsion, and the vectors that form the Frenet frame. The Frenet formulas are presented with detailed derivations, geometric interpretations, and illustrative examples, with emphasis on the circular helix, whose constant curvature and torsion allow a clear visualization of the spatial behavior of the curve. The results show that the functions $\kappa(s)$ and $\tau(s)$ completely determine the local geometry of a regular curve, confirming the importance of the Frenet–Serret framework in the study of space curves. The work concludes that Differential Geometry provides a solid conceptual structure for understanding how curves bend, twist, and move in space, serving as an essential foundation for more advanced investigations.

Keywords: Curves; Differential; Frenet.

Sumário

1	Introdução	6
2	Fundamentos da Geometria Diferencial	9
2.1	Curva Parametrizada Diferenciável	9
2.2	Vetor Tangente	13
2.2.1	Equação da Reta Tangente a uma Curva	16
2.3	Curva Regular	18
3	Reparametrização por Comprimento de Arco	21
3.1	Interpretação Geométrica	23
4	Teoria Local das Curvas	27
4.1	Curvatura de uma curva	27
4.1.1	Vetor Unitário, Vetor Normal e Vetor Binormal	29
4.1.2	Triedro de Frenet	31
4.1.3	Fórmulas de Frenet	32
4.1.4	Torção de uma curva	34
5	Conclusão	39
	Referências	41

Capítulo 1

Introdução

Discutir algumas particularidades do estudo da geometria sob um viés histórico permite compreender como parte do conhecimento matemático que utilizamos atualmente foi se estruturando e se difundindo ao longo do tempo. Nesse sentido, para situar o desenvolvimento dos conceitos que fundamentam a Geometria Diferencial, trataremos uma breve contextualização desde a tradição euclidiana até as contribuições de Descartes. Segundo Zeferino Júnior e Silva (2023, p. 3), “investigar a gênese de um determinado assunto pode elucidar pontos importantes que venham contribuir com a construção do conhecimento científico.”

A geometria esteve, durante muitos séculos, fundamentada no modelo axiomático estabelecido por Euclides. Essa perspectiva, baseada em construções e demonstrações, orientava a própria forma de compreender os objetos geométricos. “Antes do século XVII a ciência da geometria era a de Euclides, com seu enfoque axiomático baseado em demonstrações e construções” (Cifuentes, Santos e Chyczy, 2013, p. 5).

A partir do século XVII, no entanto, a geometria passa a se desenvolver em duas direções complementares: de um lado, a continuidade do método axiomático e de outro, o surgimento de uma nova abordagem baseada no uso de coordenadas, introduzida por Descartes e Fermat. Segundo Cifuentes, Santos e Chyczy (2013), essa nova abordagem transformou a compreensão do espaço geométrico, substituindo a intuição física por uma interpretação numérica própria do plano cartesiano. Ainda,

Na modernidade, a partir do século XVII, a geometria segue dois caminhos paralelos, ainda o axiomático, incorporando novos conceitos, por exemplo, os de perspectiva que já os artistas vinham utilizando, e o analítico, desenvolvido primeiro por Descartes (1596-1650) e Fermat (1601-1665) que incorporam o uso de coordenadas, transformando assim a intuição geométrica do espaço físico numa intuição numérica de um espaço matemático “artificial”: o plano cartesiano. (Cifuentes; Santos; Chyczy, 2013, p. 5)

Esses caminhos representaram uma mudança decisiva na história da geometria, estabelecendo as bases que permitiriam, nos séculos seguintes, o surgimento das geometrias não euclidianas e o desenvolvimento da Geometria Diferencial.

Segundo do Carmo (2005), a Geometria Diferencial de curvas pode ser compreendida sob dois aspectos: a geometria diferencial clássica e a geometria diferencial global. Neste trabalho, abordaremos a geometria diferencial clássica, que trata das propriedades locais, aquelas que dependem apenas do comportamento da curva nas vizinhanças de um ponto. Por esse motivo, as curvas analisadas nesse contexto são definidas por funções que admitem derivação um número suficiente de vezes. Esta área, que combina elementos de cálculo e geometria, possibilita a análise detalhada do comportamento das curvas no espaço tridimensional.

Para fundamentar teoricamente este trabalho, será adotado como principal referência o livro *Introdução à Geometria Diferencial*, de Keti Tenenblat (2008), obra que apresenta os conceitos essenciais da área de maneira clara e sistemática, oferecendo o embasamento necessário para o estudo das propriedades locais de curvas e superfícies.

Assim, serão abordados os principais conceitos da Geometria Diferencial de curvas, incluindo as noções de curva diferenciável parametrizada, vetor tangente e curva regular. Em seguida, estudaremos o comprimento de arco de uma curva parametrizada e a teoria local das curvas, que permitem caracterizar curvas regulares por meio de suas propriedades intrínsecas, como curvatura e torção. Também serão introduzidas as ideias fundamentais que descrevem a orientação geométrica de uma curva no espaço tridimensional.

Do ponto de vista histórico, o desenvolvimento da teoria local das curvas foi profundamente influenciado pelo trabalho de Jean Frédéric Frenet (1816–1900). Como apresentado em Delgado e Frensel, Frenet introduziu em sua tese de doutorado, apresentada em 1847, um conjunto de vetores ortonormais que descrevem a orientação instantânea de uma curva regular no espaço, hoje denominado *triedro de Frenet*. Esses vetores variam ao longo da curva segundo um sistema de equações diferenciais que passou a ser conhecido como *fórmulas de Frenet*, ou *fórmulas de Frenet–Serret*. Tais equações relacionam diretamente a curvatura e a torção com a geometria local da curva e constituem uma das primeiras formulações capazes de caracterizar completamente uma curva regular por meio de invariantes geométricos. Esse marco histórico teve papel essencial na evolução da teoria das curvas, estabelecendo bases que influenciam a Geometria Diferencial até os dias de hoje.

Os objetivos deste trabalho, portanto, são: estudar e sistematizar os conceitos fundamentais da teoria das curvas no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , explorar exemplos clássicos que ilustrem tais conceitos e apresentar a fundamentação teórica necessária para a compreensão do Teorema Fundamental das Curvas Regulares. Para isso, serão utilizadas ferramentas da Análise em \mathbb{R}^3 , do Cálculo Vetorial, da Geometria Analítica e da própria Geometria Diferencial. Espera-se que

essa abordagem, de caráter introdutório e expositivo, contribua para a compreensão e difusão dos fundamentos da Geometria Diferencial, além de servir de base para estudos mais avançados em áreas afins da Matemática e suas aplicações.

Quanto à organização do trabalho, no Capítulo 2 são apresentados os fundamentos da Geometria Diferencial necessários ao desenvolvimento do tema, incluindo o estudo de curvas parametrizadas, vetor tangente, curvas regulares e reparametrização por comprimento de arco. No Capítulo 3 é abordada a reparametrização por comprimento de arco de forma mais detalhada, com suas propriedades e interpretações geométricas. O Capítulo 4 é dedicado à teoria local das curvas, contemplando os conceitos de curvatura, triedro de Frenet, fórmulas de Frenet e torção. Por fim, no Capítulo 5 são apresentadas as considerações finais, destacando os principais resultados obtidos ao longo do trabalho.

Capítulo 2

Fundamentos da Geometria Diferencial

Neste capítulo, será apresentada a teoria local das curvas no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . A escolha pelo espaço tridimensional se deve ao fato de que algumas das propriedades geométricas mais ricas das curvas, como a torção, que descreve o modo como a curva se desvia do plano que contém seu vetor tangente, manifestam-se plenamente apenas em três dimensões.

Dessa forma, o estudo de curvas em \mathbb{R}^3 torna-se essencial para compreender de maneira completa o comportamento geométrico de uma curva no espaço, permitindo analisar tanto sua curvatura quanto a forma como ela se “enrola” e se orienta tridimensionalmente.

A partir desses conceitos, será possível compreender o comportamento geométrico de curvas regulares no espaço e formular as chamadas *fórmulas de Frenet*, que descrevem as variações dos vetores associados à curva ao longo de seu percurso.

2.1 Curva Parametrizada Diferenciável

Definição 2.1.1. *Uma curva parametrizada diferenciável no espaço tridimensional \mathbb{R}^3 é uma aplicação*

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

onde I é um intervalo aberto em \mathbb{R} e α é de classe C^∞ , ou seja, todas as suas componentes possuem derivadas de todas as ordens, e essas derivadas são contínuas.

Em outras palavras, podemos escrever:

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

com $x(t), y(t), z(t) \in C^\infty(I)$, representando as coordenadas da curva nos eixos x , y e z .

A variável $t \in I$ é chamada de *parâmetro da curva*, e o conjunto dos pontos $\alpha(t)$, para

$t \in I$, é denominado *traço da curva*.

Exemplo 2.1. Considere a aplicação

$$\alpha(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct), \quad t \in \mathbb{R},$$

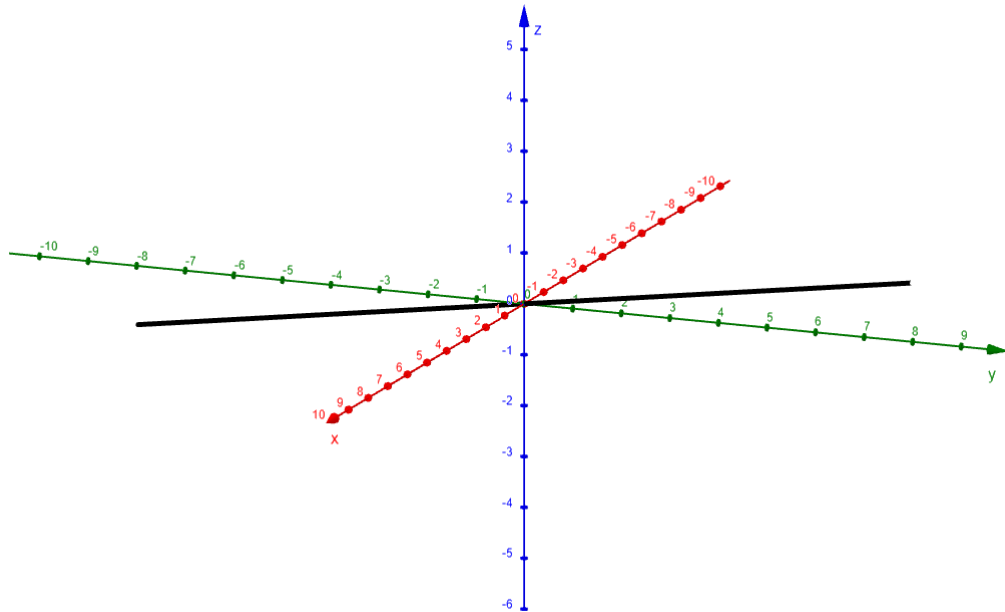
onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Observe que as três componentes da função são lineares em t e, portanto, pertencem à classe C^∞ . Logo, $\alpha(t)$ é uma curva parametrizada diferenciável.

A representação geométrica dessa curva é uma reta no espaço que passa pelo ponto (x_0, y_0, z_0) , que é a posição de $\alpha(0)$ e é paralela ao vetor (a, b, c) , que representa sua direção. Além disso, devemos levar em consideração a importância da condição $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Essa condição garante que o vetor (a, b, c) não é nulo. Se fosse, a curva estaria restrita a um único ponto fixo, e não representaria uma reta.

Assim, o traço da curva é uma linha reta em \mathbb{R}^3 , passando por (x_0, y_0, z_0) e com direção determinada por (a, b, c) , conforme a figura 2.1.

Figura 2.1: Representação da reta parametrizada $\alpha(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$.



Fonte: Elaborado pela autora no GeoGebra (2025).

Exemplo 2.2. Considere a curva parametrizada diferenciável definida por:

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad t \in \mathbb{R}, \quad a > 0, b \neq 0.$$

As funções componentes da curva são:

$$x(t) = a \cos t,$$

$$y(t) = a \sin t,$$

$$z(t) = bt.$$

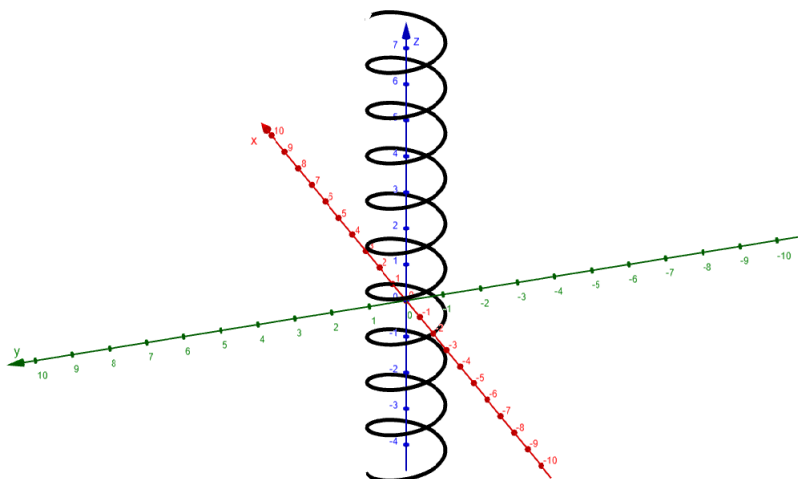
Note que as funções $\cos t$, $\sin t$ e t são funções elementares conhecidas por serem infinitamente diferenciáveis em todo o conjunto dos números reais. Assim, cada uma das componentes $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ é de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ e α é uma **curva parametrizada diferenciável**.

Analisando as duas primeiras coordenadas percebemos a descrição de um círculo no plano xy , pois:

$$x^2(t) + y^2(t) = a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t = a^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = a^2.$$

Portanto, a projeção da curva sobre o plano xy é uma circunferência de raio a centrado na origem. Já a coordenada $z(t) = bt$ varia linearmente com t , indicando que a curva sobe ou desce ao longo do eixo z de forma constante. A curva resultante é chamada de **hélice circular**, pois corresponde a um movimento circular constante no plano xy simultâneo a um deslocamento uniforme ao longo do eixo z . Como vemos na figura 2.2, essa curva está contida na superfície do cilindro circular de equação $x^2 + y^2 = a^2$.

Figura 2.2: Representação da hélice circular.



Fonte: Elaborado pela autora no GeoGebra (2025).

Exemplo 2.3. *Considere a aplicação vetorial:*

$$\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t, e^t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Essa curva é uma função vetorial de variável real que associa a cada valor de t um ponto no espaço tridimensional \mathbb{R}^3 .

As funções componentes da curva são:

$$x(t) = e^t \cos t,$$

$$y(t) = e^t \operatorname{sen} t,$$

$$z(t) = e^t.$$

Todas essas funções são compostas de funções elementares e^t , $\cos t$, $\operatorname{sen} t$, que são infinitamente deriváveis em \mathbb{R} . Como a soma e o produto de funções diferenciáveis são diferenciáveis, concluímos que $\alpha(t)$ é uma curva parametrizada diferenciável em \mathbb{R}^3 .

A representação geométrica dessa curva descreve uma espiral logarítmica tridimensional que “sobe” no eixo z à medida que t aumenta. Observamos que:

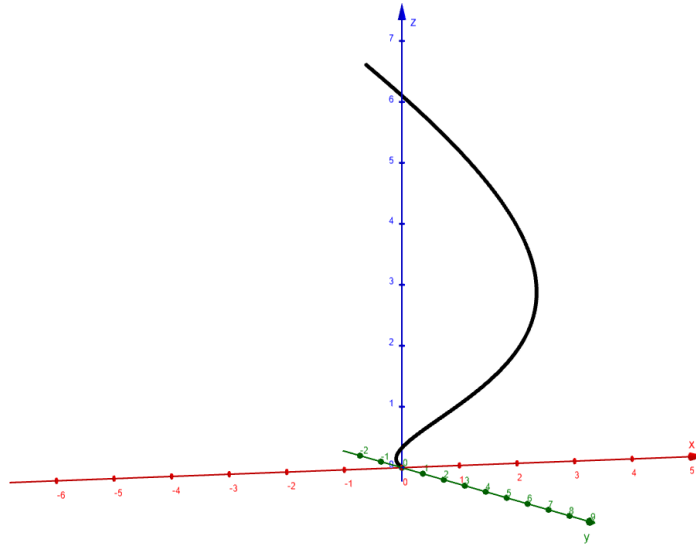
- *A projeção da curva no plano xy é $(e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t)$, que descreve uma espiral logarítmica no plano.*
- *O raio dessa espiral cresce exponencialmente, já que:*

$$r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = \sqrt{e^{2t} \cos^2 t + e^{2t} \operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{e^{2t}} = e^t$$

- *A coordenada $z(t) = e^t$ mostra que, além de se afastar da origem no plano xy , a curva também sobe no espaço, formando uma espiral que sobe rapidamente em torno do eixo z .*

Assim, a curva descrita possui um comportamento espiral crescente em direção ao infinito, tanto em módulo quanto em altura, sendo um exemplo importante de curva parametrizada diferenciável com crescimento exponencial, conforme verificamos na figura 2.3.

Figura 2.3: Representação da espiral logarítmica.



Fonte: Elaborado pela autora no GeoGebra (2025).

2.2 Vetor Tangente

Definição 2.2.1. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva diferenciável, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto. O vetor derivada $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, quando este é diferente de zero, fornece uma direção no espaço que é tangente à curva no ponto $\alpha(t)$. O vetor $\alpha'(t)$ é chamado de **vetor tangente** à curva no ponto $\alpha(t)$. Geometricamente, ele representa a direção em que a curva está “seguindo” naquele instante. Em outras palavras, se pensarmos em alguém caminhando pela curva à medida que t aumenta, o vetor tangente indica para onde essa pessoa estaria apontando naquele exato momento.*

Matematicamente, se

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

então o vetor tangente é dado por

$$\alpha'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right).$$

A existência desse vetor tangente depende da diferenciabilidade da função α e sua interpretação geométrica é essencial na análise local da curva no espaço.

A seguir, apresentamos alguns exemplos que ilustram o comportamento do vetor tangente em diferentes tipos de curvas.

Exemplo 2.4. Considere a curva

$$\alpha(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct),$$

com $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ e $(a, b, c) = \left(1, 2, \frac{1}{2}\right)$. Assim,

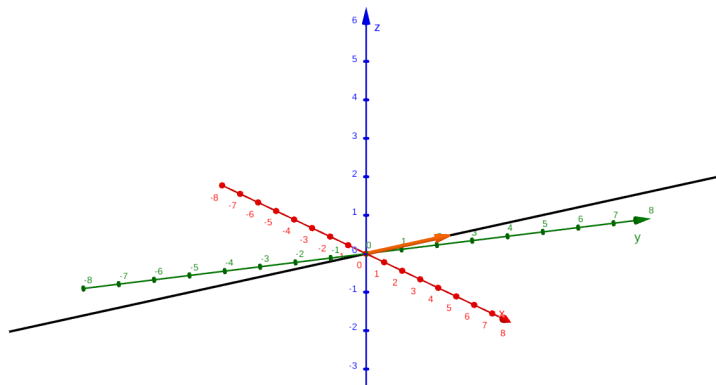
$$\alpha(t) = \left(t, 2t, \frac{1}{2}t\right).$$

Derivando em relação a t , obtemos o vetor tangente:

$$\alpha'(t) = \left(1, 2, \frac{1}{2}\right).$$

O vetor tangente é constante, o que significa que a curva tem direção fixa em todo o seu comprimento. Geometricamente, representa uma reta orientada no espaço tridimensional. No GeoGebra, a visualização mostra que o vetor tangente permanece paralelo à reta para qualquer valor de t , conforme vemos na figura 2.4.

Figura 2.4: Representação da reta parametrizada e do vetor tangente.



Fonte: Elaborado pela autora no GeoGebra (2025).

Exemplo 2.5. Considere agora a curva

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt),$$

onde a e b são constantes reais. O vetor tangente é dado por

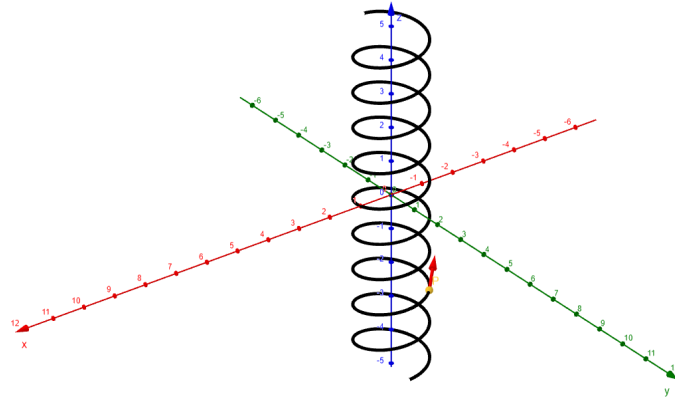
$$\alpha'(t) = (-a \operatorname{sen} t, a \operatorname{cos} t, b).$$

Observe que o vetor tangente varia de direção à medida que t varia, mas seu módulo permanece constante:

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Isso significa que a hélice possui velocidade uniforme, descrevendo um movimento circular em torno do eixo z enquanto sobe (ou desce) linearmente nessa direção. No GeoGebra, é possível observar que o vetor tangente “gira” em torno do eixo, mantendo o mesmo comprimento, para isto, veja a figura 2.5.

Figura 2.5: Representação do vetor tangente à hélice circular.



Fonte: Elaborado pela autora no GeoGebra (2025).

Exemplo 2.6. Seja $\alpha(t) = (e^t \operatorname{cos} t, e^t \operatorname{sen} t, e^t)$. Derivando em relação a t , temos:

$$\alpha'(t) = (e^t(\operatorname{cos} t - \operatorname{sen} t), e^t(\operatorname{sen} t + \operatorname{cos} t), e^t).$$

Neste caso, o vetor tangente varia tanto em direção quanto em módulo. Como o fator e^t cresce exponencialmente, o vetor tangente aumenta de intensidade conforme t cresce. Isso indica que a curva se afasta cada vez mais da origem, com um movimento que se acelera no espaço tridimensional.

Análise Comparativa

- Na **reta parametrizada**, o vetor tangente é constante, indicando direção fixa.
- Na **hélice circular**, o vetor tangente possui módulo constante, mas direção variável.
- Na **curva exponencial**, tanto o módulo quanto a direção do vetor tangente variam com o parâmetro t .

Essas diferenças evidenciam o papel fundamental do vetor tangente na descrição geométrica de uma curva, permitindo compreender seu comportamento local e sua orientação no espaço.

2.2.1 Equação da Reta Tangente a uma Curva

Uma das principais aplicações do vetor tangente é a determinação da **reta tangente** à curva em um ponto dado. Seja $\alpha(t)$ uma curva em \mathbb{R}^3 , em que seu vetor tangente $\alpha'(t)$ é diferente do vetor nulo e $t_0 \in \mathbb{R}$ um valor do parâmetro. O vetor $\alpha'(t_0)$ fornece a direção da curva nesse ponto, enquanto $\alpha(t_0)$ indica sua posição. Assim, a equação vetorial da reta tangente à curva no ponto $\alpha(t_0)$ é dada por:

$$r(s) = \alpha(t_0) + s \alpha'(t_0),$$

onde $s \in \mathbb{R}$ é o parâmetro da reta.

De forma equivalente, a equação paramétrica da reta pode ser escrita como:

$$\begin{cases} x = x_0 + as, \\ y = y_0 + bs, \\ z = z_0 + cs, \end{cases}$$

onde $(x_0, y_0, z_0) = \alpha(t_0)$ e $(a, b, c) = \alpha'(t_0)$. Essa reta representa a direção que a curva segue naquele instante.

Exemplo 2.7. *Considere a curva parametrizada*

$$\alpha(t) = (2t^2 + 1, t - 1, 3t^3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Deseja-se determinar a equação da reta tangente à curva no ponto $\alpha(t_0)$, onde $\alpha(t_0)$ é o ponto de interseção do traço da curva com o plano xz .

O plano xz é definido pela equação $y = 0$. Assim, o ponto de interseção ocorre quando a segunda coordenada de $\alpha(t)$ é nula, isto é,

$$t - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = 1.$$

Calculando $\alpha(t_0)$:

$$\alpha(1) = (2(1)^2 + 1, 1 - 1, 3(1)^3) = (3, 0, 3).$$

Para determinar a reta tangente, precisamos do vetor tangente $\alpha'(t)$:

$$\alpha'(t) = (4t, 1, 9t^2).$$

Logo, no ponto $t_0 = 1$, temos:

$$\alpha'(1) = (4, 1, 9).$$

A equação vetorial da reta tangente à curva em $t_0 = 1$ é dada por:

$$r(s) = \alpha(1) + s \alpha'(1),$$

ou seja,

$$r(s) = (3, 0, 3) + s(4, 1, 9).$$

Portanto, a reta tangente possui equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 3 + 4s, \\ y = s, \\ z = 3 + 9s. \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Geometricamente, essa reta passa pelo ponto $(3, 0, 3)$ e possui direção dada pelo vetor tangente $\vec{v} = (4, 1, 9)$, que indica a orientação instantânea da curva nesse ponto.

2.3 Curva Regular

Definição 2.3.1. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Uma curva diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dita **regular** se seu vetor tangente $\alpha'(t)$ for diferente de zero para todo $t \in I$, isto é:*

$$\alpha'(t) \neq 0, \quad \forall t \in I.$$

A regularidade é uma condição fundamental para o estudo geométrico das curvas, pois garante que a curva não “pare” em nenhum ponto, ou seja, ela não tem pontos onde a direção tangente se anula.

A exigência de regularidade também assegura que a curva não apresenta “quebras” ou “paradas bruscas” e que é possível definir, de forma contínua, propriedades geométricas como a curvatura e a torção. Curvas que não são regulares podem possuir pontos de inflexão que dificultam ou impedem esse tipo de análise.

Exemplo 2.8. *Vamos verificar se as aplicações a seguir definem curvas regulares:*

a) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$, com $t \in \mathbb{R}$.

b) $\alpha(t) = (t, t^2 + 2, t^3 + t)$, com $t \in \mathbb{R}$.

Item (a): *Dada a curva $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$, temos:*

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d}{dt}t, \frac{d}{dt}t^2, \frac{d}{dt}t^3 \right) = (1, 2t, 3t^2).$$

Note que a primeira coordenada é constante e igual a 1. Sendo assim, independentemente dos valores de t , o vetor derivada nunca será nulo, pois pelo menos uma de suas coordenadas (neste caso, a primeira) é sempre diferente de zero.

Item (b): *Dada a curva $\alpha(t) = (t, t^2 + 2, t^3 + t)$, calculamos o vetor tangente:*

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d}{dt}t, \frac{d}{dt}(t^2 + 2), \frac{d}{dt}(t^3 + t) \right) = (1, 2t, 3t^2 + 1).$$

Mais uma vez, a primeira coordenada do vetor derivada é igual a 1, que é diferente de zero para todo t . Isso já garante que $\alpha'(t) \neq \vec{0}$ para todo t .

Observação: *Esse exemplo mostra como a verificação da regularidade pode ser feita de forma simples, bastando analisar se o vetor derivada da curva é diferente do vetor nulo para todos*

os pontos do domínio. Nos exemplos apresentados, ambas as curvas possuem pelo menos um componente constante e diferente de zero em $\alpha'(t)$, o que facilita essa verificação.

Exemplo 2.9. Dada $\alpha(t) = \left(1 + \cos t, \sin t, 2 \sin \frac{t}{2}\right), t \in \mathbb{R}$, verificaremos que α é uma curva regular cujo traço está contido na interseção do cilindro

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - 1)^2 + y^2 = 1\}$$

com a esfera

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4\}.$$

Para mostrar que o traço de α pertence ao cilindro C basta verificar a equação do cilindro:

$$(x - 1)^2 + y^2 = (1 + \cos t - 1)^2 + (\sin t)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo $\alpha(t) \in C$, para todo $t \in \mathbb{R}$

Agora verificamos que $\alpha(t) \in S$:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (1 + \cos t)^2 + (\sin t)^2 + \left(2 \sin \frac{t}{2}\right)^2 \quad (2.1)$$

$$= 1 + 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t + 4 \sin^2 \frac{t}{2} \quad (2.2)$$

$$= 2 + 2 \cos t + 4 \sin^2 \frac{t}{2} \quad (2.3)$$

Usando a identidade $\sin^2 \left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1 - \cos t}{2}$, obtemos

$$4 \sin^2 \left(\frac{t}{2}\right) = 2(1 - \cos t) = 2 - 2 \cos t. \quad (2.4)$$

Substituindo (2.4) em (2.3), teremos, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$x^2 + y^2 + z^2 = (2 + 2 \cos t) + (2 - 2 \cos t) = 4.$$

Assim $\alpha(t) \in S$ para todo t , portanto o traço está contido em $C \cap S$.

Finalmente, calculamos a derivada para verificar a regularidade:

$$\alpha'(t) = \left(-\sin t, \cos t, \cos \frac{t}{2}\right).$$

Vamos provar que $\alpha'(t) \neq (0, 0, 0)$ para todo t . Se $\alpha'(t) = (0, 0, 0)$ então $\sin t = 0$ e $\cos t = 0$

simultaneamente, o que é impossível. (Note que $\sin t = 0$ implica $\cos t = \pm 1 \neq 0$.) Portanto, $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, e α é regular.

Exemplo 2.10. Vamos obter uma curva regular tal que $\alpha(0) = (2, 3, 1)$ e $\alpha'(t) = (t^2, t, e^t)$.

Como o vetor $\alpha'(t)$ representa a derivada da curva $\alpha(t)$, isto é, a taxa de variação de cada coordenada em relação ao parâmetro t , para determinar a expressão da curva é necessário recuperar as funções originais cujas derivadas são dadas. Assim, integra-se cada componente de $\alpha'(t)$ separadamente, obtendo-se as coordenadas de $\alpha(t)$, e em seguida utilizam-se as condições iniciais para determinar as constantes de integração.

$$\alpha(t) = \left(\int t^2 dt + C_1, \int t dt + C_2, \int e^t dt + C_3 \right) = \left(\frac{t^3}{3} + C_1, \frac{t^2}{2} + C_2, e^t + C_3 \right).$$

Impondo a condição $\alpha(0) = (2, 3, 1)$ obtemos

$$\alpha(0) = (C_1, C_2, 1 + C_3) = (2, 3, 1),$$

portanto, $C_1 = 2$, $C_2 = 3$ e $C_3 = 0$. Assim,

$$\alpha(t) = \left(\frac{t^3}{3} + 2, \frac{t^2}{2} + 3, e^t \right),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Verificamos a regularidade pela derivada (que nos é dada):

$$\alpha'(t) = (t^2, t, e^t).$$

Note que $\alpha'(t) = (0, 0, 0)$ implicaria $t^2 = 0$, $t = 0$ e $e^t = 0$ simultaneamente; porém $e^t > 0$ para todo t , logo não existe t com $\alpha'(t) = 0$. Portanto, a curva é regular.

Capítulo 3

Reparametrização por Comprimento de Arco

Definição 3.0.1. Considere uma curva regular $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. O comprimento de arco de α , a partir de um ponto $t_0 \in I$, é definido por:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du,$$

onde s representa a distância percorrida sobre a curva desde o ponto $\alpha(t_0)$ até $\alpha(t)$.

Como α é regular, $\|\alpha'(t)\| \neq 0$, garantindo que $s(t)$ é uma função estritamente crescente. Portanto, existe a função inversa $t = t(s)$, definida no intervalo $J = s(I)$, que permite definir a curva reparametrizada pelo comprimento de arco:

$$\beta(s) = \alpha(t(s)), \quad s \in J.$$

Teorema 3.0.1. Se $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, então

$$\|\beta'(s)\| = 1, \quad \forall s \in J. \quad (3.1)$$

Demonstração. A fim de verificar (3.1), calculamos a derivada de β em s aplicando a regra da cadeia.

$$\beta'(s) = \frac{d}{ds}(\alpha(t(s))) = \alpha'(t(s)) \cdot t'(s). \quad (3.2)$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, se f é contínua em $[a, b]$, então a função

$$F(x) = \int_a^x f(u) du$$

é derivável em (a, b) e satisfaz

$$F'(x) = f(x).$$

Neste caso, $f(u) = \|\alpha'(u)\|$ é contínua em I , portanto

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du \quad (3.3)$$

$$= \|\alpha'(t)\|, \quad \forall t \in I. \quad (3.4)$$

Pelo Teorema da Função Inversa, existe a função inversa $t = t(s)$, a qual é diferenciável no intervalo J . Além disso, vale

$$t'(s) = \frac{1}{s'(t(s))}.$$

Como $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$, segue que

$$t'(s) = \frac{1}{\|\alpha'(t(s))\|}. \quad (3.5)$$

Substituindo (3.5) em (3.2), obtemos

$$\beta'(s) = \alpha'(t(s)) \cdot \frac{1}{\|\alpha'(t(s))\|}.$$

Por fim, considerando a norma em ambos os lados, temos:

$$\|\beta'(s)\| = \left\| \frac{\alpha'(t(s))}{\|\alpha'(t(s))\|} \right\| = \frac{\|\alpha'(t(s))\|}{\|\alpha'(t(s))\|} = 1,$$

para todo $s \in J$. Portanto β é uma parametrização unitária (ou parametrizada por comprimento de arco)

□

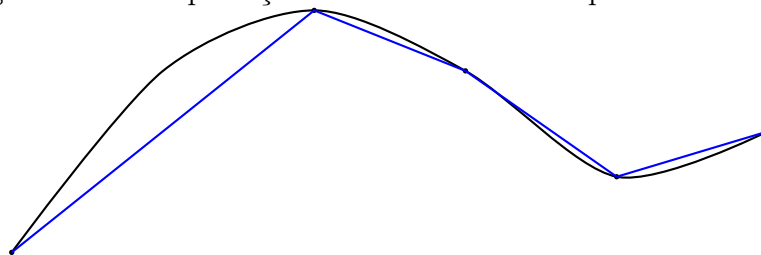
Toda curva regular em \mathbb{R}^3 admite uma reparametrização pelo comprimento de arco. A reparametrização permite que o parâmetro s represente diretamente a distância percorrida ao longo da curva.

3.1 Interpretação Geométrica

A reparametrização por comprimento de arco tem como objetivo medir a posição dos pontos da curva em função da distância efetivamente percorrida ao longo dela, ou seja, de maneira independente da escolha do parâmetro inicial. Dessa maneira, a descrição da curva passa a depender apenas de sua própria forma geométrica, e não da escolha de um parâmetro arbitrário t .

Enquanto em uma parametrização qualquer o vetor tangente $\alpha'(t)$ pode ter comprimento variável, após a reparametrização o vetor tangente torna-se unitário em todos os pontos da curva, isto é, $\|\beta'(s)\| = 1$, sendo s o comprimento de arco medido a partir de um ponto inicial da curva. Assim, s mede o deslocamento real sobre a curva, cuja interpretação geométrica pode ser observada na figura 3.1.

Figura 3.1: Interpretação Geométrica do Comprimento de arco



Fonte: Elaborado pela autora (2025).

A seguir, será apresentado dois exemplos que ilustram a reparametrização por comprimento de arco no espaço tridimensional.

Exemplo 3.1. *Seja a hélice circular*

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.6)$$

onde $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$ são constantes reais.

Para reparametrizarmos pelo comprimento de arco, primeiramente, calculamos a sua derivada:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \left(\frac{d}{dt}(a \cos t), \frac{d}{dt}(a \sin t), \frac{d}{dt}(bt) \right) \\ &= (-a \sin t, a \cos t, b). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Em seguida, obtemos seu módulo:

$$\begin{aligned}
 \|\alpha'(t)\| &= \sqrt{(-a \operatorname{sen} t)^2 + (a \operatorname{cos} t)^2 + b^2} \\
 &= \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2 \operatorname{cos}^2 t + b^2} \\
 &= \sqrt{a^2(\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{cos}^2 t) + b^2} \\
 &= \sqrt{a^2 + b^2}.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Como $\|\alpha'(t)\|$ é constante, o comprimento de arco desde $t = 0$ até t é

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \int_0^t \|\alpha'(u)\| \, du \\
 &= \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} \, du \\
 &= t\sqrt{a^2 + b^2}.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Isolando t em função de s , obtemos

$$t(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{3.10}$$

Substituindo (3.10) em (3.6), a reparametrização por comprimento de arco é

$$\beta(s) = \alpha\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \tag{3.11}$$

$$= \left(a \operatorname{cos} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right). \tag{3.12}$$

Verificação da Unidade do Vetor Tangente

Calculando a derivada de β em relação a s :

$$\beta'(s) = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{cos} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right),$$

temos:

$$\|\beta'(s)\| = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + b^2} \left[\operatorname{sen}^2 \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) + \operatorname{cos}^2 \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \right] + \frac{b^2}{a^2 + b^2}} = 1.$$

Logo, β realmente é parametrizada por comprimento de arco.

Exemplo 3.2. Considerando a curva

$$\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (3.13)$$

Queremos encontrar uma reparametrização pelo comprimento de arco.

Para isso, temos que a sua derivada é:

$$\alpha'(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t), e^t).$$

Sendo assim, a norma do vetor derivada é:

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(e^t(\cos t - \sin t))^2 + (e^t(\sin t + \cos t))^2 + (e^t)^2} \quad (3.14)$$

$$= \sqrt{e^{2t}[(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 + 1]}. \quad (3.15)$$

Sabendo que $(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 = 2$, temos como resultado da norma:

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{3e^{2t}} = \sqrt{3}e^t. \quad (3.16)$$

Para encontrar o comprimento do arco, tomaremos $t_0 = 0$ e obtemos:

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du \quad (3.17)$$

$$= \int_0^t \sqrt{3} e^u du \quad (3.18)$$

$$= \sqrt{3}(e^t - 1) \quad (3.19)$$

Note que a função $s(t)$ é estritamente crescente (pois $\|\alpha'(t)\| > 0$), e tem imagem

$$s = (-\sqrt{3}, +\infty).$$

De (3.19) segue que:

$$\frac{s}{\sqrt{3}} = e^t - 1 \quad (3.20)$$

$$e^{t(s)} = 1 + \frac{s}{\sqrt{3}} \quad (3.21)$$

cuja a inversa é

$$t(s) = \ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{3}}\right), \quad s \in (-\sqrt{3}, \infty).$$

Sabemos que a reparametrização pelo comprimento de arco é $\beta(s) = \alpha(t(s))$ e substituindo em (3.13) temos:

$$\beta(s) = \left(\left(1 + \frac{s}{\sqrt{3}}\right) \cos\left(\ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right), \left(1 + \frac{s}{\sqrt{3}}\right) \operatorname{sen}\left(\ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right), 1 + \frac{s}{\sqrt{3}} \right), \quad s \in (-\sqrt{3}, \infty).$$

Verificação da Unidade do Vetor Tangente

Para conferir que esta é realmente uma parametrização pelo comprimento de arco, calculemos

$$t'(s) = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3} e^{t(s)}} = \frac{1}{\sqrt{3} \left(1 + \frac{s}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3} + s}.$$

Como $\beta'(s) = \alpha'(t(s)) \cdot t'(s)$, tem-se

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(t(s))\| \left| \frac{dt}{ds} \right| = (\sqrt{3} e^{t(s)}) \frac{1}{\sqrt{3} e^{t(s)}} = 1,$$

confirmando que a parametrização $\beta(s)$ tem velocidade unitária, ou seja, é parametrização por comprimento de arco.

Capítulo 4

Teoria Local das Curvas

Nesta seção estudaremos a teoria local das curvas no espaço \mathbb{R}^3 , cujo desenvolvimento é baseado nas chamadas fórmulas de Frenet. Essas fórmulas descrevem o comportamento geométrico de uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, através da curvatura, torção e do triedro de Frenet.

4.1 Curvatura de uma curva

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. A taxa de variação com que a reta tangente muda de direção é denominada *curvatura* da curva α . Em termos intuitivos, ela quantifica o “quanto” uma curva se afasta de ser uma linha reta em um determinado ponto.

Definição 4.1.1. *Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, então a **curvatura** de α em $s \in I$ é o número real*

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|. \quad (4.1)$$

Exemplo 4.1. *Considere a curva*

$$\alpha(s) = \left(a \cos \frac{s}{a}, a \sin \frac{s}{a}, 0 \right), \quad s \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+.$$

cujo traço é uma circunferência de raio a contida no plano xy . Encontraremos, conforme (4.1) a curvatura de $\alpha(s)$.

Primeiramente, devemos encontrar a primeira derivada de $\alpha(s)$:

$$\alpha'(s) = \left(-\sin \frac{s}{a}, \cos \frac{s}{a}, 0 \right).$$

Seguindo, encontraremos a segunda derivada de $\alpha(s)$

$$\alpha''(s) = \left(-\cos \frac{s}{a} \cdot \frac{1}{a}, -\operatorname{sen} \frac{s}{a} \cdot \frac{1}{a}, 0 \right). \quad (4.2)$$

Substituindo (4.2) em (4.1), temos:

$$\kappa(s) = \sqrt{\left(-\frac{1}{a} \cos \frac{s}{a}\right)^2 + \left(-\frac{1}{a} \operatorname{sen} \frac{s}{a}\right)^2 + 0^2} \quad (4.3)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{a^2} \cos^2 \frac{s}{a} + \frac{1}{a^2} \operatorname{sen}^2 \frac{s}{a}} \quad (4.4)$$

$$= \frac{1}{a} \sqrt{\cos^2 \frac{s}{a} + \operatorname{sen}^2 \frac{s}{a}} \quad (4.5)$$

$$= \frac{1}{a}. \quad (4.6)$$

Proposição 4.1.1. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Então $\alpha(I)$ é um segmento de reta se, e somente se, $\kappa(s) = 0, \forall s \in I$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que $\alpha(I)$ seja um segmento de reta. Nesse caso, existe um vetor constante $v \in \mathbb{R}^3$, com $\|v\| = 1$, e um ponto $p \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$\alpha(s) = p + sv, \quad s \in I.$$

Como a curva está parametrizada pelo comprimento de arco, temos

$$\alpha'(s) = v,$$

o que implica que o vetor tangente unitário $t(s) = \alpha'(s)$ é constante. Portanto,

$$t'(s) = 0, \quad \forall s \in I.$$

Pela definição de curvatura para curvas parametrizadas pelo comprimento de arco,

$$\kappa(s) = \|t'(s)\|,$$

segue que

$$\kappa(s) = 0, \quad \forall s \in I.$$

(\Leftarrow) Reciprocamente, suponha que $\kappa(s) = 0$ para todo $s \in I$. Como a curva está parametrizada pelo comprimento de arco, vale

$$\kappa(s) = \|t'(s)\|.$$

Assim, $\kappa(s) = 0$ implica

$$t'(s) = 0, \quad \forall s \in I.$$

Logo, o vetor tangente unitário $t(s)$ é constante em I . Denotemos esse vetor constante por v , com $\|v\| = 1$.

Como $t(s) = \alpha'(s)$, temos

$$\alpha'(s) = v.$$

Integrando ambos os lados, obtemos

$$\alpha(s) = p + sv,$$

para algum ponto fixo $p \in \mathbb{R}^3$. Portanto, a imagem da curva é um segmento de reta e concluímos que $\alpha(I)$ é um segmento de reta se, e somente se, $\kappa(s) = 0$ para todo $s \in I$. \square

Interpretação geométrica

A curvatura $\kappa(s)$ mede o quanto a curva se desvia da direção retilínea em cada ponto. Se $\kappa(s) = 0$, a curva é uma reta e consequentemente quanto maior o valor de $\kappa(s)$, mais acentuada é a curvatura local da trajetória.

4.1.1 Vetor Unitário, Vetor Normal e Vetor Binormal

Definição 4.1.2. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco s . Por definição, o vetor tangente unitário à curva em s é dado por*

$$t(s) = \alpha'(s),$$

sendo $\|t(s)\| = 1$ para todo $s \in I$. O vetor tangente indica a direção da curva em cada ponto e fornece a orientação de seu traço no espaço.

Vimos na seção anterior que a derivada do vetor tangente em relação ao parâmetro s mede como a direção da curva varia ao longo de seu percurso. Por esse motivo, definimos a

curvatura $\kappa(s)$ como o módulo dessa variação:

$$\kappa(s) = \|t'(s)\|.$$

Definição 4.1.3. Quando $\kappa(s) > 0$, podemos definir o **vetor normal principal** à curva em s por

$$n(s) = \frac{t'(s)}{\kappa(s)}. \quad (4.7)$$

Esse vetor é unitário e aponta para o centro da curvatura local da curva, ou seja, indica a direção em que a curva está “virando”. O vetor $n(s)$ é perpendicular ao vetor tangente $t(s)$, o que pode ser verificado a partir da propriedade

$$\langle t(s), n(s) \rangle = 0. \quad (4.8)$$

Queremos mostrar (4.8):

Aplicando a definição $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$, para qualquer vetor v , obtemos

$$\|t(s)\| = \sqrt{\langle t(s), t(s) \rangle}.$$

Como a norma é igual a 1, temos

$$1 = \sqrt{\langle t(s), t(s) \rangle}.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, segue que

$$\langle t(s), t(s) \rangle = 1. \quad (4.9)$$

Seguindo, iremos derivar (4.9) :

$$\langle t'(s), t(s) \rangle + \langle t(s), t'(s) \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle t'(s), t(s) \rangle = 0.$$

Portanto, $t'(s)$ é perpendicular a $t(s)$.

Seguindo, podemos concluir que o vetor

$$n(s) = \frac{t'(s)}{\kappa(s)}$$

é unitário e perpendicular a $t(s)$, pois $\langle n(s), t(s) \rangle = \frac{1}{\kappa(s)} \langle t'(s), t(s) \rangle = 0$.

Definição 4.1.4. O **vetor binormal** $b(s)$ é obtido pelo produto vetorial entre os vetores tangente e normal:

$$b(s) = t(s) \times n(s).$$

O vetor $b(s)$ também é unitário e por característica do próprio produto vetorial é ortogonal tanto a $t(s)$ quanto a $n(s)$, completando assim um sistema ortonormal de vetores, denominado **triedro de Frenet**:

$$\{t(s), n(s), b(s)\}.$$

4.1.2 Triedro de Frenet

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Os vetores $t(s)$, $n(s)$ e $b(s)$ formam, em cada ponto da curva, uma base ortonormal direta de \mathbb{R}^3 , chamada de *triedro de Frenet*. Esse sistema de vetores move-se ao longo da curva, acompanhando sua orientação e curvatura.

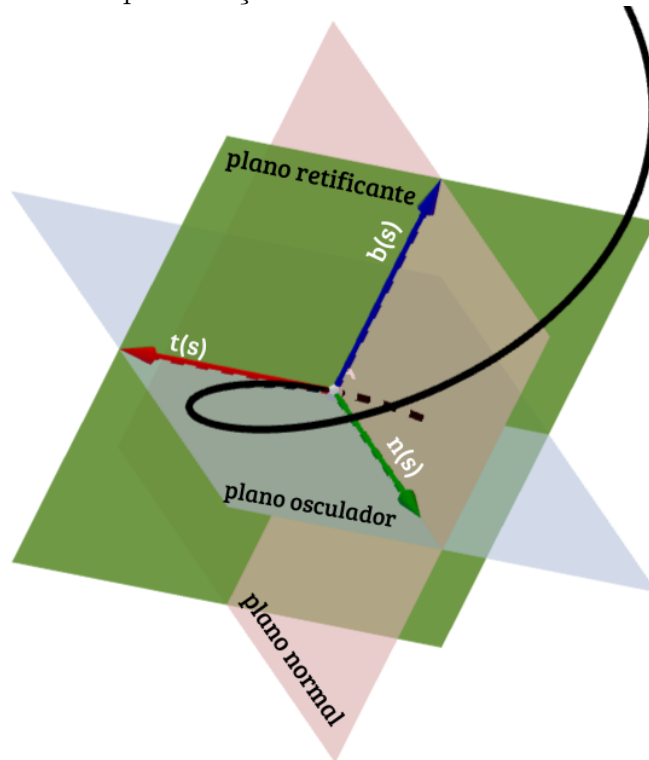
Esse triedro representa, em cada ponto da curva, um referencial que descreve a orientação local da curva no espaço. Geometricamente:

- o vetor tangente $t(s)$ indica a direção da curva;
- o vetor normal $n(s)$ indica a direção de mudança da tangente;
- o vetor binormal $b(s)$ indica a direção perpendicular ao plano formado por $t(s)$ e $n(s)$.

Cada par desses vetores define um plano associado à curva, como podemos ver na figura 4.1:

- O plano determinado por $t(s)$ e $n(s)$ é o **plano osculador**, que contém o traço da curva no ponto.
- O plano determinado por $n(s)$ e $b(s)$ é o **plano normal**, perpendicular à curva.
- O plano determinado por $t(s)$ e $b(s)$ é o **plano retificante**.

Figura 4.1: Representação da curva com os vetores e planos.



Elaborado pela autora no GeoGebra (2025).

4.1.3 Fórmulas de Frenet

O comportamento local da curva no espaço é determinado pela variação dos vetores $t(s)$, $n(s)$ e $b(s)$. As *fórmulas de Frenet*, também conhecidas como *equações de Frenet-Serret*, descrevem precisamente essa variação:

Teorema 4.1.1 (Fórmulas de Frenet–Serret). *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, com curvatura $\kappa(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Então, os vetores do triedro de Frenet $t(s)$, $n(s)$ e $b(s)$ satisfazem as seguintes equações diferenciais:*

$$\begin{cases} t'(s) = \kappa(s) n(s), \\ n'(s) = -\kappa(s) t(s) - \tau(s) b(s), \\ b'(s) = \tau(s) n(s), \end{cases} \quad (4.10)$$

onde $\kappa(s)$ é a curvatura e $\tau(s)$ é a torção da curva no ponto $\alpha(s)$.

A seguir, apresentaremos a demonstração das três equações fundamentais de Frenet-

Serret. Vale ressaltar que iremos considerar que $\alpha(s)$ é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco e que conseqüentemente $\|\alpha'(s)\| = 1$.

Demonstração. Pela definição do vetor normal, para todo $s \in I$, temos

$$n(s) = \frac{t'(s)}{\|t'(s)\|}.$$

Como a curva está parametrizada pelo comprimento de arco, temos $\|t'(s)\| = \kappa(s)$. Logo,

$$n(s) = \frac{t'(s)}{\kappa(s)},$$

o que implica imediatamente

$$t'(s) = \kappa(s) n(s),$$

verificando a primeira equação de Frenet.

Agora, consideremos o vetor binormal, definido por

$$b(s) = t(s) \times n(s).$$

Derivando em relação a s e aplicando a regra do produto vetorial, obtemos

$$\begin{aligned} b'(s) &= t'(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s) \\ &= \kappa(s)n(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s) \\ &= t(s) \times n'(s), \end{aligned} \tag{4.11}$$

pois $n(s) \times n(s) = 0$.

Como $b(s)$ é unitário, ao derivarmos $\langle b(s), b(s) \rangle$, obtemos que $b'(s)$ é ortogonal a $b(s)$. Além disso, segue diretamente de 4.11 que $b'(s)$ é ortogonal a $t(s)$. Portanto, $b'(s)$ é ortogonal ao plano paralelo a $t(s)$ e $b(s)$, ou seja, $b'(s)$ é ortogonal ao plano retificante de α em s . Com isso, verificamos que $b'(s)$ é paralelo a $n(s)$. Sendo assim, existe $\tau(s) \in \mathbb{R}$ tal que

$$b'(s) = \tau(s) n(s),$$

o que estabelece a terceira equação de Frenet. Este resultado inspira a definição de **Torção**, que será abordada mais a frente.

Por fim, para obter a segunda equação, derivamos a identidade

$$n(s) = b(s) \times t(s).$$

Aplicando novamente a regra do produto vetorial, temos

$$\begin{aligned} n'(s) &= b'(s) \times t(s) + b(s) \times t'(s) \\ &= \tau(s)n(s) \times t(s) + \kappa(s)b(s) \times n(s). \end{aligned}$$

Usando as propriedades do produto vetorial, obtemos

$$n(s) \times t(s) = -b(s) \quad \text{e} \quad b(s) \times n(s) = -t(s).$$

Logo,

$$n'(s) = -\tau(s)b(s) - \kappa(s)t(s),$$

o que conclui a demonstração das fórmulas de Frenet. \square

4.1.4 Torção de uma curva

Vimos que a curvatura mede como a curva se desvia de uma reta. Para medir como a curva se desvia de um plano, introduzimos a *torção*.

Definição 4.1.5. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, tal que $k(s) > 0$. O número real*

$$\tau(s) = \langle b'(s), n(s) \rangle$$

*é denominado **torção** da curva em s , onde $n(s)$ e $b(s)$ são, respectivamente, o vetor normal e o vetor binormal de α em s .*

Proposição 4.1.2. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular, de curvatura não-nula. Então, α é uma curva plana se, e só se, $\tau = 0$*

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que α seja uma curva plana. Então existe um plano fixo $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ que contém a imagem de α . Consequentemente, os vetores tangente $t(s)$ e normal $n(s)$ pertencem a esse plano para todo $s \in I$. Logo, o vetor binormal

$$b(s) = t(s) \times n(s)$$

é constante e perpendicular ao plano Π . Assim,

$$b'(s) = 0.$$

Pela terceira fórmula de Frenet,

$$b'(s) = \tau(s) n(s),$$

e como $n(s) \neq 0$, segue que $\tau(s) = 0$ para todo $s \in I$.

(\Leftarrow) Reciprocamente, suponha que $\tau(s) = 0$ para todo $s \in I$. Então, pela fórmula de Frenet,

$$b'(s) = \tau(s) n(s) = 0,$$

o que implica que o vetor binormal $b(s)$ é constante. Portanto, existe um vetor constante b_0 tal que $b(s) = b_0$ para todo s . Como $t(s)$ é sempre ortogonal a $b(s)$, segue que $t(s)$ pertence ao plano ortogonal a b_0 . Logo, a curva α está contida em um plano fixo, isto é, α é plana. \square

Exemplo 4.2. *Sejam $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$ constantes reais. Consideremos a **hélice circular** dada por*

$$\alpha(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \quad s \in \mathbb{R}, \quad (4.12)$$

a qual está parametrizada pelo comprimento de arco. Queremos obter o triedro de Frenet, a curvatura e a torção dessa curva.

Iremos, primeiramente, obter o vetor tangente de (4.12). Para isso, derivaremos cada componente separadamente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) &= a \cdot \left(-\sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \frac{d}{ds} \left(a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) &= a \cdot \left(\cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \frac{d}{ds} \left(\frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$t(s) = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right). \quad (4.13)$$

O mesmo processo será feito para encontrarmos $t'(s)$:

$$\frac{d}{ds} \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{a}{a^2 + b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (4.14)$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \left(-\operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{a}{a^2 + b^2} \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (4.15)$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = 0. \quad (4.16)$$

Logo,

$$t'(s) = \left(-\frac{a}{a^2 + b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\frac{a}{a^2 + b^2} \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right). \quad (4.17)$$

A seguir, queremos encontrar a curvatura da curva. Para isso, primeiramente encontraremos o quadrado da norma de $t'(s)$:

$$\|t'(s)\|^2 = \left(-\frac{a}{a^2 + b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(-\frac{a}{a^2 + b^2} \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + 0^2 \quad (4.18)$$

$$= \frac{a^2}{(a^2 + b^2)^2} \cos^2 \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{a^2}{(a^2 + b^2)^2} \operatorname{sen}^2 \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (4.19)$$

$$= \frac{a^2}{(a^2 + b^2)^2} \left(\cos^2 \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \operatorname{sen}^2 \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right). \quad (4.20)$$

Aplicando a identidade trigonométrica $\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1$ na expressão (4.20) resulta

$$\|t'(s)\|^2 = \frac{a^2}{(a^2 + b^2)^2}.$$

Extraindo a raiz quadrada, temos:

$$\|t'(s)\| = \frac{a}{a^2 + b^2}. \quad (4.21)$$

Sendo assim, pela definição de curvatura em parametrização por comprimento de arco,

temos que a curvatura da hélice é constante e igual a:

$$\kappa = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Seguindo, encontraremos o vetor normal $n(s)$

$$n(s) = \frac{t'(s)}{\|t'(s)\|}.$$

Fazendo a divisão componente a componente, obtemos

$$\begin{aligned} n(s) &= \left(\frac{-\frac{a}{a^2 + b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{\frac{a}{a^2 + b^2}}, \frac{-\frac{a}{a^2 + b^2} \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{\frac{a}{a^2 + b^2}}, \frac{0}{\frac{a}{a^2 + b^2}} \right) \\ &= \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Sabemos que para obter o vetor binormal calculamos o produto vetorial $b(s) = t(s) \times n(s)$.

Portanto, conforme (4.13) e (4.22) e considerando $\theta = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, temos:

$$b(s) = t(s) \times n(s) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{sen} \theta & \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \theta & \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ -\cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \end{vmatrix} \quad (4.23)$$

$$= \mathbf{i} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \theta \cdot 0 - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-\operatorname{sen} \theta) \right) \quad (4.24)$$

$$\mathbf{j} \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-\cos \theta) + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{sen} \theta \cdot 0 \right) \quad (4.25)$$

$$\mathbf{k} \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{sen} \theta (-\operatorname{sen} \theta) - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \theta (-\cos \theta) \right) \quad (4.26)$$

$$= \mathbf{i} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{sen} \theta - \mathbf{j} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \theta + \mathbf{k} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (4.27)$$

$$= \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{sen} \theta, -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \theta, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \quad (4.28)$$

Prosseguindo, para encontrar $b'(s)$, iremos derivar componente a componente (usando a regra da cadeia) com $\theta = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ e $\theta' = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{sen} \theta \right) &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \theta \cdot \theta' = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \theta \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{a^2 + b^2} \cos \theta, \\ \frac{d}{ds} \left(-\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \theta \right) &= -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot (-\operatorname{sen} \theta) \cdot \theta' = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{sen} \theta \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{a^2 + b^2} \operatorname{sen} \theta, \\ \frac{d}{ds} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) &= 0,\end{aligned}$$

Portanto

$$b'(s) = \left(\frac{b}{a^2 + b^2} \cos \theta, \frac{b}{a^2 + b^2} \operatorname{sen} \theta, 0 \right), \quad \theta = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (4.29)$$

Por fim, encontraremos a torção, que como já vimos, é dada por

$$\tau(s) = \langle b'(s), n(s) \rangle \quad (4.30)$$

Para isso, utilizaremos os resultados obtidos em (4.29) e (4.22):

$$\langle b'(s), n(s) \rangle = \frac{b}{a^2 + b^2} \cos \theta \cdot (-\cos \theta) + \frac{b}{a^2 + b^2} \operatorname{sen} \theta \cdot (-\operatorname{sen} \theta) + 0 \cdot 0 \quad (4.31)$$

$$= -\frac{b}{a^2 + b^2} (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) \quad (4.32)$$

$$= -\frac{b}{a^2 + b^2}. \quad (4.33)$$

Portanto, a hélice circular possui curvatura e torção constantes:

$$\kappa = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \tau = -\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Capítulo 5

Conclusão

O estudo apresentado ao longo deste trabalho teve como objetivo introduzir, de forma clara e rigorosa, os principais conceitos da Geometria Diferencial das curvas em \mathbb{R}^3 . Partindo da definição de curvas parametrizadas diferenciáveis, foram estabelecidas as ideias fundamentais de vetor tangente, reta tangente, curva regular e comprimento de arco, construindo-se gradualmente a base necessária para compreender as propriedades que descrevem a geometria local de uma curva.

A reparametrização pelo comprimento de arco desempenhou papel central nessa análise, permitindo uma descrição independente da escolha inicial de parâmetro e oferecendo uma formulação geométrica mais natural. Com ela, foi possível interpretar o módulo da derivada como taxa de variação do comprimento percorrido sobre a própria curva, simplificando expressões e tornando interpretações geométricas mais transparentes.

Em seguida, foram estudadas a curvatura e a torção, duas grandezas fundamentais que determinam completamente o comportamento espacial de uma curva regular. A curvatura fornece uma medida precisa de quanto a curva muda de direção, enquanto a torção descreve sua variação fora do plano osculador, indicando o quanto a curva “gira” no espaço. Esses conceitos culminaram na formulação do triedro de Frenet e das equações de Frenet–Serret, que relacionam de maneira elegante a variação dos vetores tangente, normal principal e binormal.

As fórmulas de Frenet mostraram-se não apenas uma ferramenta matemática poderosa, mas também um marco conceitual: elas revelam que, conhecendo-se as funções $\kappa(s)$ e $\tau(s)$ e as condições iniciais do triedro, é possível reconstruir a curva até transformações rígidas. Assim, a geometria local de uma curva está completamente codificada em suas curvatura e torção.

Por fim, os exemplos desenvolvidos, como a hélice circular, demonstraram na prática como aplicar cada definição e como interpretar geometricamente os resultados obtidos, reforçando a importância dos conceitos teóricos na compreensão de curvas clássicas em \mathbb{R}^3 .

Portanto, este trabalho cumpriu seu propósito de apresentar uma abordagem intro-

duatória, porém sólida, sobre Geometria Diferencial de curvas, oferecendo ao leitor uma visão estruturada e acessível dos objetos fundamentais desse ramo da Matemática. Espera-se que esta exposição possa servir como base para estudos posteriores de tópicos mais avançados.

Referências Bibliográficas

- [1] J. C. Cifuentes, A. H. d. Santos, and L. Chyczy. Da geometria de euclides à geometria euclidiana: A gênese das geometrias modernas. In *Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática*, pages 1–10, Curitiba, 2013. SBEM.
- [2] J. Delgado and K. Frensel. *Geometria Diferencial 1*. Instituto de Matemática, Universidade Federal Fluminense, Niterói, s.d.
- [3] M. P. do Carmo. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. SBM, Rio de Janeiro, 5 edition, 2005.
- [4] K. Tenenblat. *Introdução à Geometria Diferencial*. Editora Blucher, São Paulo, 2 edition, 2008.
- [5] J. L. d. A. Zeferino Júnior and M. J. F. d. Silva. Considerações sobre o estudo das curvas no século xvii. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, 10(30):1–16, 2023.