

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia  
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas

Licenciatura em Matemática

Wéllington Moutinho Dias

Uma análise numérica do Método Programação  
Quadrática Sequencial

Vitória da Conquista  
2025

**Wéllington Moutinho Dias**

**Uma análise numérica do Método Programação Quadrática Sequencial**

Monografia apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - Campus Vitória da Conquista-BA, para obtenção do Título de Licenciado em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Marcio Antônio de Andrade Bortoloti.

*AD PLENAM VITAM*

**Vitória da Conquista  
2025**

Wéllington Moutinho Dias

## Uma análise numérica do Método Programação Quadrática Sequencial

Monografia apresentada ao Colegiado do Curso de Matemática como requisito parcial para aprovação na disciplina Seminário de Pesquisa II do Curso de Licenciatura em Matemática.

Trabalho aprovado em 05 de dezembro de 2025.

### **BANCA EXAMINADORA**

---

**Prof. Dr. Marcio Antônio de Andrade Bortoloti - UESB**

Orientador

---

**Prof. Dr. André Nagamine - UESB**

Convidado

---

**Prof. Dr. Ricardo Freire da Silva - UESB**

Convidado

Vitória da Conquista

2025

*Aos meus pais Ediva e Paulo, às minhas irmãs Paula e Manuela,  
e à minha namorada Jéssica, por serem meu alicerce e pelo amor  
incondicional.*

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todos que contribuíram, mesmo que de forma indireta, à execução desta monografia.

Agradeço imensamente ao meu orientador e tutor do Programa de Educação Tutorial Institucional do curso de licenciatura em matemática (PETIMAT), o Professor Doutor Marcio Antônio de Andrade Bortoloti, pela confiança, paciência e atenção dada durante toda a minha graduação.

Aos membros da banca examinadora, Professores André Nagamine e Ricardo Freire da Silva pela leitura atenta e pelas valiosas sugestões que enriqueceram este trabalho.

Aos professores do Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, em especial a todos aqueles cujas aulas tive o prazer de assistir, que tanto contribuíram para minha formação.

À Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia pela estrutura oferecida.

Ao PETIMAT pela bolsa de estudos concedida, sem a qual a dedicação integral e permanência na universidade não seriam possíveis. Neste sentido, agradeço também à Pró-Reitoria de Ações Afirmativas, Permanência e Assistência Estudantil (PROAPA), ao Programa de Assistência Estudantil (PRAE) e ao Governo do Estado da Bahia pelo Programa Mais Futuro.

Aos meus amigos que conheci durante o curso, em especial, Alison Oliveira, Franciele Almeida, Luane Maria, Maria Clara e Maria Luiza, agradeço pelo apoio e pelos bons momentos.

Ao meu amigo de longa data Yan Kevin, pelo apoio incondicional e pela paciência nas minhas ausências.

À minha família, meu alicerce. Aos meus pais, Ediva Correia e Paulo Santos, e às minhas irmãs, Paula Moutinho e Manuela Moutinho, por todo sacrifício, incentivo e por nunca me deixarem duvidar da minha capacidade. À minha namorada, Jéssica Barbosa, agradeço pelo amor, pela paciência infinita com minhas longas horas de estudo e por ser meu porto seguro.

## RESUMO

A otimização é uma área relevante da Matemática Aplicada. Um desafio fundamental dentro deste campo é a solução de problemas de otimização contínua com restrições de igualdades e desigualdades. Dentre várias técnicas desenvolvidas para este fim, os métodos de Programação Quadrática Sequencial (PQS) são considerados entre os mais eficientes métodos de otimização de uso geral. Este trabalho tem como objetivo estudar teórica e numericamente métodos PQS. Para isso, é realizado um estudo para compreender as condições de otimalidade e os fundamentos teóricos do método. Em seguida, serão implementados quatro variantes do PQS para um estudo numérico de eficiência e robustez. Os resultados dos experimentos numéricos indicam que os algoritmos resolvem satisfatoriamente os problemas propostos, de acordo, como previsto, à teoria de convergência. Contudo, identificou-se uma limitação no desempenho do método em alguns problemas com um número considerável de restrições, relacionada a limitações computacionais frente a garantia teórica de fornecimento de matrizes definidas positivas nos subproblemas quadráticos.

**Palavras-chave:** Otimização contínua; Otimização restrita; Programação Quadrática Sequencial; Métodos numéricos.

## ABSTRACT

Optimization is a relevant field of applied mathematics. A fundamental challenge in this field is solving continuous optimization problems with equalities and inequalities constraints. Among the many techniques developed for this purpose, the Sequential Quadratic Programming's methods are considered one of the most efficient general use optimization methods. The goal of this work is to study the theoretical and numerically Sequential Quadratic Programming (SQP) methods. For that, a study is carried out in order to comprehend the optimality conditions and the theory fundamentals of SQP methods. After that, four variations of SQP will be implemented for a numerical study for efficiency and robustness purposes. The results of numerical experiments indicate that the algorithms solve satisfactorily the proposed problems, accordingly to the convergence theory. However, a performance limitation was identified in problems with a considerable number of constraints, related to computational limitations against the theoretical guarantee of definite positive matrices supply in quadratic subproblems.

**Keywords:** Continuos optimization; Constrained optimization; Sequential Quadratic Programming; Numerical methods.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>1 Resultados Preliminares</b>	<b>9</b>
1.1 O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$	9
1.2 Sequências	12
1.3 Noções de Topologia	13
1.4 Resultados de Análise	14
1.5 Resultados de Álgebra Linear	14
1.6 Fórmula de Taylor e Teorema da Aplicação Implícita	15
<b>2 Métodos de Otimização</b>	<b>20</b>
2.1 Definições básicas	20
2.2 Condições de otimalidade	21
2.2.1 Problemas com restrições de igualdade	22
2.2.1.1 Cone tangente no caso de restrições de igualdade	22
2.2.1.2 Teorema do Subespaço Tangente	24
2.2.1.3 Condições de otimalidade de Lagrange	26
2.2.2 Problemas com restrições de igualdade e desigualdade	31
2.2.2.1 Cone tangente no caso de restrições de igualdade e desigualdade	31
2.2.2.2 Condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker	33
2.2.2.3 Condições de otimalidade de segunda ordem	36
2.3 Otimização irrestrita	38
2.3.1 Método de Newton	38
2.4 Otimização restrita	41
2.4.1 Métodos de Newton para o sistema de Lagrange	41
2.5 Lagrangianas aumentadas	44
2.5.1 Restrições de igualdade	44
2.5.2 Restrições de igualdade e desigualdade	46

<b>3</b>	<b>Programação Quadrática Sequencial</b>	<b>50</b>
3.1	Contexto histórico . . . . .	50
3.2	Restrições de igualdade . . . . .	51
3.3	Restrições de igualdade e desigualdade . . . . .	53
3.4	Globalização de convergência do método PQS . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Experimentos Numéricos</b>	<b>77</b>
4.1	Experimento 1 - Comparação com a literatura . . . . .	79
4.2	Experimento 2 - Perfis de desempenho . . . . .	80
4.3	Experimento 3 - Ordem de convergência . . . . .	84
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>87</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>89</b>

# Introdução

A otimização é um ramo da matemática aplicada que busca minimizar ou maximizar uma função que pode estar sujeita a restrições. A literatura enumera vários campos da ciência que utilizam a otimização como ferramenta, tais como a economia, engenharia, logística e medicina. Uma razão para tal é que problemas de otimização surgem naturalmente quando pensamos em realizar uma tarefa ou processo de maneira ótima, isto é, da melhor forma possível. Por isso, está presente diretamente ou indiretamente em nossas vidas já que ela é amplamente empregadas na indústria e nas *big techs* cujos serviços consumimos diariamente.

De forma mais precisa, podemos dizer que a otimização consiste em encontrar pontos de mínimo ou de máximo de uma função que assumam valores em um conjunto totalmente ordenado, isto é um conjunto que tenha sentido a noção de máximo e mínimo, onde estes pontos são elementos de um conjunto de pontos viáveis ou factíveis, ou seja, pontos que fazem sentido serem considerados candidatos a solução do problema. Em nosso contexto, trabalharemos com funções reais diferenciáveis. Dessa forma, podemos escrever matematicamente o problema geral de otimização, em nosso contexto, conforme [2] e [3], da seguinte forma

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D, \quad (1)$$

onde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . O conjunto  $D$  pode ser definido por restrições de igualdade e/ou desigualdade, ou seja,

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n; h(x) = 0 \text{ e } g(x) \preceq 0\}, \quad (2)$$

onde  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  que são campos vetoriais associados as restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente. Além disso,  $g(x) \preceq 0$  significa  $g_i(x) \leq 0$  para  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Resolver um problema deste tipo é um desafio considerável, especialmente quando os valores de  $l$  e  $m$  são relativamente grandes, isto é, quando o número de restrições é considerável. Dentre as várias abordagens propostas na literatura, os métodos de Programação Quadrática Sequencial (PQS) são considerados entre os mais eficientes métodos de otimização de uso geral, como citado em [3, p. 312].

O método PQS, tema deste trabalho, consiste em resolver uma sequência de subproblemas de Programação Quadrática cujos pontos estacionários se aproximam, em um certo

sentido, para a solução do problema (1)-(2). Isto é desejável, visto que [3, p. 312] afirma que problemas de Programação Quadrática admitem vários métodos eficientes, sendo alguns com convergência finita, isto é, encontram a solução em no máximo uma quantidade prefixada de iteradas. Isso exemplifica uma possível abordagem que é rotineira na otimização de problemas do tipo (1)-(2) que é resolver o problema original através de uma sequência de subproblemas cuja solução é facilmente obtida.

Apesar dessa estratégia elegante, a implementação e análise teórica de métodos PQS trazem desafios significativos uma vez que a garantia de convergência de métodos deste tipo não é trivial sendo necessário a compreensão das condições de otimalidade para tais problemas. Além disso, a eficiência e robustez dos algoritmos não é garantida, sendo necessário conhecimentos computacionais especializados. Por fim, verificar aspectos teóricos na prática computacional é um estudo necessário.

Neste contexto, o objetivo geral deste trabalho é estudar teórica e numericamente o método da Programação Quadrática Sequencial. Para isso, busca-se especificamente realizar uma pesquisa bibliográfica para compreender as condições de otimalidade e os fundamentos teóricos dos métodos PQS. Implementar os algoritmos do PQS e conduzir um estudo numérico visando testar a eficiência e robustez das implementações, bem como verificar a aplicação de aspectos teóricos na prática computacional.

A justificativa para este estudo reside na elaboração de um material introdutório para os interessados sobre métodos PQS e que gostariam de uma versão mais esmiuçada das ideias apresentadas por [3] nas seções 4.6.1, 4.6.2 e 4.6.3 e que indica diretamente as condições de otimalidade necessárias para o entendimento do tema desenvolvidas em [2]. Além disso, este trabalho contribui com a implementação de quatro variantes do método PQS que podem servir como base para trabalhos futuros.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma. O capítulo 1 apresenta as definições básicas e resultados de Análise e Álgebra Linear relevantes ao entendimento dos métodos estudados. O capítulo 2 foi destinado às condições de otimalidade e métodos de otimização que servem como base teórica e prática ao método PQS. O terceiro e principal capítulo apresenta três variantes do método PQS, seus algoritmos e seus respectivos teoremas de convergência. O capítulo 4 apresenta os experimentos numéricos realizados. Finalmente, o quinto e último capítulo apresenta as conclusões deste trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

# Capítulo 1

## Resultados Preliminares

Neste capítulo apresentamos as definições básicas e os resultados de Análise e Álgebra Linear relevantes para este trabalho. As principais referências teóricas deste capítulo são [3], [2], [7], [8] e [1].

### 1.1 O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

Neste trabalho, vamos resolver um problema da forma

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D. \quad (1.1)$$

Assim como é feito em [2, p. 2], chamaremos o conjunto  $D$  de **conjunto viável** do problema, os pontos de  $D$  de **pontos viáveis** e  $f$  de **função objetivo**.

Em linhas gerais, para resolver (1.1), temos que, se possível, encontrar um ponto de  $D$  onde  $f$  assume valor mínimo. Para isso, tipicamente, métodos iterativos, que consistem em calcular uma solução aproximada do problema por meio de uma sequência de pontos em  $D$  que converge à solução, são empregados. Em nosso contexto, esses pontos são elementos do  $\mathbb{R}^n$ . Assim, apresentamos formalmente o espaço euclidiano  $n$ -dimensional e outros importantes objetos matemáticos e suas principais propriedades relevantes em nosso estudo.

**Definição 1.1.** [7, p. 1] *Seja  $n$  um número natural. O espaço euclidiano  $n$ -dimensional é o produto cartesiano de  $n$  fatores iguais a  $\mathbb{R}$ , ou seja,  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$  ( $n$  vezes).*

Assim, os elementos do espaço euclidiano  $n$ -dimensional, ou de forma sucinta, elementos do  $\mathbb{R}^n$ , ou pontos do  $\mathbb{R}^n$ , ou ainda, vetores do  $\mathbb{R}^n$  são  $n$ -uplas ordenadas de números reais. Desta forma, se  $x \in \mathbb{R}^n$  então  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  com  $x_i \in \mathbb{R}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Os parágrafos a seguir são um resumo de definições e propriedades do  $\mathbb{R}^n$  cuja exposição detalhada pode ser encontrada em [7], [8] e [9].

Existem duas operações usuais em  $\mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n & \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\mapsto x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) & (\alpha, x) &\mapsto \alpha \cdot x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) \end{aligned}$$

onde  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  e  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ . A primeira operação é denominada **adição de vetores** e a segunda operação de **multiplicação de um vetor por um escalar**. Estas operações fazem com que  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$  seja um **espaço vetorial** real o qual indicaremos apenas por  $\mathbb{R}^n$ , visto que esse é o único espaço vetorial necessário para o desenvolvimento do trabalho. Seu vetor nulo é  $0 = (0, \dots, 0)$  e dado  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  seu inverso aditivo é o vetor  $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$ . Além disso, por conveniência, sempre podemos escrever  $\alpha x$  ao invés de  $\alpha \cdot x$ .

A partir da adição de vetores, podemos definir a **diferença de vetores** em um espaço vetorial qualquer da seguinte forma:  $x - y := x + (-1) \cdot y$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

No espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$ , destaca-se a **base canônica**  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , formada pelos vetores

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1),$$

de modo que se  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , tem-se que  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ .

Além de espaço vetorial, o  $\mathbb{R}^n$  é um exemplo de **espaço normado**, ou seja, é possível definir uma função  $|\cdot| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a cada vetor  $x \in \mathbb{R}^n$  o número real  $|x|$ , chamado **norma** de  $x$ , de modo a satisfazer as seguintes condições para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}^n$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

**N1)** Se  $x \neq 0$  então  $|x| \neq 0$ ;

**N2)**  $|\lambda \cdot x| = |\lambda| \odot |x|$ ;

**N3)**  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .

Em **N2**,  $|\lambda|$  representa o valor absoluto do número real  $\lambda$  e  $\odot$  a multiplicação em  $\mathbb{R}$ . Em particular, podemos definir a norma  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a cada  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  o número real

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \quad (1.2)$$

denominado **norma euclidiana** de  $x \in \mathbb{R}^n$ . Além disso, utilizaremos também as normas  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que associam a cada  $x = (x_1, \dots, x_n)$  o número real

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \text{ e } \|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|,$$

onde  $\|\cdot\|_1$  é denominada por **norma da soma** de  $x \in \mathbb{R}^n$  enquanto  $\|\cdot\|_\infty$  é denominada por **norma do máximo** de  $x \in \mathbb{R}^n$ .

O  $\mathbb{R}^n$  também é um espaço vetorial real munido de um **produto interno**, isto é, existe uma função  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que faz corresponder a cada par de vetores  $x, y \in \mathbb{R}^n$  um número real, indicado por  $\langle x, y \rangle$ , de tal modo que, para quaisquer  $x, x', y \in \mathbb{R}^n$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  se têm:

$$\mathbf{P1)} \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle;$$

$$\mathbf{P2)} \quad \langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle;$$

$$\mathbf{P3)} \quad \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle;$$

$$\mathbf{P4)} \quad \text{Se } x \neq 0, \text{ então } \langle x, x \rangle > 0.$$

O exemplo mais importante, e o único produto interno utilizado nesta monografia, é o **produto interno canônico** do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , o qual é dado por

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n, \quad (1.3)$$

onde  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$ . Com o produto interno podemos definir a noção de ortogonalidade entre vetores.

**Definição 1.2.** *Dois vetores  $x, y \in \mathbb{R}^n$  chamam-se **ortogonais**<sup>1</sup> quando  $\langle x, y \rangle = 0$ .*

Considerando  $x, y \in \mathbb{R}^n$  como uma matriz de  $n$  linhas e uma coluna, podemos escrever que  $\langle x, y \rangle = x^\top y$ , onde  $x^\top$  é a matriz transposta de  $x$  e  $x^\top y$  é o produto matricial entre uma matriz linha e uma matriz coluna. A relação entre a norma euclidiana e o produto interno canônico é dada pela igualdade  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

Dados  $n, m \in \mathbb{N}$ , denotaremos por  $\mathbb{R}^{n \times m}$  o conjunto de todas as matrizes reais com  $n$  linhas e  $m$  colunas. Em particular,  $\mathbb{R}^{n \times n}$  é conjunto de todas as matrizes reais quadradas de ordem  $n$ .

Podemos definir uma norma de matrizes a partir da norma euclidiana considerando

$$\|A\| = \sup\{\|A \cdot x\|; x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}.$$

onde  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Em particular, tal norma possui a seguinte propriedade

$$\|A \cdot x\| \leq \|A\| \|x\| \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.4)$$

Outra desigualdade importante é a de Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (1.5)$$

Uma noção relevante em nosso trabalho é a de positividade de uma matriz.

---

<sup>1</sup>Esta definição é um caso particular da definição de ortogonalidade dada em [8, p. 121].

**Definição 1.3.** [1, p. 16] *Seja  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz simétrica. Dizemos que  $A$  é **definida positiva** quando  $\langle Ax, x \rangle > 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Se  $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A$  é dita **semidefinida positiva**.*

O mesmo vale para matrizes indefinidas.

**Definição 1.4.** [1, p. 17] *Seja  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz simétrica. Dizemos que  $A$  é **indefinida** quando existem  $x, y \in \mathbb{R}^n$  tais que  $\langle Ax, x \rangle > 0$  e  $\langle Ay, y \rangle < 0$ .*

## 1.2 Sequências

Uma vez que as propriedades do  $\mathbb{R}^n$  essenciais a este trabalho foram apresentadas, seguimos com sequências que são o objeto matemático fundamental no contexto dos métodos iterativos que também constitui o meio pelo qual resolvemos (1.1).

**Definição 1.5.** [7, p. 14] *Uma **sequência em  $\mathbb{R}^n$**  é uma aplicação  $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .*

O valor que uma sequência assume, digamos em um certo  $k \in \mathbb{N}$ , é indicado com  $x_k$  e chama-se o **k-ésimo termo** da sequência. Usamos a notação  $(x_k)$  para indicar a sequência cujo k-ésimo termo é  $x_k \in \mathbb{R}^n$ . Vamos agora, definir o importante conceito de limite de uma sequência.

**Definição 1.6.** [7, p. 15] *Dizemos que o ponto  $a \in \mathbb{R}^n$  é o **limite** da sequência de pontos  $x_k \in \mathbb{R}^n$  quando, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que, se  $k > k_0$  então tem-se  $|x_k - a| < \varepsilon$ .*

Observamos que  $|x_k - a|$  é a norma do vetor  $x_k - a \in \mathbb{R}^n$ . Quando o limite acima existe, dizemos que a sequência  $(x_k)$  **converge** para  $a$  ou **tende** para  $a$  ou apenas que é **convergente** e escrevemos  $\lim x_k = a$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ ,  $\lim_{k \in \mathbb{N}} x_k = a$ , ou simplesmente  $x_k \rightarrow a$ . Caso contrário, dizemos que a sequência  $(x_k)$  **diverge** ou que a sequência  $(x_k)$  é **divergente**.

Como um caso particular, podemos definir uma **sequência de números reais** como sendo uma aplicação  $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Todas as observações acerca das sequências em  $\mathbb{R}^n$  feitas anteriormente se aplicam às sequências de números reais; ademais, a definição de limite é análoga, bastando apenas considerar que a função valor absoluto é uma norma em  $\mathbb{R}$ .

Com o intuito de introduzir uma notação frequentemente utilizada em Otimização, damos a seguinte definição auxiliar:

**Definição 1.7.** *Seja  $a \in \mathbb{R}$ . Dizemos que uma sequência de números reais  $(t_k)$  **converge à direita**<sup>2</sup> de  $a$  e escrevemos  $t_k \rightarrow a^+$  quando  $t_k \rightarrow a$  e  $t_k > a$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .*

---

<sup>2</sup>Esta é uma adaptação da definição de limite lateral de funções reais que pode ser encontrada, por exemplo, em [6, p. 205].

Com isso, estabelecemos:

**Definição 1.8.** *Seja  $(x_k)$  uma sequência em  $\mathbb{R}^n$ . Escreveremos<sup>3</sup> que  $x_k = o(t_k)$  quando  $x_k/t_k \rightarrow 0$ , onde  $t_k \rightarrow 0^+$ . Além disso, utilizaremos a notação  $f(t) = o(t)$  no caso em que a função  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ , possui a propriedade de que  $f(t)/t \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow 0^+$ .*

Para mais detalhes sobre limites de funções reais, consulte [6].

**Definição 1.9.** *Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Um ponto  $a \in \mathbb{R}^n$  chama-se **ponto de acumulação**<sup>4</sup> quando existe uma sequência  $(x_k) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$  com  $x_k \rightarrow a$  quando  $k \rightarrow \infty$ .*

## 1.3 Noções de Topologia

Nesta seção, mostraremos definições e resultados da topologia de alguns dos subconjuntos do  $\mathbb{R}^n$  que serão úteis para o desenvolvimento do trabalho.

Em particular, trabalhamos com funções diferenciáveis e tal noção apenas é bem definida em subconjuntos abertos do  $\mathbb{R}^n$ , o que justifica as definições seguintes.

**Definição 1.10.** [7, p. 35] *Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Um ponto  $a \in X$  é um **ponto interior** a  $X$  quando existe um  $\delta > 0$  tal que  $|x - a| < \delta$  implica em  $x \in X$ .*

**Definição 1.11.** [7, p. 35] *O **interior** de  $X \subset \mathbb{R}^n$  é o conjunto denotado por  $\text{int } X$ , formado pelos pontos interiores a  $X$ .*

**Definição 1.12.** [7, p. 35] *Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  chama-se **aberto** quando  $\text{int } X = X$ .*

**Definição 1.13.** [7, p. 35] *Dizemos que um conjunto aberto  $V \subset \mathbb{R}^n$  é uma **vizinhança** do ponto  $a$  quando  $a \in V$ .*

**Definição 1.14.** [7, p. 35] *Dizemos que um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é **fechado**<sup>5</sup> quando  $\mathbb{R}^n \setminus X$  é aberto.*

**Definição 1.15.** [7, p. 13] *Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é dito **limitado** quando existe um  $k \in \mathbb{R}$  tal que  $|x| \leq k$  para todo  $x \in X$ .*

Com uma norma é possível medir a distância entre um ponto do  $\mathbb{R}^n$  e um conjunto dado:

**Definição 1.16.** [7, p. 50] *A distância entre um ponto  $\mathbb{R}^n$  e o conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$  é o número real positivo:*

$$\text{dist}(x, D) = \inf_{y \in D} \|y - x\|.$$

Com a Definição 1.16, vamos caracterizar as direções tangentes em relação ao conjunto viável na seção 2.2.1.1.

<sup>3</sup>Concatenamos as notações  $o(t_k)$  e  $o(t)$  apresentadas na Lista de Símbolos de [2] numa definição.

<sup>4</sup>Adaptação do teorema que caracteriza os pontos de acumulação dado em [7, p. 20-21].

<sup>5</sup>Utilizamos como definição de conjunto fechado o Teorema 17 de [7, p. 40].

## 1.4 Resultados de Análise

Os dois teoremas a seguir constituem ferramentas comumente utilizadas na análise de métodos iterativos e sequências no geral:

**Teorema 1.1 (Teorema do Confronto).** [6, p. 119] *Se  $(x_n), (y_n)$  e  $(z_n)$  são sequências de números reais tais que  $x_n \leq y_n \leq z_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $\lim x_n = \lim z_n = a$ , então  $\lim y_n = a$ .*

Para enunciar o teorema a seguir, relembramos que de acordo com [7, p. 14] uma subsequência  $(x_{k_j}) \subset \mathbb{R}^n$  é qualquer restrição da sequência  $(x_k)$  com respeito a um subconjunto infinito de  $\mathbb{N}$ .

**Teorema 1.2 (Bolzano-Weierstrass).** [7, p. 17] *Toda sequência limitada em  $\mathbb{R}^n$  possui uma subsequência convergente.*

Para a análise de convergência da globalização da Programação Quadrática Sequencial (veja o Algoritmo 5 para mais detalhes), precisaremos dos seguintes resultados.

**Teorema 1.3. (Teorema do Valor Médio)**[3, p. 26] *Se para  $x, y \in \mathbb{R}^n$  uma função  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  é continuamente diferenciável no intervalo  $\{x + ty; t \in [0, 1]\}$ , então*

$$F(x + y) = F(x) + \int_0^1 F'(x + ty)y dt.$$

**Lema 1.1.** [3, p. 27] *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável no  $\mathbb{R}^n$ , com derivada Lipschitz-contínua no  $\mathbb{R}^n$  com módulo  $L > 0$ . Então*

$$|f(x + y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y \rangle| \leq L \|y\|^2 / 2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

onde  $\nabla$  denota o operador gradiente.

## 1.5 Resultados de Álgebra Linear

Para o primeiro resultado, precisamos da seguinte definição.

**Definição 1.17.** *Seja a transformação linear<sup>6</sup>  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , a **adjunta**<sup>7</sup> de  $A$  é a transformação linear  $A^* : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que, para  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $y \in \mathbb{R}^m$  quaisquer se tenha  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$ .*

Com isso, podemos caracterizar a adjunta em termos matriciais da seguinte forma.

---

<sup>6</sup>Ou seja,  $A(\alpha x + y) = \alpha A(x) + A(y)$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}^n$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

<sup>7</sup>Esta definição é um caso particular da definição de transformação adjunta dada em [8, p. 135].

**Teorema 1.4.**<sup>8</sup> Se  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é a matriz da transformação linear  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  nas bases canônicas do  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$  então a matriz da adjunta  $A^* : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  em relação as mesmas bases é  $A^\top$ .

Assim, com a Definição 1.17 e considerando que sempre trabalharemos com a base canônica em nosso trabalho, podemos utilizar amplamente a identidade a seguir para quaisquer  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $y \in \mathbb{R}^m$ .

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^\top y \rangle. \quad (1.6)$$

Agora, apresentamos um lema que auxiliará na prova de que, dada uma família de Lagrangianas aumentadas indexadas em  $c \in \mathbb{R}_+$ , existe um  $c$  suficientemente grande de modo que, fixados os argumentos da Lagrangiana aumentada, a matriz resultante é definida positiva (para mais detalhes consulte as seções 2.5.1 e 2.5.2).

**Lema 1.2. (Lema de Debreu)**[3, p. 25] Sejam  $A \in \mathbb{R}^{l \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  quaisquer matrizes tais que

$$\langle Bd, d \rangle > 0 \quad \forall d \in \ker A \setminus \{0\}.$$

Então existe  $\bar{c} > 0$  tal que a matriz  $B + cA^\top A$  é definida positiva para todo  $c \geq \bar{c}$ .

## 1.6 Fórmula de Taylor e Teorema da Aplicação Implícita

De acordo com [1], as aproximações de Taylor para uma função suficientemente diferenciável constituem uma das mais importantes ferramentas utilizadas em Otimização, tanto no desenvolvimento teórico quanto na construção de algoritmos. Já o teorema da aplicação implícita é um conceito de análise amplamente utilizado no desenvolvimento teórico de métodos de otimização com restrições. Isso justifica que tais conceitos estejam em uma seção separada das demais.

Para apresentar as fórmulas de Taylor com resto infinitesimal de primeira e segunda ordem para funções escalares e a fórmula de primeira ordem para campos vetoriais, é necessário antes fixar a notação utilizada às derivadas para funções destes tipos. Considere  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $\mathcal{C}^2$ . Indicamos o operador gradiente e o operador hessiano de  $f$ , respectivamente, por:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{ e } \nabla^2 f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

---

<sup>8</sup>Caso particular do Teorema 11.2 de [8, p. 135].

Agora considere uma função vetorial  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Sua derivada, a qual é uma transformação linear cuja representação matricial é chamada de Jacobiana, é escrita como

$$f' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

onde  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  com  $i = 1, \dots, m$  são denominadas **funções coordenadas** pois  $f_i(x)$  retorna a  $i$ -ésima coordenada do vetor  $f(x)$ . Mais precisamente,  $f_i = \pi_i \circ f$ , onde  $\pi_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  é tal que  $\pi_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m) = x_i$ .

Considerando aplicações diferenciáveis do tipo  $F : \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  cujos elementos do domínio são da forma  $(x, y)$  com  $x = (x_1, x_2, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , as matrizes:

$$F'_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_s} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_s} \end{pmatrix} \text{ e } F'_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

são denominadas como **jacobianas parciais**.

No caso em que temos uma função  $f : \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  duas vezes diferenciáveis cujos elementos do domínio são da forma  $(x, y)$  com  $x = (x_1, x_2, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , os vetores:

$$(\nabla f)_x = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_s} \right) \text{ e } (\nabla f)_y = \left( \frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_n} \right)$$

são chamados de **gradientes parciais**. Além disso, como  $\nabla f : \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{s+n}$  as matrizes  $((\nabla f)_x)'_x = (\nabla^2 f)_{xx}$ ,  $((\nabla f)_x)'_y = (\nabla^2 f)_{xy}$ ,  $((\nabla f)_y)'_x = (\nabla^2 f)_{yx}$  e  $((\nabla f)_y)'_y = (\nabla^2 f)_{yy}$  são as **hessianas parciais**<sup>9</sup>.

Finalmente, vamos apresentar as fórmulas de Taylor de primeira e segunda ordem para funções escalares suficientemente diferenciáveis tal qual [1] fez, e utilizando a Definição 1.8 vamos obter fórmulas equivalentes que nos permitirá a conveniência de uma análise mais direta dos resultados teóricos.

Considere  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável e  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ . Então, podemos escrever

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^\top (x - \bar{x}) + r(x) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle + r(x) \quad (1.7)$$

com  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{r(x)}{\|x - \bar{x}\|} = 0$ .

O polinômio  $p_1(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^\top (x - \bar{x})$  denominado **polinômio de Taylor de**

<sup>9</sup>As terminologias: gradiente, jacobiana e hessiana parcial foram retiradas de [1].

**grau 1** é uma aproximação linear para  $f$  em torno do ponto  $\bar{x}$ . Segundo [1] entre todos os polinômios de grau menor ou igual a 1, ele é o único que satisfaz

$$p_1(\bar{x}) = f(\bar{x}) \text{ e } \nabla p_1(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}).$$

Também é conveniente observar que, ao realizar uma mudança de variável definindo  $d = x - \bar{x}$ , temos que  $d \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow \bar{x}$ . Assim

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{r(x)}{\|x - \bar{x}\|} = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{r(\bar{x} + d)}{\|d\|} = 0. \quad (1.8)$$

Além disso, definindo  $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  de modo que  $\varphi(t) = r\left(\bar{x} + t \frac{d}{\|d\|}\right)$  e utilizando a equação (1.8) verificamos que

$$\lim_{\|d\| \rightarrow 0} \frac{\varphi(\|d\|)}{\|d\|} \stackrel{(*)}{=} \lim_{d \rightarrow 0} \frac{r(\bar{x} + d)}{\|d\|} = 0, \quad (1.9)$$

observando que em (\*) utilizamos o fato de que  $\|d\| \rightarrow 0$  implica em  $d \rightarrow 0$  pois  $\|d\| = 0$  se, e somente se,  $d = 0$  e a função  $\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\xi(x) = \|x\|$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  é contínua. Com a igualdade (1.9) concluimos que  $o(\|d\|) = \varphi(\|d\|) = r(\bar{x} + d) = r(x)$ . Portanto, tal mudança de variável é conveniente, pois podemos reescrever a equação (1.7) como

$$f(\bar{x} + d) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^\top d + o(\|d\|) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), d \rangle + o(\|d\|). \quad (1.10)$$

Caso  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  seja uma função duas vezes diferenciável e  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ , então

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^\top (x - \bar{x}) + \frac{1}{2} (x - \bar{x})^\top \nabla^2 f(\bar{x}) (x - \bar{x}) + r(x) \\ &= f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(\bar{x}) (x - \bar{x}), x - \bar{x} \rangle + r(x) \end{aligned} \quad (1.11)$$

com  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{r(x)}{\|x - \bar{x}\|^2} = 0$ .

Analogamente, o polinômio,

$$p_2(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^\top (x - \bar{x}) + \frac{1}{2} (x - \bar{x})^\top \nabla^2 f(\bar{x}) (x - \bar{x}),$$

é uma aproximação quadrática para  $f$  em torno do ponto  $x$  e é chamado de **polinômio de Taylor de ordem 2** da função. Dentre todos os polinômios de grau menor ou igual a 2, ele é o único que satisfaz

$$p_2(\bar{x}) = f(\bar{x}), \quad \nabla p_2(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) \text{ e } \nabla^2 p_2(\bar{x}) = \nabla^2 f(\bar{x}).$$

Essa informação é útil pois ressalva o fato de que existem outras aproximações, em um certo sentido, de segunda ordem que podem ser feitas como veremos nos métodos PQS.

Novamente, tomando a mudança de variável  $d = x - \bar{x}$  e considerando a função auxiliar  $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\phi(t) = r\left(\bar{x} + t\frac{d}{\|d\|^2}\right)$  de forma análoga a fórmula de Taylor de ordem 1, podemos reescrever a equação (1.11) como

$$\begin{aligned} f(\bar{x} + d) &= f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^\top d + \frac{1}{2}d^\top \nabla^2 f(\bar{x})d + o(\|d\|^2) \\ &= f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), d \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(\bar{x})d, d \rangle + o(\|d\|^2). \end{aligned} \quad (1.12)$$

A fórmula de Taylor pode ser estendida para qualquer aplicação diferenciável  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  numa ordem qualquer. Em particular, [7] nos mostra que a fórmula de Taylor de primeira ordem para aplicações diferenciáveis deste tipo pode ser escrita como

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + r(x), \quad (1.13)$$

com  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{r(x)}{\|x - \bar{x}\|} = 0$ . Por argumentos análogos, tomando  $d = x - \bar{x}$ , podemos reescrever a equação acima como

$$f(\bar{x} + d) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})d + o(\|d\|). \quad (1.14)$$

Considerando que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável no ponto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  e fazendo  $d = td$  na Fórmula de Taylor de primeira ordem dada em (1.10) obtemos

$$f(\bar{x} + td) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), td \rangle + o(\|td\|).$$

Como sempre consideramos  $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  um vetor fixo, podemos escrever que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{o(\|td\|)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \|d\| \frac{o(\|td\|)}{\|td\|} = 0,$$

ou seja,  $o(\|td\|) = o(t)$ .

Com as observações feitas no teorema acima, e de maneira análoga às funções vetoriais, podemos reescrever as fórmulas de Taylor de primeira e de segunda ordem como sendo, respectivamente:

$$f(\bar{x} + td) = f(\bar{x}) + t\nabla f(\bar{x})^\top d + o(t) = f(\bar{x}) + t \langle \nabla f(\bar{x}), d \rangle + o(t) \quad (1.15)$$

$$F(\bar{x} + td) = F(\bar{x}) + tF'(\bar{x})d + o(t) \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned}
f(\bar{x} + td) &= f(\bar{x}) + t\nabla f(\bar{x})^\top d + \frac{t^2}{2}d^\top \nabla^2 f(\bar{x})d + o(t^2) \\
&= f(\bar{x}) + t \langle \nabla f(\bar{x}), d \rangle + \frac{t^2}{2} \langle \nabla^2 f(\bar{x})d, d \rangle + o(t^2)
\end{aligned} \tag{1.17}$$

onde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Com isso temos todas as variações da Fórmula de Taylor necessárias para o desenvolvimento teórico do trabalho.

O Teorema da Aplicação Implícita é um resultado que auxilia no estudo da estrutura dos conjuntos viáveis em problemas com restrições.

**Teorema 1.5. (Teorema da Aplicação Implícita)[3, p. 27]** *Suponhamos que  $F : \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  seja diferenciável numa vizinhança do ponto  $(\bar{\sigma}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n$ , e a derivada de  $F$  em relação a  $y$  seja contínua no ponto  $(\bar{\sigma}, \bar{y})$ . Suponhamos ainda que  $F(\bar{\sigma}, \bar{y}) = 0$  e que a matriz  $F'_y(\bar{\sigma}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  seja invertível.*

*Então existem uma vizinhança  $U$  de  $\bar{\sigma}$  e uma vizinhança  $V$  de  $\bar{y}$ , para as quais existe uma única função  $Y : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $Y(U) \subset V$  e  $F(\sigma, Y(\sigma)) = 0 \quad \forall \sigma \in U$ .*

Com isso, apresentamos as definições básicas e os resultados de Análise e Álgebra Linear relevantes para este trabalho.

# Capítulo 2

## Métodos de Otimização

Este capítulo destina-se às condições de otimalidade em problemas com restrição de igualdade e desigualdade. Serão apresentados métodos de otimização que servem como base teórica e prática à Programação Quadrática Sequencial (PQS). Além disso, apresentamos uma breve introdução às Lagrangianas aumentadas e sua principal propriedade que nos auxiliará na criação de uma sequência de matrizes  $(H_k) \subset \mathbb{R}^{n \times n}$  onde  $H_k$  é definida positiva. Tal sequência é importante para métodos PQS (para mais detalhes veja o capítulo 3). As principais referências deste capítulo são [3], [2], [11] e [1].

### 2.1 Definições básicas

Sejam dados um conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$  e uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $D \subset \Omega$ . O principal objetivo da Otimização, neste contexto, é encontrar o chamado **minimizador** de  $f$  no conjunto  $D$ . Este problema será escrito como

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D. \quad (2.1)$$

De maneira mais precisa, em relação ao minimizador, temos:

**Definição 2.1.** [2, p. 2] Dizemos que um ponto  $\bar{x} \in D$  é **minimizador local** de (2.1), se existe uma vizinhança  $U$  de  $\bar{x}$  tal que  $f(\bar{x}) \leq f(x)$  para todo  $x \in D \cap U$ . Em particular, caso  $f(\bar{x}) \leq f(x)$  para todo  $x \in \Omega$ , dizemos que  $\bar{x}$  é **minimizador global** de (2.1).

Pela definição, é evidente que todo minimizador global é também minimizador local. Em particular, se as desigualdades da definição acima forem estritas, chamaremos o ponto  $\bar{x}$  de, respectivamente, **minimizador estrito local** e **minimizador estrito global**.

**Exemplo 2.1.** Considere  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = 16x^2(x - 1)^2$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . O número  $\bar{x} = 0$  é minimizador local de  $f$ , mais do que isso,  $\bar{x}$  é minimizador global de  $f$  visto que  $f(x) = [4x(x-1)]^2 \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  e  $f(\bar{x}) = 0$ . Observe ainda, que  $f(1) = 0$ ,

ou seja,  $f$  possui mais do que um minimizador global, contudo como  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ , temos que  $\bar{v} = \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$ .

Observe que no Exemplo 2.1 apesar da função  $f$  possuir dois minimizadores globais, pela definição de ínfimo (conforme [6, p. 76]) o número real  $\bar{v} = \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x)$  existe e é único. Isto motiva a seguinte definição.

**Definição 2.2.** [2, p. 2] Dizemos que  $\bar{v} \in [-\infty, +\infty)$ , satisfazendo

$$\bar{v} = \inf_{x \in D} f(x),$$

é *valor ótimo* do problema (2.1).

Quando  $\bar{v} = -\infty$ , o problema (2.1) não possui minimizador global pois, nesse caso  $f$  é ilimitada inferiormente no conjunto viável. Mas mesmo quando  $\bar{v}$  é finito, o minimizador global pode não existir. Isso ocorre quando não existe  $x \in D$  tal que  $f(x) = \bar{v}$ . Em particular, para funções contínuas, basta que  $D \subset \mathbb{R}^n$  seja compacto para que o minimizador global de  $f$  exista, conforme afirma o Teorema de Weierstrass.

**Teorema 2.1 (Teorema de Weierstrass).** *Sejam  $D \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto compacto não-vazio e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Então os problemas de minimizar e de maximizar  $f$  em  $D$  têm soluções globais.*

*Demonstração.* Veja o Teorema 1.2.1 de [2, p. 6]. □

A seguir, vamos delimitar algumas classes de funções que possuem soluções para os problemas de otimização com restrições de igualdade e restrições de igualdade e desigualdade onde estes são resolvidos por métodos PQS.

## 2.2 Condições de otimalidade

Em Otimização as condições de otimalidade estabelecem as condições necessárias e suficientes para que um ponto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  dado seja considerado minimizador local de algum problema.

Tipicamente, condições de otimalidade são estabelecidas para classes notáveis de problemas de otimização como, por exemplo, condições de otimalidade para problemas irrestritos, com restrições de igualdade e com restrições de igualdade e desigualdade, que são casos particulares de (2.1) ao tomarmos  $D$  como sendo os conjuntos  $\mathbb{R}^n$ ,  $\{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}$  e  $\{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0 \text{ e } g(x) \preceq 0\}$ , respectivamente, onde  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  com  $n, l, m \in \mathbb{N}$ . Além disso,  $g(x) \preceq 0$  significa  $g_i(x) \leq 0$  para  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Apresentamos a seguir as condições de otimalidade para as últimas duas classes de problemas citadas, já que métodos PQS trabalham com estes tipos de problemas. Além disso, mostraremos o cone tangente que nos permite interpretar geometricamente as restrições.

## 2.2.1 Problemas com restrições de igualdade

Vamos considerar o problema de otimização com restrições de igualdade:

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D, \quad (2.2)$$

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n; h(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n; h_i(x) = 0, i = 1, \dots, l\}, \quad (2.3)$$

onde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  são funções diferenciáveis. Para resolver problemas de otimização restrita, tais como o problema (2.2)-(2.3), tipicamente a estrutura do conjunto viável  $D$  é estudada. Uma possível abordagem é utilizando a noção de cone tangente, com o objetivo de fornecer ferramentas geométricas e de análise para deduzir condições de otimalidade.

### 2.2.1.1 Cone tangente no caso de restrições de igualdade

Para o estudo das condições de otimalidade para problemas restritos, é típica a utilização de cones. Formalmente, temos a seguinte definição.

**Definição 2.3. [8, p. 8]** *Um conjunto  $K \subset \mathbb{R}^n$  chama-se **cone** quando para todo  $d \in K$ ,  $td \in K$ , desde que  $t > 0$ .*

Em particular, o subconjunto

$$\mathcal{T}_D(\bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n; \forall (t_k) \subset \mathbb{R}_+, t_k \rightarrow 0^+, \exists (d_k) \subset \mathbb{R}^n, d_k \rightarrow d, \text{ com } \bar{x} + t_k d_k \in D \forall k \in \mathbb{N}\}$$

é um cone. Uma representação gráfica de um elemento deste cone pode ser vista na Figura 2.1.

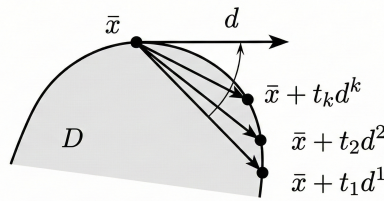


Figura 2.1: Vetor  $d$  em  $\mathcal{T}_D(\bar{x})$  (Fonte: Figura 1.4.6 de [2, p. 24]).

Com efeito, se  $d \in \mathcal{T}_D(\bar{x})$  então para toda sequência de números reais estritamente positivos  $(t_k)$  tal que  $t_k \rightarrow 0^+$ , existe uma sequência  $(d_k)$  em  $\mathbb{R}^n$  de modo que  $d_k \rightarrow d$  e juntas elas satisfazem a condição  $\bar{x} + t_k d_k \in D$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Dado  $c > 0$  fixo, vamos mostrar que  $c \cdot d \in \mathcal{T}_D(\bar{x})$ . Para isso, considere a sequência  $\alpha_k = t_k/c$ . Observe que  $\alpha_k \rightarrow 0^+$  quando  $t_k \rightarrow 0^+$ , além disso a sequência  $(\bar{d}_k)$  onde  $\bar{d}_k = c \cdot d_k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  satisfaz  $\bar{d}_k \rightarrow c \cdot d$  e por fim,  $\bar{x} + \alpha_k \bar{d}_k = \bar{x} + t_k d_k \in D$  para qualquer  $k \in \mathbb{N}$ . Isso mostra que  $c \cdot d \in \mathcal{T}_D(\bar{x})$  e como  $c$  e  $d$  são arbitrários, concluímos que  $\mathcal{T}_D(\bar{x})$  é um cone.

O cone  $\mathcal{T}_D(\bar{x})$  é denominado de **cone tangente**<sup>1</sup>. Para interpretar geometricamente suas direções, precisamos definir a noção de direções tangentes.

**Definição 2.4.** [2, p. 23] Dizemos que  $d \in \mathbb{R}^n$  é uma **direção tangente**<sup>2</sup> em relação ao conjunto  $D$  no ponto  $\bar{x} \in D$  quando  $\text{dist}(\bar{x} + td, D) = o(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Observe que se  $d \in \mathcal{T}_D(\bar{x})$ , então para toda sequência  $(t_k) \subset \mathbb{R}_+$  que satisfaça  $t_k \rightarrow 0^+$ , temos a garantia da existência da sequência  $(d_k) \subset \mathbb{R}^n$  de modo que  $\bar{x} + t_k d_k \in D$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , e assim obtemos a seguinte consequência:

$$\text{dist}(\bar{x} + t_k d, D) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{y \in D} \|(\bar{x} + t_k d) - y\| \stackrel{(*)}{\leq} \|(\bar{x} + t_k d) - (\bar{x} + t_k d_k)\| = t_k \|d_k - d\| \stackrel{(**)}{=} o(t_k),$$

onde em  $(*)$  usamos o fato de que  $\bar{x} + t_k d_k \in D$  e a definição de ínfimo; a igualdade  $(**)$  ocorre porque  $\|d_k - d\| = (t_k \|d_k - d\|)/t_k \rightarrow 0$  visto que  $d_k \rightarrow d$  quando  $t_k \rightarrow 0^+$ .

Como  $t_k \in \mathbb{R}_+ \forall k$  e  $0 \leq \text{dist}(\bar{x} + t_k d, D)$  concluímos que  $d$  é uma direção tangente em relação ao conjunto  $D$  no ponto  $\bar{x}$ . Como  $d$  é arbitrário, verificamos que todas as direções de  $\mathcal{T}_D(\bar{x})$  são tangentes em relação a  $D$  em  $\bar{x}$ .

Vamos agora mostrar que toda direção tangente a  $D$  no ponto  $\bar{x}$  pertence a  $\mathcal{T}_D(\bar{x})$ . Para isso, suponha por absurdo que  $d \notin \mathcal{T}_D(\bar{x})$ . Isso significaria que existe uma sequência  $(t_k) \subset \mathbb{R}_+$  tal que para todo  $(d_k) \subset \mathbb{R}^n$  com  $t_k \rightarrow 0^+$  e  $d_k \rightarrow d$  satisfaça  $\bar{x} + t_k d_k \notin D$ , para algum  $k \in \mathbb{N}$ . Em particular, tome  $d_k = d$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Com isso existe um  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\bar{x} + t_k d \notin D$ , ou seja, teríamos  $\text{dist}(\bar{x} + t_k d, D) = c > 0$  o que contradiz o fato de  $d$  ser uma direção tangente, isto é,  $\text{dist}(\bar{x} + t_k d, D) = o(t_k)$ .

Com o que acabamos de mostrar podemos caracterizar o cone tangente da seguinte forma

$$\mathcal{T}_D(\bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(\bar{x} + td, D) = o(t), t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Outra noção útil nos auxiliará na demonstração de algumas condições de otimalidade em problemas de otimização com restrições de igualdade e restrições de desigualdade. Tal noção é um pouco mais geral do que a do cone tangente, trata-se do **cone (tangente) de Bouligand** definido por [2, p. 25] como

$$\mathcal{B}_D(\bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n; \exists (t_k) \subset \mathbb{R}_+, t_k \rightarrow 0^+, \exists (d_k) \subset \mathbb{R}^n, d_k \rightarrow d \text{ com } \bar{x} + t_k d_k \in D \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

Observe que, por definição,  $\mathcal{T}_D(\bar{x}) \subset \mathcal{B}_D(\bar{x})$ . Por argumentos análogos, é possível mostrar que  $\mathcal{B}_D(\bar{x})$  é um cone. A Figura 2.1 também representa  $d$  em  $\mathcal{B}_D(\bar{x})$ .

O resultado a seguir mostra o papel do cone tangente  $\mathcal{B}_D(\bar{x})$  nas condições de otimalidade:

<sup>1</sup>Terminologia retirada de [2, p. 25].

<sup>2</sup>A notação  $o(t)$  provém da Definição 1.8.

**Teorema 2.2.** *Sejam  $D \subset \mathbb{R}^n$  e  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável no ponto  $\bar{x} \in D$ . Se  $\bar{x}$  é uma solução local do problema de minimizar  $f$  em  $D$ , então*

$$\langle \nabla f(\bar{x}), d \rangle \geq 0 \quad \forall d \in \mathcal{B}_D(\bar{x}).$$

*Demonstração.* Veja o Teorema 1.4.7 de [2, p. 26]. □

**Observação 2.1.** *Como  $\mathcal{T}_D(\bar{x}) \subset \mathcal{B}_D(\bar{x})$ , nas condições do Teorema 2.2,  $\langle \nabla f(\bar{x}), d \rangle \geq 0$  para todo  $d \in \mathcal{T}_D(\bar{x})$ .*

A condição de otimalidade dada no Teorema 2.2 pode ser reescrita de uma outra maneira, utilizando a seguinte noção:

**Definição 2.5.** [2, p. 27] *O cone dual (ou cone polar) de um cone  $K \subset \mathbb{R}^n$  é o conjunto*

$$K^* = \{y \in \mathbb{R}^n; \langle y, d \rangle \leq 0 \quad \forall d \in K\}.$$

### 2.2.1.2 Teorema do Subespaço Tangente

A descrição geométrica do cone tangente nos ajuda na análise de um ponto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  em relação ao problema de otimização (2.2)-(2.3) no que se refere ao estudo da estrutura local do conjunto viável  $D$ . Um exemplo disso, é a sua relação com o subespaço do  $\mathbb{R}^n$

$$\ker h'(\bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n : h'(\bar{x})d = 0\} = \{d \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla h_i(\bar{x}), d \rangle = 0, i = 1, \dots, l\},$$

que a princípio, contém as direções ortogonais a todos os gradientes das componentes da aplicação diferenciável  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  no ponto  $\bar{x}$ . Uma representação geométrica pode ser vista na Figura 2.2.

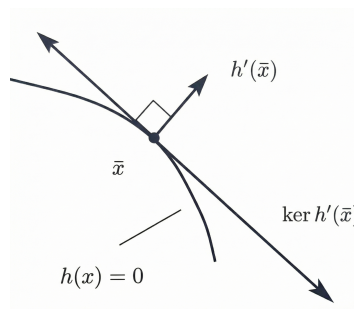


Figura 2.2: O subespaço  $\ker h'(\bar{x})$  (Fonte: Figura 2.1.1 de [2, p. 37]).

Um resultado relevante é que essas direções ortogonais também podem ser tangentes em relação ao conjunto  $D$ .

**Proposição 2.1.** *Seja  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  uma função diferenciável no ponto  $\bar{x} \in D$ , onde  $D = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}$ . Então*

$$\mathcal{B}_D(\bar{x}) \subset \ker h'(\bar{x}). \tag{2.4}$$

*Demonstração.* Veja a Proposição 2.1.1 de [2, p. 36].

□

Como no geral  $\mathcal{T}_D(\bar{x}) \subset \mathcal{B}_D(\bar{x})$ , nas condições da proposição acima,  $\mathcal{T}_D(\bar{x}) \subset \ker h'(\bar{x})$ . Com essa inclusão, pode-se concluir que as direções tangentes têm que ser ortogonais a todos os gradientes das componentes de  $h$  no ponto  $\bar{x}$ .

Em geral, a inclusão em (2.4) é própria:

**Exemplo 2.2.** *Seja  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $\bar{x} = (0, 0)$ . Note que*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\} = \{\bar{x}\}.$$

*Primeiramente, vamos verificar a igualdade  $\mathcal{T}_D(\bar{x}) = \{\bar{x}\}$ . Para isso, note que para todo  $(t_k) \subset \mathbb{R}_+$  com  $t_k \rightarrow 0^+$ , fazendo  $d_k = \bar{x}$ , evidentemente, obtemos  $d_k \rightarrow \bar{x}$  e  $\bar{x} + t_k d_k = \bar{x} \in D$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , ou seja,  $\{\bar{x}\} \subset \mathcal{T}_D(\bar{x})$ . Além disso, se  $d \in \mathcal{T}_D(\bar{x})$  então para todo  $t_k \rightarrow \mathbb{R}_+$ , existe uma sequência  $d_k \rightarrow d$  tal que  $\bar{x} + t_k d_k = t_k d_k \in D$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Afirmamos que  $d = \bar{x}$ , pois do contrário, para um  $k$  suficientemente grande devemos ter que  $d_k \neq 0$ , o que acarretaria em  $t_k d_k \neq \bar{x}$ , isto é,  $t_k d_k \notin D$  para algum  $k \in \mathbb{N}$  o que contradiria  $d \in \mathcal{T}_D(\bar{x})$ . Portanto,  $d = \bar{x}$  e consequentemente  $\mathcal{T}_D(\bar{x}) \subset \{\bar{x}\}$ . Isso completa a nossa verificação.*

*Apesar de  $\mathcal{T}_D(\bar{x}) = \{\bar{x}\}$ , como  $h'(\bar{x}) = 0$ , tem-se que  $\ker h'(\bar{x}) = \mathbb{R}^2$ . Portanto,  $\mathcal{T}_D(\bar{x}) \neq \ker h'(\bar{x})$  neste caso. Por fim, gostaríamos de salientar que  $\mathcal{T}_D(\bar{x}) = \{\bar{x}\}$  somente porque  $\bar{x} = (0, 0)$ .*

Com isso, evidenciamos que a igualdade em (2.4) depende do acréscimo de hipóteses. Em particular, a igualdade ocorre quando  $\{\nabla h_i(\bar{x}), i = 1, \dots, l\}$  é um conjunto linearmente independente, isto é, a independência linear dos gradientes das restrições de igualdade. Conforme mostra o seguinte resultado.

**Teorema 2.3. (Teorema do Subespaço Tangente)** *Suponha que  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  seja diferenciável numa vizinhança do ponto  $\bar{x} \in D = \{x \in \mathbb{R}^n : h_i(x) = 0, i = 1, \dots, l\}$ , e que a derivada de  $h$  seja contínua em  $\bar{x}$ . Então quando  $\{\nabla h_i(\bar{x}), i = 1, \dots, l\}$  é um conjunto linearmente independente, tem-se que  $\mathcal{T}_D(\bar{x}) = \ker h'(\bar{x})$ .*

*Demonstração.* Veja o Teorema 2.1.8 de [2, p. 42].

□

Com a caracterização do cone tangente dada pelo Teorema 2.3 podemos concluir que, nas condições dadas pelo resultado, todas as direções tangentes em relação ao conjunto  $D$  no ponto  $\bar{x}$  são ortogonais aos gradientes das restrições em  $\bar{x}$ . Em particular, se  $\bar{x}$  é um minimizador local do problema (2.3)-(2.4) então o gradiente da função objetivo em  $\bar{x}$  é perpendicular aos gradientes das restrições em  $\bar{x}$  e assim obtemos a condição de otimalidade a seguir.

**Teorema 2.4. (Condição necessária de primeira ordem)** Suponha que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  seja diferenciável no ponto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  e que  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  seja diferenciável numa vizinhança deste ponto, com derivada contínua em  $\bar{x}$ . Suponha também que  $\bar{x}$  seja minimizador local do problema

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}.$$

Se vale a independência linear do conjunto  $\{\nabla h_i(\bar{x}), i = 1, \dots, l\}$ , então

$$\langle \nabla f(\bar{x}), d \rangle = 0 \quad \forall d \in \ker h'(\bar{x}).$$

*Demonstração.* Veja o Teorema 2.1.9 de [2, p. 43]. □

### 2.2.1.3 Condições de otimalidade de Lagrange

A condição necessária de primeira ordem para o problema (2.3)-(2.4), dada no Teorema 2.4, pode ser escrita em outra forma equivalente:

$$\langle \nabla f(\bar{x}), d \rangle = 0 \forall d \in \ker h'(\bar{x}) \Leftrightarrow -\nabla f(\bar{x}) \in (\ker h'(\bar{x}))^\perp \stackrel{(*)}{=} \text{im}(h'(\bar{x}))^\top,$$

onde, segundo [2], o sinal negativo foi introduzido por razões históricas,  $\text{im}(\cdot)$  denota a imagem de uma transformação linear, além disso  $(\cdot)^\perp$  denota o complemento ortogonal e a igualdade  $(*)$  é uma identidade conhecida da Álgebra Linear, para mais detalhes veja o Teorema 11.4 de [8].

Como  $-\nabla f(\bar{x}) \in \text{im}(h'(\bar{x}))^\top$  existe um  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^l$  tal que  $\nabla f(\bar{x}) = -(h'(\bar{x}))^\top \bar{\lambda}$ . De acordo com [2], esta é a condição clássica de Lagrange, além disso os autores afirmam que este resultado é muito comum ser formulado em termos da **Lagrangiana** do problema (2.3)-(2.4) que é uma função dada por:

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}, \text{ com } L(x, \lambda) = f(x) + \langle \lambda, h(x) \rangle = f(x) + \sum_{i=1}^l \lambda_i h_i(x).$$

Observamos que

$$(\nabla L)_x(x, \lambda) = \nabla f(x) + (h'(x))^\top \lambda = \nabla f(x) + \sum_{i=1}^l \lambda_i \nabla h_i(x) \quad (2.5)$$

e

$$(\nabla L)_\lambda = h(x) \quad (2.6)$$

onde a igualdade (2.5) resulta do fato de que as primeiras  $n$  variáveis da Lagrangiana são todas as variáveis da função objetivo, por isso temos  $\nabla f(x)$  na primeira parcela. Além disso, para explicar o resultado da segunda parcela, considere a função auxiliar

$\varphi(x) = \langle \lambda, h(x) \rangle$  e vamos encontrar sua derivada com respeito a  $x$ . Para isso, note que

$$\varphi(x + td) - \varphi(x) = \langle \lambda, h(x + td) \rangle - \langle \lambda, h(x) \rangle = \langle \lambda, h(x + td) - h(x) \rangle.$$

Usando a diferenciabilidade de  $h$  no ponto  $x$ , pela Fórmula de Taylor de primeira ordem, dada em (1.16), temos que, para todo  $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e  $t > 0$  suficientemente pequeno

$$\langle \lambda, h(x + td) - h(x) \rangle = \langle \lambda, t \cdot h'(x)d + o(t) \rangle = t \langle \lambda, h'(x)d \rangle + \langle \lambda, o(t) \rangle,$$

Como  $\frac{\langle \lambda, o(t) \rangle}{t} = \langle \lambda, o(t)/t \rangle \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow 0^+$  podemos escrever que

$$t \langle \lambda, h'(x)d \rangle + \langle \lambda, o(t) \rangle = t \langle \lambda, h'(x)d \rangle + o(t) = t \langle (h'(x))^\top \lambda, d \rangle + o(t),$$

onde o último membro da igualdade acima é obtido pela identidade (1.6). Logo,

$$\varphi(x + td) - \varphi(x) = t \langle (h'(x))^\top \lambda, d \rangle + o(t),$$

Por outro lado, pela diferenciabilidade de  $\varphi$  em  $x$ ,

$$\varphi(x + td) - \varphi(x) = t \langle \nabla \varphi(x), d \rangle + o(t).$$

Assim pela transitividade da relação de igualdade obtemos que

$$t \langle (h'(x))^\top \lambda, d \rangle + o(t) = t \langle \nabla \varphi(x), d \rangle + o(t)$$

o que implica em  $\langle \nabla \varphi(x) - (h'(x))^\top \lambda, d \rangle = 0$ . Como  $d$  é arbitrário segue que  $\nabla \varphi(x) = (h'(x))^\top \lambda$ . Por argumentos análogos, obtemos a igualdade (2.6). Assim, pela regra da derivada da soma, obtemos (2.5).

Além disso, como em (2.5) temos  $(\nabla L)_x(x, \lambda) = \nabla f(x) + \sum_{i=1}^l \lambda_i \nabla h_i(x)$ , se as funções  $f$  e  $h$  são duas vezes diferenciáveis no ponto  $x$ , então  $(\nabla^2 L)_{xx}(x, \lambda) = \nabla^2 f(x) + \sum_{i=1}^l \lambda_i \nabla^2 h_i(x)$  visto que as funções  $f$  e  $g$  dependem apenas de  $x$ .

Observando a igualdade (2.5) podemos dizer que a condição clássica de Lagrange, isto é, a existência de um  $\lambda \in \mathbb{R}^l$  tal que  $\nabla f(\bar{x}) = -(h'(\bar{x}))^\top \lambda$  equivale a  $(\nabla L)_x(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0$ . Com isso, obtemos o seguinte resultado.

**Teorema 2.5. (Condições de otimalidade de Lagrange)** *Suponha que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  seja diferenciável no ponto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  e que  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  seja diferenciável numa vizinhança deste ponto, com derivada contínua em  $\bar{x}$ . Suponha também que  $\bar{x}$  seja um minimizador local do problema*

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : h_i(x) = 0, i = 1, \dots, l\}.$$

Se  $\{\nabla h_i, i = 1, \dots, l\}$  é um conjunto linearmente independente, então existe um único  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^l$  tal que

$$(\nabla L)_x(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0. \quad (2.7)$$

*Demonstração.* Veja o Teorema 2.2.2 de [2, p. 46]. □

Com este resultado, podemos delimitar alguns dos candidatos a minimizador local do problema de otimização com restrições de igualdade.

**Definição 2.6.** [2, p. 47] Dizemos que um ponto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  é um **ponto estacionário** do problema

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\},$$

se  $\bar{x} \in D$  e  $(\nabla L)_x(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0$  para algum  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^l$ . Este  $\bar{\lambda}$  é denominado **multiplicador de Lagrange**, associado ao ponto estacionário  $\bar{x}$ .

Cabe salientar que os pontos em que  $\{\nabla h_i, i = 1, \dots, l\}$  é linearmente dependentes são chamados de **pontos irregulares** (caso contrário, chamaremos estes pontos de **regulares**) e mesmo quando não satisfazem as condições de Lagrange, também são candidatos a solução e têm que ser analisados.

O motivo para tal é que existem problemas de otimização, com restrições de igualdade, onde o minimizador local é um ponto viável, porém irregular. Antes de mostrarmos um exemplo, vamos estabelecer uma maneira de encontrar analiticamente os pontos estacionários do problema (2.2)-(2.3).

Repare que, por definição, se  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  é um ponto estacionário, então  $\bar{x} \in D$ , isto é,  $h(\bar{x}) = 0$  e  $(\nabla L)_x(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0$  para algum  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^l$ . Dessa forma, o sistema de equações

$$(\nabla L)_x(x, \lambda) = 0, \quad h(x) = 0,$$

em relação de  $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$  caracteriza os pontos estacionários do problema e os multiplicadores de Lagrange associados. Ele é denominado **sistema de Lagrange**. De forma equivalente, este sistema pode ser escrito como

$$\nabla L(x, \lambda) = 0.$$

Vamos agora ao exemplo:

**Exemplo 2.3.** Considere o problema

$$\min(-x) \text{ sujeito a } x \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^2 = 0\}.$$

Para todo  $(x, y) \neq 0$ , tem-se que  $\nabla h(x, y) = (3x^2, 2y) \neq 0$ , ou seja, apenas a origem é um ponto irregular. Como  $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda h(x, y) = -x + \lambda(x^3 + y^2)$ , o sistema

de Lagrange para este problema é dado pelas equações

$$-1 + 3\lambda x^2 = 0 \text{ (i)} \quad 2\lambda y = 0 \text{ (ii)} \quad x^3 + y^2 = 0 \text{ (iii)}.$$

Observe que o sistema acima não tem solução já que a equação (ii) implica em  $\lambda = 0$  ou  $y = 0$ . O primeiro caso nos permite afirmar que  $-1 + 3\lambda x^2 = -1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  e isso contradiz a equação (i). No último caso segue em (iii) que  $x = 0$  e isso, novamente, é uma contradição a (i). Agora, vamos considerar a origem. Note que se  $(x, y) \in D$  então  $-x^3 = y^2$ , logo  $-x = \sqrt[3]{y^2} \geq 0$  para todo  $y \in \mathbb{R}$  e como  $\bar{x} = (0, 0) \in D$  concluímos que a origem é minimizador local do problema. Cabe notar que o ponto  $\bar{x}$  não satisfaz as condições de Lagrange, já que

$$(\nabla L)_x(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) + \lambda \nabla h(\bar{x}) = (-1, 0) + \lambda(0, 0) = (-1, 0) \neq (0, 0).$$

Vamos obter as condições de otimalidade de Lagrange de segunda ordem. Para simplificar um pouco a escrita, vamos definir um conjunto auxiliar. Para um ponto  $\bar{x} \in D$  estacionário dado, denotamos por

$$\mathcal{M}(\bar{x}) = \{\lambda \in \mathbb{R}^l : (\nabla L)_x(\bar{x}, \lambda) = 0\}$$

o conjunto de multiplicadores de Lagrange associados a  $\bar{x}$ .

Começamos com a condição necessária de segunda ordem.

**Teorema 2.6. (Condição necessária de segunda ordem)** *Suponha que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  sejam duas vezes diferenciáveis no ponto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ . Suponha também que  $\bar{x}$  seja um minimizador local do problema*

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}.$$

Se  $\bar{x}$  é regular, então para todo  $\bar{\lambda} \in \mathcal{M}(\bar{x})$

$$\langle (\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda})d, d \rangle \geq 0 \text{ para todo } d \in \ker h'(\bar{x}). \quad (2.8)$$

*Demonstração.* Veja o Teorema 2.3.1 de [2, p. 51]. □

Novamente, a condição  $\langle (\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda})d, d \rangle \geq 0$  para todo  $d \in \ker h'(\bar{x})$  é necessária, mas não suficiente, no sentido de existir problemas com restrições de igualdade em que o minimizador local não satisfaz essa desigualdade. Evidentemente, nas hipóteses do teorema para esse tipo de problema, o minimizador deve ser um ponto irregular.

**Exemplo 2.4.** *Considere o problema*

$$\min x^4 + y^4 \text{ sujeito a } x \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0\}.$$

Como  $L(x, y, \lambda) = x^4 + y^4 + \lambda(x^2 - y^2)$  o sistema de Lagrange para este problema é dado por

$$4x^3 + 2\lambda x = 0 \text{ (i)} \quad 4y^3 - 2\lambda y = 0 \text{ (ii)} \quad x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 0 \text{ (iii)}.$$

De (iii) temos que  $x = y$  ou  $x = -y$ . No primeiro caso, substituindo em (ii) obtemos  $4x^3 - 2\lambda x = 0$  (iv), daí somando (i) e (iv) segue que  $8x^3 = 0$ , o que implica em  $x = y = 0$ , assim as equações (i) e (ii) são satisfeitas para qualquer  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Caso  $x = -y$  por argumetos análogos obtemos o mesmo resultado, ou seja,  $\mathcal{M}(\bar{x}) = \mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  não possui pontos estacionários.

Por outro lado, observe que  $\bar{x} = (0, 0)$  é irregular, pois  $\nabla h(\bar{x}) = (0, 0)$ , o que implica em  $\ker \nabla h(\bar{x}) = \mathbb{R}$ . Todavia  $\bar{x}$  é minimizador global de  $f$  porque  $x^4 + y^4 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$  e o ponto  $\bar{x}$  é viável. Além disso, para qualquer  $\lambda \in \mathcal{M}(\bar{x}) \setminus \{0\}$  a matriz

$$(\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \lambda) = \nabla^2 f(\bar{x}) + \lambda \nabla^2 h(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$$

é indefinida.

Por fim, vamos mostrar a condição suficiente de segunda ordem é obtida supondo crescimento quadrático da função objetivo, no conjunto viável, em torno de  $\bar{x}$ .

**Teorema 2.7. (Condição suficiente de segunda ordem)** *Suponha que as funções  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  sejam duas vezes diferenciáveis no ponto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ .*

*Se  $\bar{x} \in D$  e*

$$\forall d \in \ker h'(\bar{x}) \setminus \{0\} \exists \lambda \in \mathcal{M}(\bar{x}) \text{ tal que } \langle (\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \lambda)d, d \rangle > 0, \quad (2.9)$$

*então  $f$  satisfaz no conjunto  $D$  em torno de  $\bar{x}$  a condição de crescimento quadrático, isto é, existem uma vizinhança  $U$  de  $\bar{x}$  e um número  $\beta > 0$  tais que*

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq \beta \|x - \bar{x}\|^2 \quad \forall x \in D \cap U. \quad (2.10)$$

*Em particular,  $\bar{x}$  é um minimizador local estrito do problema*

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : h_i(x), i = 1, \dots, l\}.$$

*Reciprocamente, se  $\bar{x}$  é regular e vale (2.10), então a condição (2.9) está satisfeita.*

*Demonstração.* Veja o Teorema 2.3.2 de [2, p. 53]. □

A condição (2.9) é suficiente mas não é necessária no sentido de existir problemas de otimização com restrições de igualdade em que o minimizador local estrito não a satisfaz. O problema de otimização dado no Exemplo 2.4 é um deles.

**Observação 2.2.** A condição dada em (2.9) é equivalente a existência de um  $\gamma > 0$  tal que

$$\langle (\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \lambda)d, d \rangle \geq \gamma \|d\|^2 \quad \forall d \in \ker h'(\bar{x}). \quad (2.11)$$

## 2.2.2 Problemas com restrições de igualdade e desigualdade

Considere o problema

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D, \quad (2.12)$$

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n; h(x) = 0 \text{ e } g(x) \preceq 0\} \quad (2.13)$$

onde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  são funções dadas. Observamos que a notação  $g(x) \preceq 0$  significa  $g_i(x) \leq 0$  para todo  $i = 1, \dots, m$ . Analogamente definimos  $g(x) \prec 0$ ,  $g(x) \succ 0$  e  $g(x) \succeq 0$ . Como  $g(x)$  é um vetor, também escreveremos  $v \preceq 0$ ,  $v \prec 0$ ,  $v \succeq 0$  e  $v \succ 0$  para todo  $v \in \mathbb{R}^n$ .

Para o estudo desse problema, é necessário compreender, pelo menos, a estrutura local do conjunto viável em torno de seus pontos. Com esse objetivo, definimos:

**Definição 2.7.** [2, p. 172] *Seja  $\bar{x} \in D$ , onde  $D = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0, g(x) \preceq 0\}$ . Dizemos que a restrição de desigualdade que corresponde ao índice  $i \in \{1, \dots, m\}$  é **ativa** no ponto  $\bar{x}$  para  $g_i(\bar{x}) = 0$ , isto é, quando a desigualdade é satisfeita como igualdade.*

Assim como feito em [2], o conjunto os índices das restrições ativas no ponto  $\bar{x} \in D$  será denotado por  $I(\bar{x}) = \{i = 1, \dots, m : g_i(\bar{x}) = 0\}$ .

Observamos que nesta definição, não foi incluída as restrições de igualdade porque todas elas sempre são ativas, no sentido da definição acima, em todo ponto viável. As restrições ativas têm um importante papel na caracterização do cone tangente no caso de restrições de igualdade e desigualdade.

### 2.2.2.1 Cone tangente no caso de restrições de igualdade e desigualdade

Assim como na Seção 2.2.1.1, começamos com as condições necessárias para uma direção ser tangente. Para isso, suponhamos que  $h$  e  $g$  sejam diferenciáveis em  $\bar{x} \in D$ . [2, p. 173] introduziu o cone obtido pela linearização das restrições de igualdade e das restrições ativas de desigualdade, no ponto  $\bar{x}$ , como

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\bar{x}) &= \{d \in \mathbb{R}^n; \langle \nabla h_i(\bar{x}), d \rangle = 0, i = 1, \dots, l, \langle \nabla g_i(\bar{x}), d \rangle \leq 0 \forall i \in I(\bar{x})\} \\ &= \{d \in \ker h'(\bar{x}); \langle \nabla g_i(\bar{x}), d \rangle \leq 0 \forall i \in I(\bar{x})\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Repare que, por definição,  $\mathcal{H}(\bar{x}) \subset \ker h'(\bar{x})$ , além disso, trata-se de um cone porque se  $d \in \mathcal{H}(\bar{x})$  então  $\langle \nabla g_i(\bar{x}), \alpha d \rangle = \alpha \langle \nabla g_i(\bar{x}), d \rangle \leq 0$  para todo  $\alpha > 0$ , ou seja  $\alpha d \in \mathcal{H}(\bar{x})$ .

Como veremos a seguir, somente as direções que pertencem ao cone  $\mathcal{H}(\bar{x})$  podem ser tangentes no ponto  $\bar{x} \in D$ , em relação ao conjunto  $D$ . Outra propriedade importante deste cone é dada na seguinte proposição:

**Proposição 2.2.** *Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $D = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0, g(x) \preceq 0\}$ . Suponha que  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  sejam diferenciáveis em  $\bar{x} \in D$ . Então  $\mathcal{B}_D(\bar{x}) \subset \mathcal{H}(\bar{x})$ <sup>3</sup>.*

*Demonstração.* Veja a Proposição 4.1.1 de [2, p. 174]. □

Como foi feito para o caso de restrições de igualdade, necessitamos de algumas hipóteses adicionais para obter uma descrição precisa do cone tangente. Para isso, temos:

**Definição 2.8.** [2, p. 176] *Dizemos que o ponto  $\bar{x} \in D$  satisfaz a condição de regularidade de Mangasarian-Fromovitz, quando*

$$\{\nabla h_i(\bar{x}), i = 1, \dots, l\} \text{ é L.I. e } \exists \bar{d} \in \ker h'(\bar{x}); \langle \nabla g_i(\bar{x}), \bar{d} \rangle < 0 \forall d \in I(\bar{x}), \quad (2.15)$$

onde a sigla L.I. significa linearmente independente.

Com a condição de regularidade de Mangasarian-Fromovitz, obtemos o seguinte resultado que generaliza o Teorema do Subespaço Tangente (Teorema 2.3) para o caso de restrições de igualdade e desigualdade.

**Teorema 2.8.** *(Cone tangente no caso de restrições de igualdade e desigualdade) Seja*

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n; h(x) = 0 \text{ e } g(x) \preceq 0\}.$$

*Suponhamos que  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  seja diferenciável numa vizinhança do ponto  $\bar{x} \in D$  com derivada contínua em  $\bar{x}$ . Suponhamos que  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  seja diferenciável em  $\bar{x}$ . Seja*

$$\mathcal{H}(\bar{x}) = \{d \in \ker h'(\bar{x}) : \langle \nabla g_i(\bar{x}), d \rangle \leq 0 \forall i \in I(\bar{x})\}$$

*o cone da linearização das restrições ativas. Se a condição de regularidade de Mangasarian-Fromovitz é satisfeita, tem-se que  $\mathcal{T}_D(\bar{x}) = \mathcal{B}_D(\bar{x}) = \mathcal{H}(\bar{x})$ .*

*Demonstração.* Veja o Teorema 4.1.4 de [2, p. 178]. □

Pelo visto no Teorema 2.2 e sua observação, juntamente com o Teorema 2.8, temos a seguinte condição de otimalidade:

**Teorema 2.9.** [2, p. 181] *Suponha que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  sejam diferenciáveis no ponto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  e  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  seja diferenciável numa vizinhança deste ponto com derivada contínua em  $\bar{x}$ .*

---

<sup>3</sup>O conjunto denotado por  $\mathcal{B}_D(\bar{x})$  é o cone tangente de Bouligand apresentado na Seção 2.2.1.1

Se  $\bar{x}$  é um minimizador local do problema

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n; h(x) = 0 \text{ e } g(x) \leq 0\}$$

e se a condição de regularidade de Mangasarian Fromovitz é satisfeita, então tem-se que

$$\langle \nabla f(\bar{x}), d \rangle \geq 0 \quad \forall d \in \mathcal{H}(\bar{x}).$$

### 2.2.2.2 Condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker

Pela definição de cone dual (Definição 2.5), podemos escrever que

$$(\mathcal{H}(\bar{x}))^* = \{y \in \mathbb{R}^n; \langle y, d \rangle \leq 0 \quad \forall d \in \mathcal{H}(\bar{x})\},$$

logo a condição de otimalidade  $\langle \nabla f(\bar{x}), d \rangle \geq 0$  para todo  $d \in \mathcal{H}(\bar{x})$  equivale a  $\langle -\nabla f(\bar{x}), d \rangle \leq 0$  para todo  $d \in \mathcal{H}(\bar{x})$ , ou seja,

$$-\nabla f(\bar{x}) \in (\mathcal{H}(\bar{x}))^*,$$

onde  $\mathcal{H}(\bar{x}) = \{d \in \ker h'(\bar{x}) : \langle \nabla g_i(\bar{x}), d \rangle \leq 0 \quad \forall i \in I(\bar{x})\}$ . Segundo [2], as condições clássicas de Karush-Kuhn-Tucker são obtidas via a computação explícita do cone dual acima. Para isso, precisamos caracterizá-los com o auxílio dos resultados a seguir.

**Teorema 2.10. (Teorema da Alternativa de Motzkin)** Para quaisquer matrizes  $A_i \in \mathbb{R}(m_i, n)$ ,  $i = 0, 1, 2$ ,  $A_0 \neq 0$ , um e somente um, dos dois seguintes sistemas possui solução:

$$A_0 x \succ 0, \quad A_1 x = 0, \quad A_2 x \succeq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

ou

$$\begin{aligned} A_0^\top y_0 + A_1^\top y_1 + A_2^\top y_2 &= 0, \\ (y_0, y_1, y_2) &\in (\mathbb{R}_+^{m_0} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}_+^{m_2}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

*Demonstração.* Veja o Teorema 3.3.1. de [2, p. 116]. □

**Lema 2.1. (Lema de Farkas)** Seja

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n; A_1 x = 0 \text{ e } A_2 x \leq 0\},$$

onde  $A_1 \in \mathbb{R}(m_1, n)$  e  $A_2 \in \mathbb{R}(m_2, n)$  são arbitrárias. Então

$$K^* = \{x \in \mathbb{R}^n; x = A_1^\top y_1 + A_2^\top y_2, y_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, y_2 \in \mathbb{R}_+^{m_2}\},$$

onde  $K^*$  é o cone dual do cone  $K$ .

*Demonstração.* Veja o Lema 4.2.1 de [2]. □

Assim, podemos reescrever a condição de otimalidade  $-\nabla f(\bar{x}) \in (\mathcal{H}(\bar{x}))^*$  lembrando que

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\bar{x}) &= \{d \in \mathbb{R}^n; h'(\bar{x})d = 0 \text{ e } \langle \nabla g_i(\bar{x}), d \rangle \leq 0 \forall i \in I(\bar{x})\} \\ &= \left\{ d \in \mathbb{R}^n; h'(\bar{x})d = 0 \text{ e } \sum_{i \in I(\bar{x})} \nabla g_i(\bar{x})^\top d \leq 0 \right\},\end{aligned}$$

aplicando o Lema de Farkas (Lema 2.1). Considerando  $A_1 = h'(\bar{x})$  e  $A_2 = \sum_{i \in I(\bar{x})} \nabla g_i(\bar{x})^\top$  concluímos que

$$(\mathcal{H}(\bar{x}))^* = \left\{ x \in \mathbb{R}^n; x = (h'(\bar{x}))^\top y_1 + \sum_{i \in I(\bar{x})} \nabla g_i(\bar{x}) y_2, y_1 \in \mathbb{R}^l, y_2 \in \mathbb{R}_+ \right\}.$$

Portanto, se  $-\nabla f(\bar{x}) \in (\mathcal{H}(\bar{x}))^*$  então existem  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^l$  e  $\bar{\mu}_i \geq 0, i \in I(\bar{x})$ , tais que

$$-\nabla f(\bar{x}) = (h'(\bar{x}))^\top \bar{\lambda} + \sum_{i \in I(\bar{x})} \bar{\mu}_i \nabla g_i(\bar{x}) = \sum_{i=1}^l \bar{\lambda}_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \bar{\mu}_i \nabla g_i(\bar{x}).$$

Para escrever esta condição no formato do Teorema de Karush-Kuhn-Tucker, introduzimos a **Lagrangiana** do problema

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n; h(x) = 0 \text{ e } g(x) \preceq 0\}$$

que é a função  $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \langle \lambda, h(x) \rangle + \langle \mu, g(x) \rangle.$$

Temos que

$$(\nabla L)_x(x, \lambda, \mu) = \nabla f(x) + (h'(x))^\top \lambda + (g'(x))^\top \mu$$

e

$$(\nabla^2 L)_{xx}(x, \lambda, \mu) = \nabla^2 f(x) + \sum_{i=1}^l \lambda_i \nabla^2 h_i(x) + \sum_{i \in I(x)} \mu_i \nabla^2 g_i(x)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}^l$  e  $\mu \in \mathbb{R}^m$ .

**Teorema 2.11. (Condições de Karush-Kuhn-Tucker)** *Sejam as funções  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  deriváveis no ponto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ , e seja  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  uma função diferenciável numa vizinhança do ponto  $\bar{x}$ , com derivada contínua neste ponto. Seja  $\bar{x}$  um minimizador local do problema*

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n; h(x) = 0 \text{ e } g(x) \preceq 0\}.$$

Então, se a condição de regularidade de Mangasarian-Fromovitz é válida, tem-se que existem  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^l$  e  $\bar{\mu} \in \mathbb{R}_+^m$  tais que

$$(\nabla L)_x(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = 0. \quad (2.17)$$

$$\bar{\mu}_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0, i = 1, \dots, m. \quad (2.18)$$

Sob a condição de independência linear dos gradientes das restrições ativas, isto é,

$\{\nabla h_i(\bar{x}), i = 1, \dots, l\} \cup \{\nabla g_i(\bar{x}), i \in I(\bar{x})\}$  é linearmente independente

temos que  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}_+^m$  que satisfaz (2.17)-(2.18) é único.

*Demonstração.* Veja o Teorema 4.2.2 de [2, p. 185]. □

A condição (2.18) é chamada **condição de complementaridade**, que diz

$$\bar{\mu}_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \setminus I(\bar{x}).$$

Agora, temos condições de definir a noção de ponto estacionário para o problema de otimização com restrições de igualdade e desigualdade.

**Definição 2.9.** [2, p. 186] Dizemos que  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  é um **ponto estacionário** do problema

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n; h(x) = 0 \text{ e } g(x) \preceq 0\}.$$

(ou ainda, um **ponto de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)**), quando  $\bar{x} \in D$  e existem  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^l$  e  $\bar{\mu} \in \mathbb{R}_+^m$  tais que as condições (2.17) e (2.18) são satisfeitas. Estes elementos  $\bar{\lambda}$  e  $\bar{\mu}$  serão chamados os **multiplicadores de Lagrange** associados ao ponto estacionário  $\bar{x}$ .

Então, pelo que vimos, sob certas hipóteses de regularidade das restrições, uma solução do problema

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n; h(x) = 0 \text{ e } g(x) \preceq 0\}.$$

é um ponto estacionário do problema. Em geral a recíproca é falsa como já vimos no caso de restrições de igualdade.

O sistema de equações e inequações

$$(\nabla L)_x(x, \lambda, \mu) = 0, h(x) = 0, \mu \geq 0, g(x) \preceq 0, \langle \mu, g(x) \rangle = 0$$

nas variáveis  $(x, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$ , caracteriza os pontos estacionários do problema e

os multiplicadores de Lagrange associados. Esse sistema se chama **sistema de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)**.

O sistema KKT pode ser utilizado para encontrar as soluções do problema de minimizar a função objetivo sujeito a restrições de igualdade e desigualdade, pois suas soluções, caso satisfaçam as condições de otimalidade, são soluções do problema. Contudo, observamos que os pontos que não satisfazem a condição de regularidade de Mangasarian-Fromovitz também são candidatos a solução e devem ser estudados em separado. Além disso, segundo [2], resolver um sistema KKT de maneira analítica, isto é, sem apelar aos métodos iterativos, só é possível em casos bem simples como nos exemplos 2.3 e 2.4 onde a função objetivo e as restrições são polinômios com grau menor ou igual a 4.

### 2.2.2.3 Condições de otimalidade de segunda ordem

A seguir desenvolvemos as condições necessárias e as suficientes de segunda ordem para o problema de otimização com restrições de igualdade e desigualdade. Para formular estes resultados, precisaremos do chamado **cone crítico** ou **cone de direções críticas** do problema no ponto  $\bar{x} \in D$ , definido por [2, p. 196] como sendo o conjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\bar{x}) &= \{d \in \mathcal{H}(\bar{x}); \langle \nabla f(\bar{x}), d \rangle \leq 0\} \\ &= \{d \in \mathbb{R}^n; \langle \nabla f(\bar{x}), d \rangle \leq 0, \langle \nabla g_i(\bar{x}), d \rangle \leq 0 \forall i \in I(\bar{x}), \langle \nabla h_i(\bar{x}), d \rangle = 0, i = 1, \dots, l\}. \end{aligned}$$

Observamos que este cone está bem definido quando  $f, g, h$  são diferenciáveis em  $\bar{x}$  e é não-vazio porque  $0 \in \mathcal{K}(\bar{x})$ . Antes de proseguirmos com as condições de otimalidade de segunda ordem, apresentaremos algumas outras caracterizações do cone crítico.

**Lema 2.2.** *Sejam  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  funções diferenciáveis em  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  e seja  $\bar{x}$  um ponto estacionário do problema*

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n; h(x) = 0 \text{ e } g(x) \preceq 0\}.$$

*Então para todo par  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}_+^m$  de multiplicadores de Lagrange associados a  $\bar{x}$ , tem-se que*

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\bar{x}) &= \{d \in \mathcal{H}(\bar{x}); \langle \nabla f(\bar{x}), d \rangle = 0\} \\ &= \{d \in \mathcal{H}(\bar{x}); \bar{\mu}_i \langle \nabla g_i(\bar{x}), d \rangle = 0 \forall i \in I(\bar{x})\} \\ &= \{d \in \ker h'(\bar{x}); \langle \nabla g_i(\bar{x}), d \rangle = 0 \forall i \in I_+(\bar{x}), \langle \nabla g_i(\bar{x}), d \rangle \leq 0 \forall i \in I_0(\bar{x})\} \quad (2.19) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} I_+(\bar{x}) &= \{i \in I(\bar{x}); \bar{\mu}_i > 0\}, \\ I_0(\bar{x}) &= I(\bar{x}) \setminus I_+(\bar{x}) = \{i \in I(\bar{x}); \bar{\mu}_i = 0\}. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Veja o Lema 4.3.1 de [2, p. 196]. □

Quando  $\bar{\mu}_i > 0$  para todo  $i \in I(\bar{x})$ , dizemos que o ponto estacionário  $\bar{x}$  satisfaz a **condição de complementaridade estrita** (com multiplicadores de Lagrange  $\bar{\lambda}$  e  $\bar{\mu}$ ). Observamos que, sob esta condição, (2.19) implica que

$$\mathcal{K}(\bar{x}) = \{d \in \ker h'(\bar{x}); \langle \nabla g_i(\bar{x}), d \rangle = 0 \forall i \in I(\bar{x})\}.$$

Em particular, neste caso, o cone crítico é um subespaço vetorial de  $\ker h'(\bar{x})$ .

Denotamos o conjunto dos multiplicadores de Lagrange associados a um ponto estacionário  $\bar{x}$  por

$$\mathcal{M}(\bar{x}) = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}_+^m; (\nabla L)_x(\bar{x}, \lambda, \mu) = 0, \mu_i g_i(\bar{x}) = 0, i = 1, \dots, m\}.$$

**Teorema 2.12. (Condição necessária de segunda ordem)** *Sejam as funções  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  duas vezes diferenciáveis no ponto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ . Suponhamos também que  $\bar{x}$  seja uma solução local do problema*

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n; h(x) = 0 \text{ e } g(x) \preceq 0\}.$$

*Se os gradientes das restrições ativas em  $\bar{x}$  são linearmente independentes, então existe um único  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in \mathcal{M}(\bar{x})$  tal que*

$$\langle (\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})d, d \rangle \geq 0 \forall d \in \mathcal{K}(\bar{x}). \quad (2.20)$$

*Demonstração.* Veja o Teorema 4.3.2 de [2, p. 198]. □

Como vimos no Exemplo 2.4, existem problemas com restrições de igualdade (que são facilmente estendidos a problemas com restrições de igualdade e desigualdade) em que a matriz hessiana é indefinida no minimizador local. Isso se deve ao fato de que, neste exemplo, tal ponto não satisfaz a independência linear dos gradientes das restrições ativas.

Por fim, apresentamos a condição suficiente de segunda ordem para problemas de otimização com restrições de igualdade e desigualdade.

**Teorema 2.13. (Condição suficiente de segunda ordem) [2, p. 206]** *Sejam as funções  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  duas vezes diferenciáveis no ponto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ . Se  $\bar{x} \in D$  e*

$$\forall d \in \mathcal{K}(\bar{x}) \setminus \{0\} \exists (\lambda, \mu) \in \mathcal{M}(\bar{x}); \langle (\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \lambda, \mu)d, d \rangle > 0, \quad (2.21)$$

*então  $f$  satisfaz, em  $\bar{x}$ , a condição de crescimento quadrático, isto é, existem uma vizi-*

nhança  $U$  de  $\bar{x}$  e um número  $\beta > 0$  tais que

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq \beta \|x - \bar{x}\|^2 \quad \forall x \in D \cap U. \quad (2.22)$$

Em particular,  $\bar{x}$  é um minimizador local estrito do problema

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n; h(x) = 0 \text{ e } g(x) \preceq 0\}.$$

Reciprocamente, se  $\bar{x}$  satisfaz a condição de regularidade das restrições de Mangasarian-Fromovitz

$$\{\nabla h_i(\bar{x}), i = 1, \dots, l\} \text{ é L.I. e } \exists \bar{d} \in \ker h'(\bar{x}); \langle \nabla g_i(\bar{x}), \bar{d} \rangle < 0 \quad \forall d \in I(\bar{x}).$$

e vale a condição de crescimento quadrático em  $D$  em torno de  $\bar{x}$ , ou seja vale (2.22), então a matriz  $(\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \lambda, \mu)$  é definida positiva conforme (2.21).

*Demonstração.* Veja o Teorema 4.3.7 de [2]. □

**Observação 2.3.** A condição dada em (2.21) é equivalente a existência de um  $\gamma > 0$  tal que

$$\langle (\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \lambda, \mu)d, d \rangle \geq \gamma \|d\|^2 \quad \forall d \in \mathcal{K}(\bar{x}). \quad (2.23)$$

## 2.3 Otimização irrestrita

Nessa seção exploraremos o famoso método de Newton utilizado para encontrar zeros de campos vetoriais do tipo  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Observamos que, fazendo  $\Phi = \nabla f$ , podemos encontrar os pontos estacionários do problema de otimização irrestrito cuja  $f$  é a função objetivo.

Em particular, estamos interessados na interpretação dos termos da sequência  $(x_k)$  gerada pelo esquema iterativo do método de Newton em (2.26) como solução do problema de minimização irrestrita da aproximação de segunda ordem da função objetivo em torno do ponto  $x_k$  conforme (2.30). Esta interpretação nos auxiliará a entender que aplicar o método de Newton no sistema de Lagrange (veja o Algoritmo 2) em teoria é a mesma coisa que utilizar métodos PQS para restrições de igualdade considerado no Algoritmo 3.

### 2.3.1 Método de Newton

O método de Newton clássico é introduzido para o problema de achar um  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$\Phi(x) = 0, \quad (2.24)$$

onde  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é diferenciável. Seja  $x_k \in \mathbb{R}^n$  uma aproximação a alguma solução  $\bar{x}$  da equação (2.24). Em torno de  $x_k$  podemos aproximar (2.24) pela sua linearização

$$0 = \Phi(\bar{x}) = \Phi(x_k) + \Phi'(x_k)(x - x_k). \quad (2.25)$$

A relação (2.25) chama-se a equação de iteração do *método de Newton*. Supondo que  $\Phi'(x_k)$  seja invertível, podemos escrever, a partir de (2.25), que

$$x = x_k - (\Phi'(x_k))^{-1}\Phi(x_k).$$

Assim, o método de Newton pode ser escrito em forma do esquema iterativo

$$x_{k+1} = x_k - (\Phi'(x_k))^{-1}\Phi(x_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.26)$$

Com isso, podemos introduzir o seguinte algoritmo adaptado de [3, p. 103].

---

**Algoritmo 1:** Método de Newton

---

**Entrada:** Chute inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sua derivada  $\Phi'$  e  $\varepsilon > 0$ .

**Saída:**  $x_k \in \mathbb{R}^n$  tal que  $|\Phi(x_k)| < \varepsilon$ .

1 **início**

2      $k := 0$ ;

3     **enquanto**  $|\Phi(x_k)| \geq \varepsilon$  **faça**

4          $x_{k+1} = x_k - (\Phi'(x_k))^{-1}\Phi(x_k)$ ;

5          $k := k + 1$ ;

6     **fim**

7     **retorna**  $x_k$

8 **fim**

---

O resultado a seguir nos dá as condições para que o esquema iterativo (2.26) convirja e sua taxa de convergência. Antes de enunciá-lo vamos relembrar a noção de função *Lipschitziana* e definir taxa de convergência superlinear e quadrática.

**Definição 2.10.** [7, p. 22] *Dado  $X \subset \mathbb{R}^m$ , uma aplicação  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  diz-se Lipschitziana quando existe  $L > 0$ , constante de Lipschitz de  $f$ , tal que para quaisquer  $x, y \in X$ , tem-se  $\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|$ .*

Para a definição a seguir, supomos que ao fazermos referência a uma sequência  $(x_k)$  ela satisfaz as seguintes condições:  $x_k \rightarrow \bar{x}$ ;  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  é suficientemente próximo de  $\bar{x}$ ;  $x_k \neq \bar{x}$  para todo  $k$ ; e que todas as constantes apresentadas na definição abaixo não dependem de  $x_0$ .

**Definição 2.11.** [3, p. 42] *Quando*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_{k+1} - \bar{x}\|}{\|x_k - \bar{x}\|} = 0,$$

dizemos que a taxa de convergência da sequência  $(x_n)$  a  $\bar{x}$  é superlinear. Em particular, se

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_{k+1} - \bar{x}\|}{\|x_k - \bar{x}\|^2} \leq C,$$

onde  $C > 0$  é uma constante fixa, a taxa de convergência é quadrática.

Observe que a taxa de convergência refere-se a taxa de redução da distância entre duas iteradas consecutivas, de uma sequência  $(x_k)$  gerada por um método, da solução para  $k$  suficientemente grande. Assim, espera-se que a sequência gerada por um método convirja numa quantidade menor de iteradas em relação a outro que possua taxa de convergência menor. Em nosso contexto, a taxa de convergência quadrática é melhor do que a superlinear.

**Teorema 2.14. (Convergência local do método de Newton)** *Seja  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função diferenciável numa vizinhança do ponto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ , com derivada contínua neste ponto. Seja  $\bar{x}$  uma solução da equação  $\Phi(x) = 0$ , tal que a matriz  $\Phi'(\bar{x})$  é invertível.*

*Então para qualquer ponto inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  suficientemente próximo a  $\bar{x}$ , o Algoritmo 1 gera uma sequência  $(x_k)$  bem definida que converge a  $\bar{x}$ . A taxa de convergência é superlinear, e se a derivada de  $\Phi$  é Lipschitz-contínua numa vizinhança de  $\bar{x}$ , então a taxa de convergência é quadrática.*

*Demonstração.* Veja o Teorema 3.2.2 de [3].

□

Agora consideremos o problema de otimização irrestrita

$$\min f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.27}$$

onde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função duas vezes diferenciável no  $\mathbb{R}^n$ . Os pontos estacionários deste problema<sup>4</sup> podem ser obtidos pelo método de Newton, fazendo  $\Phi(x) = \nabla f(x)$ .

Portanto, podemos tentar computar pontos estacionários do problema (2.27) aplicando o método de Newton à equação  $\nabla f(x) = 0$ . Como  $\Phi(x) = \nabla f(x)$  o esquema iterativo dado em (2.26) pode ser escrito como

$$x_{k+1} = x_k - (\nabla^2 f(x_k))^{-1} \nabla f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots \tag{2.28}$$

logo, por (2.28),  $x_{k+1}$  é solução do sistema de equações lineares em  $x$

$$\nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)(x - x_k) = 0. \tag{2.29}$$

---

<sup>4</sup>De acordo com [2, p. 15] os pontos estacionários do problema (2.27) são os zeros de  $\nabla f$ .

Além disso, o sistema (2.29) caracteriza os pontos estacionários do problema irrestrito

$$\min p(x) = f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x_k)(x - x_k), x - x_k \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.30)$$

porque  $\nabla p(x) = \nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)(x - x_k)$ . Observe que  $p(x)$  é a aproximação de Taylor de segunda ordem da função  $f$  em torno do ponto  $x_k$ . Cada termo da sequência  $(x_{k+1})$  gerada pelo método de Newton é ponto estacionário do problema de otimização irrestrita acima.

## 2.4 Otimização restrita

Nessa seção aplicaremos o método de Newton no sistema de Lagrange para encontrar pontos estacionários de problemas de otimização com restrições de igualdade. Veremos que é possível interpretar a iterada do esquema iterativo do método de Newton, no contexto do sistema de Lagrange, como solução do problema de minimização de uma função quadrática restrita a linearização das restrições de igualdade em torno do iterando.

### 2.4.1 Métodos de Newton para o sistema de Lagrange

Como vimos na seção 2.2.1.3, pontos estacionários do problema

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n; h(x) = 0\},$$

onde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  são funções diferenciáveis, são caracterizados pelo sistema de Lagrange

$$\nabla L(x, \lambda) = 0, \quad (2.31)$$

onde

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(x, \lambda) = f(x) + \langle \lambda, h(x) \rangle,$$

é a função de Lagrange do problema em consideração. O sistema (2.31) consiste em  $n + l$  equações em relação a  $n + l$  variáveis  $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$ . Portanto, pontos estacionários e multiplicadores de Lagrange associados podem ser encontrados aplicando a (2.31) o método de Newton, considerado na seção 2.3.1, o que resulta no esquema iterativo

$$(x_{k+1}, \lambda_{k+1}) = (x_k, \lambda_k) - (\nabla^2 L(x_k, \lambda_k))^{-1} \nabla L(x_k, \lambda_k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

onde  $(x_{k+1}, \lambda_{k+1})$  é solução do sistema de equações lineares

$$\nabla L(x_k, \lambda_k) + \nabla^2 L(x_k, \lambda_k)(x - x_k, \lambda - \lambda_k) = 0. \quad (2.32)$$

Como  $(\nabla L)_x(x, \lambda) = \nabla f(x) + (h'(x))^\top \lambda$  e  $(\nabla L)_\lambda(x, \lambda) = h(x)$  temos que

$$\nabla L(x_k, \lambda_k) = ((\nabla L)_x(x, \lambda), (\nabla L)_\lambda(x, \lambda)) = (\nabla f(x) + (h'(x))^\top \lambda, h(x)).$$

Além disso, podemos escrever a hessiana da lagrangiana do problema como a seguinte matriz em blocos

$$\begin{aligned}
\nabla^2 L(x_k, \lambda_k) &= \begin{pmatrix} (\nabla^2 L)_{xx}(x_k, \lambda_k) & (\nabla^2 L)_{x\lambda}(x_k, \lambda_k) \\ (\nabla^2 L)_{\lambda x}(x_k, \lambda_k) & (\nabla^2 L)_{\lambda\lambda}(x_k, \lambda_k) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\nabla^2 L)_{xx}(x_k, \lambda_k) & (\nabla f(x_k) + (h'(x_k))^\top \lambda_k)_\lambda \\ (h(x_k))_x & (h(x_k))_\lambda \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\nabla^2 L)_{xx}(x_k, \lambda_k) & (h'(x_k))^\top \\ h'(x_k) & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

onde  $(\nabla^2 L)_{xx}(x_k, \lambda_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $(h'(x_k))^\top \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $h'(x_k) \in \mathbb{R}^{l \times n}$  e a matriz nula  $0 \in \mathbb{R}^{l \times l}$ . Assim, utilizando a multiplicação de matrizes e a definição de igualdade de vetores, podemos reescrever o sistema (2.32) no seguinte sistema equivalente

$$\begin{cases} \nabla f(x_k) + (h'(x_k))^\top \lambda_k + (\nabla^2 L)_{xx}(x_k, \lambda_k)(x - x_k) + (h'(x_k))^\top (\lambda - \lambda_k) = 0 \\ h(x_k) + h'(x_k)(x - x_k) = 0, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \nabla f(x_k) + (\nabla^2 L)_{xx}(x_k, \lambda_k)(x - x_k) + (h'(x_k))^\top \lambda = 0 \\ h(x_k) + h'(x_k)(x - x_k) = 0. \end{cases} \quad (2.33)$$

Observe que tomando a função quadrática

$$q(x) = f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2} \langle (\nabla^2 L)_{xx}(x_k, \lambda_k)(x - x_k), x - x_k \rangle$$

e sua lagrangiana  $L_q(x, \lambda) = q(x) + \langle \lambda, h(x) \rangle$  temos que

$$(L_q(x, \lambda))_x = \nabla q(x) + (h'(x))^\top \lambda = \nabla f(x_k) + (\nabla^2 L)_{xx}(x_k, \lambda_k)(x - x_k) + (h'(x_k))^\top \lambda$$

onde  $(L_q(x_k, \lambda_k))_x = 0$  caso  $(x_k, \lambda_k)$  seja uma solução de (2.32).

Portanto, ao aplicarmos o método de Newton no sistema de Lagrange, obtemos uma solução do sistema (2.32), que por sua vez, é equivalente a uma solução do sistema (2.33) que pode ser interpretada como um ponto estacionário (Definição 2.6) do problema de programação quadrática

$$\begin{aligned}
&\min f(x) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2} \langle (\nabla^2 L)_{xx}(x - x_k), x - x_k \rangle \\
&\text{sujeito a } x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n; h(x_k) + h'(x_k)(x - x_k) = 0\}, \quad (2.34)
\end{aligned}$$

já que a segunda equação de (2.33) garante a viabilidade do iterando. Por isso, cada iterada gerada pelo método é ponto estacionário do problema acima. O método de Newton para o sistema de Lagrange, portanto, consiste no seguinte procedimento que pode ser visto como uma adaptação do Algoritmo 4.4.1 de [3, p. 239].

---

**Algoritmo 2:** O método de Newton-Lagrange

---

**Entrada:** Chute inicial  $(x_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$ , as funções  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 $\nabla f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\nabla^2 f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ ,  $h' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  
 $\nabla^2 h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$  e  $\varepsilon > 0$ .

**Saída:**  $(x_k, \lambda_k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$  tal que  $|\nabla L(x_k, \lambda_k)| < \varepsilon$ .

1 **início**

2      $k := 0$ ;

3     **enquanto**  $|\nabla L(x_k, \lambda_k)| \geq \varepsilon$  **faça**

4          $(x_{k+1}, \lambda_{k+1}) = (x_k, \lambda_k) - (\nabla^2 L(x_k, \lambda_k))^{-1} \nabla L(x_k, \lambda_k)$ ;

5          $k := k + 1$ ;

6     **fim**

7     **retorna**  $(x_k, \lambda_k)$

8 **fim**

---

Observamos que a necessidade de informarmos a hessiana da função objetivo e de cada uma das restrições de igualdade, se deve ao fato de que

$$(\nabla^2 L)_{xx}(x_k, \lambda_k) = \nabla^2 f(x_k) + \sum_{i=1}^l \lambda_i \nabla^2 h_i(x_k).$$

Mostraremos agora que a sequência gerada pelo Algoritmo 2 converge sob certas hipóteses e quando isso ocorre, a taxa de convergência é superlinear ou quadrática, assim como no Algoritmo 1.

**Teorema 2.15. (Convergência superlinear do método de Newton-Lagrange)** *Sejam  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  funções duas vezes diferenciáveis numa vizinhança do ponto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ , com derivadas segundas contínuas em  $\bar{x}$ . Suponhamos que*

$$\{\nabla h_i(\bar{x}), i = 1, \dots, l\}$$

*seja um conjunto linearmente independente, e que este ponto seja um ponto estacionário do problema*

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n; h(x) = 0\},$$

*ou seja,  $(\nabla L)_x(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0$  e  $h(\bar{x}) = 0$ , sendo  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^l$  o (único) multiplicador de Lagrange associado. Suponhamos, finalmente, que a condição suficiente de segunda ordem se satisfaça, isto é, existe um  $\gamma > 0$  tal que*

$$\langle (\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda})d, d \rangle \geq \gamma \|d\|^2 \quad \forall d \in \ker h'(\bar{x}).$$

*Então todo ponto inicial  $(x_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$ , suficientemente próximo ao ponto  $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ , define univocamente uma sequência do Algoritmo 2, que converge a  $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ . A taxa de*

convergência é superlinear, e se as derivadas segundas de  $f$  e  $h$  são Lipschitz-contínuas numa vizinhança de  $\bar{x}$ , então convergência é quadrática.

*Demonstração.* Veja o Teorema 4.4.2 de [3, p. 239]. □

## 2.5 Lagrangianas aumentadas

Nessa seção introduziremos as Lagrangianas aumentadas para problemas de otimização com restrições de igualdades e com restrições de igualdade e desigualdade onde ambas são uma família de funções indexadas em  $\mathbb{R}_+$ .

A motivação para tal é devido às suas propriedades matemáticas que nos permite concretizar uma implementação na prática do método PQS. Uma das propriedades que serão apresentadas é a positividade da Lagrangiana aumentada para um índice suficientemente grande. Com essa propriedade, podemos construir uma sequência de matrizes uniformemente definidas positivas e uniformemente limitadas, tal sequência de matrizes é essencial para a boa definição da sequência gerada por métodos PQS (veja os algoritmos 3, 4 e 5).

Em particular, veremos que o gradiente das Lagrangianas aumentadas, para problemas com restrições de igualdade e desigualdade, nos fornece um critério de parada prático na implementação do algoritmo 4.

### 2.5.1 Restrições de igualdade

Considere o problema

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n; h(x) = 0\}, \quad (2.35)$$

onde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  são funções diferenciáveis. Uma família de Lagrangianas aumentadas do problema (2.35) segundo [3, p. 251] é dada por  $L(\cdot; c) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$L(x, \lambda; c) = L(x, \lambda) + \frac{c}{2} \|h(x)\|^2 = f(x) + \langle \lambda, h(x) \rangle + \frac{c}{2} \|h(x)\|^2,$$

onde  $c \geq 0$  é um parâmetro. Em particular, a relação entre a Lagrangiana e a Lagrangiana aumentada é dada por  $L(x, \lambda) = L(x, \lambda; 0)$ . Caso as funções  $f$  e  $h$  sejam duas vezes diferenciáveis, temos a existência da hessiana parcial

$$(\nabla^2 L)_{xx}(x, \lambda; c) = (\nabla^2 L)_{xx}(x, \lambda) + c(h'(x))^\top h'(x).$$

visto que  $L(x, \lambda; c) = L(x, \lambda) + \frac{c}{2} \|h(x)\|^2$  e  $(\nabla L)_x(x, \lambda; c) = (\nabla L)_x(x, \lambda) + c(h'(x))^\top h(x)$ .

Nas hipóteses do Teorema 2.15, a matriz  $(\nabla^2 L)_{xx}(x, \lambda)$  não é necessariamente definida positiva.

**Exemplo 2.5.** [3, p. 252] *Consideremos o problema*

$$\min(x^3) \text{ sujeito a } x + 1 = 0.$$

A Lagrangiana deste problema vem dada por  $L(x, \lambda) = x^3 + \lambda(x + 1)$ , resolvendo o sistema de Lagrange  $\nabla L(x, \lambda) = (3x^2 + \lambda, x + 1) = 0$  obtemos que  $\bar{x} = -1$  e  $\bar{\lambda} = -3$ . Note que  $\bar{x}$  satisfaz a condição de independência linear dos gradientes das restrições, pois  $h'(x) = 1 \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ , por isso  $\lambda$  é o único multiplicador de Lagrange associado a  $\bar{x}$ . No entanto,  $\bar{x}$  não pode ser considerado uma solução (2.35), porque como

$$(\nabla^2 L)_{xx}(x, \lambda) = f''(x) + \lambda h''(x) = f''(x) = 6x,$$

temos que  $(\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}) = -6 < 0$  violando a condição necessária de segunda ordem (Teorema (2.6)).

Uma das vantagens das Lagrangianas aumentadas do problema (2.35) em relação a Lagrangiana clássica do mesmo problema é que a matriz  $(\nabla^2 L)_{xx}(x, \lambda; c)$  é positiva definida para  $c$  suficientemente grande conforme mostra o resultado a seguir.

**Teorema 2.16.** *Sejam  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  funções duas vezes diferenciáveis no ponto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ . Seja  $\bar{x}$  um ponto estacionário do problema (2.35), que satisfaz a condição suficiente de segunda ordem  $\langle (\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda})d, d \rangle \geq \gamma \|d\|^2$  para todo  $d \in \ker h'(\bar{x})$  onde  $\gamma > 0$ , com algum multiplicador de Lagrange  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^l$ .*

*Então para todo número  $c$  suficientemente grande, a matriz*

$$(\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}; c) = (\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}) + c(h'(\bar{x}))^\top h'(x)$$

*é definida positiva.*

*Demonstração.* Veja o Teorema 4.4.13 de [3, p. 253]. □

Voltando ao Exemplo 2.5, em relação ao problema

$$\min(x^3) \text{ sujeito a } x + 1 = 0,$$

observamos que

$$L(x, \lambda; c) = x^3 + \lambda(x + 1) + \frac{c}{2}(x + 1)^2,$$

considerando  $\bar{\lambda} = -3$  temos  $L(x, \bar{\lambda}; c) = x^3 - 3(x + 1) + \frac{c}{2}(x + 1)^2$ , por isso  $\bar{x} = -1$  é ponto estacionário do problema (2.35) porque como  $(\nabla L)_x(x, \lambda; c) = 3x^2 + \lambda + c(x + 1)$  obtemos que  $(\nabla L)_x(\bar{x}, \bar{\lambda}; c) = 3\bar{x}^2 - 3 = 0$ , e este ponto é realmente solução deste problema, já que  $(\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}; c) = 6\bar{x} + c > 0$  para todo  $c > 6$  satisfazendo o Teorema (2.6).

Novamente, vamos utilizar este fato para criar uma sequência de matrizes uniformemente definida positiva e uniformemente limitada. Tal sequência é fundamental para a boa definição da sequência gerada por métodos PQS, além disso, ao utilizarmos esta estratégia, estamos fornecendo matrizes que podem melhorar a taxa de convergência já que  $(\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}; c)$  fornece informações de primeira e segunda ordem das restrições de igualdade.

## 2.5.2 Restrições de igualdade e desigualdade

Considere o problema

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n; h(x) = 0, g(x) \leq 0\}, \quad (2.36)$$

onde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  são funções diferenciáveis. Uma família de Lagrangianas aumentadas do problema (2.36) de acordo com [3, p. 300] é dada por  $L(\cdot; c) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$\begin{aligned} L(x, \lambda, \mu; c) &= L(x, \lambda; c) + \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^m ((\max\{0, cg_i(x) + \mu_i\})^2 - \mu_i^2) \\ &= f(x) + \langle \lambda, h(x) \rangle + \frac{c}{2} \|h(x)\|^2 + \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^m ((\max\{0, cg_i(x) + \mu_i\})^2 - \mu_i^2), \end{aligned}$$

onde  $c \geq 0$  é um parâmetro. Considerando que as funções  $f, g$  e  $h$  sejam duas vezes diferenciáveis, temos a existência da hessiana parcial

$$(\nabla^2 L)_{xx}(x, \lambda, \mu; c) = (\nabla^2 L)_{xx}(x, \lambda; c) + \sum_{i=1}^m (c \nabla g_i(x) (\nabla g_i(x))^\top + \max\{0, cg_i(x) + \mu_i\} \nabla^2 g_i(x)).$$

Observamos que a propriedade das Lagrangianas aumentadas do problema (2.35) de ser positiva para  $c > 0$  suficientemente grande também é satisfeita pelas Lagrangianas aumentadas do problema (2.36). Para isso, vamos enunciar e demonstrar o seguinte resultado clássico.

**Teorema 2.17.** *Sejam  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  funções duas vezes diferenciáveis no ponto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ . Seja  $\bar{x}$  um ponto estacionário do problema (2.36) que satisfaz a condição suficiente de segunda ordem  $\langle (\nabla^2 L)(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})d, d \rangle \geq \gamma \|d\|^2$  para todo  $d \in \mathcal{K}(\bar{x})$  onde  $\gamma > 0$ , com algum multiplicador de Lagrange  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^l$ .*

*Se  $\bar{x}$  satisfaz a condição de complementaridade estrita com os multiplicadores de Lagrange  $\bar{\lambda}$  e  $\bar{\mu}$ , isto é,  $\mu_i > 0$  para todo  $i \in I(\bar{x})$ , então para todo número  $c$  suficientemente grande, a matriz*

$$(\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}; c) = (\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}; c) + \sum_{i=1}^m (c \nabla g_i(\bar{x}) (\nabla g_i(\bar{x}))^\top + \max\{0, cg_i(\bar{x}) + \bar{\mu}_i\} \nabla^2 g_i(\bar{x}))$$

é definida positiva.

*Demonstração.* Pela condição de complementaridade estrita com os multiplicadores de Lagrange  $\bar{\lambda}$  e  $\bar{\mu}$ , pela observação do Lema 2.2 temos que

$$\mathcal{K}(\bar{x}) = \{d \in \ker h'(\bar{x}); \langle \nabla g_i(\bar{x}), d \rangle = 0 \forall i \in I(\bar{x})\}.$$

Seja a família indexada em  $c \in \mathbb{R}_+$  dada por

$$\varphi(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}; c) = f(\bar{x}) + \langle \bar{\lambda}, h(\bar{x}) \rangle + \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^m ((\max\{0, cg_i(\bar{x}) + \bar{\mu}_i\})^2 - \bar{\mu}_i^2).$$

Vamos mostrar que  $\langle (\nabla^2 \varphi)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}; c)d, d \rangle > 0$  para todo  $d \in \ker h'(\bar{x}) \setminus \{0\}$ . Para isso, note que

$$\begin{aligned} (\nabla^2 \varphi)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}; c) &= \nabla^2 f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^l \bar{\lambda}_i \nabla^2 h_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m (c \nabla g_i(\bar{x}) (\nabla g_i(\bar{x}))^\top + \\ &\quad + \max\{0, cg_i(\bar{x}) + \bar{\mu}_i\} \nabla^2 g_i(\bar{x})). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Se  $i \in I(\bar{x})$  então  $\bar{\mu}_i > 0$  e  $g_i(\bar{x}) = 0$ , assim  $\max\{0, cg_i(\bar{x}) + \bar{\mu}_i\} = \bar{\mu}_i$ . Por outro lado, caso  $i \in \{1, \dots, m\} \setminus I(\bar{x})$  temos que  $\bar{\mu}_i = 0$  e  $g_i(\bar{x}) < 0$ , logo  $\max\{0, cg_i(\bar{x}) + \bar{\mu}_i\} = 0$ . Por isso, podemos escrever a equação acima como

$$\begin{aligned} (\nabla^2 \varphi)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}; c) &= \nabla^2 f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^l \bar{\lambda}_i \nabla^2 h_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m c \nabla g_i(\bar{x}) (\nabla g_i(\bar{x}))^\top + \sum_{i \in I(\bar{x})} \bar{\mu}_i \nabla^2 g_i(\bar{x}) \\ &= \nabla^2 f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^l \bar{\lambda}_i \nabla^2 h_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \bar{\mu}_i \nabla^2 g_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m c \nabla g_i(\bar{x}) (\nabla g_i(\bar{x}))^\top \\ &= (\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) + \sum_{i=1}^m c \nabla g_i(\bar{x}) (\nabla g_i(\bar{x}))^\top. \end{aligned}$$

Se  $d \in \mathcal{K}(\bar{x}) \setminus \{0\}$ , então pela bilinearidade do produto interno obtemos

$$\begin{aligned} \langle (\nabla^2 \varphi)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}; c)d, d \rangle &= \left\langle \left( (\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) + \sum_{i=1}^m c \nabla g_i(\bar{x}) (\nabla g_i(\bar{x}))^\top \right) d, d \right\rangle \\ &= \langle (\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})d, d \rangle + \sum_{i=1}^m c \langle \nabla g_i(\bar{x}) (\nabla g_i(\bar{x}))^\top d, d \rangle. \end{aligned}$$

Pela definição de adjunta e de norma induzida pelo produto interno canônico temos

$$\begin{aligned} \langle (\nabla^2 \varphi)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}; c)d, d \rangle &= \langle (\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})d, d \rangle + \sum_{i=1}^m c \langle (\nabla g_i(\bar{x}))^\top d, (\nabla g_i(\bar{x}))^\top d \rangle \\ &= \langle (\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})d, d \rangle + \sum_{i=1}^m c \left\| (\nabla g_i(\bar{x}))^\top d \right\|^2. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Como  $c \left\| (\nabla g_i(\bar{x}))^\top d \right\|^2 \geq 0$  para todo  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  e para todo  $d \in \mathcal{K}(\bar{x}) \setminus \{0\}$  já que  $c > 0$  podemos escrever que

$$\langle (\nabla^2 \varphi)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}; c)d, d \rangle \geq \langle (\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})d, d \rangle \geq \gamma \|d\|^2 > 0,$$

onde a penúltima desigualdade advém da condição suficiente de segunda ordem e a última é devido ao fato de que  $d \neq 0$ .

Se  $d \in \ker h'(\bar{x}) \setminus \mathcal{K}(\bar{x})$  então existe um índice  $i \in I(\bar{x})$  tal que  $\langle \nabla g_i(\bar{x}), d \rangle \neq 0$ . Assim, de (2.38) podemos supor que existem as constantes  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\beta \in \mathbb{R}$  com  $\beta > 0$  tais que

$$\langle (\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})d, d \rangle = \alpha \text{ e } \sum_{i=1}^m \left\| (\nabla g_i(\bar{x}))^\top d \right\|^2 = \beta,$$

ou seja, temos que

$$\langle (\nabla^2 \varphi)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}; c)d, d \rangle = \alpha + c \cdot \beta.$$

Logo basta tomar  $c > -\alpha/\beta$  para que  $\langle (\nabla^2 \varphi)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}; c)d, d \rangle > 0$ . Com ambos os casos, mostramos de fato que  $\langle (\nabla^2 \varphi)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}; c)d, d \rangle > 0$  para todo  $d \in \ker h'(\bar{x}) \setminus \{0\}$  e conseqüentemente, pelo Lema de Debreu (Lema 1.2) existe um  $c > 0$ , suficientemente grande, tal que a matriz  $(\nabla^2 \varphi)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}; c) + c(h'(\bar{x}))^\top h'(\bar{x})$  é definida positiva. Perceba que pela equação (2.37),

$$\begin{aligned} (\nabla^2 \varphi)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}; c) + c(h'(\bar{x}))^\top h'(\bar{x}) &= \nabla^2 f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^l \bar{\lambda}_i \nabla^2 h_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m (c \nabla g_i(\bar{x})(\nabla g_i(\bar{x}))^\top + \\ &\quad + \max\{0, c g_i(\bar{x}) + \bar{\mu}_i\} \nabla^2 g_i(\bar{x})) + c(h'(\bar{x}))^\top h'(\bar{x}). \end{aligned}$$

Como  $(\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}; c) = \nabla^2 f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^l \bar{\lambda}_i \nabla^2 h_i(\bar{x}) + c(h'(\bar{x}))^\top h'(\bar{x})$  podemos escrever que

$$\begin{aligned} (\nabla^2 \varphi)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}; c) + c(h'(\bar{x}))^\top h'(\bar{x}) &= (\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}; c) + \sum_{i=1}^m (c \nabla g_i(\bar{x})(\nabla g_i(\bar{x}))^\top + \\ &\quad + \max\{0, c g_i(\bar{x}) + \bar{\mu}_i\} \nabla^2 g_i(\bar{x})) \\ &= (\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}; c). \end{aligned}$$

□

Com este resultado, podemos construir uma sequência de matrizes  $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $H_k = (\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}_k, \bar{\lambda}_k, \bar{\mu}_k; c_k)$  de modo que tal sequência seja uniformemente definida positiva e também uniformemente limitada.

Outro resultado que nos ajudará na condição de parada na implementação prática do algoritmo 4, mostra que os pontos KKT do problema (2.36) correspondem a pontos estacionários irrestritos da Lagrangiana aumentada deste problema, para  $c > 0$  qualquer. Mas primeiro precisaremos de um resultado auxiliar.

**Lema 2.3.** *Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $b \in \mathbb{R}$ . Então*

$$a = \max(0, b) \quad (2.39)$$

se, e somente se,

$$a - b \geq 0 \text{ e } a(a - b) = 0 \text{ e } a \geq 0. \quad (2.40)$$

*Demonstração.* Veja o Teorema 4.5.30 de [3, p. 301]. □

Agora sim, vamos a um resultado importante porque pode ser utilizado numa implementação prática do método PQS como critério de parada,

**Teorema 2.18. (*Pontos estacionários da Lagrangiana aumentada*)** *Sejam as funções  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciáveis no ponto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ .*

*Então para  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^l$  e  $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^m$ , e  $c > 0$  qualquer, o ponto  $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$  é uma solução do sistema de Karush-Kuhn-Tucker do problema (2.36) se, e somente se,*

$$\nabla L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}; c) = 0.$$

*Demonstração.* Veja o Teorema 4.5.31 de [3, p. 301]. □

# Capítulo 3

## Programação Quadrática Sequencial

Segundo [3], métodos de programação quadrática sequencial (PQS) consistem na resolução de uma sequência de problemas de minimização de uma função quadrática sujeita a restrições lineares, que aproximam, em cada iteração, o problema original dado. A ideia é que a resolução dos subproblemas seja muito mais simples do que atacar o problema de otimização diretamente.

### 3.1 Contexto histórico

Segundo [14, p. 5], a referência mais antiga a algoritmos do tipo PQS parece ter sido na tese de doutorado de Robert B. Wilson publicada em 1963 na Universidade de Harvard [15], na qual ele propôs o método que [3], por exemplo, chama de método de Newton-Lagrange (veja o Algoritmo 2 para mais detalhes sobre o método).

O trabalho de Wilson foi então desenvolvido na década de 70, onde [14, p. 5] destaca o trabalho de Garcia-Polamares e Mangasarian [19] que resolveram problemas da forma

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n; g(x) \preceq 0\}, \quad (3.1)$$

onde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Para isso, a estratégia de [15], isto é, resolver subproblemas de programação quadrática<sup>1</sup> que, em algum sentido, se aproximam da solução original foi adaptada para subproblemas do tipo

$$\begin{aligned} \min & \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2} \langle H_k(x - x_k), x - x_k \rangle \\ \text{sujeito a } & x \in D_k = \{x \in \mathbb{R}^n; g(x_k) + g'(x_k)(x - x_k) \preceq 0\}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde  $H_k$  é qualquer matriz quadrada de ordem  $n$  que se aproxima da hessiana da função jacobiana do problema original (para mais detalhes, consulte [19, p. 3]). Para resolver os

---

<sup>1</sup>De acordo com [3, p. 463] concluímos que a programação quadrática lida com problemas de minimização de funções quadráticas sujeitas a restrições lineares.

subproblemas acima, [19] discutiu e utilizou métodos quase-Newton (veja a seção 3.2.3 de [2]).

Não muito tempo depois, Han em 1976 e 1977 publicou os artigos [17] e [18], respectivamente. No primeiro artigo estabeleu condições suficientes para a convergência local com taxa superlinear de uma sequência gerada pelos pontos estacionários de subproblemas da forma (3.1) que convergem para os pontos estacionários do problema (3.2). Já no segundo artigo Han estabelece um método de PQS para o problema (3.1) com convergência global utilizando um método de Newton amortecido e uma função de penalização externa exata<sup>2</sup>.

Em 1978, Powell no artigo [13] aborda, por exemplo, o emprego das Lagrangianas aumentadas em métodos de PQS. Além disso, de acordo [11], estratégias de globalização utilizando métodos de regiões de confiança (para mais detalhes veja a seção 3.3.2 de [2]) foram abordadas, dentre eles, por Vardi em 1985 [4] e por [16] em 1987.

Por fim, [3, p. 329] afirma que investigações contemporâneas do método PQS e de diversas modificações dele têm por objetivo o relaxamento das hipóteses utilizadas para garantir a convergência local superlinear.

Neste trabalho, apresentaremos alguns dos métodos de PQS abordados em [3], mais especificamente os métodos das seções 4.6.1, 4.6.2 e 4.6.3 da referência citada que resolvem problemas com restrições de igualdade e desigualdade.

## 3.2 Restrições de igualdade

Consideremos o problema

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}, \quad (3.3)$$

onde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  são duas vezes diferenciáveis no  $\mathbb{R}^n$ .

Seja  $x_k \in \mathbb{R}^n$  uma aproximação do ponto estacionário  $\bar{x}$  do problema (3.3). Vamos aproximar o problema original, em torno de  $x_k$ , por meio de subproblemas, através de um polinômio de grau 2 da forma

$$\begin{aligned} \min f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2} \langle H_k(x - x_k), x - x_k \rangle \\ \text{sujeito a } x \in D_k = \{x \in \mathbb{R}^n; h(x_k) + h'(x_k)(x - x_k) = 0\}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde  $H_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz simétrica.

Se lembrarmos da fórmula de Taylor de segunda ordem para funções escalares (1.11), consideraremos natural utilizar a matriz  $H_k = \nabla^2 f(x_k)$ , isto é, tomar como função objetivo do subproblema a aproximação de segunda ordem da função objetivo  $f$  do problema original. Contudo, tal escolha, em geral, não é feita porque, de acordo com [3] não se

---

<sup>2</sup>Uma estratégia similar foi empregada na seção 3.3 deste trabalho.

pode afirmar que, em termos práticos, subproblemas com restrições quadráticas se estabeleceram como uma alternativa aos subproblemas com restrições lineares. Um motivo apontado pelos autores para tal é o fato de que é possível repassar informações de segunda ordem sobre as restrições ao subproblema utilizando uma matriz  $H_k$  adequada. Em particular, é possível escolher

$$H_k = (\nabla^2 L)_{xx}(x_k, \lambda_k), \quad (3.5)$$

onde  $\lambda_k \in \mathbb{R}^l$  é uma aproximação a multiplicador de Lagrange  $\bar{\lambda}$  associado ao ponto estacionário  $\bar{x}$ , e

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(x, \lambda) = f(x) + \langle \lambda, h(x) \rangle$$

é a Lagrangiana do problema (3.3). Ou seja, a informação de segunda ordem sobre as restrições é passada ao subproblema via a função objetivo dele.

Outra motivação para esta escolha de  $H_k$  vem dada pela interpretação do problema (3.4) como uma implementação da iteração de Newton para o sistema de Lagrange do problema original (3.3), que foi considerada na seção 2.4.1.

Apresentamos agora o método de Programação Quadrática Sequência para problemas com restrições de igualdade do qual foi retirado de [3, p. 315].

---

**Algoritmo 3:** O método de programação quadrática sequencial

---

1 **Escolher**  $(x_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$ .

2 **início**

3  $k := 0$ ;

4 **Calcular**  $x_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ , um ponto estacionário do problema

$$\begin{aligned} & \min f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2} \langle H_k(x - x_k), x - x_k \rangle \\ & \text{sujeito a } x \in D_k = \{x \in \mathbb{R}^n; h(x_k) + h'(x_k)(x - x_k) = 0\} \end{aligned}$$

onde  $H_k = (\nabla^2 L)_{xx}(x_k, \lambda_k)$ , e **calcular**  $\lambda_{k+1} \in \mathbb{R}^l$ , um multiplicador de Lagrange associado a  $x_{k+1}$ .

5 **Se**  $\nabla L(x_k, \lambda_k) = 0$  **pare**;

6 **Tomar**  $k := k + 1$  e retornar ao Passo 4.

7 **fim**

---

Observe que no Passo 4 do Algoritmo 3, ao tomarmos  $H_k = (\nabla^2 L)_{xx}(x_k, \lambda_k)$ , obtemos o problema (2.34) da seção 2.4.1. Assim, pela interpretação da iteração de Newton concluímos que para um ponto inicial  $(x_0, \lambda_0)$  qualquer, o Algoritmo 3 gera a mesma sequência  $((x_k, \lambda_k))_{k \in \mathbb{N}}$  que o método de Newton puro aplicado ao sistema de Lagrange já considerado em 2.4.1, isto é, pelo Algoritmo 2.

Por isso, não há necessidade para uma nova análise (local) do método PQS neste caso.

Assim, pelo Teorema 2.15 se as derivadas segundas das funções  $f$  e  $h$  são contínuas no ponto  $\bar{x}$ , os gradientes das restrições de igualdade são linearmente independentes e a condição suficiente de segunda ordem é satisfeita, então o método PQS converge localmente a  $(\bar{x}, \bar{\lambda})$  com taxa superlinear. Mais ainda, se as derivadas segundas de  $f$  e de  $h$  são Lipschitz-contínuas numa vizinhança de  $\bar{x}$ , então a taxa de convergência é quadrática.

Observemos que a matriz  $H_k = (\nabla^2 L)_{xx}(x_k, \lambda_k)$  pode não ser definida positiva, como já vimos no Exemplo 2.5, isso faz com que o subproblema de programação quadrática possa não ter solução o que contribui com a localidade deste método. Devido a isso, podemos considerar a matriz  $H_k$  como sendo a hessiana parcial, com respeito a  $x$ , da lagrangiana aumentada do problema (3.3) considerada na seção 2.5.1, isto é,

$$H_k = (\nabla^2 L)_{xx}(x_k, \lambda_k; c) = \nabla^2 f(x_k) + \sum_{i=1}^l (\lambda_k)_i \nabla^2 h_i(x_k) + c(h'(x_k))^\top h'(x_k),$$

porque o Teorema 2.16 garante que tal matriz é definida positiva para  $c > 0$  suficientemente grande.

Como os pontos estacionários  $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$  do problema (3.3) são caracterizados pelo sistema de Lagrange  $\nabla L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0$ , um critério de parada que pode ser considerado no Algoritmo 3 é verificar se  $\|\nabla L(x_k, \lambda_k)\| < \varepsilon$  para algum  $\varepsilon > 0$  pequeno dado como tolerância.

### 3.3 Restrições de igualdade e desigualdade

Antes de começarmos, gostaríamos de destacar que as demonstrações apresentadas nesta seção são uma versão detalhada das provas encontradas nas suas respectivas citações.

Com esta observação, consideremos agora um problema de otimização com restrições de igualdade e desigualdade

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n; h(x) = 0, g(x) \preceq 0\}, \quad (3.6)$$

onde  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  são duas vezes diferenciáveis no  $\mathbb{R}^n$ .

Seja  $x_k \in \mathbb{R}^n$  uma aproximação dada de um ponto estacionário (Definição 2.9)  $\bar{x}$  do problema (3.6). De forma análoga a seção anterior, vamos aproximar o problema original, em torno de  $x_k$ , por meio de subproblemas da forma

$$\begin{aligned} & \min \langle \nabla f(x_k), d \rangle + \frac{1}{2} \langle H_k d, d \rangle \\ & \text{sujeito a } x \in D_k = \{d \in \mathbb{R}^n; h(x_k) + h'(x_k)d = 0, g(x_k) + g'(x_k)d \preceq 0\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

O método PQS, portanto, consiste no seguinte algoritmo retirado de [3, p. 317].

---

**Algoritmo 4:** O método de programação quadrática sequencial

---

- 1 **Escolher**  $(x_0, \lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}_+^m$ .
  - 2 **início**
  - 3      $k := 0$ ;
  - 4     **Calcular** um ponto estacionário  $d_k$  do problema (3.7), onde  $H_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz simétrica, e multiplicadores de Lagrange  $\lambda_{k+1} \in \mathbb{R}^l$ ,  $\mu_{k+1} \in \mathbb{R}_+^m$  associados a  $d_k$ ;
  - 5     **Tomar**  $x_{k+1} = x_k + d_k$ ;
  - 6     **Se**  $\nabla L(x_k, \lambda_k, \mu_k; c) = 0$  **pare**;
  - 7     **Tomar**  $k := k + 1$  e retornar ao Passo 4.
  - 8 **fim**
- 

Pelo observado acima no caso de restrições de igualdade, podemos esperar convergência rápida do método, se escolhermos

$$H_k = (\nabla^2 L)_{xx}(x_k, \lambda_k, \mu_k),$$

onde  $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \langle \lambda, h(x) \rangle + \langle \mu, g(x) \rangle$  é a Lagrangiana do problema (3.6).

Mostraremos agora que a sequência gerada pelo Algoritmo 4 converge sob certas hipóteses e quando isso ocorre, a taxa de convergência é superlinear ou quadrática, confirmando assim a expectativa de rápida convergência na escolha de  $H_k$  acima.

**Teorema 3.1. (Convergência local do método SQP)[3, p. 318]** *Sejam funções  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  duas vezes diferenciáveis numa vizinhança do ponto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ , com derivadas segundas contínuas neste ponto. Seja  $\bar{x}$  um ponto estacionário do problema (3.6), ou seja,  $h(\bar{x}) = 0$  e existem  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^l$  e  $\bar{\mu} \in \mathbb{R}_+^m$  tais que  $(\nabla L)_x(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = 0$  e  $\bar{\mu}_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0, i = 1, \dots, m$ . Além disso,  $\bar{x}$  satisfaz a condição de independência linear dos gradientes das restrições ativas, isto é, o conjunto  $\{\nabla h_i(\bar{x}), i = 1, \dots, l\} \cup \{\nabla g_i(\bar{x}), i \in I(\bar{x})\}$  é linearmente independente, onde  $I(\bar{x})$  é o conjunto de índices das restrições ativas. Suponhamos que  $\bar{x}$ , com os (únicos) multiplicadores de Lagrange associados  $\bar{\lambda}$  e  $\bar{\mu}$ , satisfaz a condição suficiente de segunda ordem*

$$\langle (\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})d, d \rangle \geq \gamma \|d\|^2 \quad \forall d \in \mathcal{K}(\bar{x}),$$

onde  $\mathcal{K}(\bar{x})$  é o cone crítico dado por

$$\mathcal{K}(\bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n; \langle \nabla f(x), d \rangle \leq 0, \langle \nabla g_i(\bar{x}), d \rangle \leq 0 \ i \in I(\bar{x}), \langle \nabla h_i(\bar{x}), d \rangle = 0, \ i = 1, \dots, l\}.$$

Suponhamos, finalmente, a condição de complementaridade estrita

$$\bar{\mu}_i > 0 \quad \forall i \in I(\bar{x}) = \{i \in \{1, 2, \dots, m\}; g_i(\bar{x}) = 0\}. \quad (3.8)$$

Então para qualquer ponto inicial  $(x_0, \lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$  suficientemente próximo a  $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ , o Algoritmo 4, onde  $H_k = (\nabla^2 L)_{xx}(x_k, \lambda_k, \mu_k)$  e  $d_k$  é o ponto estacionário de (3.7) com menor norma está bem definido. A sequência gerada pelo método converge a  $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ . A taxa de convergência é superlinear. Mais ainda, se as derivadas segundas de  $f$ ,  $h$  e  $g$  são Lipschitz-contínuas numa vizinhança do ponto  $\bar{x}$ , então convergência é quadrática.

*Demonstração.* Denotamos  $U = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$ . Primeiro, temos que provar que para  $(x_k, \lambda_k, \mu_k) \in U$ , suficientemente próximo a  $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ , o subproblema (3.7) possui um único ponto estacionário  $d_k$  de menor norma e que este ponto tem um único par de multiplicadores de Lagrange associado. Consideremos o sistema KKT do subproblema (3.7) dado por

$$\nabla f(x_k) + (\nabla^2 L)_{xx}(x_k, \lambda_k, \mu_k)d + (h'(x_k))^\top \lambda + (g'(x_k))^\top \mu = 0, \quad (3.9)$$

$$h(x_k) + h'(x_k)d = 0, \quad (3.10)$$

$$g(x_k) + g'(x_k)d \leq 0, \quad \mu \geq 0, \quad (3.11)$$

$$\mu_i(g_i(x_k) + \langle \nabla g_i(x_k), d \rangle) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.12)$$

em relação a  $(d, \lambda, \mu) \in U$ . Notemos primeiro que, se  $x_k$  é suficientemente próximo a  $\bar{x}$  e  $d \in \mathbb{R}^n$  tem norma suficientemente pequena, não pode existir mais de um par de multiplicadores  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$  tais que o ponto  $(d, \lambda, \mu)$  satisfaça (3.9)-(3.12). Com efeito, para tais  $x_k$  e  $d$ , tem-se que

$$g_i(x_k) + \langle \nabla g_i(x_k), d \rangle < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \setminus I(\bar{x}),$$

pois para os índices das restrições inativas  $g_i(x_k) < 0$  e  $\langle \nabla g_i(x_k), d \rangle \leq \|\nabla g_i(x_k)\| \|d\|$ , pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (1.5). Assim, como  $\|\nabla g_i(x_k)\|$  é um número real fixado, basta tomarmos  $\|d\|$  de modo que  $\|\nabla g_i(x_k)\| \|d\| < -g_i(x_k)$ , pela continuidade das funções envolvidas, e de, (3.12),

$$\mu_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \setminus I(\bar{x}).$$

Em particular, para o conjunto de índices  $J_k$  das restrições ativas na solução do subproblema (3.7), tem-se que  $J_k \subset I(\bar{x})$ . Os gradientes destas restrições formam, então, um subconjunto de

$$\{\nabla h_i(x_k), i = 1, \dots, l\} \cup \{\nabla g_i(x_k), i \in I(\bar{x})\},$$

que é linearmente independente para  $x_k$  próximo a  $\bar{x}$ , pela continuidade e pela hipótese de independência linear destes gradientes no ponto  $\bar{x}$ . Concluimos então que os gradientes das restrições ativas são linearmente independentes no subproblema (3.7). Isto implica que não pode haver mais de um par de multiplicadores de Lagrange no sistema (3.9)-(3.12).

Definimos a função  $\Phi : U \times U \rightarrow U$ , tal que

$$\Phi(w, u) = \begin{pmatrix} \nabla f(x) + (\nabla^2 L)_{xx}(x, \lambda, \mu)d + (h'(x))^\top y + (g'(x))^\top z \\ h(x) + h'(x)d \\ z_1(g_1(x) + \langle \nabla g_1(x), d \rangle) \\ \vdots \\ z_m(g_m(x) + \langle \nabla g_m(x), d \rangle) \end{pmatrix},$$

onde  $w = (x, \lambda, \mu)$  e  $u = (d, y, z)$ .

O sistema

$$\Phi(w, u) = 0,$$

corresponde às equações (3.9), (3.10), (3.12).

Pelas definições de ponto estacionário do problema (3.6) e dos multiplicadores de Lagrange associados (Definição 2.9), temos  $\Phi(\bar{w}, \bar{u}) = 0$ , onde  $\bar{w} = (\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ ,  $\bar{u} = (0, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ . Além disso, a matriz  $\Phi'_u(w, u) \in \mathbb{R}^{(n+l+m) \times (n+l+m)}$  é dada pela seguinte matriz em blocos

$$\Phi'_u(w, u) = \begin{pmatrix} (\nabla^2 L)_{xx}(x, \lambda, \mu) & (h'(x))^\top & (g'(x))^\top & & & \\ h'(x) & 0 & 0 & & & \\ z_1 \nabla g_1(x) & 0 & g_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ z_2 \nabla g_1(x) & 0 & 0 & g_2(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ z_m \nabla g_1(x) & 0 & 0 & 0 & \dots & g_m(x) \end{pmatrix},$$

logo

$$\Phi'(\bar{w}, \bar{u}) = \begin{pmatrix} (\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) & (h'(\bar{x}))^\top & (g'(\bar{x}))^\top & & & \\ h'(\bar{x}) & 0 & 0 & & & \\ \bar{\mu}_1 \nabla g_1(\bar{x}) & 0 & g_1(\bar{x}) & 0 & \dots & 0 \\ \bar{\mu}_2 \nabla g_1(\bar{x}) & 0 & 0 & g_2(\bar{x}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \bar{\mu}_m \nabla g_1(\bar{x}) & 0 & 0 & 0 & \dots & g_m(\bar{x}) \end{pmatrix}.$$

Vamos mostrar que  $\Phi'(\bar{w}, \bar{u})$  é invertível. Para isso, tomamos  $\tilde{u} = (\tilde{d}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in \ker \Phi'(\bar{w}, \bar{u})$ , arbitrário, assim utilizando a definição de igualdade de vetores, a equação matricial  $\Phi'(\bar{w}, \bar{u})\tilde{u} = 0$  que nos dá as seguintes relações

$$(\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})\tilde{d} + (h'(\bar{x}))^\top \tilde{y} + (g'(\bar{x}))^\top \tilde{z} = 0, \quad (3.13)$$

$$h'(\bar{x})\tilde{d} = 0, \quad (3.14)$$

$$\bar{\mu}_i \langle \nabla g_i(\bar{x}), \tilde{d} \rangle + g_i(\bar{x})\tilde{z}_i = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.15)$$

De (3.15) e da condição de complementaridade estrita (3.8), temos que

$$\begin{aligned} \tilde{z}_i &= 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \setminus I(\bar{x}), \\ \langle \nabla g_i(\bar{x}), \tilde{d} \rangle &= 0 \quad \forall i \in I(\bar{x}). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Além disso, sob a condição de complementaridade estrita (3.8) e pelo Lema 2.2 temos que o cone crítico do problema (3.6), no ponto  $\bar{x}$ , tem a seguinte forma:

$$\mathcal{K}(\bar{x}) = \{d \in \ker h'(\bar{x}); \langle \nabla g_i(\bar{x}), d \rangle = 0 \forall i \in I(\bar{x})\},$$

visto que  $\mu_i$  é sempre positivo nas restrições ativas.

Portanto, de (3.14) e (3.16), temos que  $\tilde{d} \in \mathcal{K}(\bar{x})$ . Além disso, por (3.13), obtemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})\tilde{d} + (h'(\bar{x}))^\top \tilde{y} + (g'(\bar{x}))^\top \tilde{z}, \tilde{d} \rangle \\ &= \langle (\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})\tilde{d}, \tilde{d} \rangle + \langle (h'(\bar{x}))^\top \tilde{y}, \tilde{d} \rangle + \langle (g'(\bar{x}))^\top \tilde{z}, \tilde{d} \rangle \\ &= \langle (\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})\tilde{d}, \tilde{d} \rangle + \langle \tilde{y}, h'(\bar{x})\tilde{d} \rangle + \langle \tilde{z}, g'(\bar{x})\tilde{d} \rangle \\ &= \langle (\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})\tilde{d}, \tilde{d} \rangle + \sum_{i=1}^m \tilde{z}_i \langle \nabla g_i(\bar{x}), \tilde{d} \rangle \\ &= \langle (\nabla^2 L)_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})\tilde{d}, \tilde{d} \rangle, \end{aligned}$$

onde nas duas últimas igualdades utilizamos (3.14) e (3.15).

Isto significa que  $\tilde{d} = 0$ , pois em caso contrário, a condição suficiente de segunda ordem no ponto  $\bar{x}$  seria violada. De (3.13) e (3.16), agora segue que

$$(h'(\bar{x}))^\top \tilde{y} + \sum_{i \in I(\bar{x})} \tilde{z}_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0.$$

Pela condição de independência linear dos gradientes das restrições ativas e,  $\bar{x}$ , obtemos que  $\tilde{y}$  e  $\tilde{z}_i = 0$  para todo  $i \in I(\bar{x})$ .

Acabamos de provar que  $\tilde{u} = (\tilde{d}, \tilde{y}, \tilde{z}) = 0$ , isto é, a matriz  $\Phi'_u(\bar{w}, \bar{u})$  é invertível, como anunciamos.

Aplicando à função  $\Phi$  no ponto  $(\bar{w}, \bar{u})$  o Teorema da Aplicação Implícita (Teorema 1.5), concluímos que existem vizinhanças  $W$  do ponto  $\bar{w}$  e  $V$  do ponto  $\bar{u}$  em  $U$ , para as

quais existe uma única função  $\chi(\cdot) = (d(\cdot), y(\cdot), z(\cdot)) : W \rightarrow U$  contínua no ponto  $\bar{w}$  tal que  $\chi(W) \subset U$  e

$$\Phi(w, \chi(w)) = 0 \quad \forall w \in W. \quad (3.17)$$

Em particular,  $d(\bar{w}) = 0$ ,  $y(\bar{w}) = \bar{\lambda}$  e  $z(\bar{w}) = \bar{\mu}$ , porque  $\Phi(\bar{w}, \bar{u}) = 0$  e  $\bar{w} = (0, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ . Daqui, da continuidade de  $\chi(\cdot)$  em  $\bar{w}$ , e da condição de complementaridade estrita (3.8), obtemos que para uma vizinhança  $W$ , suficientemente pequena, para todo  $w = (x, \lambda, \mu) \in W$  tem-se que

$$g_i(x) + \langle \nabla g_i(x), d(w) \rangle < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \setminus I(\bar{x}), \quad (3.18)$$

$$z_i(w) > 0 \quad \forall i \in I(\bar{x}). \quad (3.19)$$

Levando em conta a definição da função  $\Phi$ , as relações (3.17)-(3.19) significam que, para  $w_k = (x_k, \lambda_k, \mu_k) \in W$ , o sistema (3.9)-(3.12) possui em  $V$  uma única solução  $(d_k, \lambda_{k+1}, \mu_{k+1})$ , dada por  $d_k = d(w_k)$ ,  $\lambda_{k+1} = y(w_k)$ ,  $\mu_{k+1} = z(w_k)$ . Pelo fato já justificado nesta demonstração de que os multiplicadores de Lagrange têm que ser únicos, podemos afirmar que se a vizinhança  $W$  é suficientemente pequena, esta solução é única não somente em  $V$  mas também no conjunto  $\tilde{V} \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$ , onde  $\tilde{V}$  é uma vizinhança do 0 em  $\mathbb{R}^n$ . Daqui, segue que  $d_k = d(w_k)$  é o único ponto estacionário do problema (3.6) de menor norma, e  $(\lambda_{k+1}, \mu_{k+1}) = (y(w_k), z(w_k))$  é o único par de multiplicadores de Lagrange associados a  $d_k$ .

Observemos que, por (3.18) e (3.19), para  $(x_k, \lambda_k, \mu_k) \in W$  as condições (3.11) e (3.12), no sistema (3.9)-(3.12), que definem  $(d_k, \lambda_{k+1}, \mu_{k+1})$ , podem ser substituídas por

$$g_i(x_k) + \langle \nabla g_i(x_k), d \rangle = 0 \quad i \in I(\bar{x}), \quad (3.20)$$

$$\mu_i = 0 \quad i \in \{1, \dots, m\} \setminus I(\bar{x}). \quad (3.21)$$

Em particular, uma iteração do método é equivalente ao cálculo da solução  $(d_k, \lambda_{k+1}, \mu_{k+1})$  do sistema de equações lineares (3.9), (3.10), (3.9), (3.20), (3.21).

Consideremos o problema com restrições de igualdade

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in \tilde{D} = \{x \in \mathbb{R}^n; h(x) = 0, g_i(x) = 0, i \in I(\bar{x})\}.$$

Sob as nossas hipóteses acerca do ponto  $\bar{x}$ , concluímos que  $\bar{x}$  é uma solução local deste problema que satisfaz a condição de regularidade das restrições e a condição suficiente de segunda ordem para problemas com restrições de igualdade. Portanto, se agregarmos ao sistema de Lagrange correspondente as equações

$$\mu_i = 0, \quad i \in \{1, \dots, m\} \setminus I(\bar{x}),$$

o sistema de equações em relação a  $(x, \lambda, \mu) \in U$  assim obtido terá uma solução  $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$  que é regular, no sentido de que a derivada deste sistema nesta solução é invertível. De acordo com o Teorema 2.14, o método de Newton para este sistema converge localmente à solução com uma taxa superlinear, e se as derivadas segundas de  $f$ ,  $h$  e  $g$  são Lipschitz-contínuas numa vizinhança do ponto  $\bar{x}$ , a taxa de convergência é quadrática.

Assim, para uma aproximação  $(x_k, \lambda_k, \mu_k)$  dada, uma iteração do método de Newton consiste em um passo ao ponto  $(x_k + d_k, \lambda_{k+1}, \mu_{k+1})$ , onde  $(d_k, \lambda_{k+1}, \mu_{k+1})$  é a solução do sistema que consiste nas equações (3.9), (3.20), (3.21) e na equação

$$(\nabla^2 L)_{xx}(x_k, \lambda_k, \mu_k)d - \sum_{\substack{i=1 \\ i \notin I(\bar{x})}}^m (\mu_k)_i \nabla^2 g_i(x_k)d + (h'(x_k))^\top \lambda + \sum_{i \in I(\bar{x})} \mu_i \nabla g_i(x_k) = -\nabla f(x_k). \quad (3.22)$$

Notemos que a única diferença entre (3.22) e (3.9) é o segundo termo do primeiro membro de (3.22) levando em conta (3.21). Mas como  $\bar{\mu}_i = 0$  para todo  $i \in \{1, \dots, m\} \setminus I(\bar{x})$ , existe um número  $M > 0$  tal que para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  suficientemente próximo a  $\bar{x}$  e todo  $\mu \in \mathbb{R}^m$  suficientemente próximo a  $\bar{\mu}$ , tem-se

$$\left\| \sum_{\substack{i=1 \\ i \notin I(\bar{x})}}^m (\mu_k)_i \nabla^2 g_i(x_k) \right\| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \notin I(\bar{x})}}^m |\mu_i - \bar{\mu}_i| \|\nabla^2 g_i(x)\| \leq M \|\mu_i - \bar{\mu}_i\|.$$

Isto significa que o algoritmo cuja iteração é dada pelas equações (3.9), (3.10), (3.20) e (3.21), pode ser pensado como um método de Newton inexato com iterações determinadas pelas equações (3.10), (3.20), (3.21) e (3.22). Por isso, as propriedades locais e taxa de convergência deste método são completamente análogas àsquelas do método de Newton.  $\square$

Um dos motivos da localidade do Algoritmo 4, está no fato de que  $(\nabla^2 L)_{xx}(x_k, \lambda_k)$  pode não ser definida positiva, então o mesmo pode ocorrer com  $H_k = (\nabla^2 L)_{xx}(x_k, \lambda_k, \mu_k)$ , como já vimos no Exemplo 2.5, isso faz com que, novamente, o subproblema de programação quadrática possa não ter solução. De maneira análoga aos problemas com restrições de igualdade, podemos considerar a matriz  $H_k$  como sendo a hessiana parcial com respeito a  $x$  da lagrangiana aumentada do problema (3.6), considerada na seção 2.5.2, isto é,

$$H_k = (\nabla^2 L)_{xx}(x_k, \lambda_k; c) + \sum_{i=1}^m (c \nabla g_i(x_k) (\nabla g_i(x_k))^\top + \max\{0, c g_i(x_k) + (\mu_k)_i\} \nabla^2 g_i(x_k)),$$

pois o Teorema 2.17 garante que tal matriz é definida positiva para  $c > 0$  suficientemente grande.

O Teorema 2.18 estabelece uma equivalência entre pontos KKT da forma  $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$  pertencentes a  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$  e zeros do gradiente da Lagrangiana aumentada do pro-

blema (3.6), ou seja,  $\nabla L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}; c) = 0$ , por isso podemos considerar no Algoritmo 4  $\|\nabla L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}; c)\| < \varepsilon$  para algum  $\varepsilon > 0$  pequeno como critério de parada.

A estrutura de métodos PQS permitem várias estratégias de globalização. Uma dessas estratégias será apresentada a seguir.

### 3.4 Globalização de convergência do método PQS

De acordo com [3], para a globalização do método PQS podem ser utilizadas tanto a estratégia de busca linear para uma função mérito adequada quanto a estratégia de regiões de confiança. Vamos considerar a primeira opção apresentada por [3], pois o mesmo considera que a implementação é relativamente mais simples do que a segunda abordagem.

De novo, consideremos o problema

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n; h(x) = 0, g(x) \leq 0\}, \quad (3.23)$$

onde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  são funções suficientemente suaves. Seja

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}, \\ L(x, \lambda, \mu) &= f(x) + \langle \lambda, h(x) \rangle + \langle \mu, g(x) \rangle, \end{aligned}$$

a Lagrangiana do problema (3.23). A função mérito<sup>3</sup> utilizada consiste numa função de penalização externa exata que, de acordo com [3, p. 201], é uma função cuja regra acrescenta um valor positivo a função objetivo quando avaliamos tal função em um ponto fora do conjunto viável. A minimização irrestrita de tal função equivale a minimização restrita da função objetivo, além disso, podemos obter a solução do segundo problema a partir do primeiro, desde que a solução seja estrita (para mais detalhes veja o Teorema 4.3.18 de [3]). A função mérito é dada por

$$\varphi(\cdot; c) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x; c) = f(x) + c\psi(x), \quad (3.24)$$

onde

$$\psi(x) = \|h(x)\|_1 + \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x)\}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.25)$$

além disso  $\|\cdot\|_1$  denota a norma da soma<sup>4</sup> e  $c > 0$  é o parâmetro de penalização.

Contudo, conforme [3], as características desejáveis apresentadas vêm com o custo da não-diferenciabilidade de  $\psi$  mesmo quando  $h$  e  $g$  são diferenciáveis.

<sup>3</sup>Segundo [1, p. 86]  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de mérito quando  $\varphi(x_{k+1}) \leq \varphi(x_k)$  para qualquer sequência gerada por um algoritmo.

<sup>4</sup>Conforme visto na Seção 1.1.

De fato, sejam os conjuntos (para mais detalhes veja o Exercício 4.3.14 de [3])

$$\begin{aligned}
J^+(x) &= \{i = 1, \dots, l; h_i(x) > 0\}, \\
J^0(x) &= \{i = 1, \dots, l; h_i(x) = 0\}, \\
J^-(x) &= \{i = 1, \dots, l; h_i(x) < 0\}, \\
I^+(x) &= \{i = 1, \dots, m; g_i(x) > 0\}, \\
I^0(x) &= \{i = 1, \dots, m; g_i(x) = 0\}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Com os conjuntos acima, é possível reescrever a regra da função  $\psi$  da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \|h(x)\|_1 + \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x)\} \\
&= \sum_{i=1}^l |h_i(x)| + \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x)\} \\
&= \sum_{i \in J^+(x)} |h_i(x)| + \sum_{i \in J^0(x)} |h_i(x)| + \sum_{i \in J^-(x)} |h_i(x)| + \sum_{i \in I^+(x)} \max\{0, g_i(x)\} + \\
&\quad + \sum_{i \in I^0(x)} \max\{0, g_i(x)\} \\
&= \sum_{i \in J^+(x)} h_i(x) + \sum_{i \in J^0(x)} |h_i(x)| - \sum_{i \in J^-(x)} h_i(x) + \sum_{i \in I^+(x)} g_i(x) + \sum_{i \in I^0(x)} \max\{0, g_i(x)\}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Em particular, o termo  $|h_i(x)|$ ,  $i \in J^0(x)$  é não-diferenciável. Para mostrar isso, vamos definir a função auxiliar  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\Phi(x) = |h_i(x)|$ ,  $i \in J^0(x)$ . Note que para todo  $v \in \mathbb{R}^n$ , temos que a sua derivada direcional com respeito a  $v$  é o limite

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + tv) - \Phi(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|h_i(x + tv)| - |h_i(x)|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|h_i(x + tv)|}{t},$$

onde a última igualdade é devido ao fato de  $h_i(x) = 0$  já que  $i \in J^0(x)$ . Supondo que  $h$  seja diferenciável no ponto  $x$ , pela Fórmula de Taylor de primeira ordem dada em (1.15) obtemos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|h(x) + t \langle \nabla h(x), v \rangle + o(t)|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t \langle \nabla h(x), v \rangle + o(t)|}{t}.$$

Calculando os limites laterais, verificamos que

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|t \langle \nabla h(x), v \rangle + o(t)|}{t} &= \left| \lim_{t \rightarrow 0^+} \langle \nabla h(x), v \rangle + \frac{o(t)}{t} \right| = |\langle \nabla h(x), v \rangle| \\
\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{|t \langle \nabla h(x), v \rangle + o(t)|}{t} &= - \lim_{t \rightarrow 0^-} \left| \langle \nabla h(x), v \rangle + \frac{o(t)}{t} \right| = -|\langle \nabla h(x), v \rangle|.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Logo para que a derivada direcional exista, a igualdade  $|\langle \nabla h(x), v \rangle| = -|\langle \nabla h(x), v \rangle|$  deve ser satisfeita, ou seja,  $|\langle \nabla h(x), v \rangle| = 0$  que é equivalente a  $\langle \nabla h(x), v \rangle = 0$ . Observe que no geral, tal condição não pode ser satisfeita. Isto é um dos motivos pelos quais, surgiu a necessidade de uma noção mais geral de diferenciabilidade em Otimização.

Em particular, [10] estabeleceu uma noção de diferenciabilidade para funções do tipo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $f$  é Lipschitz-contínua em torno de um ponto  $x$ , isto é, existem  $K > 0$  e uma vizinhança  $U \subset \mathbb{R}^n$  de  $x$  tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| \quad \forall x, y \in U.$$

Para este fim, [10, p. 10] definiu o conceito de derivada direcional generalizada em  $x$  com respeito a direção  $v$  como sendo o seguinte limite superior

$$f^0(x; v) := \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{f(y + \lambda v) - f(y)}{\lambda}$$

onde a notação  $\lambda \downarrow 0$  significa  $\lambda \rightarrow 0^+$ .

Particularmente, podemos relacionar a derivada direcional generalizada com a derivada direcional clássica de funções convexas. Antes de mostrarmos a relação encontrada por [10], vamos definir formalmente o conceito de função convexa. Para este fim, precisamos definir primeiro o que é um conjunto convexo.

**Definição 3.1.** [2, p. 60] *Um conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$  é chamado **conjunto convexo** se para quaisquer  $x \in D$ ,  $y \in D$  e  $\alpha \in [0, 1]$ , tem-se que  $\alpha x + (1 - \alpha)y \in D$ .*

Com isso, podemos definir

**Definição 3.2.** [2, p. 66] *Se  $D \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto convexo, diz-se que a função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é **convexa** em  $D$  quando para quaisquer  $x \in D$ ,  $y \in D$  e  $\alpha \in [0, 1]$ , tem-se que*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

Para a relação entre a derivada direcional generalizada e a derivada direcional clássica citada acima, [10, p. 30] relembra que usualmente entre aplicações  $F : X \rightarrow Y$ , onde  $X$  e  $Y$  são espaços de Banach,<sup>5</sup> (em particular  $\mathbb{R}^n$  é um espaço de Banach para todo  $n \in \mathbb{N}$ ) a derivada direcional (unilateral) de  $x$  com respeito a direção  $v$  é

$$F'(x; v) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{F(x + tv) - F(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(x + tv) - F(x)}{t}$$

quando o limite acima existe. A relação apontada acima é dada pelo seguinte resultado:

---

<sup>5</sup>Espaços de Banach são espaços normados completos, para mais detalhes veja [9] ou qualquer livro de Análise Funcional.

**Proposição 3.1.** Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa em  $U$  e Lipschitz-contínua em torno de  $x$ , então  $f^0(x; v) = f'(x; v)$  para todo  $v$ .

*Demonstração.* Veja a Proposição 2.2.7 de [10]. □

Uma condição suficiente para que uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  convexa em  $U$  seja Lipschitz-contínua em torno de  $x$  é exigir que  $U$  seja um conjunto aberto, conforme mostra o seguinte resultado.

**Teorema 3.2.** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto convexo e aberto e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função convexa em  $\Omega$ . Então  $f$  é localmente Lipschitz-contínua em  $\Omega$ .

*Demonstração.* Veja o Teorema 3.4.17 de [2, p. 128]. □

Com isso, vamos calcular a derivada direcional generalizada da função  $\psi$  visto que tal derivada será empregada na demonstração do Lema 3.1. Para isso, basta mostrar que  $\psi$  é convexa em  $\mathbb{R}^n$  porque  $\mathbb{R}^n$  é aberto. Com o Teorema 3.2, vamos garantir que  $f$  é Lipschitz-contínua e a Proposição 3.1 garantirá a existência da derivada direcional generalizada  $\psi^0(x; d)$  e que  $\psi^0(x; d) = \psi'(x; d)$ .

Da equação (3.25) notamos que a regra da função  $\psi$  pode ser considerada como uma soma de funções. Uma estratégia para mostrar que  $\psi$  é convexa em  $\mathbb{R}^n$  consiste em verificar se cada função desta soma é convexa porque a soma de funções convexas é uma função convexa e isso é uma consequência direta de um resultado mais geral que enunciaremos a seguir.

**Proposição 3.2. (Convexidade da soma de funções convexas)** Sejam  $D \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto convexo e  $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , funções convexas no conjunto  $D$ . Então para quaisquer  $\mu_i \in \mathbb{R}_+$ ,  $i = 1, \dots, p$ , a função

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{i=1}^p \mu_i f_i(x)$$

é convexa em  $D$ .

*Demonstração.* Veja a Proposição 3.4.1 de [2, p. 122]. □

Retomando da equação (3.25), precisamos mostrar que as funções  $|x|$  e  $\max\{0, x\}$ , ambas para todo  $x \in \mathbb{R}$ , são convexas, contudo observe que

$$|x| = \max\{x, -x\} = \max\{0, x\} + \max\{0, -x\}.$$

Isso significa que a convexidade de  $\psi$  em  $\mathbb{R}^n$  depende apenas da convexidade da função  $\max\{0, x\}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Com efeito,

$$\max\{0, \alpha x + (1 - \alpha)y\} \leq \max\{0, \alpha x\} + \max\{0, (1 - \alpha)y\}, \quad (3.29)$$

porque no caso em que  $\alpha x \geq 0$  e  $(1 - \alpha)y \geq 0$ ; e no caso onde  $\alpha x < 0$  e  $(1 - \alpha)y < 0$  obtemos a igualdade em (3.29). Quando  $\alpha x \geq 0$  e  $(1 - \alpha)y < 0$ ; e vice-versa obtemos a desigualdade estrita em (3.29).

Como  $\alpha \in [0, 1]$ , se  $x \geq 0$  então  $\max\{0, \alpha x\} = \alpha x = \alpha \max\{0, x\}$ . Caso  $x < 0$ , temos que  $\alpha x < 0$  o que implica em  $\max\{0, \alpha x\} = 0 = \alpha \cdot 0 = \alpha \max\{0, x\}$ , logo  $\max\{0, \alpha x\} = \alpha \max\{0, x\}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . De forma análoga,  $\max\{0, (1 - \alpha)y\} = (1 - \alpha) \max\{0, y\}$ . Isso é suficiente para provar a convexidade da função  $\max\{0, x\}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Como mencionado acima, com a convexidade da função  $\max\{0, x\}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  obtemos a convexidade de  $\psi$  em  $\mathbb{R}^n$ . Isso nos permite calcular a sua derivada direcional generalizada em  $x$ , com respeito a direção  $d \in \mathbb{R}^n$ , e esta coincide com o seguinte limite

$$\psi'(x; d) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\psi(x + td) - \psi(x)}{t}$$

considerando que as funções  $g$  e  $h$  são diferenciáveis em  $x$ .

Por (3.27), (3.28) e considerando que  $\max\{0, g_i(x)\} = (g_i(x) + |g_i(x)|)/2$ , podemos concluir ao utilizar as informações citadas em cada parcela da relação (3.27) que a derivada direcional generalizada  $\varphi^0(x; d)$  pode ser caracterizada por

$$\begin{aligned} \psi'(x; d) = & \sum_{i \in J^+(x)} \langle \nabla h_i(x), d \rangle + \sum_{i \in J^0(x)} |\langle \nabla h_i(x), d \rangle| - \sum_{i \in J^-(x)} \langle \nabla h_i(x), d \rangle + \\ & + \sum_{i \in I^+(x)} \langle \nabla g_i(x), d \rangle + \sum_{i \in I^0(x)} \max\{0, \langle \nabla g_i(x), d \rangle\}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Por fim, estamos também interessados em calcular a derivada direcional generalizada da função  $\varphi$  cuja regra é dada pela equação (3.24), mas como  $f$  é diferenciável no sentido clássico é evidente que para todo  $v \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} f^0(x; v) &= \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{f(y + \lambda v) - f(y)}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x + \lambda v) - f(x)}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \lambda v) - f(x)}{\lambda} \\ &= f'(x; v). \end{aligned}$$

Agora, vamos apresentar uma estratégia de globalização para um método PQS retirada de [3] que, novamente, consiste em utilizar uma busca linear para uma função mérito adequada, neste caso,  $\psi$ . Todos os detalhes desta estratégia estão no seguinte algoritmo que foi retirado de [3, p. 331-332].

---

**Algoritmo 5:** Método PQS globalizado (Algoritmo 4.6.7 de [3])

---

1 **Escolher** os parâmetros  $\bar{c} > 0$ ,  $\theta \in (0, 1)$  e  $\sigma \in (0, 1)$ .

2 **Escolher**  $(x_0, \lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}_+^m$  e uma matriz simétrica  $H_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

3 **início**

4  $k := 0$ ;

5 **Calcular**  $d_k \in \mathbb{R}^n$ , um ponto estacionário do problema

$$\begin{aligned} & \min \langle \nabla f(x_k), d \rangle + \frac{1}{2} \langle H_k d, d \rangle \\ & \text{sujeito a } x \in D_k = \{x \in \mathbb{R}^n; h(x_k) + h'(x_k)d = 0, g(x_k) + g'(x_k)d \leq 0\} \end{aligned} \quad (3.31)$$

e multiplicadores de Lagrange  $\lambda_{k+1} \in \mathbb{R}^l$  e  $\mu_{k+1} \in \mathbb{R}_+^m$  associados a  $d_k$ .

6 Se  $d_k = 0$  **pare**. Caso contrário, escolher

$$c_k \geq \bar{c} + \|(\lambda_{k+1}, \mu_{k+1})\|_\infty \quad (3.32)$$

e calcular

$$\Delta_k = \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle - c_k \psi(x_k). \quad (3.33)$$

Tomar  $\alpha = 1$ .

7 Se a desigualdade

$$\varphi(x_k + \alpha d_k; c_k) \leq \varphi(x_k; c_k) + \sigma \alpha \Delta_k, \quad (3.34)$$

se satisfaz, tomar  $\alpha_k = \alpha$ . Caso contrário, tomar  $\alpha := \theta \alpha$ , verificar a validade de (3.34) de novo até que (3.34) seja satisfeita.

8 **Tomar**  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$

9 **Tomar**  $k := k + 1$ , escolher uma nova matriz  $H_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica, e retornar ao Passo 5.

10 **fim**

---

Observemos que segundo [3], a existência de multiplicadores de Lagrange associados a um ponto estacionário em subproblemas de métodos PQS é automática, já que suas restrições são lineares.

O Algoritmo 5 pressupõe que todos os subproblemas gerados possuem pontos estacionários para todo  $k$ . Em princípio, isto não é automático. Primeiro, em geral, até o conjunto viável do subproblema pode ser vazio.

Outra possível dificuldade apontada pelo autor é que a função objetivo do subproblema pode ser ilimitada inferiormente no conjunto  $D_k \neq \emptyset$ . Neste caso, a existência de pontos estacionários também pode não ser garantida. Esta situação, contudo não ocorre se  $H_k$  é

uma matriz definida positiva.

Por isso, realmente é desejável escolher  $H_k$  definida positiva. De acordo com o Teorema 3.3 mais adiante, para garantir convergência global do Algoritmo 5, a sequência  $(H_k)$  pode ser essencialmente qualquer, desde que as matrizes sejam uniformemente definidas positivas e uniformemente limitadas. Em particular, podemos utilizar até uma matriz fixa para todo  $k$ . Por outro lado, do ponto de vista de convergência local rápida, a escolha desejável é  $H_k = (\nabla^2 L)_{xx}(x_k, \lambda_k, \mu_k)$ . Infelizmente, não podemos garantir que esta matriz seja definida positiva.

Para contornar estas dificuldades, podemos utilizar a estratégia empregada na seção 3.3 para obter matrizes definidas positivas tomando

$$H_k = (\nabla^2 L)_{xx}(x_k, \lambda_k; c) + \sum_{i=1}^m (c \nabla g_i(x_k) (\nabla g_i(x_k))^\top + \max\{0, c g_i(x_k) + (\mu_k)_i\} \nabla^2 g_i(x_k)).$$

No passo 7 do algoritmo 5 só é possível encontrar um  $\alpha \in (0, 1]$  que satisfaz (3.34) se o  $d_k$  obtido no passo 5 for uma direção de descida para a função mérito escolhida. Felizmente tal propriedade é válida quando  $H_k$  é definida positiva, o que justifica o seguinte resultado.

**Lema 3.1. (Derivada da função de mérito na direção de SQP)[3, p. 334]** *Sejam as funções  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciáveis no ponto  $x_k \in \mathbb{R}^n$ . Sejam  $H_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz simétrica,  $d_k \in \mathbb{R}^n$  um ponto estacionário do problema (3.31),  $\lambda_{k+1} \in \mathbb{R}^l$  e  $\mu_{k+1} \in \mathbb{R}_+^m$  multiplicadores de Lagrange associados, e  $c_k$  um número que satisfaz  $c_k \geq \bar{c} + \|(\lambda_{k+1}, \mu_{k+1})\|_\infty$  onde  $\bar{c} > 0$ . Sejam  $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $\varphi(x; c) = f(x) + c\psi(x)$  onde  $\psi(x) = \|h(x)\|_1 + \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x)\}$ .*

*Nas condições dadas, a função  $\varphi(\cdot; c_k)$  é diferenciável no ponto  $x_k$  em cada direção, e tem-se que*

$$\varphi'((x_k, d_k); c_k) \leq \Delta_k \leq -\langle H_k d_k, d_k \rangle - \bar{c} \psi(x_k), \quad (3.35)$$

onde  $\varphi'((x_k, d_k); c_k)$  denota a derivada direcional generalizada de  $\varphi(\cdot; c_k)$  no ponto  $x_k$  com respeito a direção  $d_k$  e

$$\Delta_k = \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle - c_k \psi(x_k).$$

*Demonstração.*<sup>6</sup> Pelas condições KKT (Definição 2.9) para o problema (3.31), o ponto  $(d_k, \lambda_{k+1}, \mu_{k+1})$  satisfaz o sistema

$$\nabla f(x_k) + H_k d_k + (h'(x_k))^\top \lambda_{k+1} + (g'(x_k))^\top \mu_{k+1} = 0, \quad (3.36)$$

$$h(x_k) + h'(x_k) d_k = 0, \quad (3.37)$$

$$g(x_k) + g'(x_k) d_k \preceq 0, \quad \mu_{k+1} \geq 0, \quad (3.38)$$

$$\mu_i^{k+1} (g_i(x_k) + \langle \nabla g_i(x_k), d_k \rangle) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.39)$$

<sup>6</sup>A demonstração a seguir é uma versão detalhada da prova original encontrada na demonstração do Lema 4.6.9 de [3].

De (3.37) segue que

$$\langle \nabla h_j(x_k), d_k \rangle = -h_j(x_k) \quad \forall j = 1, \dots, l,$$

(basta lembrar da regra do produto interno canônico em  $\mathbb{R}^n$  e relacionar com a operação de multiplicação de matrizes). Portanto, considerando o conjunto de índices dado em (3.26), temos

$$-|h_j(x_k)| = \begin{cases} \langle \nabla h_j(x_k), d_k \rangle, & \text{se } j \in J^+(x_k), \\ |\langle \nabla h_j(x_k), d_k \rangle|, & \text{se } j \in J^0(x_k), \\ -\langle \nabla h_j(x_k), d_k \rangle, & \text{se } j \in J^-(x_k). \end{cases} \quad (3.40)$$

Além disso, pela primeira desigualdade em (3.38), temos que

$$-\max\{0, g_i(x_k)\} = \begin{cases} -g_i(x_k) \geq \langle \nabla g_i(x_k), d_k \rangle, & \text{se } i \in I_+(x_k), \\ 0 = \max\{0, \langle \nabla g_i(x_k), d_k \rangle\}, & \text{se } i \in I^0(x_k). \end{cases} \quad (3.41)$$

Utilizando a fórmula da derivada direcional da função  $\psi(\cdot)$ , dada em (3.30), e as relações (3.40) e (3.41) obtemos

$$\begin{aligned} \varphi'((x_k; d_k); c_k) &= \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle + c_k \psi'(x_k; d_k) \\ &= \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle + c_k \sum_{i \in J^+(x_k)} \langle \nabla h_i(x_k), d_k \rangle + c_k \sum_{i \in J^0(x_k)} |\langle \nabla h_i(x_k), d_k \rangle| - \\ &\quad - c_k \sum_{i \in J^-(x_k)} \langle \nabla h_i(x_k), d_k \rangle + c_k \sum_{i \in I^+(x_k)} \langle \nabla g_i(x_k), d_k \rangle + \\ &\quad + c_k \sum_{i \in I^0(x_k)} \max\{0, \langle \nabla g_i(x_k), d_k \rangle\} \\ &\leq \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle - c_k \sum_{i \in J^+(x_k)} |h_i(x_k)| - c_k \sum_{i \in J^0(x_k)} |h_i(x_k)| - \\ &\quad - c_k \sum_{i \in J^-(x_k)} |h_i(x_k)| - c_k \sum_{i \in I^+(x_k)} \max\{0, g_i(x_k)\} - \\ &\quad - c_k \sum_{i \in I^0(x_k)} \max\{0, g_i(x_k)\} \\ &= \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle - c_k \sum_{i=1}^l |h_i(x_k)| - c_k \sum_{i \in I^+(x_k) \cup I^0(x_k)} \max\{0, g_i(x_k)\} \\ &= \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle - c_k \sum_{i=1}^l |h_i(x_k)| - c_k \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x_k)\}, \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do fato de que para todo índice  $i \in \{1, \dots, m\} \setminus (I^+(x_k) \cup I^0(x_k))$ , tem-se que  $\max\{0, g_i(x_k)\} = 0$ .

Pelas relações (3.25) e (3.33) podemos escrever que

$$\begin{aligned}\varphi'((x_k; d_k); c_k) &\leq \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle - c_k \sum_{i=1}^l |h_i(x_k)| - c_k \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x_k)\} \\ &= \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle - c_k \psi(x_k) \\ &= \Delta_k.\end{aligned}$$

Com isso, acabamos de provar a primeira desigualdade em (3.35). Por (3.36), sabemos que  $\nabla f(x_k) = -H_k d_k - (h'(x_k))^\top \lambda_{k+1} - (g'(x_k))^\top \mu_{k+1}$ , logo por (1.6)<sup>7</sup>, obtemos que

$$\begin{aligned}\langle \nabla f(x_k), d_k \rangle &= -\langle H_k d_k, d_k \rangle - \langle (h'(x_k))^\top \lambda_{k+1}, d_k \rangle - \langle (g'(x_k))^\top \mu_{k+1}, d_k \rangle \\ &= -\langle H_k d_k, d_k \rangle - \langle \lambda_{k+1}, h'(x_k) d_k \rangle - \langle \mu_{k+1}, g'(x_k) d_k \rangle.\end{aligned}$$

Por (3.37) podemos obter que  $h'(x_k) d_k = -h(x_k)$  e por (3.39) ao dividirmos a igualdade por  $\mu_{k+1}$  e considerarmos a relação entre o produto interno canônico do  $\mathbb{R}^n$  e a definição de multiplicação de matrizes, podemos concluir que  $g'(x_k) d_k = -g(x_k)$ . Assim segue que

$$\begin{aligned}\langle \nabla f(x_k), d_k \rangle &= -\langle H_k d_k, d_k \rangle - \langle \lambda_{k+1}, h'(x_k) d_k \rangle - \langle \mu_{k+1}, g'(x_k) d_k \rangle \\ &= -\langle H_k d_k, d_k \rangle + \langle \lambda_{k+1}, h(x_k) \rangle + \langle \mu_{k+1}, g(x_k) \rangle \\ &= -\langle H_k d_k, d_k \rangle + \sum_{i=1}^l (\lambda_{k+1})_i h_i(x_k) + \sum_{i=1}^m (\mu_{k+1})_i g_i(x_k) \\ &\leq -\langle H_k d_k, d_k \rangle + \sum_{i=1}^l |(\lambda_{k+1})_i| |h_i(x_k)| + \sum_{i=1}^m (\mu_{k+1})_i \max\{0, g_i(x_k)\} \\ &= -\langle H_k d_k, d_k \rangle + \sum_{i=1}^l |(\lambda_{k+1})_i| |h_i(x_k)| + \sum_{i=1}^m (\mu_{k+1})_i \max\{0, g_i(x_k)\},\end{aligned}$$

onde a última desigualdade se deve ao fato de que  $(\lambda_{k+1})_i h_i(x_k) \leq |(\lambda_{k+1})_i| |h_i(x_k)|$  para todo  $i \in 1, \dots, l$ ,  $\mu_{k+1} \geq 0$  e  $g_j \leq \max\{0, g_j(x_k)\}$  para todo  $j \in 1, \dots, m$ .

Prosseguindo com os cálculos observamos que

$$\begin{aligned}\langle \nabla f(x_k), d_k \rangle &\leq -\langle H_k d_k, d_k \rangle + \sum_{i=1}^l |(\lambda_{k+1})_i| |h_i(x_k)| + \sum_{i=1}^m (\mu_{k+1})_i \max\{0, g_i(x_k)\} \\ &\leq -\langle H_k d_k, d_k \rangle + \max_{i=1, \dots, l} |(\lambda_{k+1})_i| \sum_{i=1}^l |h_i(x_k)| + \max_{j=1, \dots, m} |(\mu_{k+1})_j| \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x_k)\} \\ &= -\langle H_k d_k, d_k \rangle + \|\lambda_{k+1}\|_\infty \sum_{i=1}^l |h_i(x_k)| + \|\mu_{k+1}\|_\infty \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x_k)\} \\ &= -\langle H_k d_k, d_k \rangle + \|\lambda_{k+1}\|_\infty \|h_i(x_k)\|_1 + \|\mu_{k+1}\|_\infty \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x_k)\}.\end{aligned}$$

<sup>7</sup>A equação (1.6) é dada por  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^\top y \rangle$  onde  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $y \in \mathbb{R}^m$ .

Daqui, utilizando (3.25), (3.32) e (3.34), obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta_k &= \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle - c_k \psi(x_k) \\
&= \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle - c_k \|h(x_k)\|_1 - c_k \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x_k)\} \\
&\leq \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle - (\bar{c} + \|(\lambda_{k+1}, \mu_{k+1})\|_\infty) \|h(x_k)\|_1 - (\bar{c} + \|(\lambda_{k+1}, \mu_{k+1})\|_\infty) \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x_k)\} \\
&\leq \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle - (\bar{c} + \|\mu_{k+1}\|_\infty) \|h(x_k)\|_1 - (\bar{c} + \|\mu_{k+1}\|_\infty) \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x_k)\}.
\end{aligned}$$

A última desigualdade ocorre porque  $0 \leq \|\mu_{k+1}\|_\infty \leq \|(\lambda_{k+1}, \mu_{k+1})\|_\infty$ . Assim

$$\begin{aligned}
\Delta_k &\leq \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle - (\bar{c} + \|\mu_{k+1}\|_\infty) \|h(x_k)\|_1 - (\bar{c} + \|\mu_{k+1}\|_\infty) \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x_k)\} \\
&\leq \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle - \bar{c} \|h(x_k)\|_1 - \bar{c} \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x_k)\} \\
&= \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle - \bar{c} \psi(x_k),
\end{aligned}$$

que é a segunda desigualdade em (3.35). □

Da segunda desigualdade em (3.35), concluímos que para todo  $k$ , se a matriz  $H_k$  é definida positiva e o Algoritmo 5 gera  $d_k \neq 0$ , tem-se que

$$\Delta_k < 0. \tag{3.42}$$

Da desigualdade acima e da primeira desigualdade em (3.35) temos que  $\frac{\partial \varphi}{\partial d_k}(x_k; c_k) < 0$ , ou seja,  $d_k$  é uma direção de descida para a função  $\varphi(\cdot; c_k)$  no ponto  $x_k$ . Portanto, a regra de busca linear no passo 7 do Algoritmo 5 está bem definida, no sentido de que ela aceita um valor de comprimento de passo  $\alpha_k > 0$ , após um número finito de diminuições do valor inicial  $\alpha_k = 1$ .

O resultado acima também garante que a sequência  $(x_k)$  gerada pelo Algoritmo 5 está bem definida. Vamos agora analisar a convergência desta sequência gerada. Para isso, em princípio, observamos que iterações do Algoritmo 5 utilizam valores diferentes do parâmetro penalizador  $c_k$ . Vamos admitir, por questões de conveniência, que este valor é fixo, pelo menos para todo  $k$  suficientemente grande, ou seja,

$$c_k = c, \tag{3.43}$$

onde  $c$  é uma constante.

Com esta hipótese, a partir de (3.32), podemos concluir que, para  $k$  suficientemente

grande, a sequência de multiplicadores  $((\lambda_k, \mu_k))_{k \in \mathbb{N}}$ , gerada pelo Algoritmo 5, é limitada, pois caso contrário teríamos que  $c = \infty$  o que contradiria a hipótese. Do ponto de vista prático, [3] afirma que a hipótese de um parâmetro de penalização fixo para um  $k$  suficientemente grande e a limitação da sequência dos multiplicadores de Lagrange é completamente natural porque essa limitação ocorre pelo menos nos multiplicadores associados a pontos estacionários. Por isso, no resultado a seguir será assumido que essa sequência é limitada.

Agora, temos resultados suficientes para demonstrar o seguinte teorema.

**Teorema 3.3. (Convergência global do método PQS)[3, p. 338]** *Sejam as funções diferenciáveis  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  no  $\mathbb{R}^n$ , com derivadas Lipschitz-contínuas em  $\mathbb{R}^n$ . Suponhamos que no Algoritmo 5 as matrizes  $H_k$  sejam escolhidas de tal maneira que a sequência  $(H_k)$  seja limitada e as matrizes sejam uniformemente definidas positivas, isto é,*

$$\langle H_k v, v \rangle \geq \gamma \|v\|^2 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, \forall k, \quad (3.44)$$

onde  $\gamma > 0$ . Seja  $((x_k, \lambda_k, \mu_k))_{k \in \mathbb{N}}$  uma sequência gerada por este algoritmo e suponhamos que, para todo  $k$  suficientemente grande, se satisfaz a condição (3.43), isto é,  $c_k = c$  onde  $c$  é uma constante.

Quando  $k \rightarrow \infty$ , tem-se então que ou

$$\varphi(x_k; c_k) \rightarrow -\infty, \quad (3.45)$$

ou

$$\begin{aligned} (d_k) &\rightarrow 0, \\ ((\nabla L)_{xx}(x_k, \lambda_{k+1}, \mu_{k+1})) &\rightarrow 0, \\ (h(x_k)) &\rightarrow 0, \quad \max\{0, g_i(x_k)\} \rightarrow 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ (\mu_i)_{k+1} g_i(x_k) &\rightarrow 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Além disso, se  $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$  é um ponto de acumulação da sequência  $(x_k, \lambda_k, \mu_k)$ , então  $\bar{x}$  é um ponto estacionário do problema

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n; h(x) = 0, g(x) \preceq 0\},$$

enquanto  $\bar{\lambda}$  e  $\bar{\mu}$  são multiplicadores de Lagrange associados.

*Demonstração.*<sup>8</sup> Lembremos que  $d_k$  é ponto estacionário do subproblema (3.31), já  $\lambda_{k+1}$  e  $\mu_{k+1}$  são os multiplicadores de Lagrange associados a  $d_k$ , por isso o ponto  $(d_k, \lambda_{k+1}, \mu_{k+1})$

<sup>8</sup>A demonstração a seguir é uma versão detalhada da prova original encontrada na demonstração do Teorema 4.6.10 de [3].

satisfaz as seguintes condições de otimalidade, para todo  $k$ ,

$$\nabla f(x_k) + H_k d_k + (h'(x_k))^\top \lambda_{k+1} + (g'(x_k))^\top \mu_{k+1} = 0, \quad (3.46)$$

$$h(x_k) + h'(x_k) d_k = 0, \quad (3.47)$$

$$g(x_k) + g'(x_k) d_k \leq 0, \quad \mu_{k+1} \geq 0, \quad (3.48)$$

$$\mu_i^{k+1} (g_i(x_k) + \langle \nabla g_i(x_k), d_k \rangle) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.49)$$

Se  $d_k = 0$  para algum  $k$ , o sistema acima torna-se

$$\nabla f(x_k) + (h'(x_k))^\top \lambda_{k+1} + (g'(x_k))^\top \mu_{k+1} = 0,$$

$$h(x_k) = 0,$$

$$g(x_k) \leq 0, \quad \mu_{k+1} \geq 0,$$

$$\mu_i^{k+1} g_i(x_k) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Essas condições significam que  $(x_k, \lambda_{k+1}, \mu_{k+1})$  resolve o sistema KKT do problema

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n; h(x) = 0, g(x) \leq 0\},$$

o que dá o resultado desejado. A partir de agora, vamos supor que  $d_k \neq 0$  para todo  $k$ . Notemos que, por (3.43) e (3.32), as sequências  $(\lambda_k)$  e  $(\mu_k)$  são limitadas.

Primeiro provaremos que a sequência de valores dos parâmetros dos comprimentos de passos  $(\alpha_k)$  está limitada inferiormente por um número fixo estritamente positivo. Sejam  $\alpha \in (0, 1]$  arbitrário e  $M > 0$  o máximo entre os módulos de Lipschitz-continuidade das derivadas de  $f, h$  e  $g$  no  $\mathbb{R}^n$ . Pelo Lema 1.1, para todo  $k$  e todo  $i = 1, \dots, m$ , obtemos que

$$\begin{aligned} & \max\{0, g_i(x_k + \alpha d_k)\} - \max\{0, g_i(x_k) + \alpha \langle \nabla g_i(x_k), d_k \rangle\} \\ & \leq \max\{0, g_i(x_k + \alpha d_k) - g_i(x_k) - \alpha \langle \nabla g_i(x_k), d_k \rangle\} \\ & \leq |g_i(x_k + \alpha d_k) - g_i(x_k) - \alpha \langle \nabla g_i(x_k), d_k \rangle| \\ & \leq \frac{M\alpha^2}{2} \|d_k\|^2 \end{aligned}$$

pois, para todo  $a, b \in \mathbb{R}$ , as desigualdades  $\max\{0, a\} - \max\{0, b\} \leq \max\{0, a - b\}$ ,  $\max\{0, a\} \leq |a|$  são válidas. Aplicando o lema supracitado podemos obter a última desigualdade.

Com o primeiro e o último membro da desigualdade acima, podemos escrever que

$$\max\{0, g_i(x_k + \alpha d_k)\} \leq \max\{0, g_i(x_k) + \alpha \langle \nabla g_i(x_k), d_k \rangle\} + \frac{M\alpha^2}{2} \|d_k\|^2. \quad (3.50)$$

Além disso, como a função  $\max\{0, \cdot\}$  é convexa, obtemos

$$\begin{aligned}
& \max\{0, g_i(x_k) + \alpha \langle \nabla g_i(x_k), d_k \rangle\} \\
&= \max\{0, \alpha(g_i(x_k) + \langle \nabla g_i(x_k), d_k \rangle) + (1 - \alpha)g_i(x_k)\} \\
&\leq \alpha \max\{0, g_i(x_k) + \langle \nabla g_i(x_k), d_k \rangle\} + (1 - \alpha) \max\{0, g_i(x_k)\} \\
&= (1 - \alpha) \max\{0, g_i(x_k)\},
\end{aligned}$$

onde a última igualdade se deve à condição (3.48). De (3.50) obtemos então que

$$\max\{0, g_i(x_k + \alpha d_k)\} \leq (1 - \alpha) \max\{0, g_i(x_k)\} + \frac{M\alpha^2}{2} \|d_k\|^2. \quad (3.51)$$

Pelo Lema 1.1 e usando o fato de que  $M > 0$  é máximo entre os módulos de Lipschitz-continuidade das derivadas de  $f$ ,  $h$  e  $g$  no  $\mathbb{R}^n$ , temos

$$\begin{aligned}
f(x_k + \alpha d_k) - f(x_k) - \langle \nabla f(x_k), \alpha d_k \rangle &\leq |f(x_k + \alpha d_k) - f(x_k) - \langle \nabla f(x_k), \alpha d_k \rangle| \\
&\leq \frac{M\alpha^2}{2} \|d_k\|^2.
\end{aligned}$$

Podemos escrever então

$$f(x_k + \alpha d_k) \leq f(x_k) + \alpha \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle + \frac{M\alpha^2}{2} \|d_k\|^2. \quad (3.52)$$

De modo similar, de (3.47) concluimos que  $h_j(x_k) + \langle \nabla h_j(x_k), d_k \rangle = 0$  para todo  $j = 1, \dots, l$ . Com essa informação, aplicando a desigualdade triangular e o Lema 1.1 obtemos

$$\begin{aligned}
|h_j(x_k + \alpha d_k)| &= |h_j(x_k + \alpha d_k) - \alpha(h_j(x_k) + \langle \nabla h_j(x_k), d_k \rangle)| \\
&= |h_j(x_k + \alpha d_k) - h_j(x_k) + h_j(x_k) - \alpha(h_j(x_k) + \langle \nabla h_j(x_k), d_k \rangle)| \\
&= |h_j(x_k + \alpha d_k) - h_j(x_k) - \alpha \langle \nabla h_j(x_k), d_k \rangle + (1 - \alpha)h_j(x_k)| \\
&\leq |h_j(x_k + \alpha d_k) - h_j(x_k) - \alpha \langle \nabla h_j(x_k), d_k \rangle| + (1 - \alpha)|h_j(x_k)| \\
&\leq (1 - \alpha)|h_j(x_k)| + \frac{M\alpha^2}{2} \|d_k\|^2.
\end{aligned} \quad (3.53)$$

Utilizando as funções  $\varphi$ ,  $\psi$  e combinando as relações (3.51)-(3.53), obtemos

$$\begin{aligned}
\varphi(x_k + \alpha d_k; c_k) &= f(x_k + \alpha d_k) + c_k \|h(x_k + \alpha d_k)\|_1 + c_k \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x_k + \alpha d_k)\} \\
&\leq f(x_k) + \alpha \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle + \frac{M\alpha^2}{2} \|d_k\|^2 \\
&\quad + c_k(1 - \alpha) \|h(x_k)\|_1 + c_k \cdot l \cdot \frac{M\alpha^2}{2} \|d_k\|^2 \\
&\quad + c_k(1 - \alpha) \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x_k)\} + c_k \cdot m \cdot \frac{M\alpha^2}{2} \|d_k\|^2.
\end{aligned}$$

Prosseguindo com os cálculos, obtemos

$$\begin{aligned}
\varphi(x_k + \alpha d_k; c_k) &\leq f(x_k) + \alpha \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle + c_k(1 - \alpha) \|h(x_k)\|_1 \\
&\quad + c_k(1 - \alpha) \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x_k)\} + C_k \alpha^2 \|d_k\|^2 \\
&= \varphi(x_k; c_k) + \alpha \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle - c_k \alpha \|h(x_k)\|_1 \\
&\quad - c_k \alpha \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x_k)\} + C_k \alpha^2 \|d_k\|^2 \\
&= \varphi(x_k; c_k) + \alpha \Delta_k + C_k \alpha^2 \|d_k\|^2,
\end{aligned}$$

onde

$$C_k = M(1 + (l + m)c_k)/2 > 0. \quad (3.54)$$

Comparando a relação acima com (3.34), isto é com

$$\varphi(x_k + \alpha d_k; c_k) \leq \varphi(x_k; c_k) + \sigma \alpha \Delta_k,$$

vemos que a desigualdade acima será satisfeita se

$$\alpha \Delta_k + C_k \alpha^2 \|d_k\|^2 \leq \sigma \alpha \Delta_k,$$

ou seja, para todo  $\alpha \in (0, \bar{\alpha}_k]$ , onde

$$\bar{\alpha}_k = \frac{(\sigma - 1)\Delta_k}{C_k \|d_k\|^2}.$$

No Lema 3.1 demonstramos as desigualdades dadas por (3.35). Em particular, (3.35) nos assegura a validade da inequação  $\Delta_k \leq -\langle H_k d_k, d_k \rangle - \bar{c}\psi(x_k)$ . De acordo com o Algoritmo 5,  $\sigma \in (0, 1)$ , logo  $\sigma - 1 < 0$  e por isso

$$\bar{\alpha}_k = \frac{(\sigma - 1)\Delta_k}{C_k \|d_k\|^2} \geq -\frac{(\sigma - 1)}{C_k \|d_k\|^2} \langle H_k d_k, d_k \rangle + \frac{(1 - \sigma)}{C_k \|d_k\|^2} \bar{c}\psi(x_k) \geq -\frac{(\sigma - 1)}{C_k \|d_k\|^2} \langle H_k d_k, d_k \rangle,$$

onde a última desigualdade ocorre porque a segunda parcela do segundo membro da desigualdade acima é não-negativo. Por (3.44), isto é,  $\langle H_k v, v \rangle \geq \gamma \|v\|^2$  para todo  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $k \in \mathbb{N}$  e para algum  $\gamma > 0$ , ao considerarmos  $v = d_k$ , concluímos que

$$\bar{\alpha}_k \geq -\frac{(\sigma - 1)}{C_k \|d_k\|^2} \langle H_k d_k, d_k \rangle \geq -\frac{(\sigma - 1)}{C_k \|d_k\|^2} \gamma \|d_k\|^2 = (1 - \sigma) \frac{\gamma}{C_k},$$

onde a sequência  $(C_k)$  é limitada, devido a equação (3.54) e pelo fato de que  $c_k$  é limitado para todo  $k$  suficientemente grande, conforme (3.43). Concluímos então que existe um

número  $\bar{\alpha} > 0$ , que não depende de  $k$ , tal que

$$\alpha_k \geq \check{\alpha} > 0. \quad (3.55)$$

Das relações (3.34), (3.43) e (3.55), obtemos agora que, para todo  $k$  suficientemente grande,

$$\varphi(x_{k+1}; c_{k+1}) \leq \varphi(x_k; c_k) + \sigma \check{\alpha} \Delta_k. \quad (3.56)$$

Lembramos que vale (3.42). Portanto, a sequência  $(\varphi(x_k; c_k))_{k \in \mathbb{N}}$  é decrescente, a partir de um certo  $k$ . Então, ou ela é ilimitada inferiormente e vale (3.45), ou ela converge. Neste segundo caso, de (3.56) obtemos que

$$\varphi(x_{k+1}; c_{k+1}) - \varphi(x_k; c_k) \leq \sigma \check{\alpha} \Delta_k < 0.$$

Logo como a sequência  $(\varphi(x_k; c_k))_{k \in \mathbb{N}}$  converge, pelo Teorema do Confronto (Teorema 1.1),

$$\Delta_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \quad (3.57)$$

Donde, utilizando as desigualdades  $\Delta_k \leq -\langle H_k d_k, d_k \rangle - \bar{c}\psi(x_k)$  e (3.44), obtemos que  $-\langle H_k d_k, d_k \rangle - \bar{c}\psi(x_k) \leq -\gamma \|d_k\|^2 - \bar{c}\psi(x_k) \leq 0$ , onde a última desigualdade se deve ao fato da função  $\psi$  assumir apenas valores não-negativos e  $\gamma, \bar{c} > 0$ . Pelo Teorema do Confronto (Teorema 1.1), já que vale (3.57), concluímos que  $-\gamma \|d_k\|^2 - \bar{c}\psi(x_k) \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ , isso equivale a  $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma \|d_k\|^2 + \bar{c}\psi(x_k) = 0$ . Como

$$0 \leq \bar{c}\psi(x_k) \leq \gamma \|d_k\|^2 + \bar{c}\psi(x_k),$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ , podemos usar novamente o Teorema do Confronto para concluir que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{c}\psi(x_k) = 0$  o que implica em  $\psi(x_k) \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ . De maneira análoga concluímos que  $\|d_k\| \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Pelo fato de que  $(H_k)$  é limitada, segue que  $\lim_{k \rightarrow \infty} H_k d_k = 0$ .

Em particular, pela definição de  $\psi(\cdot)$  e usando o mesmo argumento acima, podemos escrever que

$$h(x_k) \rightarrow 0, \quad \max\{0, g_i(x_k)\} \rightarrow 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (k \rightarrow \infty). \quad (3.58)$$

Passando ao limite na relação (3.46) quando  $k \rightarrow \infty$ , considerando que  $H_k d_k \rightarrow 0$ , obtemos também que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\nabla f(x_k) + H_k d_k + (h'(x_k))^\top \lambda_{k+1} + (g'(x_k))^\top \mu_{k+1}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\nabla f(x_k) + (h'(x_k))^\top \lambda_{k+1} + (g'(x_k))^\top \mu_{k+1}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\nabla L)_x(x_k, \lambda_{k+1}, \mu_{k+1}). \end{aligned}$$

Para concluir a prova, falta verificar que se satisfaz, assintoticamente, a condição de complementaridade. De (3.33), isto é, pela igualdade  $\Delta_k = \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle - c_k \psi(x_k)$ , obtemos que

$$\langle \nabla f(x_k), d_k \rangle = \Delta_k + c_k \psi(x_k) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty),$$

porque  $\Delta_k \rightarrow 0$  e  $\psi(x_k) \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

Multiplicando (3.46) por  $d_k$  e utilizando a relação acima e (3.58), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \nabla f(x_k) + H_k d_k + (h'(x_k))^\top \lambda_{k+1} + (g'(x_k))^\top \mu_{k+1}, d_k \rangle \\ &= \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle + \langle H_k d_k, d_k \rangle + \langle (h'(x_k))^\top \lambda_{k+1}, d_k \rangle + \langle (g'(x_k))^\top \mu_{k+1}, d_k \rangle \\ &= \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle + \langle H_k d_k, d_k \rangle + \langle \lambda_{k+1}, h'(x_k) d_k \rangle + \langle \mu_{k+1}, g'(x_k) d_k \rangle, \end{aligned}$$

o que implica em

$$\langle \lambda_{k+1}, h'(x_k) d_k \rangle + \langle \mu_{k+1}, g'(x_k) d_k \rangle = -\langle \nabla f(x_k), d_k \rangle - \langle H_k d_k, d_k \rangle.$$

Como  $\langle \nabla f(x_k), d_k \rangle \rightarrow 0$  e  $H_k d_k \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$  pela expressão acima, é possível concluir que  $\langle \lambda_{k+1}, h'(x_k) d_k \rangle + \langle \mu_{k+1}, g'(x_k) d_k \rangle \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

Pelo fato de  $h(x_k) + h'(x_k) d_k = 0$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  e (3.58), segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h'(x_k) d_k = -\lim_{k \rightarrow \infty} h(x_k) = 0.$$

Lembrando que  $(\lambda_k)$  é limitada, concluimos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \lambda_{k+1}, h'(x_k) d_k \rangle = 0$ , isso é o suficiente para termos  $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mu_{k+1}, g'(x_k) d_k \rangle = 0$ , visto que

$$\langle \mu_{k+1}, g'(x_k) d_k \rangle = -\langle \nabla f(x_k), d_k \rangle - \langle H_k d_k, d_k \rangle - \langle \lambda_{k+1}, h'(x_k) d_k \rangle.$$

Agora, de (3.49), ou seja, de  $\mu_i^{k+1} (g_i(x_k) + \langle \nabla g_i(x_k), d_k \rangle) = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , obtemos que

$$\langle \mu_{k+1}, g(x_k) \rangle = -\langle \mu_{k+1}, g'(x_k) d_k \rangle \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \quad (3.59)$$

Como a sequência  $(\mu_{k+1})$  é não-negativa e limitada, da segunda relação em (3.58) segue que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} (\mu_i)_{k+1} g_i(x_k) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (3.60)$$

Portanto, se mostrarmos que

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} (\mu_i)_{k+1} g_i(x_k) \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad (3.61)$$

obteremos a última afirmação do teorema, isto é,

$$(\mu_i)_{k+1} g_i(x_k) \rightarrow 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Para este fim, suponhamos que (3.61) não seja válida, ou seja, que exista algum  $s \in \{1, \dots, m\}$ , uma subsequência  $(x_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$  e  $\delta > 0$  tais que  $(\mu_s)_{k_j+1} g_s(x_{k_j}) \leq -\delta$  para todo  $j$  suficientemente grande. Utilizando (3.59), segue-se que

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mu_{k+1}, g(x_k) \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m (\mu_{k+1})_i g_i(x_k) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m (\mu_{k_j+1})_i g_i(x_{k_j}),$$

onde acima, estamos considerando o produto interno canônico em  $\mathbb{R}^n$ . Prosseguindo os cálculos, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m (\mu_{k_j+1})_i g_i(x_{k_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} \left( (\mu_s)_{k_j+1} g_s(x_{k_j}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^m (\mu_{k_j+1})_i g_i(x_{k_j}) \right) \\ &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \left( -\delta + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^m (\mu_{k_j+1})_i g_i(x_{k_j}) \right) \\ &\leq -\delta + \limsup_{j \rightarrow \infty} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^m (\mu_{k_j+1})_i g_i(x_{k_j}) \\ &= -\delta + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^m \limsup_{j \rightarrow \infty} (\mu_{k_j+1})_i g_i(x_{k_j}). \end{aligned}$$

por (3.60) obtemos

$$0 \leq -\delta + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^m \limsup_{j \rightarrow \infty} (\mu_{k_j+1})_i g_i(x_{k_j}) \leq -\delta < 0.$$

A contradição acima prova (3.61), concluindo a demonstração das afirmações principais do teorema.

Para finalizar, notemos o seguinte: seja  $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$  qualquer ponto de acumulação da sequência  $((x_k, \lambda_{k+1}, \mu_{k+1}))_{k \in \mathbb{N}}$ . A análise acima mostra que  $\bar{x}$  é um ponto estacionário do problema e  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$  são multiplicadores de Lagrange associados. Como  $d_k \rightarrow 0$ ,  $0 \leq \alpha_k \leq 1$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  e  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ , temos que se  $x_{k_j} \rightarrow \bar{x}$  quando  $j \rightarrow \infty$  então  $x_{k_j+1} \rightarrow \bar{x}$ . Portanto, um ponto de acumulação de  $(x_k, \lambda_{k+1}, \mu_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$  também é ponto de acumulação de  $(x_{k+1}, \lambda_{k+1}, \mu_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ . Logo as afirmações sobre pontos de acumulação da sequência  $(x_k, \lambda_{k+1}, \mu_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$  valem para pontos de acumulação da sequência  $(x_k, \lambda_k, \mu_k)$ , já que eles coincidem.  $\square$

Com isso, concluímos a parte teórica de nosso trabalho. Nas seções a seguir apresentaremos os experimentos numéricos realizados tendo em vista os algoritmos 1-5 e, por fim, faremos uma conclusão do trabalho como um todo.

# Capítulo 4

## Experimentos Numéricos

Neste capítulo, vamos apresentar dois experimentos numéricos comparativos entre os algoritmos 2 e 3 capazes de minimizar funções escalares sujeitas a restrições de igualdade e entre os algoritmos 4 e 5 desenvolvidos para minimizar funções escalares sujeitas a restrições de igualdade e desigualdade. Além disso, apresentamos também um experimento numérico entre os algoritmos 2-4.

Para isso, vamos utilizar 4 problemas teste de otimização presentes em [20] que denotaremos por  $Eq1$ ,  $Eq2$ ,  $Ineq1$  e  $Ineq2$ , onde  $eq$  significa um problema com restrições de igualdade e  $ineq$  um problema com restrições de igualdade e desigualdade.

Para apresentar os problemas  $Eq1$  e  $Eq2$ , considere o problema de otimização

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n; h(x) = 0\},$$

onde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é a função objetivo e  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  é o campo vetorial das restrições de igualdade, dadas pelas funções coordenadas  $h_1, h_2, \dots, h_l$ . Para os problemas  $Ineq1$  e  $Ineq2$ , vamos considerar o problema

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n; h(x) = 0 \text{ e } g(x) \preceq 0\}$$

onde  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é o campo vetorial das restrições de desigualdade dadas pelas funções coordenadas  $g_1, g_2, \dots, g_m$ .

Nos problemas a seguir  $n$  é o número de variáveis,  $l$  é o número de restrições de igualdade,  $m$  é o número de restrições de desigualdade,  $f$  é a função de objetivo,  $h_i, i \in \{1, \dots, l\}$  é uma restrição de igualdade,  $g_i, i \in \{1, \dots, m\}$  é uma restrição de desigualdade,  $x_0$  é o chute inicial,  $f(x_0)$  é o valor que a função objetivo assume no chute inicial,  $\bar{x}$  é a solução e  $f(\bar{x})$  é o valor que a função objetivo assume na solução.

<b>Eq1 [20, p. 30]</b>
$n = 2 \quad l = 1 \quad x = (x_1, x_2)$ $\min f(x) := \ln(1 + x_1^2) - x_2$ sujeito a $x \in D = \{x \in \mathbb{R}^2; h_1(x) := (1 + x_1^2)^2 - 4 = 0\}$ $x_0 = (2, 2) \quad f(x_0) = \ln 5 - 2$ $\bar{x} = (0, \sqrt{3}) \quad f(\bar{x}) = -\sqrt{3}.$
<b>Eq2 [20, p. 99]</b>
$n = 5 \quad l = 3 \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ $\min f(x) := (x_1 - 1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^4 + (x_4 - x_5)^4$ sujeito a $x \in D = \{x \in \mathbb{R}^5; h_1(x) := x_1 + x_2^2 + x_3^3 - 2 - 3\sqrt{2} = 0,$ $h_2(x) := x_2 - x_3^2 + x_4 + 2 - 2\sqrt{2} = 0, h_3(x) := x_1x_5 - 2 = 0\}$ $x_0 = (2, 2, 2, 2, 2) \quad f(x_0) = 1$ $\bar{x} = (1.191127, 1.362603, 1.472818, 1.635017, 1.679081) \quad f(\bar{x}) = 0.0787768209.$
<b>Ineq1 [20, p. 37]</b>
$n = 2 \quad l = 1 \quad m = 1 \quad x = (x_1, x_2)$ $\min f(x) := (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$ sujeito a $x \in D = \{h_1(x) := x_1 - 2x_2 + 1 = 0, g_1(x) := 0.25x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0\}$ $x_0 = (2, 2) \quad f(x_0) = 1$ $\bar{x} = (0.5 \cdot (\sqrt{7} - 1), 0.25 \cdot (\sqrt{7} + 1)) \quad f(\bar{x}) = 9 - 2.875\sqrt{7}.$
<b>Ineq2 [20, p. 92]</b>
$n = 4 \quad l = 1 \quad m = 9 \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ $\min f(x) := x_1x_4(x_1 + x_2 + x_3) + x_3$ sujeito a $x \in D = \{x \in \mathbb{R}^4; h_1(x) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 40 = 0, g_1(x) := 25 - x_1x_2x_3x_4 \leq 0,$ $g_{2k}(x) := 1 - x_k \leq 0, g_{2k+1}(x) := x_k - 5 \leq 0, k = 1, 2, 3, 4\}$ $x_0 = (1, 5, 5, 1) \quad f(x_0) = 16$ $\bar{x} = (1, 4.7429994, 3.8211503, 1.3794082) \quad f(\bar{x}) = 17.0140173.$

Quadro 4.1: Problemas teste.

Para os experimentos numéricos a seguir, os códigos foram implementados na linguagem de programação Julia e estão livremente disponibilizados em <https://github.com/wmd9617/PQS>. Além disso, tais experimentos foram realizados em um processador Intel Core i3 de 12<sup>a</sup> geração com 2.20 Ghz, 16 GB de RAM e sistema operacional Windows. Gostaríamos de destacar que, no primeiro experimento, utilizamos no passo 4 do Algoritmo 3 a família de Lagrangianas aumentadas da forma

$$H_k = (\nabla^2 L)_{xx}(x_k, \lambda_k; c_k) = \nabla^2 f(x_k) + \sum_{i=1}^l (\lambda_k)_i \nabla^2 h_i(x_k) + c_k (h'(x_k))^\top h'(x_k)$$

e nos passos 4 e 5 dos algoritmos 4 e 5, respectivamente,

$$H_k = (\nabla^2 L)_{xx}(x_k, \lambda_k; c_k) + \sum_{i=1}^m (c_k \nabla g_i(x_k) (\nabla g_i(x_k))^\top + \max\{0, c_k g_i(x_k) + (\mu_k)_i\} \nabla^2 g_i(x_k)),$$

onde  $c_k$  é o menor termo da sequência  $(d_k)$  dada pela fórmula de recorrência  $d_0 = 10^{-4}$  e  $d_{k+1} = 2 \cdot d_k$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$  de modo que  $H_k$  seja definida positiva. Observe que o Teorema 2.17 garante que a sequência  $c_k$  está bem definida. Já no terceiro experimento,  $H_k$  é a hessiana parcial, com respeito a  $x$ , da Lagrangiana clássica do respectivo problema, ou seja,  $H_k = \nabla^2 f(x_k) + \sum_{i=1}^l (\lambda_k)_i \nabla^2 h_i(x_k)$  para o Algoritmo 3 e  $H_k = \nabla^2 f(x_k) + \sum_{i=1}^l (\lambda_k)_i \nabla^2 h_i(x_k) + \sum_{i=1}^m (\mu_k)_i \nabla^2 g_i(x_k)$ , no algoritmo 4.

O Algoritmo 5 foi empregado com os seguintes parâmetros:  $\bar{c} = 1.0$ ;  $\theta = 0.5$  e  $\sigma = 0.1$ . Em todos os algoritmos utilizamos como tolerância  $\varepsilon = 10^{-6}$ , exceto no terceiro experimento, e 100 como sendo o número máximo de iteradas.

## 4.1 Experimento 1 - Comparação com a literatura

O experimento numérico a seguir consiste em utilizar os problemas teóricos em seus respectivos algoritmos para verificar se no chute inicial dado, as sequências geradas convergem para a solução apontada no Quadro 4.1. As tabelas a seguir mostram os resultados obtidos:

Problema	Iteradas		Tempo de CPU (segundos)		Erro relativo	
	Alg. 2	Alg.3	Alg. 2	Alg. 3	Alg. 2	Alg. 3
<i>Eq1</i>	7	7	$1.40 \cdot 10^{-3}$	$3.36 \cdot 10^{-2}$	$1.21 \cdot 10^{-13}$	$7.38 \cdot 10^{-14}$
<i>Eq2</i>	6	7	$1.50 \cdot 10^{-3}$	$2.99 \cdot 10^{-2}$	$7.45 \cdot 10^{-7}$	$7.58 \cdot 10^{-7}$

Tabela 4.1: Resultados referentes aos problemas com restrições de igualdade.

Problema	Iteradas		Tempo de CPU (segundos)		Erro relativo	
	Alg. 4	Alg.5	Alg. 4	Alg. 5	Alg. 4	Alg. 5
<i>Ineq1</i>	5	5	$1.99 \cdot 10^{-2}$	$2.69 \cdot 10^{-2}$	$2.54 \cdot 10^{-10}$	$2.54 \cdot 10^{-10}$
<i>Ineq2</i>	5	4	$2.75 \cdot 10^{-2}$	$2.50 \cdot 10^{-2}$	$4.12 \cdot 10^{-7}$	$4.44 \cdot 10^{-7}$

Tabela 4.2: Resultados referentes aos problemas com restrições de igualdade e desigualdade.

Observamos que os tempos de CPU das tabelas 4.1 e 4.2 são as médias aritméticas dos tempos medidos na resolução dos respectivos problemas em 10 tentativas. Além disso, pelo fato de [20] não fornecer nenhuma informação sobre  $\lambda_0$  e  $\mu_0$ , que poderiam ser utilizados como ponto inicial, primeiramente foi-se utilizado  $\lambda_0 = rand(l)$  e  $\mu_0 = rand(m)$  onde  $rand(\cdot)$  é uma função da linguagem de programação Julia que permite, neste caso, criar vetores com  $l$  e  $m$  entradas, respectivamente, pseudo aleatórias entre 0 e 1. Os resultados

das tabelas acima foram obtidos ao tomarmos os seguintes valores de  $\lambda_0$  e  $\mu_0$  resultantes de nossa experiência numérica com os algoritmos.

Nos problemas *Eq1* e *Eq2*, temos que  $\lambda_0 = 0.5270047724678996$  e

$$\lambda_0 = (0.6974324677468223, 0.7271112513868081, 0.726677127365042),$$

respectivamente. Da mesma forma, no problema *Ineq1* usamos  $\lambda_0 = 0.8694332878498112$  e  $\mu_0 = 0.9563522782659559$ . Por fim, em *Ineq2* utilizamos  $\lambda_0 = 0.5947921761940419$  e

$$\begin{aligned} \mu_0 = & (0.40481510900654827, 0.6838291851911872, 0.6681318379331568, \\ & 0.8682434625743125, 0.464369031397025, 0.09323456813692521, \\ & 0.7188541311176085, 0.5224078291533728, 0.41326594801744576). \end{aligned}$$

Todos os algoritmos em geral conseguiram uma boa aproximação da solução dada no Quadro 4.1 e foram muito similares em termos de número de iteradas. Comparando os algoritmos 2 e 3 percebemos que utilizar o método PQS (Algoritmo 3) gastou mais tempo do que aplicar o método de Newton no sistema de Lagrange (Algoritmo 2) que também obteve a melhor aproximação da solução fornecida. Isso se deve, principalmente, pela busca de um parâmetro  $c_k$  que faça  $H_k$  ser definida positiva. Os algoritmos 4 e 5 possuem tempos e erros relativos similares.

## 4.2 Experimento 2 - Perfis de desempenho

Os perfis de desempenho são uma ferramenta de análise comparativa entre algoritmos proposta por [5]. Um perfil de desempenho de um algoritmo, segundo os autores, é a função de distribuição (cumulativa) de uma métrica de desempenho, como por exemplo, número de iterações, tempo de CPU ou quantidade de avaliação de funções. Observamos que as análises são feitas a partir do gráfico dos perfis de desempenho.

A partir desses gráficos, podemos tirar conclusões diretas acerca da eficiência e robustez de um algoritmo, ou seja, podemos identificar qual algoritmo tem o melhor desempenho no geral e qual tem a capacidade de resolver a maior porcentagem de problemas.

Nesse experimento vamos utilizar os perfis de desempenho para comparar os algoritmos implementados com respeito ao número de iterações e tempo de CPU. Para isso, dados os chutes iniciais, utilizados no primeiro experimento, vamos gerar novos pontos iniciais fazendo  $(x_0 + cu_k, \lambda_0 + cv_k)$  ou  $(x_0 + cu_k, \lambda_0 + cv_k, \mu_0 + cw_k)$  onde os valores de  $c$  utilizados serão mostrados no títulos das figuras a seguir. Além disso,  $u_k = rand(rng, n)$ ,  $v_k = rand(rng, l)$  e  $w_k = rand(rng, m)$  em que  $rand(rng, n)$  em Julia gera um vetor pseudo aleatório com  $n$  entradas usando a semente  $rng = MersenneTwister(1234)$  para garantir que os problemas testados sejam os mesmos (para mais detalhes, consulte o endereço eletrônico <https://docs.julialang.org/en/v1/stdlib/Random/>). Com isso,

podemos gerar uma quantidade arbitrária de chutes iniciais numa vizinhança dos pontos  $x_0$  utilizados no experimento anterior.

Os resultados a seguir sˆao referentes a 20 problemas, onde o eixo horizontal está em escala logarmica de base 2 e seus valores representam o fator de quanto um algoritmo demandou a mais do que o melhor, em relaça˜o a alguma métrica de desempenho, para resolver um determinado problema.

Em relaça˜o ao problema *Eq1* obtemos os seguintes perfis de desempenho considerando  $H_k$  a hessiana, com respeito a  $x$ , da Lagrangiana aumentada.

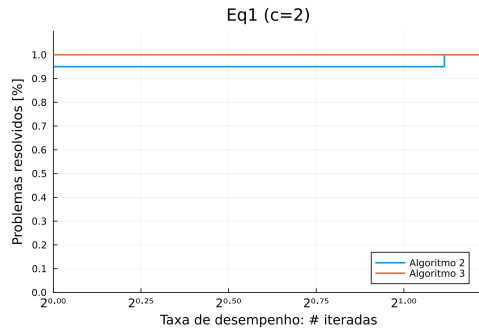


Figura 4.1: Perfil de desempenho do problema *Eq1* com respeito ao número de iteradas para  $c = 2$ .

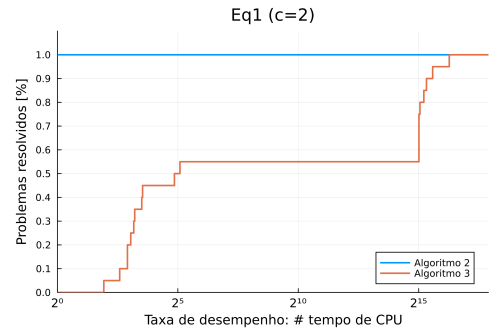


Figura 4.2: Perfil de desempenho do problema *Eq1* em relaça˜o ao tempo de CPU para  $c = 2$ .

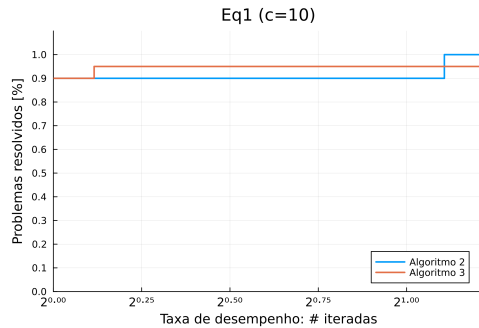


Figura 4.3: Perfil de desempenho do problema *Eq1* com respeito ao número de iteradas para  $c = 10$ .

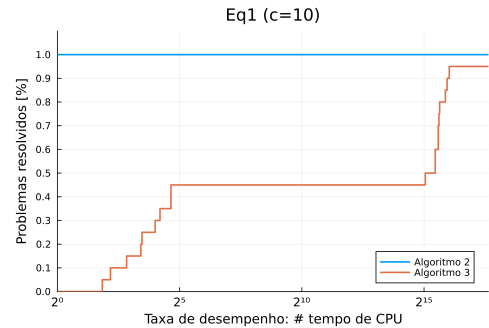


Figura 4.4: Perfil de desempenho do problema *Eq1* em relaça˜o ao tempo de CPU para  $c = 10$ .

De acordo com as figuras 4.1 e 4.2 ambos os algoritmos resolveram todos os problemas, onde o Algoritmo 3 resolveu todos os problemas com uma quantidade menor de iteradas mas utilizou mais tempo. Contudo, as figuras 4.3 e 4.4 mostram que apenas o Algoritmo 2 resolveu 100% dos problemas utilizando mais tempo de CPU, enquanto que o Algoritmo 3 resolveu 95%. Isso foi devido a impossibilidade de encontrar um  $c_k$  para que a hessiana, com respeito a  $x$  da Lagrangiana aumentada seja definida positiva. Isso ocorre pois embora, novamente, o Teorema 2.17 garanta a boa definiça˜o da sequência  $c_k$ , por limitaça˜es da máquina apenas os primeiros 62 termos da sequência  $d_k$  podem ser utilizados visto que na linguagem de programaça˜o Julia  $d_{63} = 10^{-4} \cdot 2^{63} \approx -9.22 \cdot 10^{14}$  onde tal fenmeno

é conhecido como *overflow* (para mais detalhes consulte [12]). Assim verificamos que na prática tal teorema está garantindo a positividade de  $H_k$  para valores mais elevados do que os que podem ser representados pelo computador. Isso sugere que o Algoritmo 2 é mais eficiente e robusto de maneira geral.

Em relação ao problema *Eq2* obtemos os seguintes perfis de desempenho considerando  $H_k$  a hessiana, com respeito a  $x$ , da Lagrangiana aumentada.

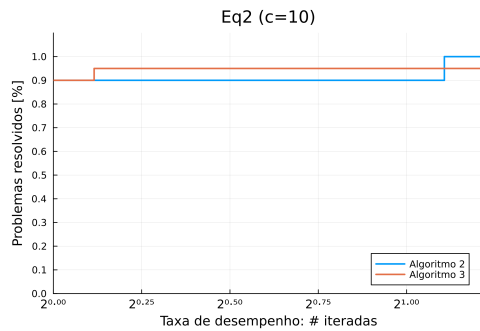


Figura 4.5: Perfil de desempenho do problema *Eq2* com respeito ao número de iteradas para  $c = 10$ .

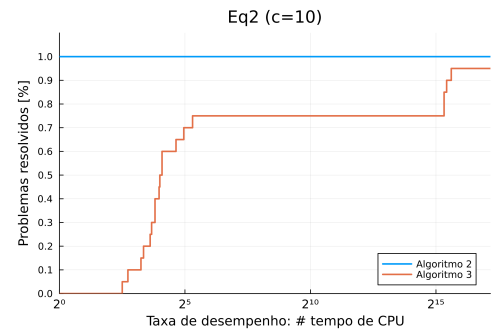


Figura 4.6: Perfil de desempenho do problema *Eq2* em relação ao tempo de CPU para  $c = 10$ .

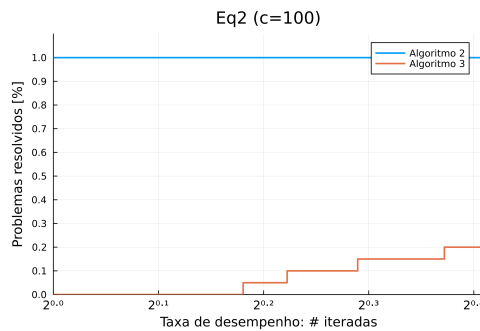


Figura 4.7: Perfil de desempenho do problema *Eq2* com respeito ao número de iteradas para  $c = 100$ .

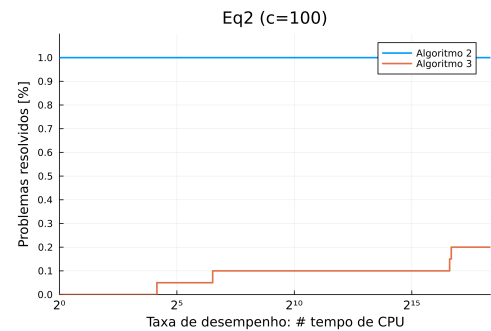


Figura 4.8: Perfil de desempenho do problema *Eq2* em relação ao tempo de CPU para  $c = 100$ .

De acordo com as figuras 4.5-4.8, o Algoritmo 2 foi superior ao Algoritmo 3 em número de iteradas, tempo de CPU, eficiência e robustez no problema *Eq2*. Os problemas não resolvidos do Algoritmo 3 se devem, novamente impossibilidade de encontrar um  $c_k$  para que a hessiana, com respeito a  $x$  da Lagrangiana aumentada seja definida positiva,

Agora, vamos analisar os perfis de desempenhos dos problemas com restrições de igualdade e desigualdade considerando  $H_k$  a hessiana, com respeito a  $x$ , da Lagrangiana clássica.

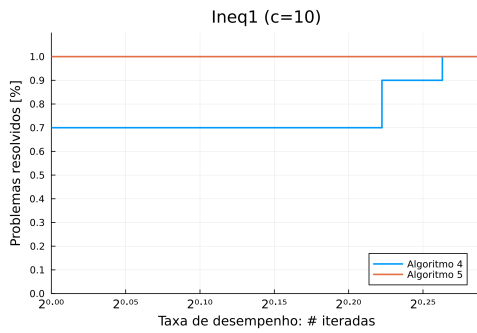


Figura 4.9: Perfil de desempenho do problema *Ineq1* com respeito ao número de iteradas para  $c = 10$ .

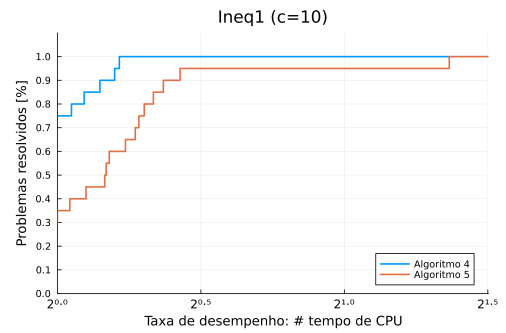


Figura 4.10: Perfil de desempenho do problema *Ineq1* em relação ao tempo de CPU para  $c = 10$ .

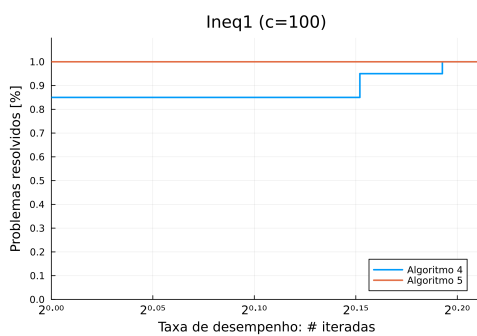


Figura 4.11: Perfil de desempenho do problema *Ineq1* com respeito ao número de iteradas para  $c = 100$ .

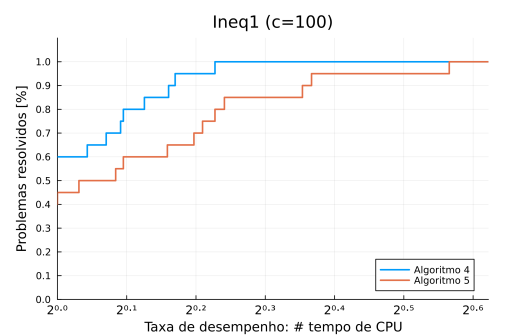


Figura 4.12: Perfil de desempenho do problema *Ineq1* em relação ao tempo de CPU para  $c = 100$ .

As figuras 4.9-4.12 mostram que o Algoritmo 5 resolve os problemas com menos iteradas, porém utiliza mais tempo de CPU. O desempenho dos algoritmos 4 e 5 diminuíram drasticamente quando tomamos  $H_k$  como a hessiana com respeito a  $x$  da Lagrangiana aumentada porque, mais uma vez, não foi possível encontrar  $c_k$  de modo que a matriz  $H_k$  seja definida positiva. O mesmo ocorre em *Ineq2*:

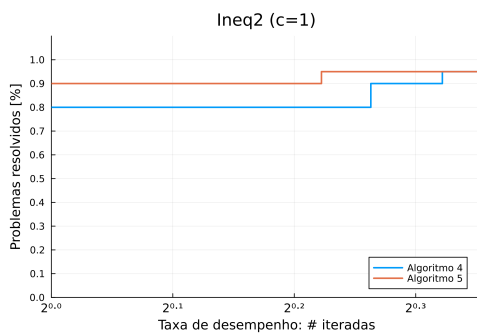


Figura 4.13: Perfil de desempenho do problema *Ineq2* com respeito ao número de iteradas para  $c = 1$ .

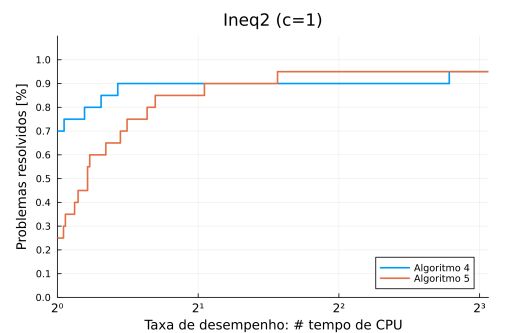


Figura 4.14: Perfil de desempenho do problema *Ineq2* em relação ao tempo de CPU para  $c = 1$ .

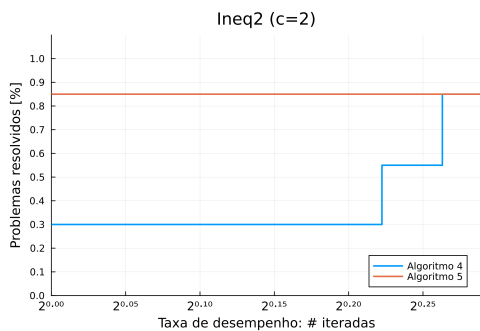


Figura 4.15: Perfil de desempenho do problema *Ineq2* com respeito ao número de iterações para  $c = 2$ .

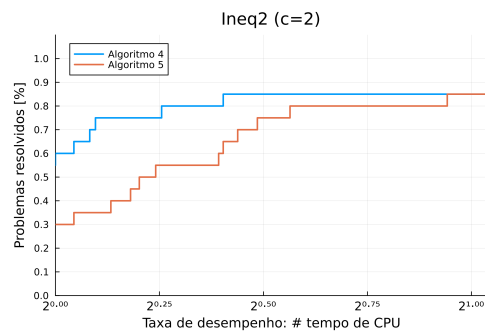


Figura 4.16: Perfil de desempenho do problema *Ineq2* em relação ao tempo de CPU para  $c = 2$ .

Os Algoritmos 4 e 5 mostraram-se muito sensíveis a perturbações, visto que apenas para valores de  $c$  pequenos houve convergência dos problemas como podemos observar das figuras 4.9-4.12, além disso o desempenho do Algoritmo 5 foi superior em número de iterações mas inferior no tempo. O mesmo experimento foi feito para valores de  $c$  menores e maiores, porém a quantidade de problemas resolvidos de ambos os algoritmos diminuía, na medida em que  $c$  diminuía ou aumentava.

### 4.3 Experimento 3 - Ordem de convergência

Para calcularmos a ordem de convergência computacionalmente, utilizamos a seguinte noção.

**Definição 4.1.** *Seja  $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$  uma sequência gerada por um método que converge para um vetor  $\xi \in \mathbb{R}^n$  e seja  $e_k = x_k - \xi$  o erro na iteração  $k$ .*

*Se existir  $p > 1$  e uma constante  $C > 0$ , tais que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|e_{k+1}\|}{\|e_k\|^p} = C$$

*então  $p$  é chamada de **ordem de convergência** da sequência  $(x_k)$  e  $C$  é a **constante assintótica de erro**. Quando  $p = 1$  e  $C = 0$  dizemos que o método possui **convergência superlinear**. Caso  $p = 2$  e  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \|e_{k+1}\| / \|e_k\| \leq K$  para algum  $K > 0$  fixado, então dizemos que o método tem **convergência quadrática**<sup>1</sup>.*

Assim, nas condições da Definição 4.1, para um  $k$  suficientemente grande

$$\|e_{k+1}\| \approx C \cdot \|e_k\|^p \quad \text{e} \quad \|e_k\| \approx C \cdot \|e_{k-1}\|^p$$

<sup>1</sup>Adaptado de [3, p. 42] e [12, p. 65].

o que implica em, supondo que  $\|e_k\|$  e  $\|e_{k-1}\|$  sejam não-nulos,

$$\frac{\|e_{k+1}\|}{\|e_k\|} \approx \left( \frac{\|e_k\|}{\|e_{k-1}\|} \right)^p,$$

logo,

$$p \approx \frac{\log(\|e_{k+1}\| / \|e_k\|)}{\log(\|e_k\| / \|e_{k-1}\|)} := p_k.$$

Assim definimos a sequência  $(p_k)$  tal que  $p_k \rightarrow p$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Utilizaremos  $p_k$  para estimar a ordem de convergência dos algoritmo 4 visto que tomamos  $p_k = 1$  nos algoritmos 2 e 3. Consideramos a sequência  $(c_k)$  tal que  $c_k = \|e_{k+1}\| / \|e_k\|^{p_k}$  para estimar as constantes assintóticas de erro dos algoritmos 2-4, pois  $c_k \rightarrow C$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Vamos comparar as estimativas obtidas com a taxa superlinear/quadrática prevista no Teorema 2.15, no comentário do Algoritmo 3 e no Teorema 3.1, respectivamente.

Para este fim, estimamos computacionalmente a taxa de convergência dos algoritmos 2 e 3 utilizando o problema *Eq1*, nestes algoritmos, tomamos  $x_0 = (5, 5)$  e  $\lambda_0 = 5.270047724678996$  como ponto inicial. Para o algoritmo 4 utilizamos o problema *Ineq1* e o ponto inicial  $x_0 = (600(\sqrt{7} - 1), 350(\sqrt{7} + 1))$ ,  $\lambda_0 = 869.4332878498112$  e  $\mu_0 = 956.3522782659559$ . Em todos os algoritmos consideramos  $10^{-6}$  como tolerância.

Assim, obtemos o seguinte resultado.

	Algoritmo 2	Algoritmo 3	Algoritmo 4	
$k$	$c_k$	$c_k$	$p_k$	$c_k$
2	$7.45 \cdot 10^{-1}$	$7.46 \cdot 10^{-1}$	$2.23 \cdot 10^0$	$8.29 \cdot 10^{-5}$
3	$7.69 \cdot 10^{-1}$	$7.72 \cdot 10^{-1}$	$1.00 \cdot 10^0$	$4.93 \cdot 10^{-1}$
4	$7.70 \cdot 10^{-1}$	$7.76 \cdot 10^{-1}$	$1.00 \cdot 10^0$	$4.87 \cdot 10^{-1}$
5	$7.66 \cdot 10^{-1}$	$7.82 \cdot 10^{-1}$	$1.00 \cdot 10^0$	$4.77 \cdot 10^{-1}$
6	$7.46 \cdot 10^{-1}$	$7.85 \cdot 10^{-1}$	$1.01 \cdot 10^0$	$4.60 \cdot 10^{-1}$
7	$6.63 \cdot 10^{-1}$	$7.57 \cdot 10^{-1}$	$1.02 \cdot 10^0$	$4.32 \cdot 10^{-1}$
8	$7.22 \cdot 10^{-1}$	$6.00 \cdot 10^{-1}$	$1.05 \cdot 10^0$	$3.90 \cdot 10^{-1}$
9	$4.32 \cdot 10^{-1}$	$1.05 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$	$2.21 \cdot 10^{-1}$
10	$9.46 \cdot 10^{-2}$	$1.87 \cdot 10^{-1}$	$1.12 \cdot 10^0$	$2.90 \cdot 10^{-1}$
11	$1.07 \cdot 10^{-2}$	$4.91 \cdot 10^{-2}$	$1.46 \cdot 10^0$	$2.01 \cdot 10^{-1}$
12	$1.34 \cdot 10^{-4}$	$2.69 \cdot 10^{-3}$	$1.76 \cdot 10^0$	$2.02 \cdot 10^{-1}$
13	—	$9.84 \cdot 10^{-6}$	$1.95 \cdot 10^0$	$2.79 \cdot 10^{-1}$
14	—	—	$2.08 \cdot 10^0$	$4.91 \cdot 10^{-1}$

Tabela 4.3: Estimativas para a ordem de convergência e constante assintótica de erro.

Com os resultados acima, observamos que as sequências geradas pelos Algoritmo 2 e 3 obtiveram  $c_k \rightarrow 0$  quando fixamos  $p_k = 1$ . Isso indica que os métodos implementados

convergem superlinearmente. Estes resultados estão de acordo com as observações feitas sobre o Algoritmo 2 na seção 3.2 e o Teorema 3.1.

Em relação ao Algoritmo 4,  $p_k$  se aproximou de 2 e  $c_k$  manteve-se limitado. Isso sugere, que para este problema, o método convergiu quadraticamente. Este comportamento está de acordo com o Teorema 3.1, desde que a derivadas segundas das funções  $f, g, h$  sejam Lipschitz-contínuas numa vizinhança da solução  $\bar{x}$ .

Portanto, em termos de taxa de convergência, os algoritmos 2-4 se comportaram conforme a teoria.

# Capítulo 5

## Conclusões

Este trabalho teve como objetivo estudar teoricamente e numericamente o método da Programação Quadrática Sequencial. Uma pesquisa bibliográfica foi feita para compreender as condições de otimalidade e métodos de otimização essenciais para uma implementação do método. Além disso, um estudo numérico foi realizado visando testar a eficiência e robustez dos algoritmos implementados além de verificarmos aspectos teóricos acontecendo na prática computacional.

Os resultados dos experimentos numéricos indicam que os algoritmos implementados conseguiram resolver de forma satisfatória os problemas de otimização propostos com um desempenho considerável, embora a eficiência e robustez do Algoritmo 3 tenha caído drasticamente ao resolver problemas com um número considerável de restrições de igualdade. Em termos de taxa de convergência, os algoritmos 2-4 se comportaram de acordo com a teoria.

Dessa forma, o trabalho contribuiu para constituir-se um material teórico introdutório para os interessados sobre o tema, assim como no fornecimento de experimentos numéricos confirmando na prática alguns pontos da teoria discutida.

Como limitação deste estudo, aponta-se que os testes numéricos se limitaram a problemas com uma quantidade pequena de restrições. Isso se deve ao fato de que, em nossas experiências numéricas, os algoritmos implementados não conseguiram resolver problemas com um número grande de restrições advindos de aplicações práticas. Uma das causas foi a dificuldade de encontrar uma matriz definida positiva para o subproblema de programação quadrática a partir da Lagrangiana aumentada. Os resultados teóricos presentes na literatura limitam-se apenas a garantir apenas a existência de tal matriz, sem se preocupar com os algoritmos para determiná-la.

Para trabalhos futuros, sugere-se um estudo mais aprofundado da Programação Quadrática, sobretudo do problema dual. Não obstante, um caminho natural para o prosseguimento da pesquisa é explorar métodos de globalização via regiões de confiança, estudar o efeito Maratos e métodos para evitá-lo.

# Referências Bibliográficas

- [1] A. A. Ribeiro; E. W. Karas. *Otimização contínua: aspectos teóricos e computacionais*. Cengage Learning, São Paulo, 1<sup>a</sup> edição, 2013.
- [2] A. Izmailov; M. Solodov. *Otimização: Condições de Otimalidade, elementos de análise convexa e de dualidade*. IMPA, Rio de Janeiro, 4<sup>a</sup> edição, 2020.
- [3] A. Izmailov; M. Solodov. *Otimização - volume 2: Métodos computacionais*. IMPA, Rio de Janeiro, 3<sup>a</sup> edição, 2018.
- [4] A. Vardi. *A trust region algorithm for equality constrained minimization: convergence properties and implementation*. SIAM Journal of Numerical Analysis, 22, 1985.
- [5] E. D. Dolan; J. J. Moré. *Benchmarking optimization software with performance profiles*. Mathematical Programming, 91, 2002.
- [6] E. L. Lima. *Curso de Análise*, volume 1. IMPA, Rio de Janeiro, 1<sup>a</sup> edição, 2014.
- [7] E. L. Lima. *Curso de Análise*, volume 2. IMPA, Rio de Janeiro, 1<sup>a</sup> edição, 2014.
- [8] E. L. Lima. *Álgebra Linear*. IMPA, Rio de Janeiro, 1<sup>a</sup> edição, 2014.
- [9] E. L. Lima. *Espaços Métricos*. IMPA, Rio de Janeiro, 1<sup>a</sup> edição, 2014.
- [10] F. H. Clarke. *Optimization and nonsmooth analysis*. SIAM, 1990.
- [11] J. Nocedal; S. J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer, 2<sup>a</sup> edição, 2006.
- [12] M. A; Ruggiero; V. L. da R. Lopes. *Cálculo numérico aspectos teóricos e computacionais*. Pearson, São Paulo, 2<sup>a</sup> edição, 2011.
- [13] M. J. D. Powell. *Algorithms for nonlinear constraints that use lagrangian functions*. Mathematical Programming, 14, 1978.
- [14] P. T. Boggs; J. W. Tolle. *Sequential Quadratic Programming*. Acta Numerica, 4, 2008.

- [15] R.B. Wilson. *A simplicial algorithm for concave programming*. Tese de PhD. Graduate School of Business Administration, Harvard University. 1963.
- [16] R. H. Byrd; R. B. Schnabel; G. A. Schultz. *A trust region algorithm for nonlinearly constrained optimization*. SIAM Journal on Numerical Analysis, 24, 1987.
- [17] S.P.Han. *Superlinearly convergent variable metric algorithms for general nonlinear programming problems*. Mathematical Programming, 11, 1976.
- [18] S.P.Han. *A globally convergent method for nonlinear programming*. Journal of Optimization Theory and Applications, 22, 1977.
- [19] U. M. Garcia-Polamares; O. L. Mangasarian. *Superlinearly convergent quasi-Newton methods for nonlinearly constrained optimization problems*. Mathematical Programming, 11, 1976.
- [20] W. Hock; K. Schittkowski. *Test examples for nonlinear programming codes*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer-Verlag, 1<sup>a</sup> edição, 1981.