



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA - UESB  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**Luane Maria Madruga Bezerra Cavalcanti Ramalho**

**Teoria de Semigrupos e sua Aplicação à Existência de  
Solução da Equação de Schrödinger Linear**

VITÓRIA DA CONQUISTA

2025



Luane Maria Madruga Bezerra Cavalcanti Ramalho

TEORIA DE SEMIGRUPOS E SUA APLICAÇÃO À EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO  
DA EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER LINEAR

Monografia apresentada à Banca Examinadora da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciatura em Matemática sob orientação do Prof. Dr. Ricardo Freire da Silva

VITÓRIA DA CONQUISTA

2025

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA - UESB  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

COORDENAÇÃO DO CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

A monografia “Teoria de Semigrupos e sua Aplicação à Existência de Solução da Equação de Schrödinger Linear”, apresentada e defendida por LUANE MARIA MADRUGA BEZERRA CAVALCANTI RAMALHO, matrícula 202010474, foi aprovada pela Banca Examinadora.

Vitória da Conquista, 03 de dezembro de 2025

BANCA EXAMINADORA:

---

Prof. Dr. Ricardo Freire da Silva  
Orientador

---

Prof. Dr. Genilson Soares de Santana  
Convidado 1

---

Prof. Dr. Márcio Antônio de Andrade Bortoloti  
Convidado 2

# Agradecimentos

Expresso a minha gratidão a todos que estiveram presentes ao longo dessa jornada e que contribuíram de forma significativa para a conclusão desta etapa e para o meu crescimento, tanto no âmbito acadêmico quanto no pessoal.

Primeiramente, quero agradecer a Deus, pelas bênçãos que iluminaram meu caminho e me deram forças para concluir esta etapa.

Quero agradecer aos meus pais, por todo o amor, cuidado e auxílio ao longo de toda a minha formação, segurando a minha mão para que eu pudesse caminhar sozinha. Obrigada por toda a dedicação e incentivo.

Quero agradecer aos meus irmãos, Igor, Lucas, Iuri e Iasmim, que sempre estiveram dispostos a me ouvir falar sobre coisas que não faziam sentido para eles, por toda a compreensão e carinho. Obrigada pelas conversas que aliviaram a mente, pelo companheirismo e pela leveza que vocês trazem para a minha vida.

Quero agradecer ao meu companheiro, Pedro, que sempre esteve ao meu lado em todos os momentos de insegurança, por todo o apoio, carinho, paciência e compreensão, especialmente quando precisei estar ausente. Agradeço também por trazer leveza à minha rotina, por me incentivar quando pensei em desistir e por todas as vezes que você tentou me ajudar mesmo quando não conseguia.

Quero agradecer aos meus amigos do curso, Alison, Franciele, Maria Clara, Maria Luiza e Wéllington, obrigada por todo o companheirismo, o apoio, os abraços, as risadas, por cada conversa. Vocês tornaram os momentos na UESB mais felizes e especiais. Essa jornada se tornou mais leve e prazerosa, gratidão.

Agradeço ao Grupo de Estudos em Matemática Pura e Aplicada (GEMPA), pelas discussões e trocas de conhecimento. As experiências vivenciadas no GEMPA contribuíram para o meu amadurecimento acadêmico ao longo do curso.

Quero agradecer à Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, pelo espaço de formação, a todos os professores pela dedicação e pelos conhecimentos compartilhados, e aos amigos que fizeram parte dessa jornada.

Em especial, quero agradecer ao meu orientador, Professor Ricardo, agradeço pela orientação atenciosa, pelas sugestões sempre pertinentes, por todo o comprometimento, por acreditar na minha capacidade mesmo quando eu duvidava de mim, por todas as conversas inspiradoras, obrigada, você contribuiu positivamente para a minha formação.

Agradeço também à banca examinadora, pela disponibilidade, pelas contribuições e pela leitura atenta deste trabalho.

Por fim, quero expressar minha gratidão a todo o processo, às vivências, aos desafios e aos aprendizados, dos últimos quatro anos.

# Resumo

Este trabalho apresenta uma introdução à teoria de semigrupos de operadores lineares, um campo da Análise Funcional com aplicações no estudo de equações diferenciais parciais (EDPs) de evolução. São introduzidos os conceitos fundamentais da teoria, incluindo a definição de semigrupos de classe  $C_0$ , seu gerador infinitesimal e a relação entre estes elementos e a solução de problemas de Cauchy abstratos em espaços de Banach. O objetivo central do trabalho consiste em enunciar e apresentar uma demonstração do Teorema de Hille-Yosida, resultado que estabelece as condições necessárias e suficientes para que um operador linear seja gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C_0$ , e aplicar este resultado para garantir que a equação de Schrödinger tenha uma única solução em um espaço de funções adequado.

# Abstract

This work presents an introduction to the theory of semigroups of linear operators, a field of functional analysis with applications in the study of evolutionary partial differential equations (PDEs). The fundamental concepts of the theory are introduced, including the definition of  $C_0$  semigroups, their infinitesimal generator, and the relationship between these elements and the solutions of abstract Cauchy problems in Banach spaces. The main goal of the work is to state and prove the Hille–Yosida Theorem, a result that provides the necessary and sufficient conditions for a linear operator to be the infinitesimal generator of a  $C_0$ -semigroup, and to apply this result to show that the Schrödinger equation has a unique solution in a suitable function space.

# Sumário

## Introdução

<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1	Espaços métricos . . . . .	1
1.2	Espaços de Banach . . . . .	5
1.2.1	Exemplos de espaços de Banach . . . . .	5
1.2.2	Espaços $L_p(\Omega)$ . . . . .	8
1.3	Elementos de Análise Funcional . . . . .	16
1.3.1	Teoria dos Operadores Limitados . . . . .	16
1.3.2	Espaços de Hilbert . . . . .	25
1.3.3	Espectro de um operador linear limitado . . . . .	28
1.3.4	Espaços de Sobolev . . . . .	29
1.4	Derivação e Integração em espaços de Banach . . . . .	36
<b>2</b>	<b>Teoria de Semigrupos e o Teorema de Hille–Yosida</b>	<b>52</b>
<b>3</b>	<b>Aplicação a Equação de Schrödinger</b>	<b>109</b>
	<b>Considerações Finais</b>	<b>126</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>127</b>

# Introdução

A teoria de semigrupos de operadores lineares constitui um dos ramos da Análise Funcional, fornecendo uma estrutura matemática para o estudo de problemas de evolução descritos por equações diferenciais parciais (EDP's). Desenvolvida inicialmente na primeira metade do século XX e consolidada com o advento do Teorema de Hille-Yosida em 1948, essa teoria permite reformular diversas EDP's de evolução como problemas de Cauchy abstratos em espaços de Banach ou Hilbert, ou seja, permite reescrever a EDP no formato

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = Au(t), & t > 0, \\ u(0) = u_0 \in X, \end{cases}$$

onde  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  é um operador linear de  $X$  e  $X$  é um espaço de Banach ou Hilbert, e a partir disso, estudar a existência de solução para esse tipo de problema.

Um dos pontos fundamentais desta teoria é a caracterização de operadores lineares que geram semigrupos de classe  $C_0$ , os quais representam a solução de uma grande classe de problemas comumente conhecidas como equações de evolução. Estes tipos de equações aparecem em muitas áreas, incluindo a Física, Química, Biologia, Engenharia e Economia.

Neste contexto, o Teorema de Hille-Yosida é o resultado central, estabelecendo condições necessárias e suficientes para que um operador linear seja o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C_0$ . Este teorema fornece a base teórica para garantir a existência e unicidade de soluções de EDP's de evolução.

O presente trabalho tem como objetivo apresentar uma introdução à teoria de semigrupos de operadores lineares limitados, com ênfase na demonstração do Teorema de Hille-Yosida e em sua aplicação à análise da equação de Schrödinger linear dada por

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = -i\Delta u(t), & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(0) = u_0, & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é aberto, limitado e com fronteira regular, isto é,  $\partial\Omega$  é localmente o gráfico de uma função de classe  $C^\infty$ . Especificamente, demonstraremos que o operador  $-i\Delta$ , definido no domínio  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ , um subespaço do espaço de Hilbert  $L^2(\Omega)$ , é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo, garantindo assim a existência e unicidade da solução para o problema de evolução correspondente, dependendo do dado inicial  $u_0$ .

Este trabalho está organizado em três capítulos. No Capítulo 1, são apresentados os conceitos e resultados preliminares necessários para o desenvolvimento da teoria. Iniciamos com uma revisão de espaços métricos e de Banach, incluindo exemplos fundamentais como espaços  $L^p$ . Além disso, são retomados alguns resultados importantes da Análise Funcional, como o Teorema do Gráfico Fechado (Teorema 1.3.4) e o Teorema de Banach–Steinhaus (Teorema 1.3.3), que servem de base para os resultados apresentados nos capítulos seguintes. Avançamos para os elementos de análise funcional, abrangendo a teoria dos operadores limitados (Seção 1.3.1), espaços de Hilbert (Seção 1.3.2), e espaços de Sobolev (Seção 1.3.4). Finalmente, tratamos de conceitos de derivação e integração em espaços de Banach (Seção 1.4), essenciais para a formulação de problemas de evolução. O objetivo deste capítulo é fornecer ferramentas para o estudo da teoria de semigrupos e da demonstração do Teorema de Hille–Yosida.

O segundo capítulo é dedicado ao estudo da Teoria de Semigrupos de operadores lineares limitados. Inicialmente, são introduzidas as definições e propriedades básicas de semigrupos fortemente contínuos, também chamados de semigrupos de classe  $C_0$  (Definição 2.0.1). Introduzimos o conceito de gerador infinitesimal (Definição 2.0.3) e estabelecemos suas principais características. Em seguida, apresentamos a demonstração do Teorema de Hille-Yosida (Teorema 2.0.1), o qual é o principal teorema deste trabalho,

e um dos resultados mais importantes da área de semigrupos, o qual caracteriza precisamente os operadores lineares que geram semigrupos de classe  $C_0$ . Por fim, apresentamos a definição de Problema de Cauchy Abstrato (Definição 2.77), bem como a definição de solução clássica e mild desse problema (Definição 2.0.7) e o Teorema de existência e unicidade da solução (Teorema 2.0.2).

Por fim, o Capítulo 3 apresenta a aplicação da teoria à equação de Schrödinger linear. Nesse capítulo, o problema é reformulado como um Problema de Cauchy-Abstrato no espaço de Hilbert  $L^2(\Omega)$ , e é demonstrado via Teorema de Hille-Yosida que o operador  $-i\Delta$ , definido em um domínio adequado, é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo. A partir desse resultado, é garantida a existência e unicidade da solução do problema de evolução associado.

# Capítulo 1

## Preliminares

Começamos apresentando algumas definições e resultados referentes à teoria de espaços métricos, espaços de Banach, elementos de análise funcional incluindo teoria dos operadores limitados, espaços de Hilbert e espaços de Sobolev, que serão úteis para o estudo da teoria de semigrupos e à análise da equação de Schrödinger linear. A teoria apresentada aqui é proveniente dos livros [2], [4], [6], [18],[19].

### 1.1 Espaços métricos

Nesta seção, introduzimos a noção de espaço métrico, estruturado por uma função chamada de métrica que generaliza o conceito de proximidade entre elementos. Além disso, são exploradas propriedades fundamentais desses espaços, como convergência de sequências, noção de completude e continuidade de funções.

**Definição 1.1.1.** Seja  $M$  um conjunto não vazio. Uma métrica é uma função  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a cada par de pontos  $x, y \in M$  um número real  $d(x, y)$ , chamado distância do ponto  $x$  ao ponto  $y$ , de tal modo que:

- (i)  $d(x, x) = 0$ ,  $d(x, y) > 0$  se  $x \neq y$ ;
- (ii)  $d(x, y) = d(y, x)$  para quaisquer  $x, y \in M$ ;
- (iii) (Desigualdade Triangular)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  para quaisquer  $x, y, z \in M$ .

Um espaço métrico é um par  $(M, d)$  formado por um conjunto  $M$  e uma métrica  $d$  em  $M$ .

**Definição 1.1.2.** Uma norma num espaço vetorial  $E$ , sobre o corpo  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), é uma função  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a cada  $x \in E$  um número real  $\|x\|$ , chamado norma de  $x$ , de tal maneira que:

- (i)  $\|x\| = 0$  se, e somente se,  $x = 0$  e  $\|x\| > 0$  se  $x \neq 0$ ;
- (ii)  $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$  para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$  e qualquer  $x \in E$ ;
- (iii) (Desigualdade Triangular)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  para quaisquer  $x, y \in E$ .

Um espaço vetorial normado é um par  $(E, \|\cdot\|)$  formado por um espaço vetorial  $E$  e uma norma em  $E$ . Todo espaço normado é também um espaço métrico com a métrica induzida pela norma  $d(x, y) = \|x - y\|$ .

**Observação.** No caso em que  $\lambda \in \mathbb{C}$ , denotaremos sua parte real por  $\Re(\lambda)$  ou  $\Re\lambda$  e sua parte imaginária por  $\Im(\lambda)$  ou  $\Im\lambda$ . Neste caso,  $\lambda = \Re(\lambda) + i \cdot \Im(\lambda)$  e  $|\lambda| = \sqrt{\Re(\lambda)^2 + \Im(\lambda)^2}$ .

**Observação 1.** A partir das propriedades do espaço normado  $(E, \|\cdot\|)$ , é possível obter mais uma desigualdade, a triangular reversa. Usando a desigualdade triangular veja que se  $u, v \in E$

$$\|u\| = \|u + v - v\| \leq \|u - v\| + \|v\| \quad \text{o que implica que} \quad \|u\| - \|v\| \leq \|u - v\|.$$

Da mesma maneira, temos que

$$\|v\| = \|v + u - u\| \leq \|v - u\| + \|u\| \quad \text{o que implica que} \quad \|v\| - \|u\| \leq \|v - u\|.$$

Logo a desigualdade triangular reversa é

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|.$$

**Definição 1.1.3.** Uma sequência  $(x_n)$  num espaço métrico  $M$  chama-se sequência de Cauchy quando, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tal que se  $m, n > n_0$ , então  $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ .

**Definição 1.1.4.** Seja  $(x_n)$  uma sequência num espaço métrico  $M$ . Dizemos que  $(x_n)$  é uma sequência convergente quando existe  $a \in M$  de tal maneira que, para todo número  $\varepsilon > 0$  dado arbitrariamente, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tal que se  $n > n_0$ , então  $d(x_n, a) < \varepsilon$ . Neste

caso dizemos que  $(x_n)$  converge para  $a \in M$ , que  $a$  é o limite de  $(x_n)$  e indicamos  $x_n \rightarrow a$  ou  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

**Proposição 1.1.1.** *Toda sequência convergente em um espaço métrico  $M$  é uma sequência de Cauchy.*

**Demonstração.** Seja  $(x_n)$  uma sequência convergente contida em  $M$ , tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Então, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tal que se  $n > n_0$ , então  $d(x_n, a) < \varepsilon/2$ . Considere  $m, n > n_0$ . Resulta da desigualdade triangular que

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_n, a) + d(x_m, a) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Isto demonstra que  $(x_n)$  é uma sequência de Cauchy. □

**Proposição 1.1.2.** *Toda sequência de Cauchy  $(x_n)$  em um espaço métrico  $M$  satisfaz  $d(x_m, x_n) \leq c$ , para quaisquer  $m, n \in \mathbb{N}$  e para algum  $c > 0$  fixado. Neste caso, diremos que a sequência  $(x_n)$  é limitada.*

**Demonstração.** Seja  $(x_n)$  uma sequência de Cauchy no espaço métrico  $M$ . Dado  $\varepsilon = 1$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, se  $m, n > n_0$  então  $d(x_m, x_n) < \varepsilon = 1$ . Tomando  $c = \max\{1, \max_{i, j \in \{1, \dots, n_0\}} d(x_i, x_j)\}$ , concluímos o desejado. □

**Proposição 1.1.3.** *Uma sequência de Cauchy em um espaço métrico  $M$ , que possui uma subsequência convergente é convergente (e tem o mesmo limite que a subsequência).*

**Demonstração.** Seja  $(x_n)$  uma sequência de Cauchy no espaço métrico  $M$  e  $(x_{n_k})$  uma subsequência que converge para o ponto  $a \in M$ . Dado arbitrariamente  $\varepsilon > 0$  existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, se  $n_k > p$ , então  $d(x_{n_k}, a) < \varepsilon/2$ . Como  $(x_n)$  é uma sequência de Cauchy existe  $q \in \mathbb{N}$  tal que, se  $n, n_k > q$ , então  $d(x_n, x_{n_k}) < \varepsilon/2$ . Seja  $n_0 = \max\{p, q\}$ , então para todo  $n, n_k > n_0$ , temos

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Isto mostra que,  $\lim x_n = a$ . □

**Definição 1.1.5.** Sejam  $M, N$  espaços métricos. Uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  diz-se uniformemente contínua quando, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $\delta > 0$  tal que, para quaisquer  $x, y \in M$ , se  $d(x, y) < \delta$  então  $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ .

**Proposição 1.1.4.** *Toda aplicação uniformemente contínua  $f : M \rightarrow N$ , onde  $M$  e  $N$  espaços métricos, transforma seqüências de Cauchy em seqüências de Cauchy.*

**Demonstração.** Seja  $(x_n)$  uma seqüência de Cauchy em  $M$ . Como  $f$  é uniformemente contínua, existe  $\delta > 0$  tal que se  $x, y \in M$  e se  $d(x, y) < \delta$  então  $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ . Como  $(x_n)$  é uma seqüência de Cauchy, para o mesmo  $\delta > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que se  $m, n > n_0$  então  $d(x_m, x_n) < \delta$  o que implica  $d(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$ . Logo  $f(x_n) \in N$  é uma seqüência de Cauchy.  $\square$

**Definição 1.1.6.** Um espaço métrico  $M$  é completo quando toda seqüência de Cauchy em  $M$  é convergente.

O seguinte teorema afirma que a reta real é um espaço métrico completo. Essa propriedade é de importância fundamental, pois, nos exemplos mais elaborados de espaços de funções, as funções limite de seqüências de Cauchy são obtidas como limites pontuais de seqüências na reta real, recorrendo à sua completude. Assim, a reta constitui o modelo básico de espaço métrico completo sobre o qual se edificam os demais exemplos da análise.

**Proposição 1.1.5.** *A reta  $\mathbb{R}$  é um espaço métrico completo.*

**Demonstração.** Seja  $(x_n)$  uma seqüência de Cauchy em  $\mathbb{R}$ . Tome, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ . Temos  $X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \supset \dots$ , e os conjuntos  $X_n$  são limitados (conforme estabelecido no enunciado da Proposição 1.1.2).

Seja  $a_n = \inf X_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Então  $\inf X_1 = a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b = \sup X_1$ . Perceba que temos uma seqüência monótona e limitada  $(a_n)$ , e sabemos que toda seqüência limitada e monótona de números reais é convergente, logo existe  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Queremos mostrar que o  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Para provar isto de acordo com a Proposição 1.1.3, basta mostrar que  $a$  é o limite de alguma subsequência de  $(x_n)$ , ou, é equivalente provar que, para todo  $\varepsilon > 0$  e  $n_1 \in \mathbb{N}$ , existe  $n > n_1$  tal que  $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ . Em outras palavras, precisamos mostrar que a bola  $B(a, \varepsilon)$  contém termos  $x_n$  para índices  $n$  arbitrariamente grandes, qualquer que seja  $\varepsilon > 0$ .

Então, sendo  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , existe  $m > n_1$  tal que

$$d(a, a_m) < \varepsilon/2 \Rightarrow |a - a_m| < \varepsilon/2 \Rightarrow a - \varepsilon/2 < a_m < a + \varepsilon/2.$$

Para cada  $m$ , como  $a_m = \inf X_m$ , existe  $n \geq m > n_1$  tal que  $a_m \leq x_n < a_m + \varepsilon/2$  o que implica

$$a - \varepsilon/2 < a_m \leq x_n < a_m + \varepsilon/2 < a + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = a + \varepsilon,$$

isto é,  $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , portanto  $a$  é limite de uma subsequência de  $(x_n)$  e como  $(x_n)$  é uma sequência de Cauchy  $x_n \rightarrow a$ .

□

**Proposição 1.1.6.** *Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo. Reciprocamente, um subespaço completo de qualquer espaço métrico é fechado.*

**Demonstração.** Seja  $M$  um espaço métrico completo e  $F \subset M$ , sendo  $F$  fechado. Dada uma sequência de Cauchy  $(x_n)$  em  $F$ , existe  $a \in M$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , porque  $M$  é completo. Como  $F$  é fechado em  $M$ , tem-se  $a \in F$ . Logo,  $F$  é completo.

Por outro lado, se  $N \subset M$  é um subespaço completo, do espaço métrico  $M$ , dada a sequência de pontos  $x_n \in N$ , com  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in M$ , a sequência  $(x_n)$  é de Cauchy (conforme a Proposição 1.1.1). Logo, existe  $b \in N$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ . Pela unicidade do limite, tem-se  $a = b$  e, portanto,  $N$  é fechado em  $M$ .

□

## 1.2 Espaços de Banach

**Definição 1.2.1.** Um espaço vetorial normado e completo com a métrica induzida pela norma é chamado de espaço de Banach.

### 1.2.1 Exemplos de espaços de Banach

Nesta subsecção são apresentados exemplos clássicos de espaços de Banach, como o espaço  $\mathbb{R}^n$  com a norma euclidiana, o espaço das funções contínuas  $C[a, b]$  e o espaço das funções  $k$  vezes diferenciáveis,  $C^k[a, b]$ , com o foco na verificação das propriedades de norma e completude.

**Exemplo 1.2.1.** O espaço  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ , com a norma

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2},$$

com cada  $x_i \in \mathbb{R}$  que é um espaço de Banach. De fato,  $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$  é um espaço de Banach (conforme a Proposição 1.1.5) e é bem conhecido que o produto cartesiano de espaços de Banach é um espaço de Banach (Veja [18, Corolário 1 do capítulo 7]). Além disso os espaços  $(\mathbb{C}, \|\cdot\|)$  e  $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$  também são espaços de Banach com a mesma norma definida anteriormente, com cada  $x_i \in \mathbb{C}$ , uma vez que uma sequência  $(z_n)$  em  $\mathbb{C}$  pode ser escrita da forma  $z_n = a_n + b_n i$  com  $(a_n)$  e  $(b_n)$  sequências em  $\mathbb{R}$ , logo toda sequência de Cauchy em  $\mathbb{C}$  é convergente em  $\mathbb{C}$ .

**Exemplo 1.2.2.** Uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  ( $X \neq \emptyset$ ) é limitada se sua imagem é um subconjunto limitado de  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), ou seja, se existe  $M \geq 0$  tal que  $|f(x)| \leq M$  para todo  $x \in X$ . O conjunto  $B(X)$  de todas as funções limitadas  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  forma um espaço vetorial com as operações usuais de funções, é um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Para verificar que  $B(X)$  é completo, considere  $(f_n)$  uma sequência de Cauchy em  $B(X)$ . Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tal que se  $m, n > n_0$  tem-se

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \sup_{x \in X} |f_m(x) - f_n(x)| = \|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon, \quad (1.1)$$

para cada  $x \in X$ . Assim temos que  $(f_n(x))$  é uma sequência de Cauchy em  $\mathbb{K}$ . Como  $\mathbb{K}$  é completo, existe, para cada  $x \in X$ ,  $y_x = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ . Consequentemente podemos definir a função  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  com  $f(x) = y_x$ . Como a sequência  $(f_n)$  é de Cauchy em  $(B(X), \|\cdot\|_\infty)$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|f_n - f_N\|_\infty \leq 1, \quad \forall n \geq N.$$

Assim, para todo  $x \in X$ ,

$$|f_n(x)| \leq |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \leq \|f_n - f_N\|_\infty + \|f_N\|_\infty \leq 1 + \|f_N\|_\infty.$$

Passando o limite quando  $n \rightarrow \infty$ , obtemos

$$|f(x)| \leq 1 + \|f_N\|_\infty, \quad \forall x \in X.$$

Logo,  $f$  é limitada e, portanto,  $f \in B(X)$ . Além disso, tomando o limite quando  $m \rightarrow \infty$  em (1.1), segue que

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Portanto,  $f_n \rightarrow f$  na norma  $\|\cdot\|_\infty$ .

**Exemplo 1.2.3.** O espaço das funções contínuas definidas em um compacto  $C([a, b]) := \{f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ é contínua em } [a, b]\}$  é um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\} = \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Veja que esse espaço é um subespaço vetorial de  $B([a, b])$ , logo é um espaço vetorial normado. Resta verificar se é completo, pela Proposição 1.1.6, basta verificar se  $C([a, b])$  é fechado em  $B([a, b])$ . Observe que dada uma sequência  $(f_n) \subset C([a, b])$ , tal que  $f_n \rightarrow f \in B([a, b])$ , segue que  $f$  é contínua por ser limite uniforme de funções contínuas (veja [18, Corolário da Proposição 14 do Capítulo 5]), então  $C([a, b])$  é fechado em  $B([a, b])$  e, portanto, é completo.

**Observação.** Seja  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  um intervalo fechado e  $X$  um espaço de Banach. O conjunto

$$C([a, b], X) := \{f : [a, b] \rightarrow X \mid f \text{ é contínua}\}$$

é o espaço das funções contínuas de  $[a, b]$  em  $X$ .

Uma função  $f : [a, b] \rightarrow X$  é contínua em um ponto  $t_0 \in [a, b]$  se para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, para todo  $t \in [a, b]$ ,

$$|t - t_0| < \delta \implies \|f(t) - f(t_0)\|_X < \varepsilon.$$

Se isso vale para todo  $t_0 \in [a, b]$ , então  $f \in C([a, b], X)$ .

**Proposição 1.2.1.** O espaço das funções contínuas  $C([a, b]; X)$ , munido da norma

$$\|x\|_{C([a, b]; X)} = \sup_{t \in [a, b]} \|x(t)\|_X, \text{ é um espaço de Banach.}$$

**Demonstração.** A demonstração dessa Proposição pode ser vista na Proposição 1.8 de [19]. □

**Exemplo 1.2.4.** O espaço das funções  $k$  vezes continuamente diferenciáveis, com  $k \in \mathbb{N}$ , é definido por

$$C^k([a, b]) := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é diferenciável em } [a, b] \text{ e } f' \in C^{k-1}([a, b])\}.$$

Nos extremos dos intervalos considere os limites laterais. Esse espaço é um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_{C^k} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \cdots + \|f^{(k)}\|_\infty.$$

De fato, comecemos analisando o caso  $k = 1$ . Seja uma sequência de Cauchy  $(f_n)$  em  $C^1([a, b])$ , ou seja, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$ , tal que para todo  $n, m > N$  temos

$$\|f_n - f_m\|_{C^1} < \varepsilon \Rightarrow \|f_n - f_m\|_\infty + \|f'_n - f'_m\|_\infty < \varepsilon.$$

Então  $(f_n)$  e  $(f'_n)$  são sequências de Cauchy em  $C([a, b])$  que pelo exemplo anterior é completo. Logo, existem  $f, g \in C([a, b])$  tal que  $f_n \rightarrow f$  e  $f'_n \rightarrow g$  uniformemente. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo podemos escrever:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - f_n(a)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n(t) dt \\ \Rightarrow f(x) - f(a) &= \int_a^x g(t) dt, \text{ para todo } x \in [a, b] \text{ e para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Podemos calcular o limite dessa forma porque a convergência é uniforme. Concluimos que  $f \in C^1([a, b])$  e que  $f' = g$ . Logo  $f_n$  converge uniformemente para  $f$  em  $C^1([a, b])$ . Portanto  $C^1([a, b])$  é Banach. Analogamente podemos verificar que  $C^2([a, b]), C^3([a, b]), \dots, C^k([a, b])$  são espaços de Banach (veja mais detalhes em [2, Exemplo 1.1.4]).

## 1.2.2 Espaços $L_p(\Omega)$

Nesta subseção, apresentamos os espaços  $L^p(\Omega)$ . Esses espaços são formados por funções mensuráveis que são  $p$ -integráveis. Além da definição da norma  $L^p$  e da demonstração de sua completude, destacamos também resultados sobre densidade nesses espaços, mostrando que o espaço  $C_0^\infty(\Omega)$  é denso em  $L^p(\Omega)$ . Antes de definir os espaços  $L^p$

algumas definições de Teoria da Medida são necessárias. O conteúdo exposto aqui pode ser encontrado em [2, Apêndice C] e com maiores detalhes em [1].

**Definição 1.2.2.** Uma  $\sigma$ -álgebra no conjunto  $X$  é uma família  $\Sigma$  de subconjuntos de  $X$  que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i)  $\emptyset, X \in \Sigma$ ;
- (ii) Se  $A \in \Sigma$ , então  $A^c := X \setminus A \in \Sigma$ ;
- (iii) Se  $A_n \in \Sigma$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$ .

Cada elemento da  $\sigma$ -álgebra é chamado de conjunto mensurável e além disso o par  $(X, \Sigma)$  é chamado de espaço mensurável.

**Definição 1.2.3.** Sejam  $(X, \Sigma_1)$  e  $(Y, \Sigma_2)$  espaços mensuráveis. A função  $f : X \rightarrow Y$  é dita mensurável se para todo conjunto mensurável  $B \in \Sigma_2$  a pré-imagem  $f^{-1}(B) \in \Sigma_1$ .

**Exemplo 1.2.5.** Dados um espaço mensurável  $(X, \Sigma)$  e um subconjunto  $A \subset X$ , a função característica de  $A$  é definida por:

$$\chi_A : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

A função característica  $\chi_A$  é mensurável se e somente se  $A \in \Sigma$ . Perceba que se  $A \in \Sigma$ , a pré-imagem de  $\chi_A^{-1}(1) = A \in \Sigma$  e  $\chi_A^{-1}(0) = A^c \in \Sigma$ . Nesse caso a função característica é mensurável. Por outro lado, se  $\chi_A$  é mensurável então para todo  $B \in \Sigma_2$ , sendo  $\Sigma_2$  a  $\sigma$ -álgebra de  $\mathbb{R}$ ,  $\chi_A^{-1}(B) = A \in \Sigma$  ou  $\chi_A^{-1}(B) = A^c \in \Sigma$ .

**Definição 1.2.4.** Uma medida no espaço mensurável  $(X, \Sigma)$  é uma função  $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$  que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i)  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- (ii) Se  $(A_n)$  é uma sequência de conjuntos disjuntos dois a dois em  $\Sigma$ , então

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

A medida  $\mu$  é dita finita, se  $\mu(X) < \infty$  e  $\sigma$ -finita, se existem conjuntos  $(A_n)$  em  $\Sigma$  tais que  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  e  $\mu(A_n) < \infty$  para todo  $n$ . A terna  $(X, \Sigma, \mu)$  é chamado de espaço de medida.

**Definição 1.2.5.** Seja  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida. Uma função mensurável  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  é dita simples se assume apenas um número finito de valores reais, ou seja,  $\varphi(X) = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \in \mathbb{R}$ .

**Definição 1.2.6.** Seja  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida.

- (a) Seja  $\varphi \in \mathcal{M}^+(X, \Sigma)$  (conjunto das funções mensuráveis não negativas  $f : X \rightarrow [0, +\infty)$ ) uma função simples, cuja representação canônica é  $\varphi = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{A_j}$ , com  $a_j \geq 0$  e  $A_j \in \Sigma$ . A integral de  $\varphi$  em relação à medida  $\mu$  é definida por

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{j=1}^m a_j \mu(A_j).$$

- (b) Para  $f \in \mathcal{M}^+(X, \Sigma)$ , define-se a integral de  $f$  em relação à medida  $\mu$  como

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi d\mu : \varphi \in \mathcal{M}^+(X, \Sigma) \text{ é simples e } 0 \leq \varphi \leq f \right\}.$$

- (c) Dado  $A \in \Sigma$  e  $f \in \mathcal{M}^+(X, \Sigma)$ , define-se

$$\int_A f d\mu := \int_X f \cdot \chi_A d\mu.$$

**Definição 1.2.7.** Sejam  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida, e as funções  $f, g : X \rightarrow \mathbb{K}$ . Dizemos que  $f$  é igual a  $g$   $\mu$ -quase sempre, se existe  $A \in \Sigma$  tal que  $\mu(A) = 0$  e  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in A^c$ . Neste caso escreve-se  $f = g$   $\mu$ -quase sempre ou  $f = g$   $\mu$ -q.s.

**Definição 1.2.8.** Seja  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida e  $1 \leq p < \infty$ . O conjunto de todas as funções mensuráveis  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  tal que:

$$\|f\|_{L^p} := \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

será denotado por  $\mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ .

Observe que  $\|\cdot\|_{L^p}$  não é uma norma em  $\mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ , uma vez que falha a primeira propriedade de norma  $\|f\|_{L^p} = 0$ , se somente se,  $f = 0$ . Existem funções  $g \in \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$  que não são identicamente nulas, mas  $\|g\|_{L^p} = 0$ . Veja o exemplo.

**Exemplo 1.2.6.** Vamos considerar o espaço de medida  $([0, 1], \Sigma, \mu)$ , onde  $\Sigma$  é a  $\sigma$ -álgebra de Lebesgue e  $\mu$  é a medida de Lebesgue. Seja a função

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1]. \end{cases}$$

Observe que  $g$  é a função característica do conjunto  $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ , então pelo Exemplo 1.2.5  $g$  é mensurável. Além disso, para qualquer  $1 \leq p \leq \infty$ , temos

$$\|g\|_{L^p}^p = \int_{[0,1]} |g|^p dx = \int_A |g|^p dx = \int_A 1 dx = 0,$$

já que o conjunto  $A$  tem medida de Lebesgue nula.

Por definição, um conjunto  $A \subset \mathbb{R}$  possui medida de Lebesgue nula, se para todo  $\varepsilon > 0$ , existe uma família enumerável de intervalos abertos que cobre  $A$  cujo comprimento total é menor que  $\varepsilon$ .

**Teorema 1.2.1** (Desigualdade de Hölder para integrais). *Sejam  $p, q > 1$  tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  e  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida. Se  $f \in \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$  e  $g \in \mathcal{L}^q(X, \Sigma, \mu)$ , então  $fg \in \mathcal{L}^1(X, \Sigma, \mu)$  e*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}.$$

**Demonstração.** Veja [2, Teorema 1.2.1]. □

**Teorema 1.2.2** (Desigualdade de Minkowski para integrais). *Sejam  $1 \leq p < \infty$  e  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida. Se  $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ , então  $f + g \in \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$  e  $\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$ .*

**Demonstração.** Veja [2, Teorema 1.2.2]. □

Como foi dito anteriormente,  $\|\cdot\|_{L^p}$  não é uma norma em  $\mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ , porém, conforme o Teorema 1.2.2, a desigualdade triangular vale para  $\|\cdot\|_{L^p}$ , bem como a propriedade  $\|\lambda f\|_{L^p} = |\lambda| \cdot \|f\|_{L^p}$ . Dessa forma, sendo  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida, podemos adotar uma relação de equivalência em que duas funções  $f, g : X \rightarrow \mathbb{K}$  são

equivalentes se  $f = g$   $\mu$ -quase sempre, ou seja, se existe um conjunto  $A \in \Sigma$  tal que  $\mu(A) = 0$  e  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in A^c$ . Agora, dada essa relação de equivalência, podemos associar a classe de equivalência de uma função  $f$  ao conjunto de funções que são iguais a  $f$   $\mu$ -quase sempre. Denotamos por  $[f]$  a classe de equivalência da função  $f$  e por  $L^p(X, \Sigma, \mu)$  o espaço quociente de  $\mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$  pela relação de equivalência igualdade  $\mu$ -quase sempre. Note que em  $L^p(X, \Sigma, \mu) := \{[f] : f \in \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)\}$  as operações  $[f] + [g] = [f + g]$  e  $c[f] = [cf]$  estão bem definidas e tornam  $L^p(X, \Sigma, \mu)$  um espaço vetorial. Além disso, definindo  $\|[f]\|_{L^p} := \|f\|_{L^p}$ , corrigimos o que faltava para  $\|\cdot\|_{L^p}$  ser uma norma. Assim,  $(L^p(X, \Sigma, \mu), \|\cdot\|_{L^p})$  é um espaço vetorial normado.

**Teorema 1.2.3** (Teorema da Convergência Monótona). *Seja  $(f_n)$  uma sequência de funções em  $\mathcal{M}^+(X, \Sigma)$  tal que  $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$  para todo  $x \in X$ .*

(a) *Se  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  para todo  $x \in X$ , então  $f \in \mathcal{M}^+(X, \Sigma)$  e*

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

(b) *Se  $f_n \rightarrow f$   $\mu$ -quase sempre e  $f \in \mathcal{M}^+(X, \Sigma)$ , então*

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

**Demonstração.** Veja [1, Teorema 4.6 e Corolário 4.12].

□

**Teorema 1.2.4** (Lema de Fatou). *Se  $(f_n)$  é uma sequência em  $\mathcal{M}^+(X, \Sigma)$  então*

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

**Demonstração.** Veja [1, Teorema 4.8].

□

**Teorema 1.2.5** (Teorema da Convergência Dominada). *Seja  $(f_n)$  uma sequência de funções em  $L^1(X, \Sigma, \mu)$  que converge  $\mu$ -quase sempre para uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ . Se existe  $g \in L^1(X, \Sigma, \mu)$  tal que  $|f_n| \leq |g|$  para todo  $n$ , então  $f \in L^1(X, \Sigma, \mu)$  e*

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

**Demonstração.** Veja [1, Teorema 5.6].  $\square$

**Teorema 1.2.6.** Se  $1 \leq p < \infty$ , então  $L^p(X, \Sigma, \mu)$  é um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_{L^p} = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Demonstração.** Sabemos que o espaço  $L^p(X, \Sigma, \mu)$  é um espaço normado. Precisamos verificar que é completo. Para isso, seja  $(f_n)$  uma sequência de Cauchy em  $L^p(X, \Sigma, \mu)$ . Então, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $M \in \mathbb{N}$  (com  $M$  dependendo de  $\varepsilon$ ) tal que

$$\int_X |f_n - f_m|^p d\mu = \|f_n - f_m\|_{L^p}^p < \varepsilon^p, \quad \text{sempre que } m, n \geq M.$$

Seja  $(g_k)$  uma subsequência de  $(f_n)$  tal que  $\|g_{k+1} - g_k\|_{L^p} < 2^{-k}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Vamos definir uma função  $g : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  como

$$g(x) = |g_1(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |g_{k+1}(x) - g_k(x)|. \quad (1.2)$$

Temos que

$$|g(x)|^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( |g_1(x)| + \sum_{k=1}^n |g_{k+1}(x) - g_k(x)| \right)^p.$$

Como  $g$  é mensurável e não-negativa, podemos aplicar o Lema de Fatou (Teorema 1.2.4) e obter

$$\begin{aligned} \int_X |g|^p d\mu &= \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} \left( |g_1| + \sum_{k=1}^n |g_{k+1} - g_k| \right)^p d\mu \\ &\stackrel{\text{Teorema 1.2.4}}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X \left( |g_1| + \sum_{k=1}^n |g_{k+1} - g_k| \right)^p d\mu, \end{aligned}$$

uma vez que, se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  existe (finito ou infinito), então  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

Elevando ambos os membros a  $1/p$ , usando a desigualdade de Minkowski (Teorema 1.2.2)

e que  $\|g_{k+1} - g_k\|_{L^p} < 2^{-k}$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^p} &= \left( \int_X |g|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( \int_X \left( |g_1| + \sum_{k=1}^n |g_{k+1} - g_k| \right)^p d\mu \right)^{1/p} \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\| |g_1| + \sum_{k=1}^n |g_{k+1} - g_k| \right\|_{L^p} \stackrel{\text{Teorema 1.2.2}}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} \|g_1\|_{L^p} + \left\| \sum_{k=1}^n |g_{k+1} - g_k| \right\|_{L^p} \\ &< \|g_1\|_{L^p} + \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 2^{-k} = \|g_1\|_{L^p} + 1 < \infty. \end{aligned}$$

Dessa forma, mostramos que  $g \in L^p(X, \Sigma, \mu)$ , ou seja,  $g(x) < \infty$  para quase todo ponto  $x \in X$ . Por isso podemos definir o conjunto  $A = \{x \in X : g(x) < \infty\}$ , de modo que  $\mu(X - A) = 0$ . Logo a série  $\sum_{k=1}^{\infty} |g_{k+1} - g_k|$  converge, exceto talvez no conjunto de medida nula ( $X - A$ ), isto é, a série converge  $\mu$ -quase sempre. Segue que a função  $f = g \cdot \chi_A \in L^p(X, \Sigma, \mu)$ , onde  $\chi_A$  é a função característica de  $A$  (definida em 1.2.5). Defina então  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  por

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (g_{k+1}(x) - g_k(x)), & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Como

$$g_k = g_1 + (g_2 - g_1) + (g_3 - g_2) + \cdots + (g_k - g_{k-1}), \quad (1.3)$$

obtemos

$$|g_k| \leq |g_1| + \sum_{j=1}^{k-1} |g_{j+1}(x) - g_j(x)| \leq g(x), \quad \text{para todo } x \in X. \quad (1.4)$$

Observe que de (1.3) para todo  $x \in A$ , temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = f(x),$$

ou seja,  $g_k \rightarrow f$   $\mu$ -quase sempre. Além disso, temos que por (1.4)  $|g_k(x)| \leq g(x)$ , onde  $g \in L^p(X, \Sigma, \mu)$ . Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada (Teorema 1.2.5), segue que  $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$ . Além disso como

$$|f - g_k|^p \leq (|f| + |g_k|)^p \leq (|g \cdot \chi_A| + |g \cdot \chi_A|)^p = (2g)^p \cdot \chi_A$$

e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f - g_k|^p = 0 \quad \mu\text{-quase sempre,}$$

podemos aplicar novamente o Teorema da Convergência Dominada (Teorema 1.2.5), observando que as hipóteses foram satisfeitas, onde a sequência  $(|f - g_k|^p) \rightarrow 0$   $\mu$ -quase sempre e  $|f - g_k|^p < (2g)^p \cdot \chi_A \in L^p(X, \Sigma, \mu)$ . Segue que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|f - g_k\|_{L^p} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \int_X |f - g_k|^p d\mu \right)^{1/p} \\ &\stackrel{\text{Teorema 1.2.5}}{=} \left( \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} |f - g_k|^p d\mu \right)^{1/p} = \int_X 0 d\mu = 0. \end{aligned}$$

Daí, concluímos que  $g_k \rightarrow f$  em  $L^p(X, \Sigma, \mu)$ . Como  $(f_n)$  é uma sequência de Cauchy, que tem uma subsequência  $(g_k)$  que converge para  $f$ , segue imediatamente que  $f_n \rightarrow f$  em  $L^p(X, \Sigma, \mu)$  (veja a Proposição 1.1.3). Isto conclui a demonstração.  $\square$

**Definição 1.2.9.** Seja  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$  contínua, sendo  $\Omega$  aberto. O suporte de  $u$ , o qual será denotado por  $\text{supp}(u)$ , é definido como o fecho em  $\Omega$  do conjunto  $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$ .

O suporte para funções definidas no espaço  $L^p(\Omega)$  é definido da mesma maneira.

**Definição 1.2.10.** Denotaremos por  $C_0^\infty(\Omega)$  o conjunto das funções  $\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$  (sendo  $\Omega$  aberto) que são infinitamente diferenciáveis em  $\Omega$  e que têm suporte compacto, sendo que este suporte depende da função  $\phi$ .

Agora apresentamos dois resultados fundamentais sobre densidade nos espaços  $L^p(\Omega)$ .

**Proposição 1.2.2.** O espaço  $C_0(\Omega)$  (funções contínuas com suporte compacto) é denso em  $L^p(\Omega)$  para  $1 \leq p < +\infty$ .

**Demonstração.** A demonstração pode ser vista na Proposição 1.49 de [6].  $\square$

**Proposição 1.2.3.**  $C_0^\infty(\Omega)$  é denso em  $L^p(\Omega)$  para  $1 \leq p < \infty$ .

**Demonstração.** A demonstração pode ser vista na Proposição 1.51 de [6].  $\square$

## 1.3 Elementos de Análise Funcional

### 1.3.1 Teoria dos Operadores Limitados

Nesta seção, apresentamos a teoria de operadores lineares limitados entre espaços normados, onde nesse contexto, o termo limitado é equivalente a contínuo. Definimos uma norma e algumas propriedades do espaço dos operadores lineares limitados.

**Definição 1.3.1.** Sejam  $(E, \|\cdot\|_E)$  e  $(F, \|\cdot\|_F)$  espaços normados sobre o mesmo corpo  $\mathbb{K}$ . A família dos operadores lineares contínuos com domínio  $E$  e contradomínio  $F$  será denotada por  $\mathcal{L}(E, F)$ . Lembre que, um operador  $A$  é contínuo em  $x_0 \in E$ , se para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $\|A(x) - A(x_0)\|_F < \varepsilon$  sempre que  $x \in E$  satisfaz  $\|x - x_0\|_E < \delta$ .

**Observação 2.** O espaço dos operadores lineares contínuos  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  com domínio  $E$  e contradomínio  $\mathbb{K}$ , é chamado de espaço dual de  $E$  e será denotado por  $E^*$ , e seus elementos serão chamados de funcionais lineares contínuos.

**Teorema 1.3.1.** Sejam  $(E, \|\cdot\|_E)$  e  $(F, \|\cdot\|_F)$  espaços normados sobre o corpo  $\mathbb{K}$  e  $T : E \rightarrow F$  linear. As seguintes condições são equivalentes:

- (a)  $T$  é lipschitziano;
- (b)  $T$  é uniformemente contínuo;
- (c)  $T$  é contínuo;
- (d)  $T$  é contínuo em algum ponto de  $E$ ;
- (e)  $T$  é contínuo na origem;
- (f)  $\sup\{\|T(x)\|_F : x \in E \text{ e } \|x\|_E \leq 1\} < \infty$ ;
- (g) Existe uma constante  $C \geq 0$  tal que  $\|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E$  para todo  $x \in E$ .

**Demonstração. (a)  $\Rightarrow$  (b).** Se  $T$  é lipschitziano, então existe  $C > 0$  tal que para todo  $x, y \in E$

$$\|T(x) - T(y)\|_F \leq C\|x - y\|_E.$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , tome  $\delta = \varepsilon/(C + 1)$ . Se  $\|x - y\|_E < \delta$ , obtemos

$$\|T(x) - T(y)\|_F \leq C\|x - y\|_E < C \cdot \delta = C \cdot \varepsilon/(C + 1) < \varepsilon.$$

Portanto  $T$  é uniformemente contínuo.

**(b)  $\Rightarrow$  (c).** Se  $T$  é uniformemente contínuo, então, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x, y \in E$ ,

$$\|x - y\|_E < \delta \implies \|T(x) - T(y)\|_F < \varepsilon.$$

Fixando  $y = x_0 \in E$  arbitrário, temos que, sempre que  $\|x - x_0\|_E < \delta$ , vale  $\|T(x) - T(x_0)\|_F < \varepsilon$ . Logo  $T$  é contínua em  $x_0$ . Como  $x_0$  é arbitrário,  $T$  é contínua em todo  $E$ .

**(c)  $\Rightarrow$  (d).** Se  $T$  é contínuo, por definição  $T$  é contínuo em todos os pontos  $x \in E$ .

**(d)  $\Rightarrow$  (e).** Se  $T$  é contínuo em  $x_0 \in E$ , por definição, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que,  $\|x - x_0\|_E < \delta$  implica  $\|T(x) - T(x_0)\|_F < \varepsilon$ . Seja  $\|x - 0\|_E < \delta$ . Então

$$\|(x + x_0) - x_0\|_E < \delta \implies \|T(x + x_0) - T(x_0)\|_F = \|T(x) - T(0)\|_F < \varepsilon.$$

Logo  $T$  é contínua na origem.

**(e)  $\Rightarrow$  (f).** Se  $T$  é contínuo na origem, por definição, existe  $\delta > 0$  tal que,  $\|x\|_E < \delta$  implica  $\|T(x)\|_F < 1$ . Se  $\|y\|_E \leq 1$ , então para  $x = (\delta/2)y$  temos  $\|x\|_E = (\delta/2)\|y\|_E < \delta$ , e logo  $\|T(x)\|_F = \|T((\delta/2)y)\|_F < 1$ . Pela linearidade,  $(\delta/2)\|T(y)\|_F < 1$ , portanto  $\|T(y)\|_F < 2/\delta$ . Assim,  $\sup_{\|y\|_E \leq 1} \|T(y)\|_F \leq 2/\delta < \infty$ .

**(f)  $\Rightarrow$  (g).** Seja  $C = \sup_{\|y\|_E \leq 1} \|T(y)\|_F < \infty$ . Para  $0 \neq x \in E$ , tome  $y = x/\|x\|_E$ , e veja que  $\|y\|_E = 1$ . Então  $\|T(y)\|_F \leq C$ , pela hipótese. Mas  $T(y) = T(x)/\|x\|_E$ , portanto  $\|T(x)\|_F/\|x\|_E \leq C$ , isto é,  $\|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E$ . Para  $x = 0$ ,  $\|T(0)\|_F = \|0\|_F = 0 = C\|0\|_E$ .

**(g)  $\Rightarrow$  (a).** Suponha que existe  $C > 0$  tal que  $\|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E$  para todo  $x \in E$ . Sejam  $x_1, x_2 \in E$  quaisquer. Então

$$\|T(x_1) - T(x_2)\|_F = \|T(x_1 - x_2)\|_F \leq C\|x_1 - x_2\|_E.$$

Logo  $T$  é Lipschitz com constante  $C$ . □

**Proposição 1.3.1.** *Sejam  $(E, \|\cdot\|_E)$  e  $(F, \|\cdot\|_F)$  espaços normados.*

(a) *A expressão*

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|_F : \forall x \in E \text{ e } \|x\|_E \leq 1\}$$

*define uma norma no espaço  $\mathcal{L}(E; F)$ .*

(b) *Para todo  $T \in \mathcal{L}(E; F)$  e  $x \in E$ ,*

$$\|T(x)\|_F \leq \|T\| \cdot \|x\|_E.$$

(c) *Se  $F$  for Banach, então  $\mathcal{L}(E; F)$  também é Banach, com a norma definida no item*

*(a)*

**Demonstração.** (a) Vamos verificar que  $\|T\| = \sup\{\|T(x)\|_F : \forall x \in E \text{ e } \|x\|_E \leq 1\}$  satisfaz as três propriedades de norma. Sejam  $T, U \in \mathcal{L}(E, F)$ .

(i) Vamos verificar que  $\|T\| = 0$  se e somente se  $T$  é o operador identicamente nulo.

Se  $\|T\| = 0 = \sup\{\|T(x)\|_F : x \in E \text{ e } \|x\|_E \leq 1\}$  então, para todo  $x \in E$  com  $\|x\| \leq 1$  temos  $0 \leq \|T(x)\| \leq 0$ , o qual implica que  $T(x) = 0$ . Se  $x \in E \setminus \{0\}$  é arbitrário,  $x/\|x\|_E$  tem norma 1, e portanto  $T(x)$ , nesse caso, também é zero. Logo  $T = 0$ . Por outro lado, se  $T = 0$ , então para todo  $x \in E$ ,  $\|Tx\|_F = 0$ , o que implica  $\|T\| = 0$ .

(ii) Vamos verificar que dados  $\alpha \in \mathbb{K}$  e  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ , temos  $\|\alpha T\| = |\alpha| \|T\|$ . De fato,

$$\|\alpha T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|\alpha T(x)\|_F = |\alpha| \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F = |\alpha| \|T\|.$$

(iii) Desigualdade triangular: vamos verificar se  $T, U \in \mathcal{L}(E, F)$  temos

$$\|T + U\| \leq \|T\| + \|U\|.$$

Para todo  $x \in E$  com  $\|x\|_E \leq 1$

$$\|(T + U)(x)\|_F = \|T(x) + U(x)\|_F \leq \|T(x)\|_F + \|U(x)\|_F \leq \|T\| + \|U\|.$$

Tomando o supremo do lado esquerdo, obtemos

$$\|T + U\| \leq \|T\| + \|U\|.$$

(b) Considere  $x, y \in E$ , com  $x \neq 0$  e  $y = x/\|x\|$ . Note que  $\|y\| = 1$ . Assim

$$\|T(y)\|_F \leq \|T\| \Rightarrow \|x\|_E^{-1} \|T(x)\|_F = \|T(x/\|x\|_E)\|_F \leq \|T\| \Rightarrow \|T(x)\|_F \leq \|T\| \cdot \|x\|_E.$$

(c) Vamos mostrar que se  $E$  é um espaço normado e  $F$  é um espaço de Banach, então  $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|)$  é um espaço de Banach, com norma  $\|\cdot\|$  definida no item (a). Seja  $(T_n)$  uma seqüência de Cauchy em  $\mathcal{L}(E, F)$ , então dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , de modo que se  $m, n > n_0 \in \mathbb{N}$  então  $\|T_m - T_n\|_{\mathcal{L}(E, F)} < \varepsilon$ . Fixando  $x \in E$  e usando o item (b) do teorema, nós temos

$$\|T_m x - T_n x\|_F = \|(T_m - T_n)x\|_F \leq \|T_m - T_n\|_{\mathcal{L}(E, F)} \|x\| < \varepsilon \cdot \|x\|_E. \quad (1.5)$$

Perceba que  $(T_n x)$  é uma seqüência de Cauchy em um espaço de Banach  $F$ , logo para cada  $x \in E$ , existe  $Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$ . Isso define uma aplicação  $T : E \rightarrow F$ , onde  $Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$ . Pelas propriedades de limite, dados  $\alpha \in \mathbb{K}$  e  $x, y \in E$ , temos

$$T(\alpha x + y) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\alpha x + y) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x + \lim_{n \rightarrow \infty} T_n y = \alpha Tx + Ty,$$

isto é,  $T$  é linear. Além disso fazendo  $n \rightarrow \infty$  em (1.5) temos que para todo  $m > n_0 \in \mathbb{N}$  e  $x \in E$  temos

$$\|(T_{n_0} - T)x\| \leq \varepsilon \|x\|.$$

Pelo Teorema 1.3.1,  $(T - T_{n_0}) \in \mathcal{L}(E, F)$  e como esse espaço é um espaço vetorial, concluímos que  $T = (T - T_{n_0}) + T_{n_0} \in \mathcal{L}(E, F)$ . Portanto  $\mathcal{L}(E, F)$  com a norma definida em (a) é um espaço de Banach, quando  $F$  é um espaço de Banach.  $\square$

**Observação.** Observamos que, ao tratar de operadores lineares  $T : E \rightarrow F$ , onde  $E$  e  $F$  são espaços normados, lidamos com três normas distintas: a norma do domínio  $E$ , denotada por  $\|\cdot\|_E$ ; a norma do contradomínio  $F$ , denotada por  $\|\cdot\|_F$ ; e a norma do operador no espaço  $\mathcal{L}(E, F)$ , denotada por  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E, F)}$ . Quando o contexto não deixar claro

a qual norma nos referimos, recorreremos a essas notações com subíndices; caso contrário, usaremos simplesmente  $\|\cdot\|$ .

**Definição 1.3.2.** Uma álgebra de Banach é um espaço de Banach  $X$  sobre o corpo  $\mathbb{K}$ , munido de uma operação de produto entre seus elementos  $(x, y) \mapsto xy$ , que satisfaz as propriedades: Dados  $x, y, z \in X$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$

- (i) Associatividade  $x(yz) = (xy)z$ ;
- (ii) Distributividade à direita  $x(y + z) = xy + xz$ ;
- (iii) Distributividade à esquerda  $(x + y)z = xz + yz$ ;
- (iv)  $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$ ;
- (v)  $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ .

Observe que o espaço  $\mathcal{L}(X, X)$  é uma álgebra de Banach, com a operação de produto sendo a composição de funções. Para  $A, B \in \mathcal{L}(X, X)$ , definimos o produto de  $A$  por  $B$  como  $A \circ B$  (que denotaremos simplesmente por  $AB$ ). Temos então que  $AB \in \mathcal{L}(X, X)$  e que  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ . A esta última relação faremos referência, ao longo do texto, como “propriedade da álgebra dos operadores”.

Agora apresentaremos dois resultados estruturais fundamentais da Análise Funcional: o Teorema de Banach–Steinhaus (ou Princípio da Limitação Uniforme) e o Teorema do Gráfico Fechado. Ambos desempenham papel central na teoria dos operadores lineares contínuos em espaços de Banach. Para a demonstração do Teorema de Banach–Steinhaus, será necessário recorrer a um importante resultado da Topologia dos espaços métricos: o Teorema de Baire, que enunciaremos a seguir.

**Teorema 1.3.2** (Teorema de Baire). *Sejam  $(M, d)$  um espaço métrico completo e  $(F_n)$  uma sequência de subconjuntos fechados de  $M$  tal que*

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

*Então, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $F_{n_0}$  possui interior não-vazio.*

**Demonstração.** Veja em [2, Teorema 2.3.1]. □

**Teorema 1.3.3** (Teorema de Banach-Steinhaus). *Sejam  $X$  um espaço de Banach,  $F$  um espaço normado, e  $(T_i)_{i \in I}$  uma família de operadores em  $\mathcal{L}(X, F)$  satisfazendo a condição de que, para cada  $x \in X$ , existe  $C_x < \infty$  ( $C_x > 0$ ) tal que*

$$\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < C_x.$$

Então,

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty.$$

**Demonstração.** Seja  $X$  um espaço de Banach e  $(T_i)_{i \in I}$  uma família de operadores lineares contínuos de  $E$  num espaço normado  $F$ . Suponha que, para cada  $x \in X$ ,

$$\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < C_x.$$

Note que o conjunto

$$F_n = \{x \in X : \|T_i(x)\| \leq n\} = (\|\cdot\| \circ T_i)^{-1}([0, n])$$

é fechado para cada  $n \in \mathbb{N}$  e  $i \in I$  uma vez que  $T_i$  é contínuo,  $\|\cdot\|_F$  é contínua, e a composição de funções contínuas  $(\|\cdot\| \circ T_i)$  é contínua. Sabemos que a pré-imagem do conjunto fechado  $[0, n]$  por uma função contínua é fechado, logo cada  $F_n$  é fechado. Dessa forma, o conjunto

$$A_n := \left\{ x \in X : \sup_{i \in I} \|T_i(x)\| \leq n \right\} = \bigcap_{i \in I} \{x \in X : \|T_i(x)\| \leq n\}$$

é fechado por ser uma interseção de fechados. Perceba que esses conjuntos são iguais porque se  $x \in \bigcap_{i \in I} \{x \in X : \|T_i(x)\| \leq n\}$ , isso significa que para todo  $i \in I$ ,  $\|T_i(x)\| \leq n$ . Em particular  $\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| \leq n$ , logo,  $x \in A_n$ . Agora, se  $x \in A_n$ , então  $\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| \leq n$ . Nesse caso, para cada  $i \in I$ ,  $\|T_i(x)\| \leq \sup_{i \in I} \|T_i(x)\| \leq n$ , ou seja,  $x \in \{x \in X : \|T_i(x)\| \leq n\}$  para cada  $i \in I$ . Portanto,  $x \in \bigcap_{i \in I} \{x \in X : \|T_i(x)\| \leq n\}$ .

Como por hipótese para cada  $x \in X$  temos  $\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < C_x$ , segue que  $X =$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  e, pelo Teorema 1.3.2 (Teorema de Baire), algum  $A_n$  possui interior não-vazio.

Seja  $n_0$  um número natural tal que  $\text{int}(A_{n_0}) \neq \emptyset$ . Sejam  $a \in \text{int}(A_{n_0})$  e  $r > 0$  tais que a bola fechada de centro  $a$  e raio  $r$  esteja contida no interior de  $A_{n_0}$ , ou seja,

$$\{x \in X : \|x - a\| \leq r\} \subseteq \text{int}(A_{n_0}).$$

Seja  $y \in X$  com  $\|y\| \leq 1$ . Se definirmos  $x = a + ry$  então

$$\|x - a\| = \|ry\| = r\|y\| \leq r.$$

Portanto,  $x \in A_{n_0}$ . Pela definição do conjunto  $A_{n_0}$ , temos que  $\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| \leq n_0$  e  $\sup_{i \in I} \|T_i(a)\| \leq n_0$ . Usando a linearidade de  $T_i$  obtemos

$$\begin{aligned} \|T_i(x - a)\| &= \|T_i(x) - T_i(a)\| \\ &\leq \|T_i(x)\| + \|T_i(a)\| \\ &\leq n_0 + n_0 \quad (\text{para todo } i \in I). \end{aligned}$$

Logo,  $\|T_i(ry)\| = \|T_i(x - a)\| \leq 2n_0$ . Como  $r > 0$  e  $T_i$  é linear temos

$$\|T_i(y)\| \leq \frac{2n_0}{r} \quad (\text{para todo } i \in I).$$

Uma vez que esta desigualdade é válida para todo  $y \in X$  com  $\|y\| \leq 1$ , e para todo  $i \in I$ , segue que

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| = \sup_{i \in I} \left( \sup_{\|y\| \leq 1} \|T_i(y)\| \right) \leq \frac{2n_0}{r} < \infty.$$

Portanto, o conjunto das normas dos operadores é limitado. □

**Definição 1.3.3.** Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados e  $T : E \rightarrow F$  um operador linear. O gráfico de  $T$  é o conjunto

$$G(T) = \{(x, y) : x \in E \text{ e } y = T(x)\} = \{(x, T(x)) : x \in E\} \subset E \times F.$$

Observe que  $G(T)$  é um subespaço vetorial de  $E \times F$ , uma vez que dados  $\alpha \in \mathbb{K}$  e  $(x_1, T(x_1)), (x_2, T(x_2)) \in G(T)$ , temos

$$\alpha T x_1 + T x_2 = T(\alpha x_1 + x_2).$$

Concluimos que  $(\alpha x_1 + x_2, T(\alpha x_1 + x_2)) \in G(T)$ .

**Teorema 1.3.4** (Teorema do Gráfico Fechado). *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach e  $T : X \rightarrow Y$  um operador linear. Então,  $T$  é contínuo se, e somente se,  $G(T)$  é fechado em  $X \times Y$ .*

**Demonstração.** ( $\Rightarrow$ ) Suponha  $T$  contínuo. Nesse caso vamos considerar a função

$$f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x, y) = \|T(x) - y\|.$$

Note que essa função é contínua, porque é a composição de funções contínuas, nesse caso  $f(x, y) = (\|\cdot\|_Y \circ (T(x) - y))$ . Além disso, perceba que  $f^{-1}(\{0\}) = \{(x, y) \in X \times Y; \|Tx - y\|_Y = 0\}$ , ou seja o par ordenado  $(x, Tx) \in f^{-1}(\{0\})$ , portanto, o gráfico de  $T$  é o conjunto  $G(T) = \{(x, T(x)) \in X \times Y : x \in X\} = f^{-1}(\{0\})$ . Como  $\{0\}$  é um conjunto fechado em  $\mathbb{R}$  e  $f$  é contínua, a pré imagem de  $\{0\}$  é fechado, logo  $G(T) = f^{-1}(\{0\})$  é fechado em  $X \times Y$ .

( $\Leftarrow$ ) Reciprocamente, suponha  $G(T)$  fechado. Primeiramente, veja que por [18, Corolário 1 do capítulo 7],  $X \times Y$ , com a norma  $\|(x, y)\|_s = \|x\|_X + \|y\|_Y$ , é um espaço de Banach. Como  $G(T)$  é um subespaço vetorial fechado de um espaço de Banach,  $G(T)$  é, ele próprio, um espaço de Banach. Definimos a função projeção  $\pi : G(T) \rightarrow X$  como

$$\pi(x, T(x)) = x.$$

A função  $\pi$  é linear, porque dados  $\alpha \in \mathbb{K}$  e  $x, y \in X$ , temos  $\pi(\alpha x + y, T(\alpha x + y)) = \alpha x + y = \alpha\pi(x, Tx) + \pi(y, Ty)$ . Note que a imagem de  $\pi$  é igual ao conjunto  $X$ , o que garante que  $\pi$  é sobrejetora. Além disso, se  $\pi(x, Tx) = \pi(y, Ty)$  então necessariamente  $x = y$  o que implica que  $Tx = Ty$ . Logo  $\pi$  é injetora e, conseqüentemente  $\pi$  é bijetora. Podemos afirmar também que  $\pi$  é contínua, de fato para todo  $x \in X$  tem-se

$$\|\pi(x, T(x))\|_X = \|x\|_X \leq \|x\|_X + \|T(x)\|_Y = \|(x, T(x))\|_s.$$

Portanto, a continuidade segue do Teorema 1.3.1 item (g). Do Teorema da Aplicação Aberta [2, Teorema 2.4.2], segue que a inversa  $\pi^{-1} : X \rightarrow G(T)$  é contínua (visto que  $X$  e  $G(T)$  são Espaços de Banach e  $\pi$  é bijetora, contínua e linear). Portanto, existe  $C > 0$

tal que  $\|\pi^{-1}(x)\|_s \leq C\|x\|_X$ , para todo  $x \in X$  (novamente pelo Teorema 1.3.1 item (g)).

Ou seja,

$$\|(x, T(x))\|_s \leq C\|x\|_X \quad \text{para todo } x \in X.$$

Desenvolvendo a norma  $\|\cdot\|_s$ , temos

$$\|T(x)\|_Y \leq \|T(x)\|_Y + \|x\|_X = \|(x, T(x))\|_s \leq C\|x\|_X,$$

para todo  $x \in X$ . Isso prova que  $T$  é contínuo, pelo item (g) do Teorema 1.3.1.  $\square$

**Definição 1.3.4.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach. Um operador linear não limitado de  $X$  em  $Y$  é uma aplicação linear  $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ , definida em um subespaço vetorial  $D(A) \subset X$  e com valores em  $Y$ . O conjunto  $D(A)$  é chamado de domínio de  $A$ . O caso em que  $A$  é limitado (ou contínuo), corresponde ao caso em que  $D(A) = X$  e  $c \geq 0$  tal que

$$\|Ax\| \leq c\|x\|, \quad \text{para todo } x \in X.$$

**Definição 1.3.5.** O operador linear

$$A : D(A) \subset X \rightarrow Y$$

é densamente definido se  $\overline{D(A)} = X$ , ou, equivalentemente, se para todo  $x \in X$  existe uma sequência  $(x_n) \subset D(A)$  tal que  $x_n \rightarrow x$  em  $X$ .

**Definição 1.3.6.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach. Um operador linear  $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$  é dito fechado se o seu gráfico

$$G(A) = \{(x, Ax) \in X \times Y : x \in D(A)\}$$

é um subconjunto fechado de  $X \times Y$ . De maneira equivalente, podemos dizer que  $A$  é fechado se para toda sequência  $(x_n) \subset D(A)$ , tal que

$$x_n \rightarrow x \quad \text{em } X \quad \text{e} \quad Ax_n \rightarrow y \quad \text{em } Y,$$

tem-se

$$x \in D(A) \quad \text{e} \quad Ax = y.$$

**Observação 3.** Note que, mesmo que um operador linear  $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$  seja fechado, não podemos concluir que  $A$  é contínuo aplicando o Teorema do Gráfico Fechado (Teorema 1.3.4). Isso ocorre porque, nesse caso, o operador  $A$  está definido apenas em um subespaço  $D(A)$  do espaço de Banach  $X$ . Por exemplo, se  $X = Y = C[0, 1]$ , munido da norma do supremo  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$  e  $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$  é o operador derivada, ou seja,  $Af = f'$ , onde  $D(A) = C^1[0, 1]$ , então afirmamos que  $A$  é linear, possui gráfico fechado em  $X \times Y$ , mas não é contínuo. Do cálculo, vimos que  $A$  é linear. Para verificar que é fechado, consideramos uma sequência  $(f_n) \subset D(A)$  tal que  $f_n \rightarrow f$  em  $C[0, 1]$  e  $f'_n \rightarrow g$  em  $C[0, 1]$ . Como a convergência é uniforme, temos para todo  $x \in [0, 1]$ ,

$$f_n(x) = f_n(0) + \int_0^x f'_n(t) dt.$$

Passando ao limite e usando a continuidade da integral, obtemos

$$f(x) = f(0) + \int_0^x g(t) dt,$$

de modo que  $f$  é diferenciável em  $[0, 1]$  e  $f' = g$ . Logo  $f \in D(A)$  e  $Af = g$ , o que mostra que o gráfico é fechado. Porém  $A$  não é contínuo. De fato, tomando  $f_n(x) = \sin(nx)$ , temos  $\|Af_n\|_\infty = n$ , o que mostra que  $A$  é não limitado. Assim, para que o referido teorema seja aplicável, é necessário provar que o domínio de  $A$  coincida com todo o espaço  $X$ .

### 1.3.2 Espaços de Hilbert

Nesta seção, apresentamos a definição de produto interno e suas principais propriedades. Em seguida, definimos o espaço de Hilbert e destacamos um exemplo importante desse tipo de espaço, o  $L^2(\Omega)$ .

**Definição 1.3.7.** Seja  $E$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{K}$ . Um produto interno em  $E$  é uma aplicação

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}, \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle,$$

tal que, para quaisquer  $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in E$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ , valem as propriedades:

$$(i) \quad \langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle;$$

$$(ii) \quad \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle;$$

(iii)  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ;

(iv) Se  $x \neq 0$  então  $\langle x, x \rangle > 0$ .

O par  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  é chamado de espaço com produto interno.

A partir da definição acima é possível encontrar algumas propriedades:

1.  $\langle x, 0 \rangle = \langle 0, y \rangle = 0$ , uma vez que  $\langle x, 0 \rangle = 0 \cdot \langle x, y \rangle = 0$ ;
2.  $\langle x, x \rangle = 0$  se, e somente se,  $x = 0$ . De fato, se  $x = 0$  o argumento é mesmo do item anterior, e se  $\langle x, x \rangle = 0$ , segue da contrapositiva de (iv);
3.  $\langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle$ . De fato, temos que  $\langle x, y_1 + y_2 \rangle = \overline{\langle y_1 + y_2, x \rangle} = \overline{\langle y_1, x \rangle + \langle y_2, x \rangle} = \overline{\langle y_1, x \rangle} + \overline{\langle y_2, x \rangle} = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle$  por (i) e (iii);
4.  $\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$ . Isto segue, de (ii) e (iii):  $\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\langle \lambda y, x \rangle} = \overline{\lambda \langle y, x \rangle} = \overline{\lambda} \overline{\langle y, x \rangle} = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$ ;
5. Se  $\langle z, y_1 \rangle = \langle z, y_2 \rangle$  para todo  $z \in E$ , então  $y_1 = y_2$ . Note que  $\langle z, y_1 - y_2 \rangle = 0$ , e como isso vale para todo  $z \in E$ , em particular vale para  $z = y_1 - y_2$ . Pelo item (2) segue  $y_1 - y_2 = 0$ , logo  $y_1 = y_2$ .

**Proposição 1.3.2** (Desigualdade de Cauchy–Schwarz). *Seja  $E$  um espaço vetorial com produto interno. Então*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

para quaisquer  $x, y$  em  $E$ . Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, os vetores  $x$  e  $y$  são linearmente dependentes. Nesse caso a função  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$  é definida como  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ,  $x \in E$

**Demonstração.** Veja em [2, Proposição 5.1.2]. □

**Observação.** A função  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ,  $x \in E$  é conhecida como a norma induzida pelo produto interno. Vamos verificar que essa função satisfaz as três propriedades de norma: Dados  $x, y \in E$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$

- (i)  $\|x\| = 0$  se e somente se  $x = 0$ . Veja a propriedade (2) abaixo da Definição 1.3.7:
  - ( $\Rightarrow$ ) Se  $\|x\| = 0$  então  $\sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ .
  - ( $\Leftarrow$ ) Se  $x = 0$  então  $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$ .

(ii)  $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ :

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{|\alpha|^2 \langle x, x \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\alpha|\|x\|.$$

(iii) (Desigualdade triangular)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle})^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \cdot \Re(\langle x, y \rangle) + \langle y, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \quad (\text{Desigualdade de Cauchy-Schwarz } 1.3.2) \\ &\Rightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

**Definição 1.3.8.** Um espaço com produto interno que é completo na norma induzida pelo produto interno é chamado de espaço de Hilbert. Em particular, um espaço de Hilbert é um espaço de Banach com a norma induzida pelo produto interno.

**Exemplo 1.3.1.** O espaço  $L^2(X, \Sigma, \mu)$  é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_X f \cdot \bar{g} \, d\mu.$$

Vamos verificar que essa função satisfaz a definição de produto interno, dados na Definição

1.3.7. Sejam  $x, x_1, x_2, y \in L^2(X, \Sigma, \mu)$ . Então

(i)  $\langle x_1 + x_2, y \rangle_{L^2} = \langle x_1, y \rangle_{L^2} + \langle x_2, y \rangle_{L^2}$  :

$$\begin{aligned} \langle x_1 + x_2, y \rangle_{L^2} &= \int_X (x_1 + x_2) \cdot \bar{y} \, d\mu = \int_X x_1 \cdot \bar{y} + x_2 \cdot \bar{y} \, d\mu \\ &= \int_X x_1 \cdot \bar{y} \, d\mu + \int_X x_2 \cdot \bar{y} \, d\mu = \langle x_1, y \rangle_{L^2} + \langle x_2, y \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

(ii)  $\langle \lambda x, y \rangle_{L^2} = \lambda \langle x, y \rangle_{L^2}$ :

$$\langle \lambda x, y \rangle_{L^2} = \int_X \lambda x \cdot \bar{y} \, d\mu = \lambda \int_X x \cdot \bar{y} \, d\mu = \lambda \langle x, y \rangle_{L^2}.$$

(iii)  $\langle x, y \rangle_{L^2} = \overline{\langle y, x \rangle_{L^2}}$ :

$$\langle x, y \rangle_{L^2} = \int_X x \bar{y} \, d\mu = \int_X \overline{\bar{x} \cdot y} \, d\mu = \overline{\int_X \bar{x} \cdot y \, d\mu} = \overline{\langle y, x \rangle_{L^2}}.$$

(iv) Se  $x \neq 0$  então  $\langle x, x \rangle_{L^2} > 0$ :

$$\langle x, x \rangle_{L^2} = \int_X x \bar{x} \, d\mu = \int_X |x|^2 \, d\mu = \|x\|_{L^2}^2 > 0.$$

Note que  $\langle x, x \rangle = \|x\|_{L^2}^2$ , ou seja mostramos que esse produto interno induz uma norma em  $L^2(X, \Sigma, \mu)$  e como corresponde temos que se  $x \neq 0$  então  $\langle x, x \rangle = \|x\|_{L^2}^2 > 0$ .

### 1.3.3 Espectro de um operador linear limitado

Nesta seção, introduziremos os conceitos de espectro e resolvente de um operador linear contínuo em espaços normados. A definição do espectro estende a noção clássica de autovalores para o contexto de operadores em espaços de dimensão infinita, sendo fundamental para o estudo de equações funcionais. Uma exposição sobre o espectro e o resolvente de operadores ilimitados será apresentada posteriormente (veja a Definição 2.0.4), no capítulo seguinte, onde esses conceitos são aplicados à análise de operadores geradores de semigrupos fortemente contínuos.

**Definição 1.3.9.** Sejam  $V$  um espaço vetorial e  $T : V \rightarrow V$  um operador linear. Um autovalor de  $T$  é um escalar  $\lambda$  para o qual existe um vetor não-nulo  $x \in V$  tal que

$$T(x) = \lambda x.$$

Vamos verificar que o conjunto  $V_\lambda$  definido como

$$V_\lambda = \{x \in V : T(x) = \lambda x\}$$

é um subespaço de  $V$ , chamado de autoespaço associado ao autovalor  $\lambda$  e seus elementos são chamados de autovetores de  $T$  associados ao autovalor  $\lambda$ . Note que,  $V_\lambda \subset V$ , além disso, dados  $v, w \in V_\lambda$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$

$$T(v + \alpha w) = T(v) + \alpha T(w) = \lambda v + \alpha \lambda w = \lambda(v + \alpha w).$$

Portanto  $V_\lambda$  é um subespaço vetorial de  $V$ .

Observe que em dimensão finita, quando  $\lambda$  é um autovalor da transformação  $T$ , a aplicação  $(T - \lambda I)$  não é injetora portanto não existe a inversa de  $(T - \lambda I)$ , ou seja em dimensão finita os autovalores  $\lambda$  são os escalares para os quais  $(T - \lambda I)^{-1}$  não existe, esse argumento não funciona da mesma forma em dimensão infinita.

**Definição 1.3.10.** Seja  $E$  um espaço normado e  $T \in \mathcal{L}(E, E)$ . O escalar  $\lambda \in \mathbb{K}$  é um valor regular do operador  $T$  se  $(T - \lambda I)$  é bijetora e

$$(T - \lambda I)^{-1} : E \rightarrow E \text{ é contínua.}$$

O conjunto dos valores regulares de  $T$  é chamado de conjunto resolvente de  $T$  e denotado por  $\rho(T)$ . Seu complementar  $(\mathbb{K} \setminus \rho(T))$  é chamado de espectro de  $T$  e denotado por  $\sigma(T)$ .

### 1.3.4 Espaços de Sobolev

Nesta seção, introduzimos os espaços de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$ , que estendem o conceito de derivada para funções que não são necessariamente diferenciáveis no sentido clássico, por meio da noção de derivada fraca, definimos uma norma nesse espaço, e verificamos que esse espaço é completo. Além disso, destacamos o caso particular  $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ , que forma um espaço de Hilbert. A seguir apresentamos a definição do espaço.

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um aberto. Definimos o espaço de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  por

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \exists g_1, g_2, \dots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tais que} \right. \\ \left. \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \varphi dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), i = 1, \dots, N \right\}.$$

Os elementos  $g_i$  são denotados por

$$g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

sendo chamados derivadas fracas de  $u$  em relação a  $x_i$ .

Denotamos

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

O espaço  $W^{1,p}(\Omega)$  é munido da norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left( \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} := \left( \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

Finalmente, definimos

$$H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega).$$

Agora seja  $m \geq 2$ , um número inteiro, e  $1 \leq p < \infty$ . Definimos, por indução, os espaços de Sobolev de ordem  $m$  como

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in W^{m-1,p}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega), i = 1, \dots, N\}.$$

De forma equivalente, pode-se definir

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \forall \alpha \text{ com } |\alpha| \leq m, \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ tal que} \right. \\ \left. \int_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g_\alpha \varphi dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \right\},$$

onde usamos a notação multi-índice  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$  com  $\alpha_i \in \mathbb{N}$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N$  e

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Denotamos  $D^\alpha u = g_\alpha$  (chamamos de derivada fraca de ordem  $\alpha$ , ou derivada no sentido das distribuições). No caso  $0 = (0, 0, \dots, 0)$ , o operador  $D^0$  estará representando o operador identidade.

O espaço  $W^{m,p}(\Omega)$  é munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}. \quad (1.6)$$

Além disso, definimos

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

Para maior familiaridade, vamos verificar que a função definida em (1.6) de fato satisfaz as três propriedades de norma. Sejam  $u, v \in W^{m,p}$ :

(i)  $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = 0$  se e somente se  $u = 0$ .

De fato. Se  $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = 0$ . Note que

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p = 0,$$

onde  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$  é a norma definida no espaço  $L^p(\Omega)$ , logo como  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$  satisfaz as propriedades de norma obtemos que para todo  $\alpha$  tal que  $|\alpha| \leq m$ ,  $D^\alpha u = 0$ , em particular para  $\alpha = 0$  temos que  $u = 0$ .

Por outro lado, se  $u = 0$ , então  $D^\alpha u = 0$  para todo  $|\alpha| \leq m$ , logo  $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = 0$ .

(ii) Dado  $\lambda \in \mathbb{K}$  tem-se  $\|\lambda u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = |\lambda| \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ :

$$\|\lambda u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha \lambda u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left( |\lambda|^p \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

(iii) Desigualdade Triangular:  $\|u + v\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ .

Temos que

$$\|u + v\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Para cada multi-índice  $\alpha$ , a função  $D^\alpha u + D^\alpha v$  pertence a  $L^p(\Omega)$ . Pela desigualdade de Minkowski para Integrais (Teorema 1.2.2), obtemos

$$\|D^\alpha u + D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Elevando a ambos os lados à potência  $p$ , obtemos:

$$\|D^\alpha u + D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \leq (\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)})^p.$$

(Note que, como a base é positiva, a desigualdade se mantém). Agora, definimos as componentes:

$$a_\alpha = \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}, \quad b_\alpha = \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Começamos com a expressão da norma de Sobolev e substituímos a desigualdade

$$\|u+v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{|\alpha| \leq m} (\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)})^p \right)^{1/p}.$$

Utilizando a desigualdade de Mikowski para seqüências [2, Proposição 1.4.2]

$$\left( \sum_{|\alpha| \leq m} (a_\alpha + b_\alpha)^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{|\alpha| \leq m} b_\alpha^p \right)^{1/p},$$

obtemos

$$\left( \sum_{|\alpha| \leq m} (\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)})^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

Portanto, a desigualdade triangular está verificada.

**Observação.** Uma vez que o domínio  $\Omega$  esteja claramente determinado pelo contexto, adotaremos a notação simplificada para as normas:  $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|\cdot\|_{W^{m,p}}$ ,  $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)} = \|\cdot\|_{H^m}$  e  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)} = \|\cdot\|_{L^p} = \|\cdot\|_p$ .

**Proposição 1.3.3.** *Os espaços de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $m \in \mathbb{N}$  são espaços de Banach.*

**Demonstração.** Note que o espaço de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$ , onde  $\Omega$  é um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^n$ , é um espaço vetorial. Já demonstramos que esse espaço possui uma norma (a norma de Sobolev  $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$ ). Agora, queremos mostrar que esse espaço é completo em relação a essa norma, ou seja, é um espaço de Banach.

Seja  $(u_n)$  uma seqüência de Cauchy no espaço de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$ . Queremos mostrar que  $(u_n)$  converge para um  $u$  em  $W^{m,p}(\Omega)$ . Como  $(u_n)$  é uma seqüência de Cauchy, para  $r$  e  $s$  suficientemente grandes (ou seja,  $r, s > n_0$  para algum  $n_0 \in \mathbb{N}$ ), temos que

$$\|u_r - u_s\|_{W^{m,p}}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u_r - D^\alpha u_s|^p dx \rightarrow 0 \quad \text{quando } r, s \rightarrow \infty.$$

Veja que

$$\|D^\alpha u\|_{L^p} \leq \|u\|_{W^{m,p}}$$

para todo  $u \in W^{m,p}(\Omega)$  e  $|\alpha| \leq m$  (porque a norma  $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$  é composta pelo somatório de normas das derivadas fracas de  $u$  em  $L^p(\Omega)$ ). Portanto, segue que

$$\|D^\alpha u_r - D^\alpha u_s\|_{L^p(\Omega)} = \|D^\alpha(u_r - u_s)\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u_r - u_s\|_{W^{m,p}} \rightarrow 0 \quad \text{quando } r, s \rightarrow \infty.$$

Portanto, para cada  $|\alpha| \leq m$ , a sequência de derivadas fracas  $(D^\alpha u_n)$  é uma sequência de Cauchy do espaço de Banach  $L^p(\Omega)$ . Então, para cada multi-índice  $\alpha$  com  $|\alpha| \leq m$ , existe uma função  $v_\alpha$  em  $L^p(\Omega)$  tal que a sequência de derivadas fracas converge para  $v_\alpha$  na norma  $L^p$ :

$$D^\alpha u_n \rightarrow v_\alpha \quad \text{em } L^p(\Omega) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Em particular, para  $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$  (o próprio  $u_n$ ):

$$u_n \rightarrow v_0 \quad \text{em } L^p(\Omega).$$

Para provarmos a proposição, é suficiente mostrarmos que  $D^\alpha v_0 = v_\alpha$ . Seja, então,  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Para cada  $n$ , pela definição de derivada fraca, temos

$$\int_{\Omega} u_n D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u_n \varphi \, dx.$$

Podemos passar ao limite quando  $n \rightarrow \infty$ . Com efeito, como  $u_n \rightarrow v_0$  em  $L^p(\Omega)$  e  $D^\alpha \varphi \in L^q(\Omega)$ , com  $1/p + 1/q = 1$ , pela desigualdade de Hölder ( Teorema 1.2.1) obtemos

$$\left| \int_{\Omega} (u_n - v_0) D^\alpha \varphi \, dx \right| \underbrace{\leq}_{1.2.1} \|u_n - v_0\|_{L^p(\Omega)} \|D^\alpha \varphi\|_{L^q(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Portanto

$$\int_{\Omega} u_n D^\alpha \varphi \, dx \longrightarrow \int_{\Omega} v_0 D^\alpha \varphi \, dx.$$

De forma análoga, como  $D^\alpha u_n \rightarrow v_\alpha$  em  $L^p(\Omega)$  e  $\varphi \in L^q(\Omega)$ , obtemos

$$\left| \int_{\Omega} (D^\alpha u_n - v_\alpha) \varphi \, dx \right| \leq \|D^\alpha u_n - v_\alpha\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

isto é,

$$\int_{\Omega} D^\alpha u_n \varphi \, dx \longrightarrow \int_{\Omega} v_\alpha \varphi \, dx.$$

Tomando o limite na identidade de integração por partes para  $u_n$ , obtemos

$$\int_{\Omega} v_0 D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_\alpha \varphi \, dx, \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Portanto,  $v_\alpha$  é precisamente a derivada fraca  $D^\alpha v_0$ . Assim, verificamos que  $W^{m,p}(\Omega)$  é um espaço de Banach.

□

**Corolário 1.3.1.** *Os espaços  $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$  são espaços de Hilbert. Neste caso particular, a estrutura de produto interno é dada por*

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

**Demonstração.** Da proposição anterior verificamos que o espaço  $H^m$  é um espaço de Banach, resta verificar que

$$\langle u, v \rangle_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) \overline{D^\alpha v(x)} dx$$

define um produto interno no espaço  $H^m(\Omega)$ .

Primeiramente, queremos mostrar que  $\langle u_1 + u_2, v \rangle_{H^m} = \langle u_1, v \rangle_{H^m} + \langle u_2, v \rangle_{H^m}$  e  $\langle \lambda u, v \rangle_{H^m} = \lambda \langle u, v \rangle_{H^m}$ . Veja que:

$$\begin{aligned} \langle u_1 + u_2, v \rangle_{H^m} &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha (u_1 + u_2) \overline{D^\alpha v} dx \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} (D^\alpha u_1 + D^\alpha u_2) \overline{D^\alpha v} dx \quad (\text{Linearidade de } D^\alpha) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \left( \int_{\Omega} D^\alpha u_1 \overline{D^\alpha v} dx + \int_{\Omega} D^\alpha u_2 \overline{D^\alpha v} dx \right) \quad (\text{Linearidade da Integral}) \\ &= \langle u_1, v \rangle_{H^m} + \langle u_2, v \rangle_{H^m}. \end{aligned}$$

A segunda propriedade é verificada à seguir:

$$\begin{aligned} \langle \lambda u, v \rangle_{H^m} &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha (\lambda u) \overline{D^\alpha v} dx \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \lambda (D^\alpha u) \overline{D^\alpha v} dx \\ &= \lambda \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u \overline{D^\alpha v} dx = \lambda \langle u, v \rangle_{H^m}. \end{aligned}$$

Na terceira propriedade, queremos mostrar que  $\langle u, v \rangle_{H^m} = \overline{\langle v, u \rangle_{H^m}}$ .

$$\begin{aligned} \overline{\langle v, u \rangle_{H^m}} &= \overline{\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^{\alpha} v \overline{D^{\alpha} u} dx} \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \overline{D^{\alpha} v \overline{D^{\alpha} u}} dx \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \overline{D^{\alpha} v} \cdot D^{\alpha} u dx \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^{\alpha} u \overline{D^{\alpha} v} dx = \langle u, v \rangle_{H^m}. \end{aligned}$$

Por fim, queremos mostrar que  $\langle u, u \rangle_{H^m} \geq 0$  e  $\langle u, u \rangle_{H^m} = 0$  se e somente se  $u = 0$ . Veja que:

$$\langle u, u \rangle_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^{\alpha} u \overline{D^{\alpha} u} dx = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^2 dx = \|u\|_{W^{m,2}}^2 \geq 0.$$

Agora  $\langle u, u \rangle_{H^m} = 0$  se e somente se  $u = 0$ , uma vez que já foi demonstrado que  $\|\cdot\|_{W^{m,2}}$  é uma norma. Assim concluímos a demonstração.  $\square$

**Definição 1.3.11.** Definimos o espaço  $W_0^{m,p}(\Omega)$  como sendo o fecho de  $C_0^{\infty}(\Omega)$  na norma do espaço  $W^{m,p}(\Omega)$ , isto é,

$$\overline{C_0^{\infty}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Em especial, representamos  $W_0^{m,2}(\Omega)$  por  $H_0^m(\Omega)$ .

A seguinte desigualdade mostra que em  $H_0^1(\Omega)$ , a norma do gradiente

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

é equivalente à norma completa

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left( \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2},$$

de  $H_0^1(\Omega)$ , onde  $\Omega$  é um domínio limitado. Para uma demonstração veja [7, Teorema A.3.37].

**Teorema 1.3.5** (Desigualdade de Poincaré). *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio limitado e conexo, com fronteira suficientemente regular. Então, existe uma constante  $C > 0$ , que depende apenas de  $\Omega$ , tal que*

$$\|u\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}, \quad \text{para todo } u \in H_0^1(\Omega).$$

## 1.4 Derivação e Integração em espaços de Banach

Nesta seção, iniciamos com o estudo de séries em espaços de Banach, estabelecendo critérios de convergência e resultados como o teste M de Weierstrass. Em seguida, apresentamos as noções de derivada e integral de funções com valores em espaços de Banach, e o Teorema Fundamental do Cálculo para espaços de Banach.

**Definição 1.4.1.** Seja  $X$  um espaço de Banach e  $(x_n)$  uma sequência em  $X$ . Chamamos  $(s_n)$  de sequência das somas parciais da série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ , em que cada elemento de  $(s_n)$  são as somas:

$$s_1 = x_1, \quad s_2 = x_1 + x_2, \quad \dots, \quad s_n = x_1 + \dots + x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se existir o limite  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  dizemos que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  é convergente, e chamamos  $s$  de soma da série. Se, por outro lado, a sequência das somas parciais não converge, dizemos que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  é divergente.

Além disso, dizemos que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  é absolutamente convergente em  $X$ , se  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$  for convergente.

**Proposição 1.4.1.** *Toda série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  absolutamente convergente em um espaço de Banach  $X$ , é convergente.*

**Demonstração.** Como  $X$  é um espaço de Banach, toda sequência de Cauchy em  $X$  é convergente, então resta mostrar que a sequência das somas parciais é de Cauchy. Sejam

$s_n = \sum_{k=1}^n x_k$  e  $c_n = \sum_{k=1}^n \|x_k\|$ , onde  $(c_n)$  é convergente (por hipótese), então  $(c_n)$  é de Cauchy, (de acordo com a Proposição 1.1.1) logo dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , de modo que se  $m, n \in \mathbb{N}$  e  $m > n > n_0$  temos

$$|c_m - c_n| < \varepsilon \Rightarrow \sum_{k=n+1}^m \|x_k\| < \varepsilon.$$

Portanto, para todos  $m, n \in \mathbb{N}$ , tais que  $m > n \geq n_0$ ,

$$\|s_m - s_n\| = \left\| \sum_{k=1}^m x_k - \sum_{k=1}^n x_k \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|x_k\| < \varepsilon,$$

onde a última desigualdade vem de que  $(c_n)$  é uma sequência de Cauchy. Verificamos que  $(s_n)$  é uma sequência de Cauchy em um espaço de Banach, logo é convergente.  $\square$

**Proposição 1.4.2.** (Teste da Comparação) *Sejam  $(x_n)$  uma sequência no espaço de Banach  $X$ , e  $(M_n) \subset \mathbb{R}$  tal que  $\|x_n\| \leq M_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  é convergente, em  $\mathbb{R}$ , então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  é absolutamente convergente em  $X$ .*

**Demonstração.** Por hipótese temos que  $\|x_n\| \leq M_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então  $\|x_1\| \leq M_1, \|x_2\| \leq M_2, \dots, \|x_n\| \leq M_n$ , dessa maneira obtemos, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$s_n = \sum_{k=1}^n \|x_k\| \leq \sum_{k=1}^n M_k. \quad (1.7)$$

Por hipótese, temos que a série real  $\sum_{k=1}^n$  é convergente,  $\sum_{k=1}^{\infty} M_n = M$ , tomando o limite em 1.7

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \|x_k\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n M_k = M.$$

Logo, pelo teste da comparação de números reais segue que  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$  é convergente, assim

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  é absolutamente convergente.  $\square$

**Proposição 1.4.3.** *Seja a aplicação linear  $A \in \mathcal{L}(X, X)$ . Então, a série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$  é absolutamente convergente em  $\mathcal{L}(X, X)$ . Por analogia ao Cálculo, definimos:*

$$\exp(A) = e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}, \quad A^0 = I.$$

Além disso, vale a desigualdade  $\|e^A\|_{\mathcal{L}(X, X)} \leq e^{\|A\|_{\mathcal{L}(X, X)}}$ .

**Demonstração.** Primeiramente vamos lembrar que vale a propriedade

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|, \quad \text{para todo } A, B \in \mathcal{L}(X, X).$$

Assim, dado  $n \in \mathbb{N}$ , e  $A \in \mathcal{L}(X, X)$ ,

$$\left\| \frac{A^n}{n!} \right\| = \frac{1}{n!} \|A^n\| \leq \frac{1}{n!} \|A\|^n \leq M_n,$$

onde  $M_n = \frac{\|A\|^n}{n!} \in \mathbb{R}$ . Perceba que a série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!} = e^{\|A\|} \in \mathbb{R}$  converge. Segue do Teste da Comparação (Teorema 1.4.2) que a série  $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$  é absolutamente convergente (uma vez que  $\mathcal{L}(X, X)$  é um espaço de Banach) e, ainda,

$$\|e^A\| = \lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=0}^j \frac{A^n}{n!} \right\| \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^j \frac{\|A\|^n}{n!} = e^{\|A\|}.$$

□

**Observação 4.** Uma propriedade fundamental da exponencial real é que  $e^{a+b} = e^a e^b$  para  $a, b \in \mathbb{R}$ . No contexto de operadores lineares, uma propriedade análoga se verifica quando os operadores são comutativos: se  $A, B \in \mathcal{L}(X, X)$  e  $AB = BA$  queremos verificar que  $e^{A+B} = e^A e^B$ .

Podemos expandir a série  $e^{A+B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!}$ , da seguinte forma, lembrando que  $AB = BA$

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= I + (A+B) + \frac{(A^2 + 2AB + B^2)}{2} + \frac{A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3}{3!} \\ &\quad + \cdots + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{A^{n-k} B^k}{n!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{A^{n-k} B^k}{n!}. \end{aligned}$$

Agora, vamos olhar produto  $e^A e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}$ , lembrando que por hipótese  $AB = BA$ ,

$$e^A e^B = \frac{A^0}{0!} \left( \frac{B^0}{0!} + \frac{B^1}{1!} + \cdots \right) + \frac{A^1}{1!} \left( \frac{B^0}{0!} + \frac{B^1}{1!} + \cdots \right) + \frac{A^2}{2!} \left( \frac{B^0}{0!} + \frac{B^1}{1!} + \cdots \right) + \cdots$$

Podemos agrupar de modo que:

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \frac{A^0 B^0}{0!} + \left( \frac{B+A}{1!} \right) + \left( \frac{B^2}{2!} + \frac{2 \cdot AB}{2!} + \frac{A^2}{2!} \right) \\ &\quad + \left( \frac{B^3}{3!} + \frac{3 \cdot AB^2}{3 \cdot 2!} + \frac{3 \cdot A^2 B}{3 \cdot 2!} + \frac{A^3}{3!} \right) + \cdots + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{A^{n-k} B^k}{n!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{A^{n-k} B^k}{n!}. \end{aligned}$$

Concluimos que se os operadores limitados  $A$  e  $B$  comutam, então a exponencial da soma pode ser fatorada como o produto das exponenciais,  $e^{A+B} = e^A e^B$ .

**Observação 5.** Uma função  $E : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X, X)$  satisfaz as condições:

- (a)  $E(0) = I$ ,
- (b)  $E(t+s) = E(t)E(s)$ ,
- (c)  $\|E(t) - I\|_{\mathcal{L}(X, X)} \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow 0^+$ ,

se, e somente se,  $E(t) = e^{tA}$ , onde  $A \in \mathcal{L}(X, X)$  e  $e^{tA}$  é definido acima, ou seja, a exponencial do operador funciona como a exponencial real. A demonstração desse fato pode ser encontrada em [19, Teorema 1.19].

**Proposição 1.4.4.** (Teorema de Neumann) *Seja  $A \in \mathcal{L}(X, X)$  com  $\|A\|_{\mathcal{L}(X, X)} < 1$ . Então, a série  $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$  converge para  $(I - A)^{-1}$  em  $\mathcal{L}(X, X)$  e, além disso, vale a desigualdade*

$$\|(I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X)} \leq \frac{1}{1 - \|A\|_{\mathcal{L}(X, X)}}.$$

**Demonstração.** Pela Proposição 1.4.1, basta mostrarmos que a série é absolutamente convergente. Notemos inicialmente que, como  $\|A\| < 1$ , então

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Uma vez que sendo  $\|A\| < 1$ , a sequência  $(1, \|A\|, \|A\|^2, \|A\|^3, \dots)$  se trata de uma progressão geométrica e a soma de seus termos é dado por:  $1/(1 - \|A\|)$ . Agora, de acordo com o Teste da Comparação (Teorema 1.4.2), fazendo  $M_n = \|A\|^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e, notando que

$$\|A^n\| \leq \|A\|^n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

resulta que a série  $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$  é absolutamente convergente e, por conseguinte, convergente.

Além disso,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=0}^j A^n \right\| \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^j \|A^n\| \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^j \|A\|^n = \frac{1}{1 - \|A\|}. \quad (1.8)$$

Por fim, mostraremos que  $\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (I - A)^{-1}$ . Veja que,

$$\begin{aligned} (I - A) \left( \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k A^n \right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (I - A) \left( \sum_{n=0}^k A^n \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=0}^k A^n - \sum_{n=1}^k A^n \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( A^0 + \sum_{n=1}^k A^n - \sum_{n=1}^k A^n \right) = I = (I - A)(I - A)^{-1} \end{aligned}$$

Verificamos que  $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$  é o inverso de  $(I - A)$  à direita, da mesma maneira verificamos o inverso à esquerda

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n (I - A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k A^n (I - A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k A^n - \sum_{n=0}^k A^{n+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} A^0 - A^{k+1} = I,$$

pois  $\|A^{k+1}\| \leq \|A\|^{k+1} \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$  (dado que  $\|A\| < 1$ ). Concluimos que  $\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (I - A)^{-1}$ , e pela equação 1.8 temos

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|},$$

o que encerra a prova.  $\square$

**Proposição 1.4.5.** *Seja  $A \in \mathcal{L}(X, X)$  tal que  $\|A\|_{\mathcal{L}(X, X)} < 1$ . Então, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} A^n$  converge em  $\mathcal{L}(X, X)$ . Definimos o limite desta série por  $\log(I - A)$ .*

**Demonstração.** Pelo teste da comparação (Teorema 1.4.2):

$$\frac{\|A^n\|}{n} \leq \frac{\|A\|^n}{n} \leq \|A\|^n.$$

A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \|A\|^n$  converge visto que se trata da série geométrica.  $\square$

**Definição 1.4.2.** Uma função  $x : (a, b) \rightarrow X$  é derivável à direita em  $t_0 \in (a, b)$  se existe  $y \in X$  tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} - y = 0.$$

(Sendo o limite entendido no sentido da norma de  $X$ ). Da mesma forma, definimos a derivada à esquerda em  $t_0 \in (a, b)$ , como:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} - y = 0.$$

Quando ambas as derivadas existem e são iguais, dizemos que  $x : (a, b) \rightarrow X$  é derivável em  $t_0 \in (a, b)$ , e denotamos  $y$  por  $x'(t_0)$ .

**Proposição 1.4.6.** *Uma função  $x : (a, b) \rightarrow X$  derivável em  $t_0 \in (a, b)$  é contínua em  $t_0$ .*

**Demonstração.** A demonstração dessa Proposição pode ser vista na Proposição 1.9 em [19].  $\square$

**Proposição 1.4.7.** *Para  $t \in \mathbb{R}$ , seja  $T(t) = \exp(tA)$  o operador exponencial, onde  $A \in \mathcal{L}(X, X)$ . Então:*

$$(i) \lim_{t \rightarrow 0} \|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(X, X)} = 0 \quad (T(t) \text{ é contínua em } t = 0 \text{ e } T(0) = I);$$

$$(ii) \lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\|_{\mathcal{L}(X, X)} = 0 \quad (T(t) \text{ é diferenciável em } t = 0 \text{ e } T'(0) = A);$$

$$(iii) \lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{T(t + t_0) - T(t_0)}{t} - AT(t_0) \right\|_{\mathcal{L}(X, X)} = 0.$$

**Demonstração.** (i) Veja que:

$$\begin{aligned} T(t) - I &= e^{tA} - I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} - I \\ &= A^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} - I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Deste modo,

$$\|T(t) - I\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^k \frac{t^n A^n}{n!} \right\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \left\| \frac{t^n A^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t|^n \|A\|^n}{n!}, \quad (1.10)$$

onde as desigualdades vem da desigualdade triangular e da propriedade da álgebra dos operadores. Veja que pelo teste da razão em séries reais a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t|^n \|A\|^n}{n!}$  converge uniformemente para todo  $t \in \mathbb{R}$ , uma vez que  $\|A\|$  é finita,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|t|^{n+1} \|A\|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|t|^n \|A\|^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|t| \|A\|}{n+1} = 0 < 1, \quad \text{para qualquer } t \text{ finito.}$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  fixo temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|^n \|A\|^n}{n!} = 0.$$

Assim, do exposto acima resulta que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t|^n \|A\|^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|^n \|A\|^n}{n!} = 0. \quad (1.11)$$

Combinando (1.11) em (1.10) obtemos

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow 0} \|T(t) - I\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|^n \|A\|^n}{n!} = 0,$$

o que prova o desejado em (i).

(ii) Note que, de (1.9)

$$\begin{aligned}
\frac{T(t) - I}{t} - A &= \frac{1}{t}(T(t) - I) - A \\
&= \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} - A \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^n}{n!} - A \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^n}{n!} + A - A \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Analogamente ao que fizemos nos no item (i), a série  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|t|^{n-1} \|A\|^n}{n!}$  converge uniformemente e, além disso,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|t|^{n-1} \|A\|^n}{n!} = 0. \quad (1.12)$$

Contudo,

$$\left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|t|^{n-1} \|A\|^n}{n!}. \quad (1.13)$$

Dessa forma, de (1.12) e (1.13), tem-se

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|^{n-1} \|A\|^n}{n!} = 0.$$

Resulta o desejado.

(iii) Segue imediatamente de (ii), usando que  $T(t + t_0) = T(t)T(t_0)$ , lembre-se que essa propriedade é válida pela Observação 5.  $\square$

**Definição 1.4.3.** Seja  $f : (a, b) \rightarrow X$ , onde  $X$  é um espaço de Banach, uma função contínua. Dada uma decomposição (partição)  $\pi$  de  $[a, b]$ , isto é,  $n + 1$  números reais  $t_0, \dots, t_n$  satisfazendo  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ , e  $n$  números reais  $\xi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , com  $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ , define-se a Soma de Riemann de  $f$  com

$$\sigma_{\pi}(f) = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) f(\xi_i).$$

Evidentemente,  $\sigma_\pi(f) \in X$ . Definimos  $|\pi|$  por

$$|\pi| = \max_{1 \leq i \leq n} \{t_i - t_{i-1}\}.$$

Como  $f$  é contínua no intervalo compacto  $[a, b]$ ,  $f$  é uniformemente contínua. Seja  $(\pi_n)$  uma sequência de partições com  $|\pi_n| \rightarrow 0$ . Mostraremos que  $(\sigma_{\pi_n}(f))$  é de Cauchy em  $X$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , pela continuidade uniforme de  $f$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$|t - s| < \delta \Rightarrow \|f(t) - f(s)\| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Como  $|\pi_n| \rightarrow 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n > N$ , tem-se  $|\pi_n| < \delta$ . Em particular, se  $n, m > N$ , então  $|\pi_n| < \delta$  e  $|\pi_m| < \delta$ .

Fixados  $n, m > N$ , considere a partição  $\pi$  que contém todos os pontos das partições  $\pi_n$  e  $\pi_m$ . Assim,  $\pi$  é um refinamento comum de  $\pi_n$  e  $\pi_m$ , e todo subintervalo de  $\pi$  tem comprimento menor que  $\delta$ . Escrevendo as somas de Riemann correspondentes,

$$\sigma_{\pi_n}(f) = \sum_{i=1}^p (u_i - u_{i-1}) f(\alpha_i), \quad \sigma_\pi(f) = \sum_{j=1}^q (v_j - v_{j-1}) f(\beta_j),$$

onde  $\alpha_i \in [u_{i-1}, u_i]$  e  $\beta_j \in [v_{j-1}, v_j]$ , com  $u_i - u_{i-1} < \delta$  e  $v_j - v_{j-1} < \delta$ , temos

$$\begin{aligned} \|\sigma_{\pi_n}(f) - \sigma_\pi(f)\| &= \left\| \sum_{i=1}^p (u_i - u_{i-1}) f(\alpha_i) - \sum_{j=1}^q (v_j - v_{j-1}) f(\beta_j) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^p (u_i - u_{i-1}) \cdot \frac{\varepsilon}{b - a} = \varepsilon. \end{aligned}$$

O mesmo vale entre  $\sigma_{\pi_m}(f)$  e  $\sigma_\pi(f)$ , logo  $(\sigma_{\pi_n}(f))$  é uma sequência de Cauchy e converge em  $X$ . Como  $X$  é um espaço de Banach existe  $x \in X$  tal que,

$$\lim_{|\pi| \rightarrow 0} \sigma_\pi(f) = x.$$

Como no caso numérico, diz-se que  $x$  é a integral de  $f$  em  $[a, b]$  e escreve-se

$$x = \lim_{|\pi| \rightarrow 0} \sigma_\pi(f) = \int_a^b f(t) dt.$$

**Proposição 1.4.8.** *Sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow X$  funções contínuas,  $K \in \mathbb{K}$  uma constante.*

*São válidas as seguintes propriedades para a integral:*

$$(i) \int_a^b K f(t) dt = K \int_a^b f(t) dt;$$

$$(ii) \int_a^b (f + g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt;$$

$$(iii) \text{ Se } a \leq c \leq b, \int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt;$$

$$(iv) \left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt;$$

$$(v) \left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \max_{a \leq t \leq b} \|f(t)\| (b - a).$$

**Demonstração.** A demonstração das propriedades segue da definição anterior.  $\square$

**Proposição 1.4.9.** *Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach,  $A : D(A) \subset E \rightarrow F$  um operador fechado e  $f \in C([a, b]; E)$ , com  $f(s) \in D(A)$ . Então,  $A \int_a^b f(t) dt = \int_a^b Af(t) dt$ .*

**Demonstração.** Veja em [12, Proposição C.4, pg. 524]  $\square$

**Observação 6.** A proposição acima continua válida se o operador  $A$  for limitado. Nesse caso, tem-se  $D(A) = E$ , e a conclusão segue diretamente da linearidade e continuidade de  $A$ , não sendo necessária a hipótese de que  $A$  seja fechado (veja [19, Proposição 1.12]).

**Lema 1.4.1.** *Sejam  $f, g \in C([a, b]; X)$  funções diferenciáveis em  $[a, b]$  e tais que  $g'(t) = f'(t)$  para todo  $t \in [a, b]$ . Então, existe  $\xi \in X$  tal que*

$$g(t) = f(t) + \xi, \quad \text{para todo } t \in [a, b].$$

**Demonstração.** Seja  $w \in C([a, b]; E)$  uma função derivável em  $[a, b]$ . Primeiro vamos verificar que se  $w'(t) = 0$  para todo  $t \in [a, b]$ , então  $w$  é constante em  $(a, b)$ .

Suponha que  $w'_+ = 0$  (análogo para  $w'_-$ ) então, por definição de derivada à direita, dado  $\varepsilon > 0$ ,  $c \in [a, b)$

$$\left\| \frac{w(c+h) - w(c)}{h} - w'(c) \right\| < \varepsilon \Rightarrow \|w(c+h) - w(c)\| < h \cdot \varepsilon. \quad (1.14)$$

Faça  $t = c + h$ , então

$$\|w(t) - w(c)\| < \varepsilon \cdot |t - c| = \varepsilon \cdot (t - c), \quad \text{para todo } t \in (c, c + h).$$

Podemos retirar o módulo na última desigualdade porque estamos considerando a derivada à direita. Seja  $[c, t_0)$  o máximo subintervalo de  $[c, b)$  onde vale

$$\|w(t) - w(c)\| < \varepsilon \cdot |t - c| = \varepsilon \cdot (t - c), \quad \text{para todo } t \in [c, t_0). \quad (1.15)$$

Deve-se ter  $t_0 = b$ . Por contradição, suponha que  $t_0 < b$ . Então, como  $w'_+(t_0) = 0$ , seja  $t = t_0 + h$ , com  $h > 0$ , temos

$$\|w(t) - w(t_0)\| \leq \varepsilon(t - t_0) \quad (1.16)$$

para todo  $t > t_0$  e suficientemente próximo de  $t_0$ . De (1.14) (válida em  $[c, t_0)$  pela continuidade em  $t_0$ ) e de (1.16), resulta que

$$\begin{aligned} \|w(t) - w(c)\| &\leq \|w(t) - w(t_0)\| + \|w(t_0) - w(c)\| \\ &\leq \varepsilon(t - t_0) + \varepsilon(t_0 - c) = \varepsilon(t - c). \end{aligned}$$

Isto é, a desigualdade (1.14) é válida para todo  $t > t_0$ , suficientemente próximo de  $t_0$ , o que contradiz a definição de  $t_0$  como o extremo do subintervalo máximo onde a desigualdade (1.15) é válida. Logo,  $t_0 = b$ , e temos  $\|w(t) - w(c)\| \leq \varepsilon(t - c)$  para todo  $t \in [c, b]$ . Pela arbitrariedade de  $\varepsilon$ , fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , concluímos que  $w(t) = w(c)$ , para todo  $t \in [c, b]$ . Como  $c$  é um ponto arbitrário de  $(a, b)$ , segue que  $w$  é contante em  $(a, b)$ . De fato, fixe  $c_1 \in (a, b)$ , então  $w(t) = w(c_1), \forall t \in [c_1, b]$ . Seja  $t \in (a, b)$  qualquer, então  $t \in (0, c_1)$  ou  $t \in [c_1, b]$ . Se  $t \in [c_1, b]$  então não há o que verificar,  $w(t) = w(c_1)$ , agora, se  $t \in (a, c_1)$ , então fixe  $c_2 \in (a, c_1)$  tal que  $c_2 < t < c_1$ , pelo que foi mostrado  $w(t) = w(c_2) = w(c_1)$  (pois  $c_1 \in [c_2, b]$ ). Desta forma,  $w(t) = w(c_1)$ , para qualquer  $t \in (a, b)$ .

Por fim, consideremos, agora,  $f, g \in C([a, b]; X)$  diferenciáveis em  $[a, b]$  tais que  $g'(t) = f'(t)$ , para todo  $t \in [a, b]$ . Definindo  $w = g - f$ , temos que  $w \in C([a, b]; E)$ . Além disso, a função  $w$  é derivável (à direita em  $a$  e esquerda em  $b$ ) e

$$w'(t) = g'(t) - f'(t) = 0, \quad \text{para todo } t \in [a, b].$$

Pelo que vimos acima, existe  $\xi \in X$  tal que  $w(t) = \xi$ , para todo  $t \in [a, b]$ . Portanto,  $g(t) = f(t) + \xi$ .

□

**Proposição 1.4.10.** *Seja  $M : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  não negativa tal que  $\int_a^b M(x) dx < \infty$  e*

$$\|f(x, y)\| \leq M(x), \quad y \in Y, \quad a \leq x < b,$$

sendo  $(Y, d)$  um espaço métrico, e  $f : [a, b] \times Y \rightarrow X$  onde  $X$  é um espaço de Banach. Então  $\int_a^b f(x, y) dx$  converge absolutamente e uniformemente em  $X$ .

**Demonstração.** Seja  $\int_a^b M(x) dx = L < \infty$ . Por definição, para cada  $\varepsilon > 0$  existe um  $r_0 \in [a, b)$  tal que

$$L - \varepsilon < \int_a^r M(x) dx \leq L. \quad r_0 < r < b.$$

Portanto, se  $r_0 < r \leq r_1 < b$ , então

$$0 \leq \int_r^{r_1} M(x) dx = \left( \int_a^{r_1} M(x) dx - L \right) - \left( \int_a^r M(x) dx - L \right) < \varepsilon.$$

Isso ocorre pela hipótese de  $\int_a^b M(x) dx < \infty$ . Então, da hipótese  $\|f(x, y)\| \leq M(x)$ ,  $y \in Y$ ,  $a \leq x < b$  temos que

$$\int_r^{r_1} \|f(x, y)\| dx \leq \int_r^{r_1} M(x) dx < \varepsilon, \quad y \in S, \quad a \leq r_0 < r < r_1 < b.$$

Segue que a integral converge absolutamente e uniformemente. □

**Proposição 1.4.11.** *Seja  $f \in C([a, b]; X)$  e considere  $g(t) = \int_a^t f(s) ds$ . Então,  $g \in C^1([a, b]; X)$  e  $g'(t) = f(t)$  para todo  $t \in [a, b]$ . Além disso, se  $f \in C^1([a, b]; X)$ , temos a identidade*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(s) ds.$$

**Demonstração.** Essa demonstração será dividida em duas partes, na primeira vamos mostrar que se  $f \in C([a, b]; X)$  e  $g(t) = \int_a^t f(s) ds$ , então  $g \in C^1([a, b]; X)$  e  $g'(t) = f(t)$ , para todo  $t \in [a, b]$ . Para isso, basta mostrar que  $g'(t) = f(t)$  para todo  $t \in [a, b]$ .

Na segunda parte, o objetivo é mostrar que se  $f \in C^1([a, b]; X)$ , então  $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(s) ds$ .

Para a primeira parte, considere  $t_0 \in [a, b]$  e  $\varepsilon > 0$ . Como  $f \in C([a, b]; X)$ , existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tal que, se  $|h| < \delta$  e  $t \in [a, b]$ , então

$$\|f(t_0 + h) - f(t_0)\| < \varepsilon. \quad (1.17)$$

Então, para todo  $0 < h < \delta$  (definição de derivada lateral à direita), e da hipótese que  $g(t) = \int_a^t f(s) ds$  (e a propriedade (iv) da Proposição 1.4.8) resulta que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{g(t_0 + h) - g(t_0)}{h} - f(t_0) \right\| &\stackrel{\text{hipótese}}{=} \left\| \frac{1}{h} \int_a^{t_0+h} f(s) ds - \frac{1}{h} \int_a^{t_0} f(s) ds - f(t_0) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} f(s) ds - f(t_0) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} f(s) ds - \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} f(t_0) ds \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} [f(s) - f(t_0)] ds \right\| \\ &\stackrel{1.4.8}{\leq} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} \|f(s) - f(t_0)\| ds. \end{aligned}$$

Note que  $\frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} f(t_0) ds = f(t_0) s|_{t_0}^{t_0+h} \cdot h^{-1} = f(t_0)$ . Fazendo a mudança de variável  $\xi = s - t_0$ , temos  $s = t_0 + \xi$ , de acordo com (1.17) obtemos:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{g(t_0 + h) - g(t_0)}{h} - f(t_0) \right\| &\leq \frac{1}{h} \int_0^h \|f(t_0 + \xi) - f(t_0)\| d\xi \\ &\stackrel{(1.17)}{\leq} \frac{1}{h} \int_0^h \varepsilon d\xi = \frac{1}{h} (\varepsilon \cdot h) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Isto mostra que existe a derivada lateral à direita  $\frac{d^+g}{dt}(t_0)$  e  $\frac{d^+g}{dt}(t_0) = f(t_0)$ . Analogamente, é possível demonstrar que existe a derivada lateral à esquerda  $\frac{d^-g}{dt}(t_0)$  e  $\frac{d^-g}{dt}(t_0) = f(t_0)$ .

Portanto, temos que  $g$  é derivável em  $t_0$  e  $g'(t_0) = f(t_0)$ . Pela arbitrariedade de  $t_0 \in (a, b)$ , concluímos que  $g$  é derivável em  $(a, b)$  e  $g'(t) = f(t)$ , para todo  $t \in (a, b)$ . Quando  $t_0 = a$  ou  $t_0 = b$ , estamos considerando apenas a respectiva derivada lateral. Como  $f(t)$  é contínua e  $g'(t) = f(t)$ , concluímos que  $g \in C^1([a, b]; X)$ .

Para a segunda parte vamos supor que  $f \in C^1([a, b]; X)$ . Definimos

$$g(t) = f(a) + \int_a^t f'(s)ds, \quad t \in [a, b].$$

Pela parte anterior, temos que  $g'(t)$  existe para todo  $t \in [a, b]$  e, ainda,  $g'(t) = f'(t)$ , para todo  $t \in [a, b]$ . Segue do Lema 1.4.1, que existe  $\xi \in X$  tal que  $g(t) = \xi + f(t)$ , para todo  $t \in [a, b]$ .

Em particular, para  $t = a$ , temos

$$\begin{aligned} g(a) &= \xi + f(a) \\ f(a) + \int_a^a f'(s)ds &= \xi + f(a) \\ f(a) + 0 &= \xi + f(a), \end{aligned}$$

o que implica que  $\xi = 0$ . Ou seja,  $g(t) = f(t)$ , para todo  $t \in [a, b]$ . Em particular, para  $t = b$  resulta que  $f(b) = g(b)$ . Substituindo  $g(b)$  na definição, temos:

$$f(b) = g(b) = f(a) + \int_a^b f'(s)ds$$

de onde resulta que

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(s)ds,$$

o que encerra a prova. □

**Lema 1.4.2** (Fórmula do valor médio (versão em Banach)). *Seja  $f \in C([a, b], E)$ , onde  $E$  é um espaço de Banach. Existe*

$$\tilde{x} \in \overline{\text{conv } f([a, b])} = \left\{ \sum_{j=1}^k \lambda_j f(x_j), \quad x_j \in [a, b], \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, k \in \mathbb{N}/\{0\} \right\}$$

( $\text{conv } f([a, b])$  é chamado *envoltória convexa*) tal que

$$\int_a^b f(t) dt = (b - a) \tilde{x}.$$

**Demonstração.** Veja [16, Proposição 1.2.12]. □

**Proposição 1.4.12** (Teorema da Média). *Seja  $f \in C([a, b], E)$ , onde  $E$  é um espaço de Banach. Para todo  $t \in [a, b]$  tem-se*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(\tau) d\tau = f(t).$$

**Demonstração.** Seja  $h \neq 0$  suficientemente pequeno com  $t, t+h \in [a, b]$ . Pelo Lema 1.4.2, aplicado a  $[t, t+h]$ , existe  $x_h \in \text{conv } f([t, t+h])$  tal que

$$\int_t^{t+h} f(\tau) d\tau = h x_h, \quad \text{logo} \quad \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(\tau) d\tau = x_h.$$

Como  $f$  é contínua em  $t$ , tem-se  $f([t, t+h]) \rightarrow \{f(t)\}$  quando  $h \rightarrow 0$ , e portanto  $\text{conv } f([t, t+h]) \rightarrow \{f(t)\}$ . Assim,  $x_h \rightarrow f(t)$ . □

**Teorema 1.4.1** (Substituição na integral em espaços de Banach). *Seja  $E$  um espaço de Banach e  $f : [a, b] \rightarrow E$  uma função integrável. Se  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  é uma função de classe  $C^1$ , então a função  $g(s) = f(\varphi(s)) \varphi'(s)$  é integrável em  $[c, d]$  e vale*

$$\int_c^d f(\varphi(s)) \varphi'(s) ds = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(t) dt.$$

**Demonstração.** Veja [16, Proposição 1.2.6]. □

**Proposição 1.4.13** (Convergência uniforme para a integral em espaços de Banach). *Seja  $E$  um espaço de Banach e  $f_n : [a, b] \rightarrow E$  funções integráveis tais que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [a, b]} \|f_n(t) - f(t)\| = 0,$$

*isto é,  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $[a, b]$ . Então  $f$  é integrável e*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

*na norma de  $E$ .*

**Demonstração.** De fato,

$$\left\| \int_a^b (f_n(t) - f(t)) dt \right\| \leq \int_a^b \|f_n(t) - f(t)\| dt \leq (b-a) \sup_{t \in [a, b]} \|f_n(t) - f(t)\|.$$

Pela hipótese de convergência uniforme, o termo à direita tende a zero quando  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

## Capítulo 2

# Teoria de Semigrupos e o Teorema de Hille–Yosida

A teoria de semigrupos de operadores lineares em espaços de Banach teve início na primeira metade do século XX. Ela se fundamentou em 1948 com o advento do Teorema de Hille-Yosida, e atingiu seu primeiro ápice com a publicação *Semigroups and Functional Analysis* de E. Hille e R.S. Phillips em 1957 [15]. Nas décadas seguintes, matemáticos como Phillips, Lumer, Kato, Engel e Nagel expandiram a teoria, consolidando técnicas para o estudo de equações diferenciais parciais, análise espectral e controle de sistemas dinâmicos. Nas décadas de 1970 a 2000, a teoria se consolidou, sendo bem representada pelas monografias de E.B. Davies (1980) [9], J.A. Goldstein (1985) [14], A. Pazy (1983) [20], K.-J. Engel e R. Nagel (2000) [12], entre outros trabalhos relevantes. Hoje, a situação é caracterizada por múltiplas aplicações dessa teoria, não apenas às áreas tradicionais, como equações diferenciais parciais ou processos estocásticos, mas também em campos mais recentes e interdisciplinares da Matemática e de outras ciências. Semigrupos tornaram-se ferramentas importantes para equações integro-diferenciais e equações diferenciais funcionais, na mecânica quântica, no estudo de sistemas dinâmicos contínuos, em teoria espectral de operadores e em problemas de controle e otimização de processos evolutivos. A seguir apresentaremos os fundamentos básicos dessa teoria, bem como o Teorema de Hille-Yosida, o qual é considerado o pilar da teoria moderna de semigrupos. Os resultados são provenientes principalmente da obra de Juan A.S. Palomino, Marcelo M. Cavalcanti e Valéria N.D. Cavalcanti [19].

**Definição 2.0.1.** Seja  $(X, \|\cdot\|)$  um espaço de Banach e  $\mathcal{L}(X, X)$  a álgebra dos operadores lineares e limitados de  $X$  (veja a Definição 1.3.1). Uma aplicação  $S : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X, X)$  é dita um semigrupo de operadores limitados de  $X$  se:

- (i)  $S(0) = I$ , onde  $I$  é o operador identidade de  $X$ ;
- (ii)  $S(t + s) = S(t)S(s)$ , para todo  $t, s \in [0, \infty)$ .

O semigrupo  $S$  é dito de classe  $C_0$  se:

- (iii)  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|(S(t) - I)x\| = 0$ , para todo  $x \in X$ .

**Observação.** Nos resultados a seguir, assumiremos que  $X$  é um espaço de Banach, a menos que seja dito o contrário.

**Proposição 2.0.1.** Se  $S : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X, X)$  é um semigrupo de classe  $C_0$ , então, a função  $t \in [0, \infty) \mapsto \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X, X)}$  é limitada em todo intervalo limitado  $[0, T]$ .

**Demonstração.** Primeiro vamos verificar que existe um  $\delta > 0$ , para o qual a função  $\|S(t)\|$  é limitada em  $[0, \delta]$ , isto é, mostraremos que existem  $\delta > 0$  e  $M > 0$  tais que  $\|S(t)\| \leq M$ , para todo  $t \in [0, \delta]$ . Para tanto, usaremos um argumento de contradição.

Suponha que para todo  $\delta > 0$  e  $M > 0$ , existe  $t_{\delta, M} \in [0, \delta]$  (possivelmente dependente de  $\delta$  e  $M$ ) tal que  $\|S(t_{\delta, M})\| > M$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , escolhemos  $\delta = 1/n$  e  $M = n$ . Então existe uma sequência  $(t_n) \in [0, 1]$  tal que  $t_n \in [0, 1/n]$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  e tal que  $\|S(t_n)\| > n$ . Dessa forma temos que  $t_n \rightarrow 0^+$  quando  $n \rightarrow \infty$  e  $\|S(t_n)\| > n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Tomando o supremo, na última desigualdade, obtemos que  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|S(t_n)\|_{\mathcal{L}(X, X)} = \infty$ , portanto, pela contrapositiva do Teorema de Banach–Steinhaus (Teorema 1.3.3), existirá  $x \in X$  tal que  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|S(t_n)x\|_X = \infty$ . Contudo, isso contradiz o fato de  $S$  ser um semigrupo de classe  $C_0$ , uma vez que a conclusão acima implica que existe  $x \in X$  tal que

$$\|(S(t_n) - I)x\| \geq \|S(t_n)x\| - \|Ix\| \rightarrow \infty, \text{ quando } t_n \rightarrow 0^+.$$

Por outro lado, a propriedade (iii) da Definição (2.0.1) garante que:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|(S(t) - I)x\| = 0, \text{ para todo } x \in X.$$

Isso demonstra o desejado.

Observe que, se  $\|S(t)\| \leq M$ , para todo  $t \in [0, \delta]$ , então  $M \geq 1$  uma vez que  $\|S(0)\| = \|I\| = 1 \leq M$ .

Agora considere  $t \in [0, T]$ , com  $T > 0$  arbitrário. Então existe  $n \in \mathbb{N}$  e  $0 \leq r < \delta$  tal que  $t = n\delta + r$ . Logo, usando a propriedade (ii) da Definição 2.0.1 de semigrupo e em seguida a propriedade  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ , da álgebra dos operadores  $\mathcal{L}(X, X)$ , obtemos

$$\|S(t)\| = \|S(n\delta + r)\| = \|S(\delta)^n S(r)\| \leq \|S(\delta)\|^n \|S(r)\|.$$

Finalmente, usando a afirmação que demonstramos acima, e uma vez que  $n\delta \leq t \leq T$ , nós temos

$$\|S(t)\| \leq \|S(\delta)\|^n \|S(r)\| \leq M^n M \leq M^{\frac{t}{\delta}} M = \left(M^{\frac{1}{\delta}}\right)^t M = M e^{\omega t} \leq M e^{\omega T},$$

sendo  $\omega = (\ln M)/\delta$  (note que  $\omega$  está bem definido uma vez que  $M \geq 1$ ). Isto conclui a prova.  $\square$

**Corolário 2.0.1.** *Todo semigrupo  $S : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X, X)$  de classe  $C_0$  é fortemente contínuo em  $[0, \infty)$ , ou seja, se  $t \in [0, \infty)$ , então*

$$\lim_{s \rightarrow t} S(s)x = S(t)x, \quad \text{para todo } x \in X.$$

**Demonstração.** Sejam  $t, h \in [0, \infty)$  e  $x \in X$ . Usando a propriedade (ii) da definição de semigrupo, dada na Definição 2.0.1, e a propriedade de um operador contínuo, dada na Proposição 1.3.1 item (b), obtemos

$$\begin{aligned} \|S(t+h)x - S(t)x\|_X &= \|(S(t+h) - S(t))(x)\| \\ &= \|(S(t)S(h) - S(t))(x)\| \quad (\text{Propriedade de semigrupo}) \\ &= \|S(t)[S(h) - I](x)\| \\ & \quad (\text{Propriedade de um operador contínuo}) \\ &\leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X, X)} \|S(h) - I\|_X \|x\| \end{aligned}$$

Como  $S$  é um semigrupo de classe  $C_0$  a Proposição 2.0.1 garante que  $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X, X)}$  é limitada, para  $t \in [0, T]$  com  $T > t + h$ .

Então quando  $h \rightarrow 0^+$ ,

$$\|(S(h) - I)(x)\| \rightarrow 0 \quad \text{isso garante que} \quad \|S(t+h)x - S(t)x\| \rightarrow 0.$$

Desse modo, mostramos que  $\lim_{s \rightarrow t^+} S(s)x = S(t)x$ . Agora vamos mostrar o limite à esquerda. Se  $0 < h < t$ , então como no cálculo anterior, segue que

$$\|(S(t-h) - S(t))(x)\| = \|S(t-h)[I - S(h)](x)\| \leq \|S(t-h)\|_{\mathcal{L}(X,X)} \|(S(h) - I)(x)\|_X.$$

Como  $\|S(t-h)\|_{\mathcal{L}(X,X)}$  é limitada, para  $t-h \in [0, T]$ , com  $T \geq t$ , resulta quando  $h \rightarrow 0^+$  que

$$\|(S(h) - I)(x)\| \rightarrow 0, \quad \text{o que mostra que} \quad \|S(t-h)x - S(t)x\| \rightarrow 0.$$

Assim  $\lim_{s \rightarrow t^-} S(s)x = S(t)x$ .

□

No final da demonstração da Proposição 2.0.1, mostrou-se que se a aplicação  $S : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X, X)$  é um semigrupo de classe  $C_0$ , então existem constantes  $M \geq 1$  e  $\omega > 0$  (sendo  $\omega$  dependente de  $M$ ), tais que

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

A seguir, mostraremos que na realidade, o parâmetro  $\omega$  pode ser escolhido independentemente de  $M$  (Proposição 2.0.2). Para isso, introduziremos a definição e o lema a seguir.

**Definição 2.0.2.** Uma função  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita subaditiva se

$$p(t+s) \leq p(t) + p(s), \quad \text{para todo } t, s \in \mathbb{R}.$$

**Lema 2.0.1.** *Seja  $p$  uma função subaditiva definida em  $[0, \infty)$  e limitada superiormente em todo intervalo limitado. Então,  $\frac{p(t)}{t}$  tem limite quando  $t \rightarrow +\infty$ , e*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p(t)}{t} = \inf_{t > 0} \frac{p(t)}{t}.$$

**Demonstração.** Defina  $\omega_0 = \inf_{t>0} \frac{p(t)}{t}$ . Caso  $\omega_0 > -\infty$ , pela definição de infímo, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $T > 0$  (dependente de  $\varepsilon$ ) tal que  $p(T)/T < \omega_0 + \varepsilon$ . Seja  $t \in [0, \infty)$ , com  $t \geq T$ . Então existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $t = nT + r$  com  $0 \leq r < T$ . Como  $p$  é uma função subaditiva temos:

$$\begin{aligned} \omega_0 \leq \frac{p(t)}{t} &= \frac{p(nT + r)}{t} \leq \frac{n \cdot p(T) + p(r)}{t} = \frac{n \cdot T \cdot p(T)}{T \cdot t} + \frac{p(r)}{t} \\ &\leq \frac{n \cdot T \cdot (\omega_0 + \varepsilon)}{t} + \frac{p(r)}{t}, \quad \text{para } t \geq T. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Recordamos que, por hipótese, a função  $p$  é limitada superiormente em  $[0, T)$ . Logo existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $p(r) \leq c$  para todo  $r \in [0, T)$ . Além disso, pelo fato que  $t = nT + r$ , temos

$$\frac{nT}{t} = \frac{t - r}{t} \rightarrow 1, \quad \text{quando } t \rightarrow \infty. \quad (2.2)$$

Como não sabemos se  $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)/t$  existe, vamos tomar o limite inferior e superior em (2.1).

De acordo com (2.2), temos:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \liminf_{t \rightarrow \infty} \omega_0 \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{p(t)}{t} \\ &\leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{n \cdot T(\omega_0 + \varepsilon)}{t} + \frac{p(r)}{t} \right) \\ &= (\omega_0 + \varepsilon) \underbrace{\liminf_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{n \cdot T}{t} \right)}_{(2.2)} + \liminf_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{p(r)}{t} \right) \leq \omega_0 + \varepsilon. \end{aligned}$$

De maneira análoga podemos calcular o limite superior. Portanto, temos:

$$\omega_0 \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{p(t)}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{p(t)}{t} \leq \omega_0 + \varepsilon.$$

Pela arbitrariedade do  $\varepsilon > 0$  concluímos que

$$\omega_0 = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{p(t)}{t} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{p(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p(t)}{t}.$$

Agora resta verificar o caso em que  $\omega_0 = -\infty$ . Nesse caso, para qualquer  $\omega \in \mathbb{R}$  existe  $T > 0$  ( $T$  dependente de  $\omega$ ) tal que  $\frac{p(T)}{T} \leq \omega$ .

Procedendo de forma análoga ao caso anterior, para  $t \geq T$  escrevemos  $t = nT + r$ , com  $n \in \mathbb{N}$  e  $0 \leq r < T$ . Observando que  $(t - r)/t < 1$  e que  $p(r)$  é limitada em  $[0, T)$ , isto é  $p(r) < c$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{p(t)}{t} &= \frac{p(nT + r)}{t} \leq \frac{n \cdot p(T) + p(r)}{t} = \frac{n \cdot T \cdot p(T)}{T \cdot t} + \frac{p(r)}{t} \\ &\leq \frac{(t - r)p(T)}{t \cdot T} + \frac{c}{t} \\ &\leq \frac{p(T)}{T} + \frac{c}{t} \\ &\leq \omega + \frac{c}{t}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Encontramos que

$$\frac{p(t)}{t} \leq \omega + \frac{c}{t}, \quad \text{onde } c > 0.$$

Logo,

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{p(t)}{t} \leq \omega \quad \text{e} \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{p(t)}{t} \leq \omega.$$

Pela arbitrariedade de  $\omega$  segue que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{p(t)}{t} = -\infty.$$

□

**Proposição 2.0.2.** *Seja  $S : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X, X)$  um semigrupo de classe  $C_0$ . Então:*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|S(t)\|}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\ln \|S(t)\|}{t} = \omega_0,$$

e para cada  $\omega > \omega_0$ , existe uma constante  $M \geq 1$  tal que

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{2.4}$$

**Demonstração.** Para verificar a primeira parte dessa proposição, vamos mostrar que a função  $\ln \|S(t)\|$  é subaditiva e limitada superiormente. Usando a propriedade (ii) da

Definição 2.0.1, o fato de que a função  $\ln$  é crescente, e a propriedade da álgebra dos operadores,  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ , temos

$$\ln \|S(t+s)\| = \ln \|S(t)S(s)\| \leq \ln(\|S(t)\|\|S(s)\|) = \ln \|S(t)\| + \ln \|S(s)\|.$$

Portanto,  $p(t) = \ln \|S(t)\|$  é subaditiva. Além disso, pela Proposição 2.0.1,  $\|S(t)\|$  é limitada superiormente em intervalos limitados. Como a função  $\ln$  é crescente, segue que  $\ln \|S(t)\|$  também é limitada superiormente em intervalos limitados. Pelo Lema 2.0.1:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|S(t)\|}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\ln \|S(t)\|}{t} = \omega_0.$$

Agora, seja  $\omega > \omega_0$ . Afirmamos que existe  $t_0 \in [0, \infty)$  tal que

$$\frac{\ln \|S(t)\|}{t} < \omega, \quad \text{para todo } t > t_0. \quad (2.5)$$

Para verificar essa afirmação, vamos considerar dois casos. Primeiro, se  $\omega_0 < +\infty$ , pela definição de limite, tome  $\varepsilon = \omega - \omega_0 > 0$ , então existe  $t_0 \in [0, \infty)$  tal que

$$\left| \frac{\ln \|S(t)\|}{t} - \omega_0 \right| < \varepsilon, \quad \text{para todo } t \geq t_0.$$

Como  $z \leq |z|$ , se  $z \in \mathbb{R}$ , isto implica que

$$\frac{\ln \|S(t)\|}{t} < \omega, \quad \text{para todo } t \geq t_0.$$

Para o segundo caso, se  $\omega_0 = -\infty$ , o resultado segue da definição de limite.

Se  $\lim_{t \rightarrow \infty} \ln \|S(t)\|/t = -\infty$  então existe  $t_0 \in [0, \infty)$  tal que  $\ln \|S(t)\|/t < \omega$  para todo  $t > t_0$ .

Logo a afirmação (2.5) está provada. Sabemos (pela Proposição 2.0.1) que  $\|S(t)\|$  é limitada em  $[0, t_0]$  e  $\|S(0)\| = 1$ , então, existe  $M_0 \geq 1$  tal que

$$\|S(t)\| \leq M_0 \quad \text{para todo } t \in [0, t_0].$$

Como a função  $\ln$  é crescente e  $M_0 \geq 1$  (portanto  $\ln M_0 \geq 0$ ), temos

$$\ln \|S(t)\| \leq \ln M_0 \quad \text{para todo } t \in [0, t_0]. \quad (2.6)$$

Seja  $\omega \geq 0$ . Segue de (2.5) e de (2.6) que

$$\text{se } t \in [0, t_0] \quad \ln \|S(t)\| \leq \ln M_0 \leq tw + \ln M_0 \quad (\text{pois } w \geq 0)$$

$$\text{se } t \geq t_0 \quad \ln \|S(t)\| < wt < wt + \ln M_0, \quad (\text{pois } M_0 \geq 1 \text{ então } \ln M_0 \geq 0).$$

Então

$$\ln \|S(t)\| \leq \omega t + \ln M_0, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Aplicando a função exponencial, na desigualdade anterior, obtemos

$$\|S(t)\| \leq M_0 e^{\omega t} \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Pondo-se  $M = M_0$ , obtém-se o desejado. Se  $\omega < 0$ , resulta que  $-\omega t_0 > 0$  e, portanto, de (2.5) vem que

$$\ln \|S(t)\| < \omega t < \omega t - \omega t_0 \quad \text{para todo } t \geq t_0. \quad (2.7)$$

Concluimos de (2.6), (2.7), que

$$\text{se } t \in [0, t_0] \quad \ln \|S(t)\| \leq \ln M_0 \leq \omega(t - t_0) + \ln M_0 \quad (\text{pois, } \omega(t - t_0) > 0)$$

$$\text{se } t \geq t_0 \quad \ln \|S(t)\| \leq \omega(t - t_0) \leq \omega(t - t_0) + \ln M_0.$$

Assim,

$$\|S(t)\| \leq M_0 e^{\omega(t-t_0)}; \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Pondo-se  $M = M_0 e^{-\omega t_0}$  (note que  $M \geq 1$ , pois  $M_0 \geq 1$ ,  $\omega(t - t_0) \geq 0$ , o que implica  $e^{\omega(t-t_0)} \geq 1$ ) fica provada a proposição.  $\square$

**Observação.** Quando  $\omega_0 < 0$ , podemos considerar  $\omega_0 < \omega < 0$  e, de (2.4), existe  $M \geq 1$  tal que

$$\|S(t)\| \leq M, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Neste caso, dizemos que  $S$  é um semigrupo uniformemente limitado de classe  $C_0$ . Se, além disso,  $M = 1$ ,  $S$  é dito um semigrupo de contrações de classe  $C_0$ .

**Definição 2.0.3.** Seja  $S : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X, X)$  um semigrupo de classe  $C_0$ . O operador  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X ; \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x \text{ existe} \right\},$$

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x, \quad \text{para todo } x \in D(A),$$

é dito o gerador infinitesimal do semigrupo  $S$ .

O semigrupo  $S$  possui um único gerador infinitesimal pela Definição 2.0.3 (veja mais em [20, pg. 2]). Note que, como  $S : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X, X)$  é um semigrupo de classe  $C_0$ , pelo Corolário 2.0.1, para cada  $x \in X$  o operador  $t \mapsto S(t)x$  é contínuo com  $t \in [0, \infty)$ . Em particular, para todo  $h > 0$ , o operador  $S(h) - I$  pertence a  $\mathcal{L}(X, X)$ . Assim, para cada  $x \in X$ , a expressão

$$\frac{S(h) - I}{h} x, \quad \text{para } h > 0,$$

está bem definida como elemento de  $X$ , uma vez que  $(S(h) - I)x \in X$  e a divisão por  $h > 0$  é válida. O domínio do gerador infinitesimal,  $D(A)$ , é o subconjunto de  $X$  constituído pelos vetores  $x$  para os quais o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x$$

existe, isto é, existe  $y \in X$  tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \frac{S(h) - I}{h} x - y \right\|_X = 0.$$

Nesse caso, definimos  $Ax = y$ .

Portanto, o operador  $A$  está definido apenas em  $D(A) \subset X$ . Essa restrição é necessária porque, embora o semigrupo  $S(t)$  seja fortemente contínuo para todo  $x \in X$ , o limite acima pode não existir para todos os vetores de  $X$ .

**Proposição 2.0.3.** *Seja  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ , o gerador infinitesimal de um semigrupo  $S : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X, X)$  de classe  $C_0$ . Então o conjunto  $D(A)$  é um subespaço vetorial de  $X$  e  $A$  é um operador linear.*

**Demonstração.** Começemos verificando que  $D(A)$  é um subespaço vetorial de  $X$ . Sabemos que  $D(A) \subset X$ . Consideremos  $u, v \in D(A)$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$  e  $L_u$  e  $L_v$  dados por

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h} u = L_u \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h} v = L_v.$$

Então,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h} (\alpha u + v) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)(\alpha u + v) - I(\alpha u + v)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\alpha S(h)(u) + S(h)(v) - \alpha I(u) - I(v)}{h} \\ &= \alpha \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)(u) - I(u)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)(v) - I(v)}{h} = \alpha L_u + L_v. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Essas operações são válidas, porque  $S(t) : X \rightarrow X$  e  $I : X \rightarrow X$  são transformações lineares para cada  $t \geq 0$  e porque  $u, v \in D(A)$ , garantindo então que os limites (2.8) existem. Resulta que  $\alpha u + v \in D(A)$ , e portanto  $D(A)$  é subespaço vetorial de  $X$ .

Perceba que

$$A(\alpha u + v) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h} (\alpha u + v) = \alpha A(u) + A(v).$$

Então  $A$  é um operador linear. □

A próxima proposição é a primeira que fornece fortes indícios sobre a aplicação da Teoria de semigrupos para a análise da solução de equações diferenciais do tipo

$$\frac{du}{dt} = Au,$$

onde  $A$  é um operador linear. Repare que o gerador infinitesimal de um semigrupo atua como um canal entre a estrutura de semigrupo e equações diferenciais. Além disso se a aplicação  $S : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X, X)$  é um semigrupo de classe  $C_0$ , então  $S(t)$  não apenas preserva o domínio  $D(A)$  do gerador, como também comuta com ele. Assim, para dados iniciais  $x \in D(A)$ , a função  $u(t) = S(t)x$  é diferenciável. Este resultado fornece a base

teórica para a reformulação da Equação de Schrödinger que será apresentada no Capítulo 3.

**Proposição 2.0.4.** *Seja  $S : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X, X)$  um semigrupo de classe  $C_0$  e  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  o gerador infinitesimal de  $S$ . Então:*

(i) *Se  $x \in D(A)$ , então  $S(t)x \in D(A)$ , para todo  $t \geq 0$ , e verificam-se as seguintes igualdades:*

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax, \quad \text{para todo } t \geq 0, \quad (2.9)$$

onde

$$\frac{d}{dt}S(t)x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h},$$

e quando  $t = 0$  entende-se este limite apenas como limite lateral à direita.

(ii) *Se  $x \in D(A)$ , então*

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\xi)x \, d\xi = \int_s^t S(\xi)Ax \, d\xi, \quad 0 \leq s \leq t. \quad (2.10)$$

(iii) *Se  $x \in X$ , então  $\int_0^t S(\xi)x \, d\xi \in D(A)$  e  $A \int_0^t S(\xi)x \, d\xi = S(t)x - x$ .*

**Demonstração.** (i) Se  $t = 0$  temos que  $S(0) = I$  e, portanto

$$S(0)x = x \in D(A).$$

Consequentemente, pela Definição 2.0.3 temos

$$\frac{d^+}{dt}S(0)x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[ \frac{S(h)x - S(0)x}{h} \right] = Ax.$$

Consideremos, agora,  $t > 0$ . Provaremos que  $S(t)x \in D(A)$ , ou seja, que existe o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left[ \frac{S(h) - I}{h} \right] S(t)x.$$

Com efeito, sendo  $h > 0$ , temos pela propriedade de semigrupo que

$$\left[ \frac{S(h) - I}{h} \right] S(t)x = \frac{(S(t+h) - S(t))x}{h} = S(t) \left[ \frac{S(h) - I}{h} \right] x. \quad (2.11)$$

Podemos tomar o limite com  $h \rightarrow 0^+$ , pois por hipótese  $x \in D(A)$  e além disso  $S(t)$  é uma aplicação contínua (lembre-se do Corolário 2.0.1), assim obtemos

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left[ \frac{S(h) - I}{h} \right] S(t)x = \lim_{h \rightarrow 0^+} S(t) \left[ \frac{S(h) - I}{h} \right] x = S(t) \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[ \frac{S(h) - I}{h} \right] x = S(t)Ax \in X,$$

o que nos permite concluir que  $S(t)x \in D(A)$  para todo  $t \geq 0$ , e, portanto, pela própria definição de  $A$ , temos

$$AS(t)x = S(t)Ax.$$

Provaremos, agora, que é válida a identidade (2.9). De fato, se  $h > 0$  e  $t > 0$  então, pelo que já foi visto acima

$$\frac{d^+}{dt} S(t)x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} x = S(t) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x = S(t)Ax = AS(t)x.$$

Verificamos a derivada à direita, agora vamos verificar a derivada à esquerda. Consideremos, agora,  $0 < h < t$ . Então:

$$\begin{aligned} \frac{S(t-h)x - S(t-h+h)x}{-h} &= S(t-h) \left[ \frac{I - S(h)}{-h} (x) \right] \\ &= S(t-h) \left[ \frac{S(h) - I}{h} (x) \right] \tag{2.12} \\ &= S(t-h) \left[ \left( \frac{S(h) - I}{h} \right) x - Ax + Ax \right] \\ &= S(t-h) \underbrace{\left[ \left( \frac{S(h) - I}{h} \right) x - Ax \right]}_I + \underbrace{S(t-h)Ax}_{II}. \end{aligned}$$

Vemos que  $I \rightarrow 0$  quando  $h \rightarrow 0^+$ , uma vez que  $\|S(t-h)\|$  é limitada no intervalo  $[0, t]$  conforme a Proposição 2.0.1, e

$$\begin{aligned} \left\| S(t-h) \left[ \left( \frac{S(h) - I}{h} \right) x - Ax \right] \right\| &\leq \|S(t-h)\| \left\| \left[ \left( \frac{S(h) - I}{h} \right) x - Ax \right] \right\| \\ &\leq c \left\| \left[ \left( \frac{S(h) - I}{h} \right) x - Ax \right] \right\|, \end{aligned}$$

onde

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left[ \left( \frac{S(h) - I}{h} \right) x - Ax \right] = 0$$

pela definição de gerador infinitesimal. Por outro lado, como  $S(t-h)x$  é fortemente contínua (Corolário 2.0.1),  $\Pi \rightarrow S(t)Ax$  quando  $h \rightarrow 0^+$ . Assim

$$\begin{aligned} \frac{d^-}{dt}S(t)x &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t-h)x - S(t)x}{-h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[ S(t-h) \left[ \left( \frac{S(h) - I}{h} \right) x - Ax \right] + S(t-h)Ax \right] = S(t)Ax. \end{aligned}$$

Portanto, verificamos que

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

(ii) Seja  $x \in D(A)$ . Do item anterior, concluímos que  $t \mapsto d/dtS(t)x$  é uma aplicação contínua em  $t$ , para todo  $x \in D(A)$ , posto que  $S$  é fortemente contínuo e  $d/dt[S(t)x] = S(t)Ax$ . Logo, podemos integrar em intervalos compactos de  $[0, \infty)$  e obter

$$\int_s^t \frac{d}{d\xi}S(\xi)x \, d\xi = \int_s^t AS(\xi)x \, d\xi = \int_s^t S(\xi)Ax \, d\xi,$$

ou seja,

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\xi)x \, d\xi = \int_s^t S(\xi)Ax \, d\xi,$$

conforme foi mostrado na Proposição 1.4.11 (Teorema Fundamental do Cálculo em espaços de Banach).

(iii) Seja  $x \in X$ . Conforme a definição de gerador infinitesimal, queremos mostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left[ \frac{S(h) - I}{h} \right] \int_0^t S(\xi)x \, d\xi = S(t)x - x. \quad (2.13)$$

Seja  $0 < h < t$ . Como consequência da linearidade do operador  $\frac{S(h) - I}{h}$  resulta que:

$$\begin{aligned}
 & \frac{S(h) - I}{h} \left[ \int_0^t S(\xi)x \, d\xi \right] \\
 &= \frac{1}{h} \left[ \int_0^t S(\xi + h)x \, d\xi - \int_0^t S(\xi)x \, d\xi \right] \\
 &= \frac{1}{h} \underbrace{\int_h^{t+h} S(\xi)x \, d\xi}_{\text{mudança de variável 1.4.1}} - \frac{1}{h} \int_0^t S(\xi)x \, d\xi \\
 &= \frac{1}{h} \int_h^t S(\xi)x \, d\xi + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\xi)x \, d\xi - \frac{1}{h} \int_0^h S(\xi)x \, d\xi - \frac{1}{h} \int_h^t S(\xi)x \, d\xi \\
 &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\xi)x \, d\xi - \frac{1}{h} \int_0^h S(\xi)x \, d\xi.
 \end{aligned}$$

Se tomarmos o limite com  $h \rightarrow 0^+$ , pelo Teorema da Média (Proposição 1.4.12) encontramos:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\xi)x \, d\xi = S(t)x \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h S(\xi)x \, d\xi = S(0)x.$$

Assim, das equações anteriores, verificamos a partir da definição de  $A$  que

$$A \int_0^t S(\xi)x \, d\xi = S(t)x - x.$$

Isso termina a prova. □

**Proposição 2.0.5.** *O gerador infinitesimal  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  de um semigrupo  $S : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X, X)$  de classe  $C_0$  é um operador linear fechado e  $D(A)$  é denso em  $X$ .*

**Demonstração.** Provaremos, inicialmente, que  $D(A)$  é denso em  $X$ , exibindo uma sequência  $(x_n) \subset D(A)$  convergindo para  $x \in X$  (arbitrário).

Seja  $x \in X$  e para cada  $n \in \mathbb{N}^*$ , definimos a sequência

$$x_n = \frac{1}{1/n} \int_0^{1/n} S(t)x \, dt.$$

Note que  $x_n \in D(A)$  para cada  $n \in \mathbb{N}^*$  porque, pela Proposição 2.0.3,  $D(A)$  é um subespaço vetorial de  $X$  e pela Proposição 2.0.4,  $\int_0^{1/n} S(t)x dt \in D(A)$ . Além disso, pelo Teorema da Média (Proposição 1.4.12), temos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1/n} \int_0^{1/n} S(t)x dt = S(0)x = x.$$

Mostramos que para cada  $x \in X$ , existe uma sequência  $(x_n) \subset D(A)$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Logo,  $D(A)$  é denso em  $X$ . Agora vamos verificar que  $A$  é fechado (conforme Definição dada em 1.3.6). Seja  $(x_n) \subset D(A)$  tal que:

$$x_n \rightarrow x \text{ em } D(A) \quad \text{e} \quad Ax_n \rightarrow y \text{ em } X.$$

Queremos mostrar que  $y = Ax$ . De (2.10) podemos escrever

$$S(h)x_n - S(0)x_n = \int_0^h S(t)Ax_n dt, \quad h > 0. \quad (2.14)$$

Pela Proposição 2.0.2 temos que  $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t} \leq C$ , para todo  $t \in [0, h]$ . Então

$$\|S(t)Ax_n - S(t)y\| \leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X,X)} \|Ax_n - y\| \leq C \|Ax_n - y\|.$$

Como  $Ax_n \rightarrow y$ , temos que  $S(t)Ax_n \rightarrow S(t)y$  uniformemente, quando  $n \rightarrow \infty$ . Da mesma forma  $S(h)x_n \rightarrow S(h)x$  uniformemente, quando  $n \rightarrow \infty$ , porque  $x_n \rightarrow x$ . Então podemos tomar o limite com  $n \rightarrow \infty$  em (2.14) (observe que a convergência dentro da integral é válida pela convergência uniforme conforme a Proposição 1.4.13), assim obtemos

$$S(h)x - x = \int_0^h S(t)y dt.$$

Isto implica que

$$\frac{S(h)x - Ix}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h S(t)y dt.$$

Tomando o limite com  $h \rightarrow 0^+$  e utilizando o Teorema da Média (Proposição 1.4.12) obtemos

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - Ix}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h S(t)y dt \Rightarrow Ax = S(0)y = y.$$

Portanto  $x \in D(A)$  e  $Ax_n$  converge para  $Ax$ , logo  $A$  é fechado. □

**Definição 2.0.4** (Espectro e resolvente de operadores ilimitados). Seja  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  um operador linear em um espaço de Banach  $X$ . O conjunto formado pelos  $\lambda \in \mathbb{C}$  para os quais o operador  $\lambda I - A$  é invertível, seu inverso é limitado e densamente definido, é dito conjunto resolvente de  $A$  e é representado por  $\rho(A)$ . O conjunto  $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$  é chamado de espectro de  $A$ .

**Definição 2.0.5.** Seja  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  um operador linear de um espaço de Banach  $X$ . Se  $\lambda \in \rho(A)$ , o operador  $(\lambda I - A)^{-1} : \text{Im}(\lambda I - A) \rightarrow D(A)$ , representado por  $R(\lambda; A)$ , é dito resolvente de  $A$ .

Observe que,  $R(\lambda; A)$  é, por definição, um operador linear, limitado e densamente definido. As duas últimas propriedades seguem pelo fato que  $\lambda \in \rho(A)$ . A linearidade pode ser verificada da seguinte maneira: sejam  $y_1, y_2 \in \text{Im}(\lambda I - A)$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Existem  $x_1, x_2 \in D(A)$  tais que  $(\lambda I - A)x_i = y_i$  para  $i = 1, 2$ . Como  $\lambda I - A$  é linear, temos

$$\begin{aligned} R(\lambda; A)(\alpha y_1 + y_2) &= R(\lambda; A)(\alpha(\lambda I - A)x_1 + (\lambda I - A)x_2) \\ &= R(\lambda; A)(\lambda I - A)(\alpha x_1 + x_2) = \alpha x_1 + x_2 = \alpha R(\lambda; A)y_1 + R(\lambda; A)y_2. \end{aligned}$$

A princípio, não há como assegurar que  $\text{Im}(\lambda I - A) = X$ . A proposição a seguir mostra que para que isso ocorra, é necessário que  $A$  seja um operador fechado.

**Proposição 2.0.6.** *Seja  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  um operador linear fechado em um espaço de Banach  $X$  e consideremos  $\lambda \in \rho(A)$ . Então,  $D(R(\lambda; A)) = X$ , e, portanto,  $R(\lambda; A)$  é fechado.*

**Demonstração.** Seja  $y \in X$ . Sendo  $D(R(\lambda; A))$  denso em  $X$ , existe  $(y_n) \subset D(R(\lambda; A))$  tal que

$$y_n \rightarrow y \quad \text{em } X. \tag{2.15}$$

Queremos mostrar que  $y \in D(R(\lambda; A))$ .

Sabemos que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $x_n \in D(A)$  tal que

$$y_n = (\lambda I - A)x_n, \tag{2.16}$$

uma vez que  $y_n \in D(R(\lambda; A) = \text{Im}(\lambda I - A))$ . Por outro lado, para todo  $x \in D(A)$ , temos pela limitação de  $R(\lambda; A)$ ,

$$\|x\| = \|Ix\| = \|R(\lambda; A)(\lambda I - A)x\| \leq \underbrace{\|R(\lambda; A)\|}_{\text{limitado}} \cdot \|(\lambda I - A)x\| \leq C_1 \|(\lambda I - A)x\|,$$

onde  $C_1$  é uma constante positiva. Logo,

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \|x\|/C_1 = C_2 \|x\| \quad \text{para todo } x \in D(A),$$

onde  $C_2$  é uma constante positiva. Em particular, para a sequência  $(x_n)$  resulta que

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\| &= \|(\lambda I - A)x_n - (\lambda I - A)x_m\| \\ &= \|(\lambda I - A)(x_n - x_m)\| \\ &\geq C_2 \|x_n - x_m\|, \quad \text{para todo } m, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como  $(y_n)$  é uma sequência convergente em  $X$ , é uma sequência de Cauchy. Então dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  de modo que, se  $m, n > n_0$ , então  $\|y_n - y_m\| < \varepsilon \cdot C_2$ . Consequentemente, para  $m, n > n_0$ , temos

$$\|x_n - x_m\| \leq \|y_n - y_m\|/C_2 < \varepsilon \cdot C_2/C_2 = \varepsilon.$$

Assim resulta que a sequência  $(x_n)$  é de Cauchy em  $X$ , um espaço de Banach, e portanto, existe  $x \in X$  tal que  $x_n \rightarrow x$  em  $X$ . De (2.15) e (2.16) decorre que

$$y_n = (\lambda I - A)x_n \rightarrow y \quad \text{em } X.$$

Entretanto, sendo  $A$  fechado,  $(\lambda I - A)$  também o é. Então  $G(\lambda I - A)$  é fechado. Como  $(x_n, (\lambda I - A)x_n) \in G(\lambda I - A)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $(x_n, (\lambda I - A)x_n) \rightarrow (x, y)$ ,  $n \rightarrow \infty$ , resulta que  $x \in D(A)$  e  $y_n = (\lambda I - A)x_n \rightarrow (\lambda I - A)x$ , pela unicidade do limite  $y = (\lambda I - A)x$ , logo  $y \in \text{Im}(\lambda I - A) = D(R(\lambda; A))$ , o que prova que  $D(R(\lambda; A)) = X$ . Desta forma,  $R(\lambda; A)$  é um operador contínuo, definido em  $D(R(\lambda; A)) = X$ . Portanto, segue do Teorema do Gráfico Fechado (Teorema 1.3.4) que  $R(\lambda; A)$  é fechado (veja também a Observação 3), o que encerra a prova.  $\square$

A próxima proposição apresenta uma representação do operador resolvente  $R(\lambda; A)$  associada ao semigrupo  $(S(t))_{t \geq 0}$ , no caso em que  $A$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C_0$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$  verifica  $\Re(\lambda) > \omega_0 = \inf_{t>0} \frac{\ln \|S(t)\|}{t}$ . A partir dessa representação, o Corolário 2.0.2 apresenta fórmulas para as derivadas do resolvente em relação ao parâmetro  $\lambda$ .

**Proposição 2.0.7.** *Seja  $S : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X, X)$  um semigrupo de classe  $C_0$  com gerador infinitesimal  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ . Se  $\lambda \in \mathbb{C}$  é tal que  $\Re(\lambda) > \omega_0$ , onde*

$$\omega_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|S(t)\|}{t},$$

então a integral

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} S(t)x \, dt$$

existe para todo  $x \in X$  e  $\lambda \in \rho(A)$ . Além disso,

$$R(\lambda; A)x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} S(t)x \, dt, \quad \text{para todo } x \in X.$$

**Demonstração.** Sejam  $x \in X$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $\Re(\lambda) > \omega_0$ . Consideremos  $\Re(\lambda) > \omega > \omega_0$ . Então, pela Proposição 2.0.2 existe  $M \geq 1$  tal que

$$\|S(t)\| \leq M e^{\omega t} \quad \text{para todo } t \geq 0. \quad (2.17)$$

Lembrando que  $|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$  e sendo  $\lambda = \Re(\lambda) + i\Im(\lambda)$ , segue que

$$|e^{-\lambda t}| = |e^{-\Re(\lambda)t} e^{-i\Im(\lambda)t}| = |e^{-\Re(\lambda)t}| |e^{-i\Im(\lambda)t}| = |e^{-\Re(\lambda)t}|, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.18)$$

Dessa forma, obtemos, por (2.17)

$$\begin{aligned} \|e^{-\lambda t} S(t)x\| &\leq |e^{-\lambda t}| \cdot \|S(t)\| \cdot \|x\| \underbrace{=}_{(2.18)} e^{-\Re(\lambda)t} \cdot \|S(t)\| \cdot \|x\| \\ &\leq \underbrace{M}_{(2.17)} \|x\| e^{-\Re(\lambda)t} e^{\omega t} = M \|x\| e^{-(\Re(\lambda) - \omega)t}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

A função  $t \in [0, \infty) \mapsto M\|x\|e^{-\Re(\lambda)t}e^{\omega t} \in \mathbb{R}$  é contínua e integrável em  $[0, \infty)$ , porque, nesse caso,  $M\|x\|$  é uma constante para cada  $x \in X$  e

$$\begin{aligned} \int_0^\infty M\|x\|e^{-\Re(\lambda)t}e^{\omega t} dt &= M\|x\| \left[ \frac{e^{-(\Re(\lambda)-\omega)t}}{-(\Re(\lambda)-\omega)} \right]_{t=0}^{t=\infty} \\ &= \frac{M\|x\|}{-(\Re(\lambda)-\omega)} \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\Re(\lambda)-\omega)t} - e^0 \right] \\ &= \frac{M\|x\|}{-(\Re(\lambda)-\omega)} [0 - 1] \\ &= \frac{M\|x\|}{(\Re(\lambda)-\omega)} \quad \text{uma vez que } \Re(\lambda) > \omega. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Ora, sendo a aplicação  $t \in [0, \infty) \mapsto e^{-\lambda t}S(t)x \in X$  contínua (pois  $e^{-\lambda t}$  e  $S(t)x$  são contínuas) e, portanto, integrável em todo intervalo da forma  $[0, b]$ ,  $b > 0$ , resulta em virtude do teste de Weierstrass (Proposição 1.4.10), e das estimativas (2.19) e (2.20), que

$$\int_0^\infty \|e^{-\lambda t}S(t)x\| dt < +\infty.$$

Consequentemente a integral  $\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)x dt$  existe, uma vez que

$$\left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)x dt \right\| \leq \int_0^\infty \|e^{-\lambda t}S(t)x\| dt < \infty.$$

(Veja Proposição 1.4.8 item (iv)).

Para a segunda parte da demonstração, considere, para cada  $\lambda \in \mathbb{C}$  com  $\Re(\lambda) > \omega > \omega_0$ , o seguinte operador de  $X$

$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)x dt.$$

Veja que  $R_\lambda$  é linear, pois se  $x, y \in X$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$ , temos

$$\begin{aligned} R_\lambda(\alpha x + y) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \underbrace{S(t)}_{\text{linear}}(\alpha x + y) dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}[\alpha S(t)x + S(t)y] dt \\ &= \alpha \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)x dt + \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)y dt = \alpha R_\lambda(x) + R_\lambda(y). \end{aligned}$$

De (2.19) e (2.20) vem que

$$\|R_\lambda x\| = \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt \right\| \leq \int_0^\infty \|e^{-\lambda t} S(t)x\| dt \leq \left( \frac{M}{\Re(\lambda) - \omega} \right) \|x\|,$$

ou seja,  $R_\lambda x$  é Lipschitz, portanto, pelo Teorema 1.3.1 é contínuo, com  $\|R_\lambda\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq \frac{M}{\Re(\lambda) - \omega}$ . Afirmamos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left[ \frac{S(h) - I}{h} \right] R_\lambda x = \lambda R_\lambda x - x \quad \text{para todo } x \in X.$$

Observe que pela Proposição 1.4.9 (aplicada no caso em que o operador é limitado, veja a Observação 6), uma vez que  $t \in [0, \infty) \mapsto e^{-\lambda t} S(t)x \in X$  é contínua, tem-se

$$\begin{aligned} \left[ \frac{S(h) - I}{h} \right] R_\lambda x &= \left[ \frac{S(h) - I}{h} \right] \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt \\ &= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t+h)x dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável (veja o Teorema 1.4.1)  $\xi = t + h$ , obtemos

$$\left[ \frac{S(h) - I}{h} \right] R_\lambda x = \frac{1}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda(\xi-h)} S(\xi)x d\xi - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt.$$

Agora, somando e subtraindo o termo  $\frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda(t-h)} S(t)x dt$ , obtemos

$$\begin{aligned} \left[ \frac{S(h) - I}{h} \right] R_\lambda x &= \frac{1}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda(t-h)} S(t)x dt + \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda(t-h)} S(t)x dt \\ &\quad - \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda(t-h)} S(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} S(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt \\ &= \left( \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \right) \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} S(t)x dt. \end{aligned}$$

Tomando o limite com  $h \rightarrow 0^+$ , temos

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left[ \frac{S(h) - I}{h} \right] R_\lambda x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \right) \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} S(t)x dt.$$

No primeiro limite, usando a regra de L'Hospital, obtemos

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \right) \underbrace{R_\lambda x}_{\text{independe de } h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \frac{\lambda e^{\lambda h} - 0}{1} \right) R_\lambda x = \lambda R_\lambda x.$$

No segundo limite podemos utilizar o Teorema da Média ( Proposição 1.4.12)

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} S(t)x dt = \lim_{h \rightarrow 0^+} e^{\lambda h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} S(t)x dt = e^{\lambda \cdot 0} S(0)x = x.$$

Desse modo, mostramos que  $R_\lambda x \in D(A)$  para todo  $x \in X$ , isto é,  $R_\lambda : X \rightarrow D(A)$ , e que vale

$$AR_\lambda x = \lambda R_\lambda x - x.$$

Segue-se disso que

$$x = \lambda R_\lambda x - AR_\lambda x = (\lambda I - A)R_\lambda x.$$

Portanto,  $R_\lambda x = (\lambda I - A)^{-1}x$ . Mostramos que  $R_\lambda$  é o operador inverso de  $(\lambda I - A)$  à direita. Se  $x \in D(A)$  então  $S(t)x \in D(A)$  (pela Proposição 2.0.4) e  $AS(t)x = S(t)Ax$ . Como  $A$  é fechado (Proposição 2.0.5), temos

$$R_\lambda Ax = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)Ax dt = A \underbrace{\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt}_{\text{usando a Proposição 1.4.9}} = AR_\lambda x \quad \text{para todo } x \in D(A).$$

Como  $R_\lambda Ax = AR_\lambda x = \lambda R_\lambda x - x$ , segue que

$$x = \lambda R_\lambda x - R_\lambda Ax = R_\lambda(\lambda I - A)x,$$

onde utilizamos a linearidade de  $R_\lambda$ . Desse modo, mostramos que  $R_\lambda$  é um inverso à esquerda de  $(\lambda I - A)$  para todo  $x \in D(A)$ . Por outro lado, já verificamos que  $R_\lambda$  é um inverso à direita de  $(\lambda I - A)$  em  $X$ . Portanto,  $R_\lambda$  é inverso à direita de  $(\lambda I - A)$  em  $X$  e inverso à esquerda em  $D(A)$ .

Dessa forma concluímos que  $R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$ , para cada  $\lambda \in \mathbb{C}$  com  $\Re(\lambda) > \omega_0$ . Resta mostrar que  $\lambda \in \rho(A)$ . Para isto, basta notar que  $R_\lambda$  é limitado (veja a Definição

2.0.4), para cada  $\lambda \in \mathbb{C}$  com  $\Re(\lambda) > \omega_0$  e densamente definido, pois  $D(R_\lambda) = X$ . Logo  $\lambda \in \rho(A)$  e portanto, conclui-se que

$$R(\lambda; A) = R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \, dt \quad \text{para todo } x \in X \text{ e } \lambda \in \rho(A).$$

□

**Corolário 2.0.2.** *Seja  $S : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X, X)$  um semigrupo de classe  $C_0$  com gerador infinitesimal  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ . Se  $\lambda \in \mathbb{C}$  é tal que  $\Re(\lambda) > \omega_0$ , onde*

$$\omega_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|S(t)\|}{t},$$

então:

(i)

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda; A)x = (-1)^n n! R(\lambda; A)^{n+1}x, \quad \text{para todo } x \in X,$$

(ii)

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda; A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} (-t)^n S(t)x \, dt, \quad \text{para todo } x \in X,$$

sendo a derivada no sentido de Fréchet, isto é, no sentido da Definição 1.4.2.

**Demonstração.** Vamos mostrar inicialmente que

$$\lim_{\mu \rightarrow \lambda} R(\mu; A)x = R(\lambda; A)x, \quad \text{para todo } x \in X, \quad (2.21)$$

ou seja, mostraremos que a aplicação  $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$  é fortemente contínua.

Seja  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $\Re(\lambda) > \omega_1 > \omega > \omega_0$ . Considere uma seqüência  $(\mu_\nu) \subset \mathbb{C}$  tal que  $\mu_\nu \rightarrow \lambda$  quando  $\nu \rightarrow +\infty$  e  $\Re(\mu_\nu) > \omega_1$  para todo  $\nu$ .

Começemos mostrando que para cada  $x \in X$  e  $t \in [0, \infty)$ ,

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} e^{-\mu_\nu t} S(t)x = e^{-\lambda t} S(t)x \text{ em } X. \quad (2.22)$$

(Esse resultado será essencial para verificar (2.21)).

Uma vez que a exponencial é uma função contínua e  $\mu_\nu \rightarrow \lambda$  então  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} |e^{-\mu_\nu t} - e^{-\lambda t}| = 0$ . Além disso, sabemos que  $\|S(t)x\|$  é limitada, para cada  $x \in X$ , e  $t \in [0, \infty)$ . Assim,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|e^{-\mu_\nu t} S(t)x - e^{-\lambda t} S(t)x\| = \lim_{\nu \rightarrow \infty} |e^{-\mu_\nu t} - e^{-\lambda t}| \|S(t)x\| = 0.$$

Portanto, (2.22) está verificada. Por outro lado, como  $|e^{-\mu_\nu t}| = |e^{-\Re(\mu_\nu)t}| |e^{-i\Im(\mu_\nu)t}| \leq e^{-\Re(\mu_\nu)t}$ , obtemos

$$\|e^{-\mu_\nu t} S(t)x\| = |e^{-\mu_\nu t}| \|S(t)x\| \leq e^{-\Re(\mu_\nu)t} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X,X)} \|x\|.$$

Pela Proposição 2.0.2,  $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$  para  $\omega > \omega_0$ , em particular, para  $\omega_1 > \omega > \omega_0$ . Segue-se disso, e do fato que  $-\Re(\mu_\nu) < -\omega_1$  que

$$\|e^{-\mu_\nu t} S(t)x\| \leq Me^{-(\Re(\mu_\nu) - \omega)t} \|x\| \leq Me^{-(\omega_1 - \omega)t} \|x\|. \quad (2.23)$$

Como  $-(\omega_1 - \omega) < 0$ , temos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty M \|x\| e^{-(\omega_1 - \omega)t} dt &= M \|x\| \int_0^\infty e^{-(\omega_1 - \omega)t} dt \\ &= M \|x\| \left. \frac{e^{-(\omega_1 - \omega)t}}{-(\omega_1 - \omega)} \right|_{t=0}^{t=\infty} \\ &= M \|x\| \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-(\omega_1 - \omega)t}}{-(\omega_1 - \omega)} - \frac{e^0}{-(\omega_1 - \omega)} \right] \\ &= M \|x\| \frac{1}{(\omega_1 - \omega)} < +\infty. \end{aligned} \quad (2.24)$$

De (2.23) e (2.24) podemos utilizar o Teste de Weirstrass (Proposição (1.4.10)) para concluir que:

$$\int_0^\infty e^{-\mu_\nu t} S(t)x dt < +\infty \quad \text{e} \quad \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt < +\infty, \quad \text{para todo } \nu \in \mathbb{N}.$$

Como  $(e^{-\mu\nu t}S(t)x)$  é uma sequência de funções integráveis em  $[0, \infty)$  e dominada pela função integrável  $Me^{(-\omega_1-\omega)t}\|x\|$  (veja (2.24)), resulta do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema 1.2.5) que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} R(\mu\nu, A) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^\infty e^{-\mu\nu t} S(t)x dt}_{=R(\mu\nu, A)} = \underbrace{\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt}_{=R(\lambda, A)}.$$

Segue então (2.21).

Note que se  $\Re(\mu) > \omega_0$  então a Proposição 2.0.7 garante que  $\lambda, \mu \in \rho(A)$ . Assim, os operadores  $R(\lambda; A)$  e  $R(\mu; A)$  estão bem definidos e temos que

$$R(\mu; A)R(\lambda; A) = (\mu I - A)^{-1}(\lambda I - A)^{-1} = (\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A)^{-1} = R(\lambda; A)R(\mu; A), \quad (2.25)$$

ou seja, operadores resolventes são comutativos. De fato,  $(\lambda I - A)(\mu I - A) = (\mu I - A)(\lambda I - A)$ , por consequência de

$$(\lambda I - A)(\mu I - A) = \lambda\mu I - \lambda A - \mu A + A^2 \quad \text{e} \quad (\mu I - A)(\lambda I - A) = \mu\lambda I - \mu A - \lambda A + A^2.$$

Segue-se disso que

$$[(\lambda I - A)(\mu I - A)]^{-1} = [(\mu I - A)(\lambda I - A)]^{-1} = (\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A)^{-1}.$$

Combinando a última igualdade com  $[(\lambda I - A)(\mu I - A)]^{-1} = (\mu I - A)^{-1}(\lambda I - A)^{-1}$ , segue (2.25). Portanto,

$$\begin{aligned}
 R(\lambda; A) - R(\mu; A) &= (\lambda I - A)^{-1} - (\mu I - A)^{-1} \\
 &= \underbrace{(\mu I - A)(\mu I - A)^{-1}}_{I(\text{Identidade})}(\lambda I - A)^{-1} - \underbrace{(\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1}}_{I(\text{Identidade})}(\mu I - A)^{-1} \\
 &= (\mu I - A) \underbrace{(\mu I - A)^{-1}(\lambda I - A)^{-1}}_{\text{Comutam}} - (\lambda I - A) \underbrace{(\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A)^{-1}}_{\text{Comutam}} \\
 &= [(\mu I - A) - (\lambda I - A)](\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A)^{-1} \\
 &= [\mu I - A - \lambda I + A](\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A)^{-1} \\
 &= (\mu - \lambda)I(\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A)^{-1} \\
 &= (\mu - \lambda)I \cdot R(\lambda; A)R(\mu; A).
 \end{aligned}$$

Encontramos que

$$\frac{R(\mu; A) - R(\lambda; A)}{(\mu - \lambda)} = -R(\lambda; A)R(\mu; A), \quad \text{desde que } \mu \neq \lambda.$$

Então utilizando (2.21)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\lambda} R(\lambda, A)x &= \lim_{\mu \rightarrow \lambda} \left[ \frac{R(\mu; A) - R(\lambda; A)}{\mu - \lambda} \right] x \\
 &= \lim_{\mu \rightarrow \lambda} [-R(\lambda; A)R(\mu; A)]x \\
 &= -R(\lambda; A) \lim_{\mu \rightarrow \lambda} R(\mu; A)x \\
 &= -R(\lambda; A)^2 x \quad \text{para todo } x \in X.
 \end{aligned}$$

Deste modo mostramos que o item (i) vale para  $n = 1$ . Usaremos indução em  $n$  para os demais casos. Para isso, suponhamos que a identidade (i) é válida para  $n$  e provemos para  $n + 1$ . Da hipótese indutiva vem que

$$\begin{aligned}
 \frac{d^{n+1}}{d\lambda^{n+1}}R(\lambda; A)x &= \frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda; A) \right] x \\
 &= \frac{d}{d\lambda} [(-1)^n n! R(\lambda; A)^{n+1}] x \\
 &= (-1)^n n! \frac{d}{d\lambda} R(\lambda; A)^{n+1} x \\
 &= (-1)^n n! (n+1) R(\lambda; A)^n \frac{d}{d\lambda} R(\lambda; A) x \\
 &= (-1)^n (n+1)! R(\lambda; A)^n (-R(\lambda; A)^2) x \\
 &= (-1)^{n+1} (n+1)! R(\lambda; A)^{n+2} x.
 \end{aligned}$$

Note que usamos a regra da cadeia em espaços de Banach para derivar  $R(\lambda; A)^{n+1}x$ . Uma versão deste teorema pode ser encontrado em [2, Teorema 9.6.5]. Isto conclui a prova de (i).

(ii) Antes de iniciar a demonstração desse tópico é necessário verificar se  $\frac{d}{d\lambda} t^n e^{-\lambda t} S(t)x = -t^{n+1} e^{-\lambda t} S(t)x$ . Perceba que a função  $t^n e^{-\lambda t} S(t)x$  é contínua em relação a  $\lambda$ . Além disso, para  $\Re(\lambda) > \omega_1 > \omega > \omega_0$ , temos

$$\begin{aligned}
 \|t^n e^{-\lambda t} S(t)x\| &\leq t^n |e^{-\lambda t}| \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X,X)} \|x\| \\
 &\leq t^n e^{-\Re(\lambda)t} M e^{\omega t} \|x\| \\
 &= M t^n e^{-(\Re(\lambda)-\omega)t} \|x\|.
 \end{aligned}$$

Portanto

$$\|t^n e^{-\lambda t} S(t)x\| \leq M t^n e^{-(\omega_1-\omega)t} \|x\|. \tag{2.26}$$

Vamos verificar que

$$\int_0^\infty t^n e^{-(\omega_1-\omega)t} dt < +\infty \quad \text{para } \omega_1 > \omega > \omega_0 \quad \text{e cada } n \in \mathbb{N}.$$

Argumentaremos com indução. Para  $n = 0$

$$\int_0^\infty e^{-(\omega_1 - \omega)t} dt = \frac{e^{-(\omega_1 - \omega)t}}{-(\omega_1 - \omega)} \Big|_0^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-(\omega_1 - \omega)t}}{-(\omega_1 - \omega)} - \frac{1}{-(\omega_1 - \omega)} = \frac{1}{(\omega_1 - \omega)} < \infty.$$

Agora, suponha que a integral exista para  $n$  e vamos mostrar que existe para  $n + 1$ .

Utilizando a integração por partes

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \underbrace{t^{n+1}}_{=u} \underbrace{e^{-(\omega_1 - \omega)t}}_{=dv} dt &= \left( -\frac{t^{n+1} e^{-(\omega_1 - \omega)t}}{\omega_1 - \omega} \right) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \underbrace{\frac{(n+1)}{-(\omega_1 - \omega)}}_{(\text{Constante})} t^n e^{-(\omega_1 - \omega)t} dt \\ &= \underbrace{\lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{t^{n+1} e^{-(\omega_1 - \omega)t}}{\omega_1 - \omega}}_{\text{Por L'Hospital} = 0} + \underbrace{\frac{0^{n+1} e^{-(\omega_1 - \omega)0}}{\omega_1 - \omega}}_0 + \frac{(n+1)}{(\omega_1 - \omega)} \underbrace{\int_0^\infty t^n e^{-(\omega_1 - \omega)t} dt}_{< \infty}. \end{aligned}$$

A última integral é finita pela hipótese de indução. Então concluímos que

$$\int_0^\infty t^n e^{-(\omega_1 - \omega)t} dt < +\infty \quad \text{para } \omega_1 > \omega > \omega_0 \quad \text{e cada } n \in \mathbb{N}/\{0\}. \quad (2.27)$$

Tendo em vista (2.26) e (2.27), temos que

$$\int_0^\infty M t^n e^{-(\omega_1 - \omega)t} \|x\| dt < \infty.$$

Logo, pelo Teste de Weierstrass (Proposição 1.4.10) temos que a integral

$$\int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} S(t)x dt$$

converge absoluta e uniformemente para  $\Re(\lambda) > \omega_1 > \omega > \omega_0$ , e  $n = 0, 1, \dots$ . Sendo assim,

$$\int_0^\infty t^{n+1} e^{-\lambda t} S(t)x dt$$

também converge absoluta e uniformemente para  $\Re(\lambda) > \omega_1 > \omega > \omega_0$  e, portanto, é permitido diferenciar a integral

$$\int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} S(t)x dt$$

com respeito à  $\lambda$  para obtermos

$$\frac{d}{d\lambda} \int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} S(t)x \, dt = \int_0^\infty \frac{d}{d\lambda} (t^n e^{-\lambda t} S(t)x) \, dt = - \int_0^\infty t^{n+1} e^{-\lambda t} S(t)x \, dt. \quad (2.28)$$

Agora vamos à demonstração do tópico (ii). Queremos mostrar que

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda; A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} (-t)^n S(t)x \, dt, \quad \text{para todo } x \in X. \quad (2.29)$$

Vamos mostrar por indução, veja que o caso  $n = 0$  já foi mostrado na Proposição 2.0.7

$$R(\lambda; A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \, dt.$$

Então suponha que (2.29) seja verdadeiro para  $n$ , e vamos mostrar que vale para  $n + 1$ .

Veja que

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}}{d\lambda^{n+1}} R(\lambda; A)x &= \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda; A)x \right) \\ &= \frac{d}{d\lambda} \left( \int_0^\infty e^{-\lambda t} (-t)^n S(t)x \, dt \right) \quad (\text{Por hipótese de indução}) \\ &= (-1)^n \frac{d}{d\lambda} \left( \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^n S(t)x \, dt \right) \\ &\stackrel{(2.28)}{=} \underbrace{(-1)^n (-1)}_{(2.28)} \int_0^\infty t^{n+1} e^{-\lambda t} S(t)x \, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} (-t)^{n+1} S(t)x \, dt. \end{aligned}$$

Isto concluí a demonstração. □

O próximo Teorema é o principal resultado deste capítulo, permite caracterizar um operador linear como o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C_0$ . O Teorema de Hille–Yosida tem origem nos estudos de Einar Hille, norte americano que iniciou as pesquisas sobre semigrupos lineares em espaços de Banach, por volta de 1936. Ele publicou diversos trabalhos fundamentais nessa área. Em 1948, Hille e o matemático japonês Kōsaku Yosida publicaram, de forma independente e no mesmo ano, resultados equivalentes que caracterizavam os operadores geradores de semigrupos fortemente contínuos, consolidando o teorema que leva seus nomes, Hille publicou seus resultados em um livro sobre Análise Funcional e Semigrupos de Operadores, enquanto

Yosida publicou um artigo, com resultados equivalentes aos de Hille. Na formulação original, o resultado foi estabelecido para o caso particular em que  $M = 1$  e  $\omega = 0$ . Posteriormente, a teoria foi ampliada, passando a abranger valores gerais de  $M$  e  $\omega$ , correspondendo à versão moderna do teorema amplamente utilizada na literatura atual. A biografia de Einar Hille descreve suas principais contribuições [21].

**Teorema 2.0.1 (Hille-Yosida).** *Para que um operador linear  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ , seja o gerador infinitesimal de um semigrupo  $S : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X, X)$  de classe  $C_0$ , é necessário e suficiente que:*

- (i) *A seja fechado e seu domínio  $D(A)$  seja denso em  $X$ .*
- (ii) *Existam números reais  $M$  e  $\omega$  tais que, para cada real  $\lambda > \omega$ , se tenha  $\lambda \in \rho(A)$  e*

$$\|R(\lambda; A)^n\|_{\mathcal{L}(X, X)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (2.30)$$

Neste caso,

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X, X)} \leq Me^{\omega t}, \quad t \geq 0.$$

**Demonstração.** ( $\Rightarrow$ ) Necessidade.

Suponhamos que um operador linear  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  seja o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C_0$ . O item (i) vem direto da Proposição 2.0.5 que afirma que "O gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C_0$  é um operador linear fechado e  $D(A)$  é denso em  $X$ ".

Provaremos o item (ii). Seja  $\omega > \omega_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|S(t)\|}{t}$ . Sendo  $(S(t))_{t \geq 0}$  um semigrupo de classe  $C_0$ , então, pela Proposição 2.0.2, existe  $M \geq 1$  tal que

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad t \geq 0. \quad (2.31)$$

Logo, se  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > \omega > \omega_0$ , então, pela Proposição 2.0.7, temos que  $\lambda \in \rho(A)$  e pelo item (i) do Corolário 2.0.2 temos

$$\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} R(\lambda; A)x = (-1)^{n-1} (n-1)! R(\lambda; A)^n x, \quad \text{para todo } x \in X,$$

o que implica que

$$R(\lambda; A)^n x = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} R(\lambda; A)x, \quad \text{para todo } x \in X.$$

Além disso, pelo item (ii) do Corolário 2.0.2 temos que

$$\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} R(\lambda; A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} (-t)^{n-1} S(t)x \, dt.$$

Substituindo essa expressão na igualdade anterior obtemos

$$\begin{aligned} R(\lambda; A)^n x &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-\lambda t} (-t)^{n-1} S(t)x \, dt \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{n-1} S(t)x \, dt. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Assim, para cada  $x \in X$ , de (2.31) e (2.32) resulta que

$$\begin{aligned} \|R(\lambda; A)^n x\| &\stackrel{(2.32)}{=} \left\| \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{n-1} S(t)x \, dt \right\| \\ &\leq \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{n-1} \|S(t)\| \cdot \|x\| \, dt \\ &\stackrel{(2.31)}{\leq} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{n-1} M e^{\omega t} \|x\| \, dt \\ &\leq \frac{M \|x\|}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-(\lambda-\omega)t} \, dt. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Para concluir a desigualdade desejada, (2.30), mostraremos que

$$\int_0^\infty t^{n-1} e^{-(\lambda-\omega)t} \, dt = \frac{(n-1)!}{(\lambda-\omega)^n}. \quad (2.34)$$

Por indução, para  $n = 1$ , temos

$$\int_0^\infty e^{-(\lambda-\omega)t} \, dt = \left( \frac{e^{-(\lambda-\omega)t}}{-(\lambda-\omega)} \right) \Big|_0^\infty = \underbrace{\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-(\lambda-\omega)t}}{-(\lambda-\omega)}}_0 - \frac{1}{-(\lambda-\omega)} = \frac{1}{(\lambda-\omega)}.$$

Agora, suponhamos que (2.34) se verifique para  $n$  e provemos indutivamente para  $n + 1$ . Utilizando a integração por partes

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \underbrace{t^n}_u \underbrace{e^{-(\lambda-\omega)t} dt}_{dv} &= \left[ \frac{t^n e^{-(\lambda-\omega)t}}{-(\lambda-\omega)} \right]_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^\infty n t^{n-1} \frac{e^{-(\lambda-\omega)t}}{-(\lambda-\omega)} dt \\
 &= \left[ \frac{t^n e^{-(\lambda-\omega)t}}{-(\lambda-\omega)} \right]_{t=0}^{t=\infty} + \frac{n}{\lambda-\omega} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-(\lambda-\omega)t} dt \\
 &= \underbrace{\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^n e^{-(\lambda-\omega)t}}{-(\lambda-\omega)}}_{\text{L'Hospital} = 0} + \underbrace{\frac{0^n e^{-(\lambda-\omega)0}}{(\lambda-\omega)}}_0 + \frac{n}{\lambda-\omega} \underbrace{\int_0^\infty t^{n-1} e^{-(\lambda-\omega)t} dt}_{\text{Hipótese indutiva}} \\
 &= \frac{n}{\lambda-\omega} \cdot \frac{(n-1)!}{(\lambda-\omega)^n} \\
 &= \frac{n!}{(\lambda-\omega)^{n+1}}.
 \end{aligned}$$

Portanto, (2.34) vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Conseqüentemente, encontramos que

$$\|R(\lambda; A)^n x\| \leq \frac{M \|x\|}{(\lambda - \omega)^n}.$$

Tomando o supremo com a  $\|x\| \leq 1$ , obtemos

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|R(\lambda; A)^n x\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{M \|x\|}{(\lambda - \omega)^n},$$

o que implica

$$\|R(\lambda; A)^n\|_{\mathcal{L}(X, X)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}.$$

Assim, verificamos que se  $A$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C_0$  os itens (i) e (ii) são satisfeitos.

( $\Leftarrow$ ) Suficiência.

Suponhamos, agora, que existam números reais  $M$  e  $\omega$  tais que para cada real  $\lambda > \omega$ , tenhamos  $\lambda \in \rho(A)$  e

$$\|R(\lambda; A)^n\|_{\mathcal{L}(X, X)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}, \quad (2.35)$$

e, além disso, que  $A$  seja fechado e densamente definido.

Defina, para cada real  $\lambda > \omega$ , o operador linear

$$B_\lambda := \lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda I. \quad (2.36)$$

Como  $A$  é fechado e  $\lambda \in \rho(A)$ , então  $D(R(\lambda, A)) = X$  (Proposição 2.0.6). Portanto,  $B_\lambda : X \rightarrow X$ . Os operadores definidos em (2.36) são conhecidos como *aproximações de Yosida* de  $A$ . Como  $\lambda \in \rho(A)$ , temos que  $R(\lambda; A)$  é contínuo e consequentemente  $B_\lambda$  também o é. Para conveniência do leitor, explicaremos o que será feito no restante da demonstração, a qual consistirá de 5 etapas:

- Na primeira etapa vamos mostrar que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} B_\lambda x = Ax, \quad \text{para todo } x \in D(A).$$

- Na segunda etapa vamos mostrar que dado  $\gamma > \omega$  existe  $\lambda_0 > \omega$  tal que se  $\lambda > \lambda_0$

$$\|e^{tB_\lambda}\|_{\mathcal{L}(X, X)} \leq Me^{t\gamma}. \quad (2.37)$$

- A terceira etapa consiste em mostrar que,  $e^{tB_\lambda}$  para cada  $t \geq 0$ , converge para um operador linear limitado  $S(t)$  quando  $\lambda \rightarrow \infty$ .
- Na quarta etapa vamos mostrar que a aplicação  $S : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X, X)$ , definida acima é um semigrupo de classe  $C_0$ .
- Finalmente, na quinta etapa vamos verificar que  $A$  é o gerador infinitesimal de  $S$ .

**1ª etapa.** Nesta etapa vamos verificar que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} B_\lambda x = Ax, \quad \text{para todo } x \in D(A).$$

Seja  $x \in D(A)$ . Por definição  $R(\lambda, A)(\lambda I - A)x = x$ , porque  $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ . Por consequência, temos

$$\begin{aligned} R(\lambda, A)(\lambda I - A)x &= x \\ \Rightarrow \lambda R(\lambda, A)x - R(\lambda, A)Ax &= x \\ \Rightarrow \lambda R(\lambda, A)x - x &= R(\lambda, A)Ax. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Sabemos que a desigualdade (2.35) é satisfeita, por hipótese, então tomando a norma na última igualdade de (2.38) e usando  $n = 1$ , obtemos

$$\|\lambda R(\lambda, A)x - x\| = \|R(\lambda, A)Ax\| \leq \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X, X)} \|Ax\| \leq \frac{M}{\lambda - \omega} \|Ax\|.$$

Aqui podemos tomar o limite com  $\lambda \rightarrow \infty$

$$0 \leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|\lambda R(\lambda, A)x - x\| \leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{M}{\lambda - \omega} \|Ax\| \rightarrow 0.$$

O último limite tende a zero justamente porque, para cada  $x \in D(A)$ , o termo  $\|Ax\|$  é uma constante em relação à  $\lambda$ . Dessa forma encontramos que  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|\lambda R(\lambda, A)x - x\| = 0$ , e usando a definição de limite podemos concluir que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x \quad \text{para todo } x \in D(A). \quad (2.39)$$

Agora queremos mostrar que a convergência se dá para todo  $x \in X$ . Isso será feito em duas partes, primeiramente, mostraremos que  $\|\lambda R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X, X)}$  é limitada para  $\lambda > \eta$ , onde  $\eta$  é algum número positivo, e em seguida usaremos isso e a densidade de  $D(A)$  para estender (2.39) para todo  $x \in X$ .

Notemos inicialmente que (2.35) garante que

$$\|R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X, X)} \leq \frac{M}{\lambda - \omega},$$

e, desta forma,

$$\|\lambda R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X, X)} \leq \frac{|\lambda|}{\lambda - \omega} M. \quad (2.40)$$

Como  $\frac{|\lambda|}{\lambda - \omega} \rightarrow 1$  quando  $\lambda \rightarrow \infty$ , vem que  $\frac{|\lambda|M}{\lambda - \omega} \rightarrow M$  quando  $\lambda \rightarrow \infty$ . Assim, dado  $\varepsilon = M > 0$ , existe  $\eta > 0$  tal que se  $\lambda > \eta$  tem-se

$$\left| \frac{|\lambda|M}{\lambda - \omega} - M \right| < M.$$

Disso e de (2.40), obtemos

$$\|\lambda R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X, X)} - M \leq \left| \frac{|\lambda|M}{\lambda - \omega} - M \right| < M, \quad \text{se } \lambda > \eta.$$

Portanto,

$$\|\lambda R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X, X)} < 2M, \quad \text{se } \lambda > \eta. \quad (2.41)$$

Consideremos  $x \in X$ . Sendo  $D(A)$  denso em  $X$ , existe  $(x_n) \subset D(A)$  tal que

$$x_n \rightarrow x \quad \text{em } X \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (2.42)$$

Da convergência em (2.42), dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2M + 2}, \quad \text{para todo } n \geq n_0. \quad (2.43)$$

Da convergência em (2.39) e de  $x_{n_0} \in D(A)$ ,  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda; A)x_{n_0} = x_{n_0}$ , portanto, para o mesmo  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|\lambda R(\lambda; A)x_{n_0} - x_{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{2M + 2}, \quad \text{se } \lambda > \delta. \quad (2.44)$$

Logo, definindo  $\xi = \max\{\eta; \delta\} > 0$ , onde  $\eta$  está definido em (2.41) e  $\delta$  em (2.44), temos para  $x \in X$ ,  $x_{n_0} \in D(A)$  e  $\lambda > \xi$ ,

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda; A)x - x\| &= \|\lambda R(\lambda; A)x - \lambda R(\lambda; A)x_{n_0} + \lambda R(\lambda; A)x_{n_0} - x_{n_0} + x_{n_0} - x\| \\ &\leq \|\lambda R(\lambda; A)x - \lambda R(\lambda; A)x_{n_0}\| + \|\lambda R(\lambda; A)x_{n_0} - x_{n_0}\| + \|x_{n_0} - x\| \\ &\quad \text{(Desigualdade Triangular)} \\ &= \|\lambda R(\lambda; A)[x - x_{n_0}]\| + \|\lambda R(\lambda; A)x_{n_0} - x_{n_0}\| + \|x_{n_0} - x\| \\ &< \underbrace{\|\lambda R(\lambda; A)\|}_{(2.41)} \cdot \|x - x_{n_0}\| + \|\lambda R(\lambda; A)x_{n_0} - x_{n_0}\| + \|x_{n_0} - x\| \\ &< 2M \frac{\varepsilon}{2M + 2} + \frac{\varepsilon}{2M + 2} + \frac{\varepsilon}{2M + 2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Como  $\varepsilon > 0$  é arbitrário, isto prova que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \quad \text{para todo } x \in X. \quad (2.45)$$

Lembre-se que de (2.36) e de (2.38)

$$B_\lambda x = (\lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I)x = \lambda[\lambda R(\lambda, A)x - x] = \lambda(R(\lambda, A)Ax).$$

Então, de (2.45), para todo  $x \in D(A)$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} B_\lambda x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)(Ax) = Ax. \quad (2.46)$$

Note que foi necessário verificar que (2.45) converge para todo  $x \in X$ , justamente porque  $Ax \in X$ , mesmo que  $x \in D(A)$ . Isto finaliza a primeira etapa.

**2ª etapa.** Nesta etapa vamos mostrar que

Dado  $\gamma > \omega$ , existe  $\lambda_0 > \omega$  tal que se  $\lambda > \lambda_0 > \omega$ , então (2.47)

$$\|e^{tB_\lambda}\|_{\mathcal{L}(X, X)} \leq Me^{t\gamma}.$$

Veja que, para  $x \in X$ , temos (usando a propriedade de exponencial de um operador  $e^{A+B} = e^A e^B$  vista na Observação 4)

$$\begin{aligned} \|e^{tB_\lambda} x\| &= \left\| e^{t(\lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I)} x \right\| \\ &= \left\| e^{t\lambda^2 R(\lambda, A)} e^{-t\lambda I} x \right\| \\ &\leq \left\| e^{t\lambda^2 R(\lambda, A)} \right\|_{\mathcal{L}(X, X)} \|e^{-t\lambda I} x\|. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Contudo, pela definição de exponencial de um operador

$$\begin{aligned} \|e^{-t\lambda I} x\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t\lambda)^n}{n!} I^n x \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t\lambda)^n}{n!} x \right\| \\ &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t\lambda)^n}{n!} \right| \|x\| = e^{-t\lambda} \|x\|. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Pela hipótese sobre a norma do operador resolvente em (2.35), temos para todo  $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
 \left\| e^{t\lambda^2 R(\lambda, A)} \right\|_{\mathcal{L}(X, X)} &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda^2)^n}{n!} (R(\lambda; A))^n \right\| \\
 &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda^2)^n}{n!} \|R(\lambda; A)^n\| \\
 &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda^2)^n}{n!} \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \\
 &= M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda^2(\lambda - \omega)^{-1})^n}{n!} \\
 &= Me^{t\lambda^2(\lambda - \omega)^{-1}}.
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Então combinando (2.48), (2.49) e (2.50), obtemos

$$\begin{aligned}
 \|e^{tB_\lambda} x\| &\leq Me^{t\lambda^2(\lambda - \omega)^{-1}} e^{-t\lambda} \|x\| \\
 &= Me^{t\lambda^2(\lambda - \omega)^{-1} - t\lambda} \|x\| \\
 &= Me^{t(-\lambda + \lambda^2(\lambda - \omega)^{-1})} \|x\| \quad \text{para todo } x \in X \text{ e } t \geq 0
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

Note que

$$\begin{aligned}
 -\lambda + \lambda^2(\lambda - \omega)^{-1} &= \frac{-\lambda(\lambda - \omega) + \lambda^2}{\lambda - \omega} \\
 &= \frac{-\lambda^2 + \lambda\omega + \lambda^2}{\lambda - \omega} \\
 &= \frac{\lambda\omega}{\lambda - \omega}.
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Logo, de (2.51) e (2.52) chegamos a

$$\|e^{tB_\lambda} x\| \leq Me^{t \frac{\lambda\omega}{\lambda - \omega}} \|x\|, \quad \text{para todo } x \in X. \tag{2.53}$$

Entretanto,  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda\omega}{\lambda - \omega} = \omega$ . Seja  $\gamma > \omega$  e consideremos  $\varepsilon = \gamma - \omega > 0$ . Desta última convergência obtemos a existência de  $\lambda_0 > \omega$ , tal que, se  $\lambda > \lambda_0 > \omega$ , então

$$\left| \frac{\lambda\omega}{\lambda - \omega} - \omega \right| < \varepsilon = \gamma - \omega,$$

ou seja,

$$\frac{\lambda\omega}{\lambda - \omega} < \gamma. \quad (2.54)$$

Assim, desde que  $\gamma > \omega$ . Para todo  $x \in X$ , obtemos que, para todo  $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \|e^{tB_\lambda}x\| &\leq Me^{t\frac{\lambda\omega}{\lambda-\omega}} \|x\| \\ &< Me^{t\gamma}\|x\|, \quad \text{para todo } \lambda > \lambda_0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|e^{tB_\lambda}x\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} Me^{t\gamma}\|x\|,$$

o que implica

$$\|e^{tB_\lambda}\|_{\mathcal{L}(X,X)} < Me^{t\gamma}, \quad (2.55)$$

como queríamos demonstrar. Isto encerra a segunda etapa.

**3ª etapa.** A próxima etapa consiste em mostrar que  $e^{tB_\lambda}$  converge, para cada  $t \geq 0$  para um operador linear limitado  $S(t)$  quando  $\lambda \rightarrow \infty$ . Para isto, definimos

$$S_\lambda(t) = e^{tB_\lambda} \quad \text{para todo } t \geq 0 \text{ e } \lambda > \omega. \quad (2.56)$$

Mostraremos que  $(S_\lambda(t)x)_{\lambda > \omega}$  é uma sequência de Cauchy uniforme em  $X$  para  $t$  em intervalos limitados de  $[0, \infty)$ , ou seja, que  $\|S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x\| \rightarrow 0$ , para  $\lambda, \mu$  suficientemente grandes,  $x \in X$  e  $t \in J$ ,  $J$  um intervalo limitado de  $[0, \infty)$ , e em seguida, usando o fato que  $X$  é Banach, definiremos  $S(t)x$  como o limite pontual de  $S_\lambda(t)x$ , quando  $\lambda \rightarrow \infty$ . Mostraremos por fim que  $S(t)$  é limitado.

Como a aplicação  $t \mapsto e^{tB_\lambda}x$  pertence a  $C^1([0, \infty), X)$ , para qualquer  $t > 0$  (Proposição 1.4.7), podemos usar o Teorema Fundamental do Cálculo em espaços de Banach (Proposição 1.4.11) para obter

$$(e^{tB_\lambda} - e^{tB_\mu})x = \int_0^t \frac{d}{d\tau}(e^{(t-\tau)B_\mu}e^{\tau B_\lambda})x \, d\tau, \quad \text{para todo } x \in X.$$

Na notação (2.56) isso fica reescrito como

$$(S_\lambda(t) - S_\mu(t))x = \int_0^t \frac{d}{d\tau}(S_\mu(t-\tau)S_\lambda(\tau))x \, d\tau, \quad \text{para todo } x \in X. \quad (2.57)$$

Por outro lado, pela Proposição 1.4.7, item (ii), temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(S_\mu(t-\tau)S_\lambda(\tau))x &= \frac{d}{d\tau}(e^{(t-\tau)B_\mu}e^{\tau B_\lambda})x \\ &= \frac{d}{d\tau}(e^{tB_\mu + \tau(B_\lambda - B_\mu)})x \\ &= (B_\lambda - B_\mu)e^{tB_\mu + \tau(B_\lambda - B_\mu)}x \\ &= (B_\lambda - B_\mu)e^{(t-\tau)B_\mu}e^{\tau B_\lambda}x \\ &= (B_\lambda - B_\mu)S_\mu(t-\tau)S_\lambda(\tau)x. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Antes de substituir (2.57) em (2.58), vamos verificar que  $B_\lambda$  e  $B_\mu$  comutam com  $S_\mu(t)$ . Lembre-se que, de (2.25), desde que  $\lambda, \mu \in \rho(A)$  temos que  $R(\lambda, A)R(\mu, A) = R(\mu, A)R(\lambda, A)$ . Como  $B_\lambda := \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I$ , obtemos que  $B_\lambda$  e  $B_\mu$  comutam, ou seja,

$$\begin{aligned} B_\lambda B_\mu &= [\lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I][\mu^2 R(\mu, A) - \mu I] \\ &= \lambda^2 \mu^2 R(\lambda, A)R(\mu, A) - \lambda^2 \mu R(\lambda, A) - \lambda \mu^2 R(\lambda, A) - \lambda \mu I \\ &= [\mu^2 R(\mu, A) - \mu I][\lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I] = B_\mu B_\lambda. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} S_\mu(t)B_\lambda x &= e^{tB_\mu}B_\lambda x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tB_\mu)^n}{n!} B_\lambda x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n (B_\mu)^n B_\lambda}{n!} x \\ &= B_\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n (B_\mu)^n}{n!} x \\ &= B_\lambda S_\mu(t)x, \end{aligned}$$

para todo  $x \in X$ . De forma análoga verificamos que  $B_\mu$  comuta com  $S_\mu$ . Agora podemos substituir (2.58) em (2.57):

$$\begin{aligned} (S_\lambda(t) - S_\mu(t))x &= \int_0^t \frac{d}{d\tau} (S_\mu(t - \tau)S_\lambda(\tau))x \, d\tau \\ &= \int_0^t (B_\lambda - B_\mu)S_\mu(t - \tau)S_\lambda(\tau)x \, d\tau \\ &= \int_0^t S_\mu(t - \tau)S_\lambda(\tau)(B_\lambda - B_\mu)x \, d\tau. \end{aligned}$$

Tomando a norma, obtemos:

$$\begin{aligned} \|(S_\lambda(t) - S_\mu(t))x\| &\leq \int_0^t \|S_\mu(t - \tau)S_\lambda(\tau)(B_\lambda - B_\mu)x\| \, d\tau \\ &\leq \int_0^t \|S_\mu(t - \tau)S_\lambda(\tau)\| \|(B_\lambda - B_\mu)x\| \, d\tau \\ &\leq \int_0^t \underbrace{\|e^{(t-\tau)B_\mu}\| \|e^{\tau B_\lambda}\|}_{\text{Por definição de } S_\lambda, S_\mu} \|(B_\lambda - B_\mu)x\| \, d\tau. \end{aligned}$$

Dado  $\gamma > \omega$ , segue de (2.47) que  $\|e^{tB_\lambda}\| < Me^{t\gamma}$  para  $\lambda > \lambda_0$ . Em especial, se  $\lambda, \mu > \lambda_0$ , obtemos

$$\begin{aligned} \|S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x\| &\leq \int_0^t (Me^{(t-\tau)\gamma}) (Me^{\tau\gamma}) \|B_\lambda x - B_\mu x\| \, d\tau \\ &= M^2 \|B_\lambda x - B_\mu x\| \int_0^t e^{t\gamma} \, d\tau \\ &= M^2 t e^{\gamma t} \|B_\lambda x - B_\mu x\|. \end{aligned}$$

Se  $x \in D(A)$ , tomando o limite na expressão acima quando  $\lambda, \mu \rightarrow \infty$ , e concluímos que

$$0 \leq \lim_{\lambda, \mu \rightarrow \infty} \|S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x\| \leq M^2 t e^{\gamma t} \lim_{\lambda, \mu \rightarrow \infty} \|B_\lambda x - B_\mu x\| \rightarrow 0.$$

Lembre-se que na primeira etapa foi demonstrado que  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} B_\lambda x = Ax$  para todo  $x \in D(A)$ .

Por isso  $\lim_{\lambda, \mu \rightarrow \infty} \|B_\lambda x - B_\mu x\| = \|Ax - Ax\| = 0$ .

Perceba que acabamos de demonstrar que  $(S_\lambda(t)x)_{\lambda > \omega}$  é uma sequência de Cauchy uniforme para todo  $x \in D(A)$  e todo intervalo limitado de  $t$  ( $e^{\gamma t}$  é limitada em todo intervalo limitado). Mostraremos agora que essa sequência converge, para todo  $x \in X$ .

Considere  $J$  um intervalo limitado e fechado de  $[0, \infty)$  e  $\gamma > \omega$ . De (2.55) e (2.56), temos

$$\|S_\lambda(t)\|_{\mathcal{L}(X,X)} = \|e^{tB_\lambda}\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq Me^{t\gamma} \leq C, \quad \text{para todo } t \in J \text{ e } \lambda > \lambda_0 > \omega. \quad (2.59)$$

Agora, considere  $x \in X$ . Por hipótese,  $D(A)$  é denso em  $X$ , então existe uma sequência  $(x_n) \subset D(A)$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \rightarrow x \text{ em } X.$$

Dessa forma, pela definição de limite, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2C + 1} \quad \text{para todo } n \geq n_0, \quad (2.60)$$

onde  $C$  é a constante dada em (2.59).

Por outro lado, como a sequência  $(S_\lambda(t)x_{n_0})_{\lambda > \omega}$  é de Cauchy, para o intervalo  $J$ , e com  $x_{n_0} \in D(A)$ , existe  $\alpha > 0$  tal que se  $\lambda, \mu > \max\{\omega, \lambda_0, \alpha\} := \beta$ , temos

$$\|S_\lambda(t)x_{n_0} - S_\mu(t)x_{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{2C + 1} \quad \text{para todo } t \in J. \quad (2.61)$$

Assim das desigualdades (2.59), (2.60) e (2.61) podemos concluir que a sequência  $(S_\lambda(t)x)_{\lambda > \omega}$  é de Cauchy para  $x \in X$ . Veja que, somando e subtraindo o termo intermediário  $S_\lambda(t)x_{n_0}$  e  $S_\mu(t)x_{n_0}$ , e usando a desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned} \|S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x\| &= \|S_\lambda(t)x - S_\lambda(t)x_{n_0} + S_\lambda(t)x_{n_0} - S_\mu(t)x_{n_0} + S_\mu(t)x_{n_0} - S_\mu(t)x\| \\ &\leq \|S_\lambda(t)x - S_\lambda(t)x_{n_0}\| + \|S_\lambda(t)x_{n_0} - S_\mu(t)x_{n_0}\| + \|S_\mu(t)x_{n_0} - S_\mu(t)x\| \\ &\leq \|S_\lambda(t)\|_{\mathcal{L}(X,X)} \|x - x_{n_0}\| + \|S_\lambda(t)x_{n_0} - S_\mu(t)x_{n_0}\| + \|S_\mu(t)\|_{\mathcal{L}(X,X)} \|x_{n_0} - x\| \\ &\stackrel{(2.59)}{\leq} C \|x - x_{n_0}\| + \|S_\lambda(t)x_{n_0} - S_\mu(t)x_{n_0}\| + C \|x_{n_0} - x\| \\ &\leq 2C \|x_{n_0} - x\| + \|S_\lambda(t)x_{n_0} - S_\mu(t)x_{n_0}\| \\ &\stackrel{(2.60) \text{ e } (2.61)}{\leq} 2C \frac{\varepsilon}{2C + 1} + \frac{\varepsilon}{2C + 1} = \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo  $\lambda, \mu > \beta$  e para todo  $t \in J$ , o que prova que a sequência  $\{S_\lambda(t)x\}_{\lambda > \omega}$  é de Cauchy uniforme em  $X$  para  $t$  em intervalos limitados de  $[0, \infty)$ . Resulta daí, em vista

de  $X$  ser Banach, que existe, para cada  $t \geq 0$ , uma aplicação linear  $S(t) : X \rightarrow X$ , tal que para todo  $x \in X$ ,

$$S(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty, \lambda > \omega} S_\lambda(t)x \text{ em } X \quad \text{uniformemente nos intervalos limitados da reta.} \quad (2.62)$$

Para finalizar essa etapa, precisamos verificar que esse operador é limitado, ou seja, que  $S(t) \in \mathcal{L}(X, X)$ .

Sabemos que  $\{S_\lambda(t)\}_{\lambda > \omega} \subset \mathcal{L}(X, X)$  pela forma como foi definido. Além disso sabemos que para cada  $x \in X$  a sequência converge, logo  $\sup_{\lambda > \omega} \|S_\lambda(t)x\| < +\infty$ . Então pelo Teorema Banach–Steinhaus (Teorema 1.3.3) temos que

$$\sup_{\lambda > \omega} \|S_\lambda(t)\|_{\mathcal{L}(X, X)} < C < +\infty,$$

ou ainda,

$$\|S_\lambda(t)x\| \leq \|S_\lambda(t)\|_{\mathcal{L}(X, X)} \|x\| \leq C\|x\| \quad \text{para todo } x \in X \text{ e } \lambda > \omega.$$

Tomando-se o limite nesta última desigualdade quando  $\lambda \rightarrow \infty$  de (2.62) resulta que

$$\|S(t)x\| = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|S_\lambda(t)x\| \leq C\|x\|, \quad \text{para todo } x \in X.$$

Se tomarmos o supremo com  $\|x\| \leq 1$ , obtemos

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X, X)} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|S(t)x\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} C\|x\| = C < \infty,$$

e, desta forma,  $S(t) \in \mathcal{L}(X, X)$ , o que prova a afirmação. Isto finaliza a terceira etapa.

**4ª etapa.** O objetivo dessa etapa consiste em mostrar que o operador  $S$  é um semigrupo de classe  $C_0$ . Precisamos verificar as três propriedades da Definição 2.0.1

- (i) A primeira propriedade é a mais simples. Usamos a definição via limite de  $S$  e que  $e^0 = I$  para obtermos

$$S(0)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda(0)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{0B_\lambda}x = x; \quad \text{para todo } x \in X.$$

(ii) Dados  $t, s \geq 0$  e  $x \in X$ , obtemos

$$S(t+s)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda(t+s)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{(t+s)B_\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tB_\lambda} e^{sB_\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda(t)S_\lambda(s)x.$$

Nesse ponto, queremos verificar que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda(t)S_\lambda(s)x = S(t)S(s)x. \quad (2.63)$$

De fato, sejam  $\varepsilon > 0$  e  $\gamma > \omega$ . De (2.55) resulta que:

$$\|S_\lambda(t)\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq Me^{t\gamma}, \quad \text{para todo } \lambda > \lambda_0. \quad (2.64)$$

Portanto, se  $J$  é um intervalo limitado de  $[0, \infty)$  que contém  $t$  e  $s$ , de (2.64) inferimos

$$\|S_\lambda(\xi)\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq C, \quad \text{para todo } \lambda > \lambda_0 \text{ e para todo } \xi \in J. \quad (2.65)$$

Por outro lado, resulta de (2.62), para o  $\varepsilon > 0$  dado, que existem  $\lambda_1, \lambda_2 > \omega$  tais que

$$\|S_\lambda(s)x - S(s)x\| < \frac{\varepsilon}{C+1} \quad \text{para todo } \lambda \geq \lambda_1, \quad \left( \lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda(s)x = S(s)x \right) \quad (2.66)$$

e, trocando  $x$  por  $S(s)x$ ,

$$\|S_\lambda(t)S(s)x - S(t)S(s)x\| < \frac{\varepsilon}{C+1} \quad \text{para todo } \lambda \geq \lambda_2. \quad (2.67)$$

Das desigualdades (2.65), (2.66) e (2.67), obtemos

$$\begin{aligned} \|S_\lambda(t)S_\lambda(s)x - S(t)S(s)x\| &= \|S_\lambda(t)S_\lambda(s)x - S_\lambda(t)S(s)x + S_\lambda(t)S(s)x - S(t)S(s)x\| \\ &\leq \|S_\lambda(t)S_\lambda(s)x - S_\lambda(t)S(s)x\| + \|S_\lambda(t)S(s)x - S(t)S(s)x\| \\ &= \|S_\lambda(t)(S_\lambda(s)x - S(s)x)\| + \|S_\lambda(t)S(s)x - S(t)S(s)x\| \\ &\leq \underbrace{\|S_\lambda(t)\|_{\mathcal{L}(X,X)}}_{(2.65)} \underbrace{\|S_\lambda(s)x - S(s)x\|}_{(2.66)} + \underbrace{\|S_\lambda(t)S(s)x - S(t)S(s)x\|}_{(2.67)} \\ &< C \frac{\varepsilon}{C+1} + \frac{\varepsilon}{C+1} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

desde que  $\lambda \geq \lambda_0^* := \max\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\}$ , o que prova (2.63). Concluimos que

$$S(t+s) = S(t)S(s); \quad \text{para todo } t, s \geq 0. \quad (2.68)$$

(iii) Neste item queremos verificar que  $S$  é um semigrupo de classe  $C_0$ , ou seja, queremos mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|(S(t) - I)x\|_X = 0, \quad \text{para todo } x \in X.$$

Primeiramente, note que  $S_\lambda$  é um semigrupo de classe  $C_0$ , pois, para cada  $\lambda > \lambda_0 > \omega$

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \|(S_\lambda(t) - I)x\|_X = \lim_{t \rightarrow 0^+} \|(e^{tB_\lambda} - I)x\|_X \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \|(e^{tB_\lambda} - I)\|_{\mathcal{L}(X,X)} \|x\|_X \rightarrow 0.$$

(Pela Observação 5 sabemos que  $\|(e^{tB_\lambda} - I)\|_{\mathcal{L}(X,X)} \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow 0^+$ ).

Sejam  $\varepsilon > 0$ ,  $x \in X$  e  $0 < h < 1$ . Então, por (2.62), existe  $\lambda_0 > \omega$  tal que

$$\|S_\lambda(h)x - S(h)x\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } \lambda \geq \lambda_0 \text{ e } h \in (0, 1) \left( \lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda(h)x = S(h)x \right). \quad (2.69)$$

Agora, pelo fato de  $S_{\lambda_0}$  ser um semigrupo de classe  $C_0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $0 < h < \delta$ , tem-se

$$\|S_{\lambda_0}(h)x - x\| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \left( \lim_{h \rightarrow 0^+} \|(S_{\lambda_0}(h) - I)x\|_X = 0 \right). \quad (2.70)$$

Portanto, para  $0 < h < \min\{1, \delta\}$  resulta de (2.69) e (2.70) que

$$\begin{aligned} \|S(h)x - x\| &= \|S(h)x - S_{\lambda_0}(h)x + S_{\lambda_0}(h)x - x\| \\ &\leq \underbrace{\|S(h)x - S_{\lambda_0}(h)x\|}_{(2.69)} + \underbrace{\|S_{\lambda_0}(h)x - x\|}_{(2.70)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

o que prova que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \|(S(h) - I)x\| = 0. \quad (2.71)$$

Assim, provamos que  $S$  é um semigrupo de classe  $C_0$ . Isto termina a quarta etapa.

**5ª etapa.** Nesta etapa vamos verificar que  $A$  é o gerador infinitesimal do semigrupo  $S$ . De fato, seja  $B$  o gerador infinitesimal de  $S$ . Provaremos, inicialmente, que  $D(A) \subset D(B)$  e

que  $A \equiv B$  com  $x \in D(A)$ . Para isso, será necessário mostrar que  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda(t)B_\lambda x = S(t)Ax$  uniformemente nos intervalos limitados da reta.

Sejam  $x \in D(A)$ ,  $\lambda > \omega$  e  $h > 0$ . Temos, pela Proposição 1.4.11 ( $S_\lambda(t) = e^{tB_\lambda} \in C^1([0, h], \mathcal{L}(X, X))$ )

$$S_\lambda(h)x - x = \int_0^h \frac{d}{dt}(S_\lambda(t)x) dt.$$

Note que,

$$\frac{d}{dt}(S_\lambda(t)x) = \frac{d}{dt}(e^{tB_\lambda}x) = B_\lambda e^{tB_\lambda}x = B_\lambda S_\lambda(t)x,$$

o que implica que

$$S_\lambda(h)x - x = \int_0^h S_\lambda(t)B_\lambda x dt \quad h > 0, \quad (2.72)$$

pois  $S_\lambda(t)$  e  $B_\lambda$  comutam para  $\lambda \geq 0$ , como foi mostrado na terceira etapa.

Agora vamos verificar que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda(t)B_\lambda x = S(t)Ax, \quad (2.73)$$

uniformemente nos intervalos limitados da reta.

Sejam  $J$  um intervalo limitado da reta,  $\gamma > \omega$  e  $\varepsilon > 0$ . De (2.62) existe  $\lambda_1 > \omega$  tal que

$$\|S_\lambda(t)Ax - S(t)Ax\| < \frac{\varepsilon}{C+1} \quad \text{para todo } \lambda \geq \lambda_1 \text{ e } t \in J, \left( \lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda(t)(Ax) = S(t)(Ax) \right), \quad (2.74)$$

onde  $C$  é a constante que aparece em (2.65).

Lembre-se que em (2.65) temos  $\|S_\lambda(\xi)\| \leq C$ , para todo  $\lambda > \lambda_0$ , todo  $\xi \in J$ , e lembre-se que foi visto na etapa 1 que  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} B_\lambda x = Ax$ , para  $x \in D(A)$  (veja (2.46)). Dessa forma a partir do mesmo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\lambda_2$  tal que  $\lambda > \lambda_2$ ,

$$\|B_\lambda x - Ax\| < \frac{\varepsilon}{C+1}. \quad (2.75)$$

Assim de (2.65), (2.74) e de (2.75), resulta, para  $\lambda > \max\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\}$ , e  $x \in D(A)$  que

$$\begin{aligned} \|S_\lambda(t)B_\lambda x - S(t)Ax\| &= \|S_\lambda(t)B_\lambda x - S_\lambda(t)Ax + S_\lambda(t)Ax - S(t)Ax\| \\ &\leq \|S_\lambda(t)B_\lambda x - S_\lambda(t)Ax\| + \|S_\lambda(t)Ax - S(t)Ax\| \\ &= \|S_\lambda(t)(B_\lambda x - Ax)\| + \|S_\lambda(t)Ax - S(t)Ax\| \\ &\leq \underbrace{\|S_\lambda(t)\|_{\mathcal{L}(X,X)}}_{(2.65)} \underbrace{\|B_\lambda x - Ax\|}_{(2.75)} + \underbrace{\|S_\lambda(t)Ax - S(t)Ax\|}_{(2.74)} \\ &< C \frac{\varepsilon}{C+1} + \frac{\varepsilon}{C+1} = \varepsilon, \end{aligned}$$

o que prova (2.73). Resulta daí, de (2.62) e de (2.72) que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (S_\lambda(h)x - x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^h S_\lambda(t)B_\lambda x dt \Rightarrow S(h)x - x = \int_0^h S(t)Ax dt \quad h > 0.$$

Perceba que mostramos que a convergência em (2.73) é uniforme em intervalos limitados,

por isso que  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^h S_\lambda(t)B_\lambda x dt = \int_0^h \lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda(t)B_\lambda x dt$ .

Desta última igualdade e do Teorema da Média (Teorema 1.4.12) resulta

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h S(t)Ax dt \underbrace{=}_{1.4.12} Ax, \quad \text{para todo } x \in D(A). \quad (2.76)$$

A relação em (2.76) mostra-nos que  $x \in D(A)$ , assim

$$D(A) \subset D(B) \text{ e } A \equiv B \text{ em } D(A).$$

Por fim resta mostrar que  $D(A) = D(B)$ .

Por hipótese temos que, se  $\lambda > \omega$  então  $\lambda \in \rho(A)$ , porém, como  $B$  é o gerador infinitesimal de  $S$ , pela Proposição 2.0.7, se  $\lambda > \omega_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|S(t)\|}{t}$ , então  $\lambda \in \rho(B)$ . Logo, se  $\lambda > \max\{\omega, \omega_0\}$  vem que  $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$ .

Além disso, também por hipótese, temos que  $A$  é fechado e  $\lambda \in \rho(A)$ . Desse modo segue da Proposição 2.0.6 que

$$D(R(\lambda, A)) = D((\lambda I - A)^{-1}) = \text{Im}(\lambda I - A) = X.$$

Da mesma maneira, como  $B$  é o gerador infinitesimal de  $S$ , pela Proposição 2.0.5,  $B$  é fechado e novamente pela Proposição 2.0.6  $\text{Im}(\lambda I - B) = X$ .

Então

$$(\lambda I - A)(D(A)) = X \quad \text{e} \quad (\lambda I - B)(D(B)) = X.$$

Dessa forma podemos escrever

$$(\lambda I - B)(D(B)) = (\lambda I - A)(D(A)) \Rightarrow D(B) = (\lambda I - B)^{-1}(\lambda I - A)(D(A)).$$

Como já verificamos que  $A \equiv B$  em  $D(A)$ , obtemos

$$D(B) = (\lambda I - B)^{-1}(\lambda I - A)(D(A)) \Rightarrow D(B) = (\lambda I - B)^{-1}(\lambda I - B)(D(A)) \Rightarrow D(B) = D(A).$$

Concluimos que  $D(A) = D(B)$  e que  $A \equiv B$ . Portanto  $A$  é o gerador infinitesimal do semigrupo  $S$  de classe  $C_0$ . Isto termina a etapa cinco e conseqüentemente a demonstração.  $\square$

O Teorema de Hille-Yosida fornece condições necessárias e suficientes para que um operador linear gere um semigrupo fortemente contínuo. Essa caracterização é fundamental para o estudo da existência e unicidade de soluções do problema de Cauchy Abstrato. A seguir apresentamos a definição desse problema e da solução, além do teorema que garante a existência e unidade da solução do Problema de Cauchy Abstrato.

**Definição 2.0.6.** Seja  $(X, \|\cdot\|)$  um espaço de Banach,  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  um operador linear de  $X$  e consideremos, para cada  $u_0 \in X$ , o Problema de Cauchy Abstrato:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = Au(t), & t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (2.77)$$

A segunda condição de (2.77) é chamada condição inicial do problema e  $u_0$  o seu valor inicial.

**Definição 2.0.7.** Uma função  $u : [0, \infty) \rightarrow X$  diz-se:

(a) uma solução clássica (ou forte) de (2.77) se:

- i)  $u$  é contínua para todo  $t \geq 0$ ;

ii)  $u$  é continuamente diferenciável para  $t > 0$ ;

iii)  $u(t) \in D(A)$  para todo  $t > 0$ ;

iv)  $u$  satisfaz (2.77).

(b) uma solução *mild* de (2.77) se:

(i)  $u$  é contínua para todo  $t \geq 0$ ;

(ii)  $\int_0^t u(s) ds \in D(A)$  para todo  $t \geq 0$ ;

(iii)  $u(t) = A \int_0^t u(s) ds + u_0$ .

**Lema 2.0.2.** *Seja  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  um operador fechado. Para cada  $x \in D(A)$ , seja*

$$\|x\|_{D(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_X.$$

*Então,  $\|\cdot\|_{D(A)}$  é uma norma em  $D(A)$  e  $(D(A), \|\cdot\|_{D(A)})$  é um espaço de Banach. A norma  $\|\cdot\|_{D(A)}$  é conhecida como norma do gráfico.*

**Demonstração.** Seja  $x, y \in D(A)$ . Primeiro, para verificar que  $D(A)$  é um subespaço vetorial de  $X$ , basta notar que para  $x, y \in D(A)$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$ , temos

$$\alpha Ax + Ay = A(\alpha x + y).$$

Obtemos que  $\alpha x + y \in D(A)$  uma vez que  $A$  é linear, então  $D(A)$  é um subespaço vetorial de  $X$ . Agora, vamos verificar que  $\|x\|_{D(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_X$  satisfaz as três propriedades de norma:

(i) Vamos verificar que  $\|x\|_{D(A)} = 0$  se e somente se  $x = 0$ .

( $\Rightarrow$ ) Se  $\|x\|_{D(A)} = 0$ , temos

$$\|x\|_X + \|Ax\|_X = 0 \text{ o que implica que } 0 \leq \|x\|_X = -\|Ax\|_X \leq 0 \Rightarrow x = 0.$$

Perceba que  $\|\cdot\|_X$  já sabemos que é uma norma, por isso usamos que  $\|x\|_X \geq 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Se  $x = 0$

$$\|x\|_{D(A)} = \|0\|_X + \|A(0)\|_X = 0 + \|0\|_X = 0.$$

(ii) Vamos verificar que  $\|\alpha x\|_{D(A)} = |\alpha| \cdot \|x\|_{D(A)}$ , desde que  $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\|\alpha x\|_{D(A)} = \|\alpha x\|_X + \|A(\alpha x)\|_X.$$

Lembre-se que  $A$  é um operador linear e novamente  $\|\cdot\|_X$  é uma norma, então

$$\begin{aligned} \|\alpha x\|_{D(A)} &= |\alpha| \cdot \|x\|_X + \|\alpha \cdot Ax\| \\ &= |\alpha| \cdot \|x\|_X + |\alpha| \cdot \|Ax\| = |\alpha|(\|x\|_X + \|Ax\|_X) = |\alpha| \cdot \|x\|_{D(A)}. \end{aligned}$$

(iii) (Desigualdade triangular). Queremos mostrar que  $\|x + y\|_{D(A)} \leq \|x\|_{D(A)} + \|y\|_{D(A)}$ .

Como  $A$  é linear e  $\|\cdot\|_X$  é uma norma temos

$$\begin{aligned} \|x + y\|_{D(A)} &= \|x + y\|_X + \|A(x + y)\|_X \\ &= \|x + y\|_X + \|Ax + Ay\|_X \\ &\leq \|x\|_X + \|y\|_X + \|Ax\|_X + \|Ay\|_X \\ &= \|x\|_X + \|Ax\|_X + \|y\|_X + \|Ay\|_X \\ &= \|x\|_{D(A)} + \|y\|_{D(A)}. \end{aligned}$$

Veja que usamos a desigualdade triangular na norma do espaço de Banach  $X$ .

Agora vamos verificar que o espaço  $(D(A), \|\cdot\|_{D(A)})$  é um espaço de Banach. Note que  $D(A) \subset X$ , onde  $X$  é um espaço de Banach.

Precisamos verificar que  $(D(A), \|\cdot\|_{D(A)})$  é completo, ou seja que toda sequência de Cauchy dentro desse espaço é convergente. Seja  $(x_n) \subset D(A)$  uma sequência de Cauchy, então, por definição de sequência de Cauchy, temos

$$\begin{aligned} \lim_{m,n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\|_{D(A)} = 0 &\Rightarrow \lim_{m,n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\|_X + \|A(x_n - x_m)\|_X = 0 \\ &\Rightarrow 0 \leq \lim_{m,n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\|_X + \lim_{m,n \rightarrow \infty} \|A(x_n - x_m)\|_X = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{m,n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\|_X = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{m,n \rightarrow \infty} \|Ax_n - Ax_m\|_X = 0, \end{aligned}$$

ou seja, temos duas sequências de Cauchy no espaço de Banach  $X$ , então existem  $x, y \in X$  tais que  $x_n \rightarrow x$  e  $Ax_n \rightarrow y$ . Entretanto, como  $(x_n, Ax_n) \in G(A)$  e  $G(A)$  é fechado em

$X \times X$ , por hipótese, vem que  $(x, y) \in G(A)$ , ou seja,  $y = Ax$ . Assim,  $x_n \rightarrow x$  em  $(D(A), \|\cdot\|_{D(A)})$ .

□

**Teorema 2.0.2.** *Seja  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  o gerador infinitesimal de um semigrupo  $S : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X, X)$  de classe  $C_0$ . Então:*

(a) *Para cada  $u_0 \in D(A)$ , existe uma única função*

$$u \in C^0([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); X),$$

*a qual é solução clássica do Problema de Cauchy dado em (2.77). Além disso, se  $S$  for um semigrupo de contrações, temos que*

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| \quad e \quad \frac{du}{dt}(t) = \|Au(t)\| \leq \|Au_0\|, \quad \forall t \geq 0.$$

(b) *Se  $u_0 \in X$ , existe uma única solução mild do Problema de Cauchy dado em (2.77).*

**Demonstração.** (a) Seja  $u_0 \in D(A)$ . Definimos:

$$u(t) = S(t)u_0, \quad t \geq 0. \tag{2.78}$$

Vamos mostrar que  $u$  é solução clássica do Problema de Cauchy Abstrato, ou seja pela Definição 2.0.7, precisamos verificar que:

- (i)  $u$  é contínua para todo  $t \geq 0$ ;
- (ii)  $u$  é continuamente diferenciável para  $t > 0$ ;
- (iii)  $u(t) \in D(A)$  para todo  $t > 0$ ;
- (iv)  $u$  satisfaz. (2.77)

Veja que como  $u_0 \in D(A)$ , vem da Proposição 2.0.4 que  $S(t)u_0 \in D(A)$ , para todo  $t \geq 0$ , logo  $u(t) \in D(A)$  para todo  $t \geq 0$ , verificamos o item (iii). Além disso, da mesma Proposição 2.0.4 temos:

$$\frac{d}{dt}S(t)(u_0) = AS(t)u_0 = S(t)Au_0 \Rightarrow \frac{du}{dt}(t) = Au(t) \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{2.79}$$

De (2.78) temos, em particular, que

$$u(0) = S(0)u_0 = u_0. \quad (2.80)$$

Então concluímos que a aplicação  $u$  definida em (2.78) realmente verifica (2.77), de modo que está verificado o item (iv). Precisamos verificar os itens (i) e (ii). Primeiro, vamos verificar que  $u$  é contínua para  $t \geq 0$ .

Seja  $t_0 \in [0, +\infty)$  e  $t_n \rightarrow t_0$  em  $[0, +\infty)$ , como  $S$  é de classe  $C_0$  de (2.78) e (2.79) resulta que

$$\|S(t_n)u_0 - S(t_0)u_0\|_X = \|u(t_n) - u(t_0)\|_X \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty \quad (2.81)$$

e

$$\begin{aligned} 0 \leq \|Au(t_n) - Au(t_0)\|_X &= \|AS(t_n)u_0 - AS(t_0)u_0\|_X \\ &= \|(S(t_n) - S(t_0))Au_0\|_X \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty \\ &\Rightarrow \|Au(t_n) - Au(t_0)\|_X \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Ou seja,

$$\|u(t_n) - u(t_0)\|_{D(A)} = \|u(t_n) - u(t_0)\|_X + \|Au(t_n) - Au(t_0)\|_X \rightarrow 0,$$

quando  $n \rightarrow +\infty$ , provando que

$$u \in C^0([0; +\infty); D(A)).$$

Verificamos assim o item (i). Precisamos verificar que é diferenciável, tópico (ii). Veja que de (2.81), verificamos que

$$u \in C^0([0; +\infty); X).$$

Da mesma forma em (2.82) mostramos que

$$\left\| \frac{du}{dt}(t_n) - \frac{du}{dt}(t_0) \right\| = \|Au(t_n) - Au(t_0)\|_X \rightarrow 0.$$

Então

$$\frac{du}{dt} \in C^0([0; +\infty); X).$$

ou seja,  $u \in C^1([0; +\infty); X)$ . Verificamos que

$$u \in C^0([0; +\infty); D(A)) \cap C^1([0; +\infty); X).$$

Perceba que foi mostrado que  $u$  é uma solução clássica do Problema de Cauchy Abstrato, é necessário verificar que a solução é única. Por contradição, suponha que  $u$  e  $v$  sejam soluções de (2.77), isto é

$$\frac{du}{dt} = Au(t), \quad u(0) = u_0 \quad \text{e} \quad \frac{dv}{dt} = Av(t), \quad v(0) = u_0.$$

Então,  $w = u - v$  satisfaz o Problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt}(t) = Aw(t) & t > 0; \\ w(0) = (u - v)(0) = u_0 - u_0 = 0. \end{cases} \quad (2.83)$$

O objetivo é mostrar que  $w = 0$ . Sejam  $t, s > 0$ ,  $0 \leq s < t < +\infty$ . Então se  $|h - 0| < t - s$ , temos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds}[S(t-s)w(s)] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t-s-h)w(s+h) - S(t-s)w(s)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t-s-h)w(s+h) - S(t-s)w(s)}{h} + \frac{S(t-s-h)w(s) - S(t-s)w(s)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\left[ \frac{S(t-s-h)w(s+h) - S(t-s-h)w(s)}{h} \right]}_{\text{Parte I}} + \underbrace{\left[ \frac{S(t-s-h)w(s) - S(t-s)w(s)}{h} \right]}_{\text{Parte II}}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Na primeira parte queremos mostrar que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{S(t-s-h)w(s+h) - S(t-s-h)w(s)}{h} \right] = S(t-s)w'(s) = S(t-s)Aw(s). \quad (2.85)$$

Note que a última igualdade vem da hipótese de que  $w$  satisfaz (2.77).

Na segunda parte queremos mostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{S(t-s-h)w(s) - S(t-s)w(s)}{h} \right] = -S(t-s)Aw(s). \quad (2.86)$$

Para mostrar (2.85) podemos usar a definição de limite

$$\begin{aligned} & \left\| S(t-s-h) \left[ \frac{w(s+h) - w(s)}{h} \right] - S(t-s)w'(s) \right\| \\ &= \left\| S(t-s-h) \left[ \frac{w(s+h) - w(s)}{h} \right] - S(t-s-h)w'(s) + S(t-s-h)w'(s) - S(t-s)w'(s) \right\| \\ &= \left\| S(t-s-h) \left[ \frac{w(s+h) - w(s)}{h} - w'(s) \right] + [S(t-s-h) - S(t-s)]w'(s) \right\|. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade triangular e a propriedade da álgebra dos operadores, obtemos

$$\begin{aligned} & \leq \left\| S(t-s-h) \left[ \frac{w(s+h) - w(s)}{h} - w'(s) \right] \right\| + \| [S(t-s-h) - S(t-s)] w'(s) \| \\ & \leq \| S(t-s-h) \| \left\| \frac{w(s+h) - w(s)}{h} - w'(s) \right\| + \| (S(t-s-h) - S(t-s))w'(s) \|. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Note que para intervalos limitados,  $\|S(t-s-h)\| \leq M$ . Além disso, por definição

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{w(s+h) - w(s)}{h} = w'(s),$$

também temos que o semigrupo  $S$  é fortemente contínuo. Então de (2.87) obtemos, quando  $h \rightarrow 0$  que

$$\begin{aligned} & \underbrace{\|S(t-s-h)\|}_{<M} \underbrace{\left\| \frac{w(s+h) - w(s)}{h} - w'(s) \right\|}_0 \text{ (Por definição)} + \underbrace{\| (S(t-s-h) - S(t-s))w'(s) \|}_0 \text{ (} S \text{ é fortemente contínuo)} \rightarrow 0 \\ & \Rightarrow \left\| S(t-s-h) \left[ \frac{w(s+h) - w(s)}{h} \right] - S(t-s)w'(s) \right\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Portanto, (2.85) está provado.

Agora, para provar (2.86) temos que considerar dois casos:  $h < 0$  e  $h > 0$ .

(i)  $h < 0$ . Neste caso  $-h > 0$  e portanto

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0^-} \left[ \frac{S(t-s-h) - S(t-s)}{h} \right] w(s) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \left[ \frac{S(t-s)S(-h) - S(t-s)}{h} \right] w(s) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^-} -S(t-s) \left[ \frac{S(-h) - I}{-h} \right] w(s) \\
 &= -S(t-s) \lim_{h \rightarrow 0^-} \left[ \frac{S(-h) - I}{-h} \right] w(s) \\
 &= -S(t-s)Aw(s).
 \end{aligned}$$

Lembre-se que,  $S(t-s) \in \mathcal{L}(X, X)$ , ou seja é uma função contínua, o que justifica a penúltima igualdade. Além disso perceba que  $w(s) \in D(A)$ , uma vez que por hipótese  $w = u - v$  com  $u, v \in D(A)$  e por fim  $A$  é o gerador infinitesimal de  $S$ , então por definição  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \left[ \frac{S(-h) - I}{-h} \right] w(s) = Aw(s)$ .

(ii)  $h > 0$ . Neste caso temos

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[ \frac{S(t-s-h) - S(t-s)}{h} \right] w(s) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[ \frac{S(t-s-h) - S(t-s-h+h)}{h} \right] w(s) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} S(t-s-h) \left[ \frac{I - S(h)}{h} \right] w(s) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} -S(t-s-h) \left[ \frac{S(h) - I}{h} \right] w(s) \\
 &= -S(t-s)Aw(s).
 \end{aligned}$$

Da mesma forma que o caso anterior  $S$  é um semigrupo fortemente contínuo e  $A$  é o gerador infinitesimal de  $S$ . Portanto (2.86) está provado.

Assim, de (2.84), (2.85) e (2.86), para  $0 \leq s \leq t < +\infty$ , resulta que

$$\frac{d}{ds} [S(t-s)w(s)] = S(t-s)Aw(s) - S(t-s)Aw(s) = 0,$$

o que implica que

$$S(t-s)w(s) = c(t), \tag{2.88}$$

sendo  $c(t)$  constante em relação ao parâmetro  $s$ . Se tomarmos uma sequência  $(s_n)$  com  $s_n \rightarrow t$  obtemos que

$$S(t-s_n)w(s_n) \rightarrow S(0)w(t).$$

Lembre-se que como  $S(t)$  é de classe  $C_0$  temos que  $\lim_{s \rightarrow t} S(s) = S(t)$  e além disso como  $w$  é solução forte de (2.77),  $w$  é uma função contínua, então como  $c(t)$  não depende de  $s$ , obtemos

$$S(0)w(t) = c(t) \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

e como  $S(0) = I$  vem que

$$w(t) = c(t) \quad \text{para todo } t \geq 0. \quad (2.89)$$

Por outro lado, se  $s = 0$  em (2.88) obtemos

$$S(t)w(0) = c(t) \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

e como  $w(0) = 0$  vem que  $c(t) = 0$  para todo  $t \geq 0$ . Retornando a (2.89) concluímos que  $w(t) = 0$  para todo  $t \geq 0$ , ou seja,  $u(t) = v(t)$  para todo  $t \geq 0$ , o que prova a unicidade.

Finalmente, se  $S$  for um semigrupo de contrações, resulta de (2.78) e (2.79) que

$$\|u(t)\| = \|S(t)u_0\| \leq \|S(t)\| \|u_0\| \leq \|u_0\| \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

A última desigualdade se justifica por  $S$  ser um semigrupo de contrações, e além disso

$$\left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| = \|AS(t)u_0\| = \|S(t)Au_0\| \leq \|S(t)\| \|Au_0\| \leq \|Au_0\| \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

o que conclui a prova.

(b) Nesse caso, queremos mostrar que, se  $u_0 \in X$  existe uma única solução *mild* do Problema de Cauchy dado em (2.77), ou seja, uma solução que satisfaz a Definição dada em 2.0.7:

- (i)  $u$  é contínua para todo  $t \geq 0$ ;
- (ii)  $\int_0^t u(s) ds \in D(A)$  para todo  $t \geq 0$ ;
- (iii)  $u(t) = A \int_0^t u(s) ds + u_0$ .

Seja  $u_0 \in X$ . Definimos  $u(t) = S(t)u_0$ . Segundo a Proposição 2.0.4 item (iii), dado  $u_0 \in X$  temos que  $\int_0^t S(\xi)u_0 d\xi \in D(A)$ , ou seja,  $\int_0^t u(s) ds \in D(A)$  (satisfazendo o item (ii)) e além disso ainda, pelo item (iii) da Proposição 2.0.4,

$$A \int_0^t S(\xi)u_0 d\xi = S(t)u_0 - u_0,$$

isto é,

$$u(t) = S(t)u_0 = A \int_0^t S(\xi)u_0 d\xi + u_0; \quad \text{com } u_0 \in X. \quad (2.90)$$

Por fim, verifiquemos o item (i) da definição, isto é, a continuidade de  $u(t)$ , para todo  $t \geq 0$ .

Para isso, seja  $t_n \rightarrow t_0$  em  $[0, \infty)$ . Então,

$$\|u(t_n) - u(t_0)\| = \|S(t_n)u_0 - S(t_0)u_0\| \rightarrow 0,$$

quando  $n \rightarrow +\infty$  pois  $S$  é fortemente contínuo. Dessa forma,  $u(t_n) \rightarrow u(t_0)$ , o que implica que  $u$  é contínua para todo  $t \geq 0$ , isto é,  $u \in C^0([0; +\infty); X)$ . Assim,  $u(t) = S(t)u_0$  é uma solução mild para o Problema de Cauchy (2.77).

Para concluir este item, vamos mostrar a unicidade desta solução dividindo a demonstração em duas etapas, na primeira etapa vamos mostrar para  $u_0 \equiv 0 \in X$  que a solução é  $u(t) \equiv 0$  e na segunda etapa mostraremos por contradição que a solução é única.

**Etapa 1:** Unicidade para  $u_0 \equiv 0$ .

Suponha que  $u$  seja solução mild do Problema de Cauchy 2.77 para  $u_0 \equiv 0$  e tome  $t > 0$ . Assim, para cada  $s \in (0; t)$ , veja que

$$\frac{d}{ds}S(t-s)x = -AS(t-s)x, \quad \text{com } x \in D(A)$$

e pela Proposição (1.4.11) veja que

$$\frac{d}{ds} \int_0^s u(r) dr = u(s) - u(0) = u(s) - u_0 = u(s).$$

Lembre-se que estamos na hipótese de  $u_0 \equiv 0$ . Então, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[ S(t-s) \int_0^s u(r) dr \right] &= S(t-s) \frac{d}{ds} \int_0^s u(r) dr + \frac{d}{ds} S(t-s) \int_0^s u(r) dr \\ &= S(t-s)u(s) - S(t-s)A \int_0^s u(r) dr \\ &= S(t-s)u(s) - S(t-s)u(s) = 0. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Lembre-se que como  $u$  é solução mild pela Definição dada em 2.0.7 temos que  $\int_0^s u(r) dr \in D(A)$  e que  $A \int_0^s u(r) dr = u(s)$ . Veja que, integrando a igualdade em (2.91) no intervalo  $(0; t)$  com respeito a  $s$ , pela Proposição 1.4.11 obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d}{ds} \left[ S(t-s) \int_0^s u(r) dr \right] ds &= \int_0^t 0 ds = 0; \\ \underbrace{\Rightarrow}_{1.4.11} S(t-t) \int_0^t u(r) dr - S(t-0) \int_0^0 u(r) dr &= 0; \\ \Rightarrow S(0) \int_0^t u(r) dr = \int_0^t u(r) dr &= 0 \end{aligned}$$

e, aplicando o operador  $A$  em ambos os lados da última igualdade concluímos que:

$$A \int_0^t u(r) dr = A(0) = 0 \Rightarrow u(t) \equiv 0$$

em  $(0, t)$  e  $u(t) = u(0) = 0$ , mostrando assim que se  $u$  é solução mild do Problema (2.77), para  $u_0 \equiv 0$ , então  $u \equiv 0$ .

**Etapa 2:** Unicidade Geral.

Sejam  $v$  e  $w$  soluções milds do Problema em (2.77) então, considere  $u(t) = v(t) - w(t)$ , para  $t \in [0, \infty)$ . Note que

$$\begin{aligned} A \int_0^t u(s) ds &= A \int_0^t v(s) - w(s) ds \\ &= A \int_0^t v(s) ds - A \int_0^t w(s) ds \\ &= (v(t) - v(0)) - (w(t) - w(0)) \\ &= (v(t) - w(t)) - (v(0) - w(0)) \\ &= u(t) - 0 = u(t) \end{aligned}$$

para  $u_0 \equiv 0$ ; ou seja,  $u$  verifica a condição (iii) na definição de solução *mild*. Além disso, temos também que  $u$ , por definição, é contínua (para todo  $t \geq 0$ ) pois  $v$  e  $w$  o são e ainda,  $u \in D(A)$ . Sendo assim,  $u$  é solução mild do Problema (2.77) para  $u_0 \equiv 0$ . Daí, pela Etapa 1, temos que  $u \equiv 0$ , ou ainda,  $v(t) = w(t)$  para todo  $t \geq 0$ , donde segue a unicidade da solução mild e conclui a prova deste teorema.  $\square$

# Capítulo 3

## Aplicação a Equação de Schrödinger

Consideremos a equação de Schrödinger

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = -i\Delta u(t), & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(0) = u_0, & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é aberto, limitado e com fronteira regular.

A equação de Schrödinger foi desenvolvida em 1926 pelo físico austríaco Erwin Schrödinger. Sua motivação foi encontrar uma equação para a matéria que evoluísse com o tempo, fundamentada na hipótese de Louis de Broglie, segundo a qual toda partícula material possui comportamento ondulatório. Inspirado pela teoria ondulatória da luz, Schrödinger procurou uma equação de onda para a matéria que explicasse o movimento das partículas.

A Equação de Schrödinger tornou-se a base da mecânica quântica moderna. Ela é uma equação diferencial cuja solução é a função de onda  $\psi$ . A partir desta solução, é possível determinar os estados possíveis de uma partícula, sem a necessidade de hipóteses arbitrárias.

Ao resolver sua equação para o átomo de hidrogênio, Schrödinger obteve resultados idênticos aos da teoria de Bohr, mas de forma mais geral e fundamentada. Posteriormente, Max Born reinterpretou o significado físico da solução  $\psi$ , propondo que  $|\psi|^2$  representa a probabilidade de encontrar a partícula em determinado ponto do espaço (veja mais em [11]).

A forma da equação de Schrödinger depende do sistema em questão, mas a equação geral para uma partícula não relativística (ou seja, partículas que não se movem a velocidades próximas à da luz) é:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V\Psi.$$

Nessa equação:

- $i$  representa a unidade imaginária, tal que  $i^2 = -1$ ;
- $\hbar$  é a constante de Planck reduzida, dada por  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ , onde  $h$  é a constante de Planck;
- $\Psi$  é a função de onda;
- $t$  é o tempo;
- $m$  é a massa da partícula;
- $\Delta$  é o operador laplaciano, que descreve a divergência do gradiente;
- $V$  é um potencial.

O estudo matemático da Equação de Schrödinger revela-se de grande interesse para diversas áreas da matemática, especialmente para a teoria de equações diferenciais parciais (EDP), teoria do controle, teoria de operadores, análise espectral e geometria microlocal, porque ela combina, de modo complexo, aspectos de dinâmica, oscilação complexa, propagação de ondas, dispersão, invariâncias e transformação de fase. Destacamos a teoria de controle, na qual há diversas linhas de pesquisa ativas atualmente. Nela a função de onda é considerada como estado de um sistema quântico, e podemos atuar sobre o sistema por meio de potenciais ou pela geometria do domínio, buscando controlabilidade ou estabilização desse sistema descrito pela EDP (veja por exemplo [3], [10], [17], [22]). Nesse contexto, são resolvidos problemas tais como “em que condições posso levar o sistema de um estado quântico inicial a um estado destino em tempo finito?”, ou “quais são espaços-função adequados para garantir existência, unicidade e regularidade das soluções sob controle?”. Além disso, do ponto de vista da análise, há problemas extremamente difíceis sobre as estimativas de dispersão (Desigualdades de Strichartz,

veja por exemplo [22, pg. 74]), de comportamento assintótico o que torna a equação atrativa para estudo.

O objetivo deste capítulo é reformular a equação (3.1) como um Problema de Cauchy abstrato (definido em 2.77) em um espaço de Banach apropriado. A partir dessa formulação, utiliza-se a Teoria de Semigrupos de Operadores Lineares para analisar a existência e unicidade da solução. Como foi mostrado no Teorema 2.0.2, basta mostrar que o operador linear  $-i\Delta$  em (3.1) é o gerador infinitesimal de um semigrupo. Essa demonstração será feita aplicando o Teorema de Hille-Yosida (Teorema 2.0.1) que fornece as condições necessárias e suficientes para que um operador linear seja o gerador de um semigrupo.

Inicialmente, estabeleceremos algumas definições e propriedades sobre o adjunto de um operador, operador autoadjunto, antiadjunto e espaços de Hilbert complexos. O que será explanado aqui pode ser consultado com mais detalhes em [4] e [8].

Seja  $H$  um espaço de Hilbert com produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  (veja a Definição 1.3.8). Seja  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  um operador linear em  $H$  com domínio  $D(A)$  denso. Graças ao Teorema da representação de Riesz [4, Teorema 4.11],  $H^*$  pode ser identificado com  $H$ . Assim, o adjunto  $A^*$  de  $A$  pode ser definido como se segue. Primeiro definimos seu domínio como

$$D(A^*) = \left\{ x \in H^* ; \exists C < \infty \text{ tal que } \forall y \in D(A), |\langle Ay, x \rangle| \leq C\|y\| \right\}.$$

Começemos verificando que  $D(A^*)$  é um subespaço de  $H^*$ . Sejam  $u, v \in D(A^*)$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$ , então por definição de  $D(A^*)$ , para todo  $y \in D(A)$  temos que

$$|\langle Ay, u \rangle| \leq C_1\|y\| \quad \text{e} \quad |\langle Ay, v \rangle| \leq C_2\|y\|.$$

A partir dessas desigualdades, obtemos

$$\begin{aligned} |\langle Ay, \alpha u + v \rangle| &= |\bar{\alpha} \langle Ay, u \rangle + \langle Ay, v \rangle| \\ &\leq |\bar{\alpha}| \cdot |\langle Ay, u \rangle| + |\langle Ay, v \rangle| \\ &\leq |\alpha|C_1\|y\| + C_2\|y\| = (|\alpha|C_1 + C_2)\|y\|. \end{aligned}$$

Logo  $\alpha u + v \in D(A^*)$  o que implica que  $D(A^*)$  é um subespaço vetorial de  $H^*$ .

Agora, dado  $x \in D(A^*)$ , consideremos a aplicação

$$g : D(A) \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto g(y) = \langle Ay, x \rangle.$$

Veja que essa função é linear porque se  $u, v \in D(A)$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$ , por definição da  $g$ , linearidade de  $A$  e propriedades do produto interno, tem-se

$$\begin{aligned} g(\alpha u + v) &= \langle A(\alpha u + v), x \rangle \\ &= \langle \alpha Au + Av, x \rangle \\ &= \alpha \langle Au, x \rangle + \langle Av, x \rangle \\ &= \alpha g(u) + g(v), \quad x \in D(A^*). \end{aligned}$$

Além disso, como  $x \in D(A^*)$  a aplicação satisfaz  $|g(y)| = |\langle Ay, x \rangle| \leq C\|y\|$  para todo  $y \in D(A)$ . Consequentemente, (veja [2, Corolário 3.1.3]) essa aplicação pode ser estendida, por continuidade, a uma aplicação linear contínua  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ . Segue-se que  $f \in H^*$ , e denotamos  $A^*x = f$ . O operador linear

$$A^* : D(A^*) \subset H^* \rightarrow H^*, \quad A^*x = f,$$

é chamado de operador adjunto de  $A$ . Neste caso, podemos considerar

$$A^* : D(A^*) \subset H \rightarrow H, \quad A^*x = f.$$

A relação fundamental entre  $A$  e  $A^*$  é dada por

$$\langle Ay, x \rangle = \langle y, A^*x \rangle, \quad \forall y \in D(A), x \in D(A^*). \quad (3.2)$$

**Definição 3.0.1.** Um operador  $A$  em  $H$  com domínio denso é chamado de simétrico (respectivamente, antissimétrico) se

$$G(A) \subset G(A^*) \quad (\text{respectivamente, } G(A) \subset G(-A^*)).$$

Um operador  $A$  em  $H$  com domínio denso é chamado de autoadjunto (respectivamente, antiadjunto) se

$$A = A^* \quad (\text{respectivamente, } A = -A^*).$$

**Proposição 3.0.1.** *O operador linear  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  é simétrico, se e somente se,  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ , para todo  $x, y \in D(A)$ . Do mesmo modo,  $A$  é antissimétrico se, e somente se,*

$$\langle Ax, y \rangle = -\langle x, Ay \rangle, \quad \text{para todo } x, y \in D(A).$$

**Demonstração.** Se  $A$  é simétrico por definição temos que  $G(A) \subset G(A^*)$ . Dessa forma dados  $x, y \in D(A)$ , temos que o par  $(y, Ay) \in G(A)$ , logo  $(y, Ay) \in G(A^*)$ , ou seja  $A^*y = Ay$ , desde que  $y \in D(A)$ , nesse caso note que  $y$  também pertence a  $D(A^*)$ . Pela propriedade de operador adjunto

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &= \langle x, A^*y \rangle \\ &= \langle x, Ay \rangle. \end{aligned}$$

Agora, suponha que  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ , pela propriedade do operador adjunto, temos

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle = \langle x, A^*y \rangle.$$

Concluimos que quando  $y \in D(A)$ ,  $Ay = A^*y$ , por isso o par  $(y, Ay) \in G(A)$ , e  $(y, Ay) = (y, A^*y) \in G(A^*)$ , logo  $G(A) \subset G(A^*)$ .

A demonstração da segunda afirmação é análoga. □

Além disso, se  $A$  é autoadjunto (respectivamente, antiadjunto), então  $A$  é simétrico (respectivamente, antissimétrico). De fato, se  $A$  é autoadjunto, então por definição  $A = A^*$  o que implica que, para todo  $y \in D(A)$ ,  $Ay = A^*y$ , logo  $G(A) \subset G(A^*)$ . Da mesma maneira é possível verificar o caso em que  $A$  é antiadjunto.

**Lema 3.0.1.** *Seja  $A$  um operador linear em um espaço de Hilbert  $H$  com domínio denso. Se  $A$  é antiadjunto, isto é,  $A^* = -A$ , então  $A$  é fechado.*

**Demonstração.** Isso é consequência direta da [4, Proposição 2.17], porém vamos esboçar os detalhes para conveniência do leitor. Suponha que  $(x_n) \subset D(A)$  seja tal que  $x_n \rightarrow x$  em  $H$  e  $Ax_n \rightarrow y$  em  $H$ . Queremos mostrar que  $x \in D(A)$  e  $Ax = y$ .

Para qualquer  $z \in D(A)$ , para todo  $n$ , pela propriedade de operador adjunto, temos

$$\langle Ax_n, z \rangle = \langle x_n, A^*z \rangle.$$

Como  $A^* = -A$ , isto se escreve

$$\langle Ax_n, z \rangle = \langle x_n, -Az \rangle = -\langle x_n, Az \rangle.$$

Tomando limite quando  $n \rightarrow \infty$  e usando que  $x_n \rightarrow x$  e  $Ax_n \rightarrow y$ , obtemos

$$\langle y, z \rangle = -\langle x, Az \rangle, \quad \text{para todo } z \in D(A).$$

Da última igualdade segue que a aplicação linear  $z \mapsto \langle x, Az \rangle$  é contínua em  $D(A)$  (com a norma de  $H$ ), de fato

$$|\langle x, Az \rangle| = |\langle y, z \rangle| \leq \|y\| \|z\| \quad \text{para todo } z \in D(A),$$

logo existe  $C = \|y\| < \infty$  tal que  $|\langle x, Az \rangle| \leq C\|z\|$  para todo  $z \in D(A)$ . Pela definição do adjunto, isto implica  $x \in D(A^*)$  e  $A^*x$  é o elemento de  $H$  que satisfaz

$$\langle A^*x, z \rangle = \langle x, Az \rangle \quad \text{para todo } z \in D(A).$$

Mas da igualdade anterior temos  $\langle x, Az \rangle = -\langle y, z \rangle$ , logo

$$\langle A^*x, z \rangle = -\langle y, z \rangle$$

$$\langle A^*x, z \rangle + \langle y, z \rangle = 0$$

$$\langle A^*x + y, z \rangle = 0 \quad \text{para todo } z \in D(A).$$

Pela propriedade (5) de produto interno (veja a Definição 1.3.7), obtemos que  $A^*x = -y$ . Como  $A^* = -A$  por hipótese, obtemos

$$-Ax = -y \implies Ax = y,$$

e também  $x \in D(A)$ . Portanto  $(x, y) \in G(A)$ , mostrando que o gráfico  $G(A)$  é fechado. Assim,  $A$  é fechado.  $\square$

Estabelecemos, agora, uma propriedade útil de operadores autoadjuntos em espaços de Hilbert complexos. Seja  $H$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$ , equipado com uma norma  $\|\cdot\|$  que o faz um espaço de Banach com o corpo  $\mathbb{R}$ . Recordamos que  $H$  é um espaço de Hilbert complexo se existir uma aplicação  $b : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$  com as seguintes propriedades:

$$\left\{ \begin{array}{ll} b(\lambda x + \mu y, z) = \lambda b(x, z) + \mu b(y, z), & \forall x, y, z \in H, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}; \\ b(y, x) = \overline{b(x, y)}, & \forall x, y \in H; \\ b(ix, y) = i b(x, y), & \forall x, y \in H; \\ b(x, x) = \|x\|^2 \geq 0, & \forall x \in H. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Segue que  $H$ , equipado com produto interno

$$(x, y) := \Re(b(x, y)),$$

é um espaço de Hilbert real.

O operador adjunto de  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  definido em um espaço de Hilbert complexo pode ser construído de maneira similar ao caso de espaços de Hilbert real, de modo que a relação em (3.2) permanece válida. Destacamos que a operação  $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  não é válida nesse contexto. Para mais detalhes sobre espaços de Hilbert complexos, consulte a seção 11.4 - Banach Spaces over  $\mathbb{C}$ : What Is Similar and What Is Different? de [4].

**Lema 3.0.2.** *Seja  $H$  um espaço de Hilbert complexo, e seja  $A$  um operador em  $H$ . Suponha que  $A$  seja  $\mathbb{C}$ -linear, isto é:*

$$A(\alpha x + y) = \alpha Ax + Ay, \quad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{C}, \quad \text{para todo } x, y \in D(A)$$

e seja  $iA$  o operador definido por

$$D(iA) = D(A), \quad (iA)x = i(Ax), \quad \text{para todo } x \in D(A).$$

Se  $D(A)$  é denso em  $H$ , então  $A^*$  é  $\mathbb{C}$ -linear e

$$(iA)^* = -i(A^*).$$

**Demonstração.** Primeiramente, vamos mostrar que  $A^*$  é  $\mathbb{C}$ -linear. Seja  $(x, f) \in G(A^*)$ . Para todo  $(y, g) \in G(A)$  e todo  $\lambda \in \mathbb{C}$ , temos

$$\begin{aligned} \langle \lambda f, y \rangle &= \langle f, \bar{\lambda} y \rangle \\ &= \langle A^* x, \bar{\lambda} y \rangle \\ &= \langle x, A(\bar{\lambda} y) \rangle \\ &= \langle x, \bar{\lambda} Ay \rangle \\ &= \langle \lambda x, Ay \rangle = \langle A^*(\lambda x), y \rangle. \end{aligned}$$

Logo,  $A^*(\lambda x) = \lambda f$  segue que  $(\lambda x, \lambda f) \in G(A^*)$ . Além disso seja  $(x_1, f_1), (x_2, f_2) \in G(A^*)$ , para todo  $(y, g) \in G(A)$ , temos

$$\begin{aligned} \langle f_1 + f_2, y \rangle &= \langle f_1, y \rangle + \langle f_2, y \rangle \\ &= \langle A^* x_1, y \rangle + \langle A^* x_2, y \rangle \\ &= \langle x_1, Ay \rangle + \langle x_2, Ay \rangle \\ &= \langle x_1 + x_2, Ay \rangle \\ &= \langle A^*(x_1 + x_2), y \rangle, \end{aligned}$$

portanto  $A^*$  é  $\mathbb{C}$ -linear. Agora queremos mostrar que  $(iA)^* = -i(A^*)$ , dado  $(x, f) \in G(A^*)$  e  $(y, g) \in G(A)$ , temos

$$\begin{aligned} \langle -if, y \rangle &= \langle f, iy \rangle \\ &= \langle A^*x, iy \rangle \\ &= \langle x, A(iy) \rangle = \langle x, iAy \rangle \\ \langle -i(A^*x), y \rangle &= \langle (iA)^*x, y \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,  $(x, -if) \in G((iA)^*)$ , assim,  $G(-iA^*) \subset G((iA)^*)$ . Aplicando este resultado a  $iA$ , obtemos  $G(-i(iA)^*) \subset G(-A^*)$ , veja a seguir.

Sejam  $(x, f) \in G((iA)^*)$ ,  $(y, g) \in G(iA)$  e  $(x, -if) \in G(-i(iA)^*)$ . Temos

$$\begin{aligned} \langle if, y \rangle &= \langle f, -iy \rangle \\ &= \langle (iA)^*x, -iy \rangle \\ &= \langle x, (iA)(-iy) \rangle = \langle x, Ay \rangle \\ &= \langle A^*x, y \rangle. \end{aligned}$$

Mostramos que  $A^*x = if$ . Multiplique ambos os membros por  $-i$ , obtemos  $-iA^* = f$ . Logo  $(x, f) \in G(-iA^*)$  o que implica que  $G((iA)^*) \subset G(-iA^*)$ , e portanto,

$$G((iA)^*) = G(-iA^*).$$

Isto conclui a demonstração. □

**Corolário 3.0.1.** *Seja  $H$  um espaço de Hilbert complexo, e seja  $A$  um operador em  $H$ . Se  $A$  é  $\mathbb{C}$ -linear, então as seguintes propriedades são equivalentes:*

(i)  $A$  é autoadjunto;

(ii)  $iA$  é antiadjunto.

**Demonstração.** Suponha que  $A$  seja autoadjunto,  $A = A^*$ . Segue do Lema 3.0.2 que

$$(iA)^* = -iA^* = -iA,$$

e, portanto,  $iA$  é antiadjunto.

Reciprocamente, se  $iA$  é antiadjunto, então

$$\begin{aligned}
 A^* &= (-i iA)^* \\
 &= (-i)^*(iA)^* \\
 &= i(iA)^* \quad (\text{pelo Lema 3.0.2}) \\
 &= i(-iA) \quad \text{pois } (iA)^* = -iA \\
 &= A.
 \end{aligned}$$

Assim,  $A$  é autoadjunto. □

**Teorema 3.0.1 (Existência e unicidade de Solução para a equação de Schrödinger).** *O problema (3.1) possui uma única solução  $u$  na classe*

$$C^0([0, \infty); H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap C^1([0, \infty); L^2(\Omega)),$$

quando  $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ , sendo  $\Omega$  um domínio limitado com fronteira regular.

Antes de provar o teorema, façamos algumas observações técnicas:

(a)  $H_0^1(\Omega)$  é um espaço de Hilbert complexo com norma

$$\|u\|_{H_0^1} := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \quad (3.4)$$

induzida pela aplicação

$$b(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} dx.$$

De fato,  $H_0^1(\Omega)$  é completo com a norma (3.4), graças a desigualdade de Poincaré (Teorema 1.3.5). Assim basta mostrar que a aplicação  $b$  satisfaz as propriedades em (3.3). A seguir faremos a verificação:

(1) Se  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  e  $u_1, u_2, v \in H_0^1(\Omega)$ , então, pela linearidade do gradiente e da integral

$$\begin{aligned} b(\lambda u_1 + \mu u_2, v) &= \int_{\Omega} \nabla(\lambda u_1 + \mu u_2) \cdot \overline{\nabla v} \, dx \\ &= \lambda \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \overline{\nabla v} \, dx + \mu \int_{\Omega} \nabla u_2 \cdot \overline{\nabla v} \, dx \\ &= \lambda b(u_1, v) + \mu b(u_2, v). \end{aligned}$$

(2) Para quaisquer  $u, v \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$\overline{b(u, v)} = \overline{\int_{\Omega} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \, dx} = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \overline{\nabla u} \, dx = b(v, u).$$

(3) Para  $u, v \in H_0^1(\Omega)$  temos

$$b(iu, v) = \int_{\Omega} \nabla(iu) \cdot \overline{\nabla v} \, dx = i \int_{\Omega} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \, dx = i b(u, v).$$

(4) Para qualquer  $u \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$b(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx = \|\nabla u\|_{L^2}^2 = \|u\|_{H_0^1}^2 \geq 0.$$

(b) Uma aplicação  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ , onde  $V$  é um espaço de Hilbert complexo, é chamada de forma sesquilinear se satisfaz:

$$(i) \quad a(\lambda_1 u + \lambda_2 u', v) = \lambda_1 a(u, v) + \lambda_2 a(u', v)$$

$$(ii) \quad a(u, \lambda_1 v + \lambda_2 v') = \overline{\lambda_1} a(u, v) + \overline{\lambda_2} a(u, v')$$

para todos  $u, u', v, v' \in V$  e  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ .

(c) A forma sesquilinear  $a(\cdot, \cdot)$ , definida no espaço de Hilbert complexo  $V$  é dita contínua (ou limitada), se existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|, \quad \text{para todos } u, v \in V.$$

(d) A forma sesquilinear  $a(\cdot, \cdot)$  definida no espaço de Hilbert complexo  $V$  é dita coerciva se existe uma constante  $\alpha > 0$  tal que

$$\Re a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \text{para todo } v \in V.$$

(e) Uma aplicação  $\ell : V \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $V$  espaço de Hilbert complexo, é chamada de antilinear se

$$\ell(\alpha v + \beta w) = \bar{\alpha} \ell(v) + \bar{\beta} \ell(w), \quad \text{para todos } v, w \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Ela é contínua se existe  $C > 0$  tal que  $|\ell(v)| \leq C\|v\|$  para todo  $v \in V$ .

O resultado a seguir constitui uma extensão natural do Teorema de Lax-Milgram para o caso de formas sesquilineares, correspondendo à generalização necessária quando se trabalha em espaços de Hilbert complexos, onde as formas bilineares do caso real são substituídas por sesquilineares. Essa formulação é essencial para tratar problemas que envolvem operadores com coeficientes complexos. Uma demonstração pode ser encontrada em [5, Corolário 5.128].

**Teorema 3.0.2** (Lema de Lax-Milgram). *Seja  $\ell(v)$  uma forma antilinear e contínua em um espaço de Hilbert complexo  $V$  e  $a(u, v)$  uma forma sesquilinear contínua e coerciva em  $V$ . Então, existe um único  $u \in V$  tal que*

$$a(u, v) = \ell(v), \quad \text{para todo } v \in V.$$

**Demonstração do Teorema 3.0.1.** Defina  $X = L^2(\Omega)$  e o operador  $B$  em  $X$  por

$$D(B) = \{u \in H_0^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}, \quad Bu = -i\Delta u, \quad \text{para todo } u \in D(B). \quad (3.5)$$

A estratégia da prova consiste em verificar que o operador  $B$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo  $S : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X, X)$  por meio do Teorema de Hille Yosida (Teorema 2.0.1). Resultará de maneira imediata do Teorema 2.0.2 a existência e unicidade de solução. Assim, comecemos verificando que o operador  $B$  é fechado e densamente definido.

Notemos inicialmente que  $C_0^\infty(\Omega) \subset D(B)$ . Veja que pela Definição 1.3.11, o conjunto  $C_0^\infty(\Omega)$  é denso em  $H_0^1(\Omega)$ , portanto resta verificar que se  $u \in C_0^\infty(\Omega)$  então  $\Delta u \in L^2(\Omega)$ . De fato, como  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , é infinitamente diferenciável, a função  $\partial^2 u / \partial x_i^2$  é contínua, além disso possui suporte compacto. Portanto  $\Delta u \in L^2(\Omega)$ . Assim, temos que

$$C_0^\infty(\Omega) \subset D(B) \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega),$$

mas, pela Proposição 1.2.3, sabemos que  $C_0^\infty(\Omega)$  é denso em  $L^2(\Omega)$ , isto é,  $\overline{C_0^\infty(\Omega)} = L^2(\Omega)$ , por isso,

$$L^2(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)} \subset \overline{D(B)} \subset L^2(\Omega),$$

e segue que  $D(B)$  é denso em  $X$ .

Para mostrar que  $B$  é fechado, basta mostrar que  $-iB = -\Delta$  é autoadjunto. Pelo Corolário 3.0.1 seguirá que  $-i^2B = B$  é antiadjunto, e, portanto pelo Lema 3.0.1,  $B$  será um operador fechado.

Se  $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$  então, por integração por partes (veja [13, Apêndice C - Teorema 3]) (os termos de fronteira se anulam) temos

$$\begin{aligned} \langle -\Delta u, v \rangle_{L^2} &= \int_{\Omega} (-\Delta u) \bar{v} \, dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \bar{v} \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \, dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \, dx \\ &= - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} u \, dx + \int_{\Omega} u (-\Delta \bar{v}) \, dx \\ &= \langle u, -\Delta v \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

Resulta por densidade que a identidade acima é satisfeita para  $u, v \in D(-\Delta) = D(B)$ . Pelas considerações acima, segue que  $B$  é um operador fechado. Isto mostra que é válido a condição (i) do Teorema de Hille-Yosida.

Agora, vamos verificar a condição (ii) do Teorema de Hille-Yosida estudando o resolvente do operador  $B$ . Vamos provar que para todo  $\lambda > 0$  tem-se  $\lambda \in \rho(B)$  e

$$\|R(\lambda, B)\|_{\mathcal{L}(X, X)} \leq \frac{1}{\lambda}. \quad (3.6)$$

Tomemos  $\lambda > 0$  e  $f \in L^2(\Omega)$  arbitrária. Inicialmente, vamos mostrar que existe  $u \in H_0^1(\Omega)$  que resolve o problema

$$(\lambda I - B)u = (\lambda I - (-i\Delta))u = f \quad \text{em } L^2(\Omega). \quad (3.7)$$

Multiplicando a equação por  $i$ , obtemos a forma equivalente

$$-\Delta u + i\lambda u = if. \quad (3.8)$$

Definimos em  $V := H_0^1(\Omega)$  a aplicação

$$a(u, v) := \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2} + i\lambda \langle u, v \rangle_{L^2}, \quad u, v \in V.$$

Verifiquemos que  $a(\cdot, \cdot)$  é uma forma sesquilinear:

(i) Para quaisquer  $u_1, u_2, v \in V$  e  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ , tem-se

$$\begin{aligned} a(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) &= \langle \nabla(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2), \nabla v \rangle_{L^2} + i\lambda \langle \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v \rangle_{L^2} \\ &= \lambda_1 \langle \nabla u_1, \nabla v \rangle_{L^2} + \lambda_2 \langle \nabla u_2, \nabla v \rangle_{L^2} + i\lambda (\lambda_1 \langle u_1, v \rangle_{L^2} + \lambda_2 \langle u_2, v \rangle_{L^2}) \\ &= \lambda_1 a(u_1, v) + \lambda_2 a(u_2, v), \end{aligned}$$

e

(ii) Para quaisquer  $u, v_1, v_2 \in V$  e  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ , tem-se

$$\begin{aligned} a(u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= \langle \nabla u, \nabla(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \rangle_{L^2} + i\lambda \langle u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \rangle_{L^2} \\ &= \overline{\lambda_1} \langle \nabla u, \nabla v_1 \rangle_{L^2} + \overline{\lambda_2} \langle \nabla u, \nabla v_2 \rangle_{L^2} + i\lambda (\overline{\lambda_1} \langle u, v_1 \rangle_{L^2} + \overline{\lambda_2} \langle u, v_2 \rangle_{L^2}) \\ &= \overline{\lambda_1} a(u, v_1) + \overline{\lambda_2} a(u, v_2). \end{aligned}$$

Como preparação para o uso do Lema de Lax-Milgram, vamos mostrar que a forma sesquilinear  $a(\cdot, \cdot)$  é contínua e coerciva.

- *Continuidade.* Usando respectivamente a desigualdade triangular, a desigualdade de Hölder (Teorema 1.2.1) e a desigualdade de Poincaré (Teorema 1.3.5), existe  $C_1 > 0$  tal que

$$\begin{aligned}
 |a(u, v)| &= |\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2} + i\lambda \langle u, v \rangle_{L^2}| \\
 &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} dx + i\lambda \int_{\Omega} u \bar{v} dx \right| \\
 &\leq \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla v| dx + \lambda \int_{\Omega} |u| |v| dx \quad (\text{Desigualdade Triangular}) \\
 &= \|\nabla u \cdot \nabla v\|_{L^1(\Omega)} + \lambda \|u \cdot v\|_{L^1(\Omega)} \\
 &\stackrel{1.2.1}{\leq} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \lambda \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\stackrel{1.3.5}{\leq} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \lambda C^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\
 &= (1 + \lambda C^2) \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} \leq C_1 \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1},
 \end{aligned}$$

para todos  $u, v \in V$

- *Coercividade.* Observe que a parte real de  $a(\cdot, \cdot)$  é

$$\Re a(u, u) = \|\nabla u\|_{L^2}^2 = \|u\|_{H_0^1}^2.$$

Assim  $a$  é coerciva em  $(V, \|\cdot\|_V)$ .

Agora considere a aplicação  $\ell : V \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$\ell(v) := \langle if, v \rangle_{L^2}.$$

Note que  $\ell$  é antilinear. De fato,

$$\ell(\alpha v + \beta w) = \langle if, \alpha v + \beta w \rangle_{L^2} = \bar{\alpha} \langle if, v \rangle_{L^2} + \bar{\beta} \langle if, w \rangle_{L^2} = \bar{\alpha} \ell(v) + \bar{\beta} \ell(w),$$

para todos  $v, w \in V$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Além disso  $\ell$  é contínua em  $V$  pois, pela desigualdade de Hölder (Teorema 1.2.1), obtemos

$$|\ell(v)| = |\langle if, v \rangle_{L^2}| \leq \int_{\Omega} |if| |\bar{v}| dx \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2}.$$

Aplicando o Lema de Lax-Milgram (Teorema 3.0.2), existe único  $u \in V$  tal que

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2} + i\lambda \langle u, v \rangle_{L^2} = \langle if, v \rangle_{L^2}, \quad \text{para todo } v \in V. \quad (3.9)$$

Desta identidade e do Teorema de regularidade do problema elíptico ([4, Teorema 9.25]), resulta que  $u \in H^2(\Omega)$ . Portanto  $u \in D(B)$ . Tomando  $v \in C_0^\infty(\Omega)$  e integrando por partes em (3.9), obtemos

$$\langle -\Delta u, v \rangle_{L^2} + i\lambda \langle u, v \rangle_{L^2} = \langle if, v \rangle_{L^2}.$$

ou seja,

$$\langle -\Delta u + i\lambda u - if, v \rangle_{L^2} = 0.$$

Como  $C_0^\infty(\Omega)$  é denso em  $L^2(\Omega)$  e a aplicação  $v \mapsto \langle w, v \rangle_{L^2}$  é contínua, podemos tomar uma sequência  $(v_n)$  em  $C_0^\infty(\Omega)$  convergindo para  $-\Delta u + i\lambda u - if \in L^2(\Omega)$ , de modo que, substituindo  $v$  por  $v_n$  na identidade acima, e passando o limite, obtemos

$$\| -\Delta u + i\lambda u - if \|_{L^2}^2 = \langle -\Delta u + i\lambda u - if, -\Delta u + i\lambda u - if \rangle_{L^2} = 0,$$

ou seja, vemos que vale a identidade em  $L^2(\Omega)$ :

$$-\Delta u + i\lambda u = if.$$

Isto prova a identidade (3.8). Voltando à forma original, na equação (3.7), obtemos

$$(\lambda I - (-i\Delta))u = f.$$

Portanto  $(\lambda I - B) : D(B) \rightarrow L^2(\Omega)$  é sobrejetivo e, pela unicidade da solução, também é injetivo, logo invertível. Concluimos assim que se  $\lambda > 0$ , então  $\lambda \in \rho(B)$ .

Resta a estimativa resolvente. Tomando  $v = iu$  na identidade (3.9), temos

$$\langle \nabla u, \nabla(iu) \rangle_{L^2} + i\lambda \langle u, iu \rangle_{L^2} = \langle if, iu \rangle_{L^2},$$

de onde segue que

$$\lambda \langle u, u \rangle_{L^2} - i \langle \nabla u, \nabla u \rangle_{L^2} = \langle f, u \rangle_{L^2}.$$

Tomando a parte real, e usando a desigualdade de Hölder (Teorema 1.2.1), obtemos

$$\lambda \|u\|_{L^2}^2 = \Re \langle f, u \rangle_{L^2} \leq \left| \int_{\Omega} f \bar{u} dx \right| \leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2}.$$

Daí,

$$\|u\|_{L^2} \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^2}.$$

Como  $u = R(\lambda, B)f$ , onde  $R(\lambda, B) = (\lambda I - B)^{-1}$  (conforme (3.7)), nós obtemos

$$\|R(\lambda, B)f\|_{L^2} \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^2}.$$

Tomando o sup com  $\|f\|_{L^2} \leq 1$ , chegamos em  $\|R(\lambda, B)\|_{\mathcal{L}(X, X)} \leq 1/\lambda$ , o que dá a desigualdade (3.6).

Tomando à potência  $n$  do operador resolvente, e usando a propriedade da álgebra dos operadores, obtemos também

$$\|R(\lambda, B)^n\| \leq \|R(\lambda, B)\|^n \leq \frac{1}{\lambda^n}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Isto verifica a condição (ii) do Teorema de Hille-Yosida com  $M = 1$  e  $\omega = 0$ .

Conforme o comentário inicial, aplicando o Teorema de Hille-Yosida (Teorema 2.0.1),  $B$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo  $S : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X, X)$  de classe  $C_0$ . Então resulta do Teorema 2.0.2 que o problema (3.1) possui única solução na classe

$$C^0([0, \infty); H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap C^1([0, \infty); L^2(\Omega)),$$

como queríamos demonstrar. □

# Considerações Finais

O presente Trabalho de Conclusão de Curso teve como objetivo compreender os fundamentos da Teoria de Semigrupos de operadores lineares e aplicá-la à equação de Schrödinger linear, buscando analisar a existência e unicidade de soluções em problemas de evolução.

Ao longo do desenvolvimento dos capítulos 2 e 3, foi possível demonstrar que a teoria de semigrupos fornece uma estrutura abstrata capaz de garantir a existência e unicidade de soluções em espaços de Banach ou Hilbert adequados. Em particular, mostrou-se que o operador  $-i\Delta$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo em  $L^2(\Omega)$ , garantindo a existência e unicidade de solução para o problema de Cauchy associado à equação de Schrödinger linear.

O estudo evidenciou a relação direta entre o Teorema de Hille–Yosida e a geração de semigrupos fortemente contínuos, demonstrando a conexão entre a teoria abstrata de operadores e suas aplicações em equações diferenciais parciais de evolução.

Como continuidade deste estudo, pode-se aprofundar o conhecimento em outros resultados importantes da teoria, como os Teoremas de Lumer–Phillips e de Stone, que ampliam a compreensão sobre as condições nas quais um operador pode gerar um semigrupo e suas principais propriedades. Além disso, futuras pesquisas poderão incluir a análise de problemas de evolução não homogêneos, que envolvem termos variáveis no tempo e permitem uma visão mais ampla e detalhada dos fenômenos estudados.

# Referências Bibliográficas

- [1] BARTLE, R. G., 2014, *The elements of integration and Lebesgue measure*. John Wiley & Sons. Citado nas páginas [9](#), [12](#) e [13](#).
- [2] BOTELHO, G., PELLEGRINO, D., TEIXEIRA, E. V., 2011, *Fundamentos de Análise Funcional*. Rio de Janeiro, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Citado nas páginas [1](#), [8](#), [9](#), [11](#), [20](#), [23](#), [26](#), [32](#), [77](#) e [112](#).
- [3] BOURGAIN, J., 1999, *Global solutions of nonlinear Schrodinger equations*, v. 46. American Mathematical Soc. Citado na página [110](#).
- [4] BREZIS, H., BRÉZIS, H., 2011, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, v. 2. Springer. Citado nas páginas [1](#), [111](#), [114](#), [115](#) e [124](#).
- [5] CAVALCANTI, M. M., CAVALCANTI, V. D., KOMORNIK, V., 2011, “Introdução a análise funcional”, *Eduem, Maringá*. Citado na página [120](#).
- [6] CAVALCANTI, M. M., CAVALCANTI, V. N. D., 2007, *Introdução à teoria das distribuições e aos espaços de Sobolev*. Maringá, Universidade Estadual de Maringá, Departamento de Matemática. Citado nas páginas [1](#), [15](#) e [16](#).
- [7] CAZENAVE, T., 2003, *Semilinear Schrodinger Equations*, v. 10. American Mathematical Soc. Citado na página [35](#).
- [8] CAZENAVE, T., HARAUX, A., 1998, *An introduction to semilinear evolution equations*, v. 13. Oxford University Press. Citado na página [111](#).
- [9] DAVIES, E. B., 1980, *One-parameter semigroups*. Academic Press. Citado na página [52](#).
- [10] DEHMAN, B., GÉRARD, P., LEBEAU, G., 2006, “Stabilization and control for the nonlinear Schrödinger equation on a compact surface”, *Mathematische Zeitschrift*, v. 254, n. 4, pp. 729–749. Citado na página [110](#).
- [11] ENCYCLOPAEDIA BRITANNICA, 2025. “Schrödinger’s Wave Mechanics — Quantum Mechanics”. Disponível em: [<https://www.britannica.com/>](https://www.britannica.com/)

- [science/quantum-mechanics-physics/Schrodingers-wave-mechanics#ref77510](#)>. Acesso em: 10 nov. 2025. Citado na página 109.
- [12] ENGEL, K.-J., NAGEL, R., 2000, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. Springer. Citado nas páginas 45 e 52.
- [13] EVANS, L. C., 2022, *Partial differential equations*, v. 19. American mathematical society. Citado na página 121.
- [14] GOLDSTEIN, J. A., 1985, *Semigroups of linear operators and applications*. Oxford University Press. Citado na página 52.
- [15] HILLE, E., 1957, “Functional Analysis and Semi-Groups”. In: *Amer. Soc. Colloq. Publ.*, v. 31. Citado na página 52.
- [16] HYTÖNEN, T., VAN NEERVEN, J., VERAAR, M., et al., 2016, *Analysis in Banach spaces*, v. 12. Springer. Citado nas páginas 49 e 50.
- [17] LEBEAU, G., 1992, “Contrôle de l’équation de Schrödinger”, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, v. 71, n. 3, pp. 267–291. Citado na página 110.
- [18] LIMA, E. L., 1983, *Espaços métricos*, v. 4. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq Rio de Janeiro. Citado nas páginas 1, 6, 7 e 23.
- [19] PALOMINO, J. A. S., CAVALCANTI, M. M., CAVALCANTI, V. N. D., 2016, *Semigrupos Lineares e Não Lineares e Aplicações*. Maringá, Universidade Estadual de Maringá, Departamento de Matemática. Citado nas páginas 1, 7, 39, 41, 45 e 52.
- [20] PAZY, A., 1983, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, v. 44. Appl. Math. Sci., Springer- Verlag. Citado nas páginas 52 e 60.
- [21] PHILLIPS, R. S., 1991. “Einar Hille”. Disponível em: <<https://nap.nationalacademies.org/read/4560/chapter/12>>. Acesso em: 10 nov. 2025. Citado na página 80.
- [22] TAO, T., 2006, *Nonlinear dispersive equations: local and global analysis*. N. 106. American Mathematical Soc. Citado nas páginas 110 e 111.