



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA - UESB
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Eduardo Tavares Freire

**Um Estudo dos Teoremas da Aplicação Aberta e do
Gráfico Fechado em Análise Funcional**

VITÓRIA DA CONQUISTA

2026



Eduardo Tavares Freire

UM ESTUDO DOS TEOREMAS DA APLICAÇÃO ABERTA E DO GRÁFICO
FECHADO EM ANÁLISE FUNCIONAL

Monografia apresentada à Banca Examinadora
da Universidade Estadual do Sudoeste da
Bahia, como parte dos requisitos para obtenção
do título de Licenciatura em Matemática sob
orientação do Prof. Me. Lucas Venâncio Da
Silva Santos

VITÓRIA DA CONQUISTA

2026

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA - UESB
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

COORDENAÇÃO DO CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

A monografia “Um Estudo dos Teoremas da Aplicação Aberta e do Gráfico Fechado em Análise Funcional”, apresentada e defendida por EDUARDO TAVARES FREIRE, matrícula 202210623, foi aprovada pela Banca Examinadora com conceito “”, recebendo o número .

Vitória da Conquista, 29 de janeiro de 2026

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Me. Lucas Venâncio Da Silva Santos
Orientador.

Prof. Dr. Genilson Soares De Santana
Convidado 1

Prof. Dr. Ricardo Freire da Silva
Convidado 2

Agradecimentos

“É difícil entender o universo se você estuda apenas um planeta.”

(Miyamoto Musashi, みやもと むさし).

Abro o texto com essa frase pois creio que ela resume muito como enxergo os estudos em matemática e outras áreas de conhecimento. Nessa jornada, conheci amigos e ganhei irmãos de orientação, aos quais agradeço de coração por todo o apoio e conselhos.

Creio que tive a oportunidade de ter professores e professoras referências que me guiaram e me guiam nessa jornada para a minha formação como professor de matemática e pesquisador. Poderia citar todos os professores que foram importantes nessa minha trajetória, mas creio que seria uma lista grande.

Em especial, vou mencionar dois em específico que não foram apenas professores, foram *senseis*: Lucas Venâncio e Gerson Farias. Esses contribuíram muito na minha identidade profissional e desejo levar comigo os mais importantes ensinamentos deles. Participaram de muitos momentos importantes da minha graduação e me apoiaram em todas as minhas decisões. Sou extremamente grato por tê-los em minha jornada. Esses são alguns dos detalhes do porquê considero-os *senseis*. Agradeço a minha família, Irismere minha mãe e meu pai Edilson, Meus irmãos Tiago e Gustavo que sempre me apoiam e me ajudaram muito nesse meu tempo como graduando. Agradeço desde já a todos que leram esse trabalho, e aos também membros da banca examinadora Dr. Genilson Soares, e Dr. Ricardo Freire que leram e contribuíram para a qualidade deste trabalho.

“Obrigado pela leitura!”

Resumo

O Teorema da Aplicação Aberta (TAA) é um dos teoremas clássicos da Análise Funcional. Ele garante que se um operador linear é definido entre dois Espaços de Banach e esse é contínuo e sobrejetor, então é uma aplicação aberta. Para o (TAA), a sobrejetividade do operador é essencial, pois toda aplicação linear aberta entre Espaços Normados é necessariamente sobrejetora. Outro resultado clássico é o Teorema do Gráfico Fechado (TGF) afirma que em Espaços de Banach um operador linear contínuo tem seu gráfico fechado, valendo também a recíproca sob as mesmas hipóteses. Temos, portanto, como objetivo abordar um estudo sobre todas as definições e teoremas principais que contribuem para compreender estes resultados importantes. É relevante ressaltar que o presente texto introduz estes teoremas importantes para o estudo de operadores com aplicações clássicas presentes no estudo da Análise Funcional. Queremos trazer exemplos de aplicações, comentar com compreensibilidade sobre os teoremas, abordar os pesquisadores que contribuíram para o (TAA) e o (TGF). Esta pesquisa adota uma abordagem qualitativa, com o objetivo de levantar tópicos teóricos importantes e o estudo dos teoremas da Aplicação Aberta e do Gráfico Fechado na Análise Funcional, com foco na compreensão de suas demonstrações, inter-relações e aplicações com embasamento teórico de [3] [12] [13] [16] [6] [2] [5] [18] entre outros referenciais teóricos citados no trabalho.

Abstract

The Open Mapping Theorem (OMT) is one of the classical theorems of Functional Analysis. It guarantees that if a linear operator is defined between two Banach Spaces and is continuous and surjective, then it is an open mapping. For the OMT, the surjectivity of the operator is essential, as every open linear mapping between normed spaces is necessarily surjective. Another classic result is the Closed Graph Theorem (CGT), which states that for Banach Spaces, a continuous linear operator has a closed graph, with the converse also holding under the same hypotheses. Our objective, therefore, is to address a study of all the main definitions and theorems that contribute to the understanding of these important results. It is relevant to emphasize that this text introduces these important theorems for the study of operators with classical applications present in the study of Functional Analysis. We want to provide examples of applications, comment comprehensively on the theorems, and address the researchers who contributed to the OMT and the CGT. This research adopts a qualitative approach, with the objective of surveying important theoretical topics and the study of the Open Mapping and Closed Graph Theorems in Functional Analysis, focusing on understanding their proofs, interrelations, and applications, it is theoretically grounded in [\[3\]](#) [\[12\]](#) [\[13\]](#) [\[16\]](#) [\[6\]](#) [\[2\]](#) [\[5\]](#) [\[18\]](#), among other theoretical references cited in the work.

Sumário

Introdução	ii
1 Espaços Normados e Espaços Métricos	1
1.1 Espaços Normados	1
1.2 Espaços Métricos	6
2 Tópicos de Topologia em Espaços Normados	11
2.1 Conjuntos Abertos	11
2.2 Conjuntos Fechados	13
2.3 Sequência de Cauchy	20
3 Espaços de Banach	22
3.1 Espaços de Banach	22
4 Operadores Lineares Contínuos	33
4.0.1 Caracterizações dos operadores lineares contínuos	34
5 Teorema da Aplicação Aberta e do Gráfico Fechado	39
5.1 Conceitos Fundamentais	39
5.2 Teorema da Aplicação aberta.	47
5.3 Teorema do Gráfico Fechado	50
5.4 Equivalência do Teorema da Aplicação Aberta e do Gráfico Fechado.	52
5.4.1 Teorema da Aplicação Aberta implica o Teorema do Gráfico Fechado.	53
5.4.2 Teorema do Gráfico Fechado implica o Teorema da Aplicação Aberta.	53
5.5 O Caso Bilinear para a Aplicação Aberta e Para o Gráfico Fechado.	63

Considerações Finais	69
Referências Bibliográficas	72

Introdução

A Análise Funcional é uma das áreas mais influentes no estudo de matemática avançada, sendo uma disciplina importante nos cursos de pós-graduação em matemática pura e aplicada. Estende os conceitos do cálculo e da Álgebra Linear para contextos de dimensão infinita, fornecendo estruturas importantes para a investigação, por exemplo, de Equações Diferenciais. No cerne desta disciplina encontram-se os espaços de Banach, espaços vetoriais normados e completos, que generalizam a noção de espaços euclidianos e permitem a formulação rigorosa e a solução de uma vasta gama de problemas analíticos.

Este trabalho tem como objetivo percorrer a jornada conceitual que parte dos fundamentos da teoria dos espaços métricos e culmina em dois dos teoremas fundamentais da Análise Funcional: o **Teorema da Aplicação Aberta** e o **Teorema do Gráfico Fechado**. Estes resultados não são apenas marcos de elegância matemática, mas também ferramentas essenciais, pois estabelecem condições sob as quais aplicações lineares contínuas entre Espaços de Banach são abertas (imagens de abertos são abertas) ou, de forma equivalente, possuem gráficos fechados.

Este estudo adota uma metodologia qualitativa para explorar os aspectos centrais dos Teoremas da Aplicação Aberta e do Gráfico Fechado, como será apresentado na subseção (5.2.1). Nossa pesquisa concentra-se em quatro linhas de ação: apresentar os pré-requisitos necessários para entender os teoremas, discutir de forma detalhada as demonstrações dos teoremas, expor como se relacionam e por fim apresentar suas aplicações no contexto da Análise Funcional. Mais detalhadamente vamos fazer uma revisão dos Espaços Métricos, explorando conceitos topológicos fundamentais como conjuntos abertos, fechados e a completude através das sequências de Cauchy, esse alicerce é crucial para a compreensão da estrutura dos Espaços de Banach. Em seguida, o foco

direciona-se para as Aplicações Lineares contínuas e para a investigação das propriedades que caracterizam os espaços de Banach, com base em referências teóricas de [3], [12], [13], [16], [6], [2], [5], [18].

Este trabalho tem como núcleo a apresentação detalhada e a demonstração dos Teoremas da Aplicação Aberta e do Gráfico Fechado, presentes nas Seções (5.2) e (5.3). Além disso, será explorada a equivalência entre estes dois teoremas em (5.4), uma característica que enfatiza a coerência e a profundidade da teoria. Adicionalmente, serão examinadas extensões e contextos relacionados, incluindo uma incursão ao caso bilinear na seção (5.5), que ilustra a versatilidade e o poder de aplicação desses resultados fundamentais.

Por fim, as Considerações Finais sintetizarão as contribuições do trabalho, reafirmando a importância desses teoremas no panorama da Análise Funcional. Através de uma abordagem didática e sequencial, este trabalho busca não apenas apresentar uma exposição clara e rigorosa desses tópicos, mas também destacar a beleza e a interconexão das ideias matemáticas que os sustentam.

Capítulo 1

Espaços Normados e Espaços Métricos

Os espaços vetoriais possuem uma estrutura algébrica que nos permite realizar operações [14], os espaços normados vão mais além, valendo as operações feitas nos espaços vetoriais. Sua formalização axiomática surgiu no início do século XX com a Análise Funcional, com as primeiras menções à norma no trabalho *Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten* [Sobre a resolução de equações lineares com infinitas incógnitas] de SCHMIDT em 1908 [19], e em 1922 BANACH introduz axiomáticamente a noção de espaço normado em *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales* [Sobre as operações em conjuntos abstratos e sua aplicação a equações integrais] [1].

1.1 Espaços Normados

Definição 1.1.1. Seja E um corpo espaço vetorial, sobre um $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Uma função $\| \cdot \|: E \rightarrow \mathbb{R}$, que a cada $x \in E$ atribui um número real não negativo $\|x\|$, é chamada de norma se e somente se, são válidas as seguintes condições.

$$(i) \quad \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0 ;$$

$$(ii) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| , \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in E ;$$

$$(iii) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E ;$$

Essas três condições são importantes para definirmos uma norma de modo que uma dessas condições falharem para um espaço, pode resultar em um espaço não munido de norma. A seguir veremos um exemplo de norma que costuma aparecer no curso de Análise no $\mathbb{R}^n$. Um espaço vetorial E munido de uma norma, $(E, \|\cdot\|)$, será chamado de espaço vetorial normado, ou simplesmente espaço normado.

Exemplo 1.1.1. No espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ os pontos são as listas $x = (x_1, \dots, x_n)$, onde cada uma das n coordenadas x_i é um número real. A norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$, a qual é a mais usual, é dada por:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \text{ onde } x = (x_1, \dots, x_n).$$

Uma outra norma em $\mathbb{R}^n$, chamada norma do máximo, é definida por

$$\|x\|_M = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Provemos abaixo que de fato satisfaz as três condições de norma:

(i) Se $\|x\|_M = 0$, então $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = 0$. Como $|x_i| \geq 0$ para todo i , isso implica $|x_i| = 0$ para cada $i = 1, \dots, n$, logo $x_i = 0$ para todo i . Portanto $x = 0$.

(ii) Seja $a \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Então

$$\|ax\|_M = \max_{1 \leq i \leq n} |ax_i| = \max_{1 \leq i \leq n} (|a| |x_i|) = |a| \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = |a| \|x\|_M.$$

(iii) Pela desigualdade triangular para valores absolutos, temos, para cada i :

$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|.$$

Seja k o índice em que $|x_k + y_k| = \|x + y\|_M$. Então

$$\|x + y\|_M = |x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k| \leq \max_i |x_i| + \max_i |y_i| = \|x\|_M + \|y\|_M.$$

Portanto, $\|x+y\|_M \leq \|x\|_M + \|y\|_M$. A definição (1.1.2) apresentada abaixo é importante porque garante que sequências convergentes, topologias e noções de continuidade são as mesmas para ambas as normas, em outras palavras, se duas normas são equivalentes. Resultados analíticos (como limites, continuidade de operadores e completude) não dependem de qual delas se usa.

Definição 1.1.2. Duas normas $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_b$ em um espaço vetorial X são ditas **equivalentes** se existem constantes positivas c e C tais que para todo $x \in X$, tem-se

$$c\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq C\|x\|_a$$

Com essa definição já podemos enunciar um resultado que diz sobre a equivalência de normas definidas em vetores do $\mathbb{R}^n$.

Proposição 1.1.1. *Sejam $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_S$, $\|\cdot\|_p$ e $\|\cdot\|_M$ normas em $\mathbb{R}^n$ definidas por:*

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (\text{norma euclidiana}), \\ \|x\|_S &= \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (\text{norma da soma}), \\ \|x\|_M &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad (\text{norma do máximo}), \\ \|x\|_p &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad (\text{norma de Minkowski}). \end{aligned}$$

Então:

- (a) $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_S$, $\|\cdot\|_M$ são normas equivalentes em $\mathbb{R}^n$;
- (b) Se $n = 2$, então $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_M$;
- (c) Duas normas quaisquer em um espaço vetorial de dimensão finita são equivalentes.

Demonstração. (a) Mostraremos que as normas são duas a duas equivalentes.

Equivalência entre $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_S$:

Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^2.$$

Logo,

$$\|x\| \leq \|x\|_S.$$

Por outro lado, para cada i , $|x_i| \leq \|x\|$. Somando,

$$\|x\|_S \leq n\|x\|.$$

Portanto,

$$\|x\| \leq \|x\|_S \leq n\|x\|.$$

Equivalência entre $\|\cdot\|_S$ e $\|\cdot\|_M$:

Para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_M \leq \|x\|_S \leq n\|x\|_M.$$

Equivalência entre $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_M$:

Combinando as desigualdades anteriores,

$$\frac{1}{n}\|x\|_M \leq \frac{1}{n}\|x\|_S \leq \|x\| \leq \|x\|_S \leq n\|x\|_M.$$

Logo, as três normas são equivalentes.

(b) Para $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}.$$

Note que

$$\max\{|x_1|, |x_2|\}^p \leq |x_1|^p + |x_2|^p \leq 2 \max\{|x_1|, |x_2|\}^p.$$

Elevando a $1/p$,

$$\|x\|_M \leq \|x\|_p \leq 2^{1/p}\|x\|_M.$$

Como $\lim_{p \rightarrow \infty} 2^{1/p} = 1$, pelo teorema do confronto,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_M.$$

(c) Seja X um espaço vetorial de dimensão finita n com base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Seja $\|\cdot\|$ uma norma qualquer em X e defina a norma

$$\|x\|_* = \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \quad \text{para } x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i.$$

Para todo $x \in X$,

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \|e_i\| \leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\| \right) \sum_{i=1}^n |\alpha_i| = B \|x\|_*,$$

onde $B = \max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\|$.

Suponha, por absurdo, que não exista $A > 0$ tal que $A\|x\|_* \leq \|x\|$ para todo $x \in X$. Então, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $x_k \in X$ com $\|x_k\|_* = 1$ e $\|x_k\| < \frac{1}{k}$. Como a esfera unitária $S = \{x \in X : \|x\|_* = 1\}$ é compacta em $(X, \|\cdot\|_*)$, a sequência (x_k) possui uma subsequência convergente para algum $x_0 \in S$. Denotemos essa subsequência ainda por (x_k) por simplicidade.

Usando a desigualdade já obtida,

$$\|x_0\| \leq \|x_0 - x_k\| + \|x_k\| \leq B\|x_0 - x_k\|_* + \frac{1}{k}.$$

Como $\|x_0 - x_k\|_* \rightarrow 0$ e $\frac{1}{k} \rightarrow 0$, segue que $\|x_0\| = 0$, logo $x_0 = 0$. Contradição, pois $\|x_0\|_* = 1$.

Portanto, existe $A > 0$ tal que $A\|x\|_* \leq \|x\|$ para todo $x \in X$. Consequentemente, $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_*$ são equivalentes. Como a equivalência de normas é uma relação de equivalência, quaisquer duas normas em X são equivalentes. $\square$

1.2 Espaços Métricos

O estudo dos espaços métricos teve início nos trabalhos de Maurice Fréchet em 1906, nos quais surgiram os primeiros conceitos sobre distância (FRÉCHET, 1906) [7]. Em 1910, David Hilbert abordou, em seus trabalhos, axiomas relacionados à distância (HILBERT, 1910) [9]. Outros dois matemáticos importantes que contribuíram para o desenvolvimento da teoria foram Henri Poincaré, que já trabalhava com ideias relacionadas à distância, e Felix Hausdorff, que introduziu o termo *metrischer Raum* (espaços métricos) em sua obra (HAUSDORFF, 1914) [8]. Neste capítulo, abordaremos os espaços métricos, conceito fundamental para a compreensão dos capítulos subsequentes.

Definição 1.2.1. Seja M um conjunto não vazio. Uma função $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, que a cada par ordenado $(a, b) \in M \times M$ associa o número real $d(a, b)$, é dita uma métrica em M se para quaisquer a, b , e $c \in M$, são válidas as seguintes condições.

- (i) $d(a, b) \geq 0$;
- (ii) $d(a, b) = 0 \iff a = b$;
- (iii) $d(a, b) = d(a, c)$;
- (iv) $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$.

Um espaço métrico é um par ordenado (M, d) onde M é o conjunto e d é uma métrica de M , também podemos dizer que $d(x, y)$ é a distância entre dois pontos. Baseado no Exemplo (1.1.1) podemos definir a métrica euclidiana.

Exemplo 1.2.1. Em um espaço euclidiano n -dimensional, a distância euclidiana é dada por: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \|x - y\|.$$

Um fato interessante que conecta a definição de espaço normado com a definição de espaço Métrico é que uma norma $\|\cdot\|$ em X define uma métrica d em X , e podemos chamá-la de métrica induzida pela norma, dada por

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Para demonstrarmos esse fato segue a seguinte proposição.

Proposição 1.2.1. *Se $E = (E, \|\cdot\|)$ é um espaço vetorial normado real e $d(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in E$, dizemos que d é uma métrica em E e, portanto (E, d) é um espaço métrico.*

Demonstração. Para mostrar que d é uma métrica em E , dados $x, y, z \in E$, vamos mostrar que d satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $d(x, x) = 0$. De fato, $d(x, x) = \|x - x\| = \|0\| = 0$, onde a segunda igualdade segue do fato de que E é espaço vetorial e a última igualdade segue da propriedade da norma.

(ii) $d(x, y) > 0$, se $x \neq y$.

Segue da propriedade da norma que $d(x, y) = \|x - y\| > 0$, pois $x - y \neq 0$.

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$.

Temos também pela propriedade da norma que $d(x, y) = \|x - y\| = |-1| \cdot \|x - y\| = \|- (x - y)\| = \|y - x\| = d(y, x)$.

(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Pela Desigualdade Triangular válida para a norma, segue que

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z).$$

□

Em resumo espaços vetoriais sabemos somar seus elementos e multiplicar seus elementos por escalares, nos espaços métricos sabemos calcular a distância entre dois de seus elementos. Como vimos na Proposição (1.2.1) um espaço normado é a estrutura matemática na qual tudo isso pode ser feito em um mesmo ambiente.

Abaixo veremos um exemplo de função que contradiz (iv) Desigualdade triangular [16], e portanto não define uma norma em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.2.2. A função $d : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(x, y) = (x - y)^2$ não é uma métrica. Onde vale as condições exceto a da desigualdade triangular, que podemos verificar com um simples contra exemplo:

$$d(x, y) = (4 - 0)^2 \leq (4 - 1)^2 + (1 - 0)^2$$

$$\Rightarrow d(x, y) = 16 \leq 9 + 1.$$

Apresentaremos a seguir a chamada **métrica discreta** (ou “zero-um”), essa métrica é um exemplo clássico, e que se mostra bastante útil para contraexemplos em análise, é importante notar que a métrica que apresentamos a seguir difere da noção usual de distância. Em contextos mais avançados, o estudo de métricas como esta revela-se fundamental.

Exemplo 1.2.3. A métrica $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d(x, y)_{disc} = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq y, \\ 0, & \text{se } x = y, \end{cases}$$

Essa métrica foge da noção usual de distância euclidiana, ela atribui distância 1 a quaisquer dois elementos distintos, independentemente de sua “proximidade” numérica. Um fato importante é que esta métrica não provém de uma norma em $\mathbb{R}$. Esse é um exemplo que ilustra que nem toda métrica é induzida por uma norma. Podemos verificar o caso da homogeneidade, a métrica discreta em $\mathbb{R}$ falha na homogeneidade, pois:

$$d_{disc}(2 \cdot 0, 2 \cdot 1) = d_{disc}(0, 2) = 1 \text{ mas, } 2 \cdot d_{disc}(0, 1) = 2 \cdot 1 = 2 \neq 1.$$

Abaixo veremos um exemplo importante, visto e replicado em cursos de Análise Real [13], [6].

Exemplo 1.2.4. Seja $M = \mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e d definido da seguinte forma:

$$d(a, b) = |a - b|; a, b \in \mathbb{R}.$$

onde $|\cdot|$ denota a função módulo, então (M, d) é um espaço métrico.

Exemplo 1.2.5. Considere a função $d_T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida por:

$$d_T((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

Vamos verificar que d_T é uma métrica, ou seja, satisfaz as seguintes propriedades para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$:

(i) $d_T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$, e $d_T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ se e somente se $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

(ii) $d_T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_T(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

(iii) $d_T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d_T(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d_T(\mathbf{z}, \mathbf{y})$.

(i) Se $d_T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, então:

$$\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = 0.$$

Como cada termo $|x_i - y_i|$ é não negativo, a soma só é zero se todos os termos forem zero, ou seja:

$$|x_i - y_i| = 0 \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n.$$

Portanto, $x_i = y_i$ para todo i , e assim $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. A recíproca e a não negativa são imediatas.

(ii) Pela simetria do valor absoluto:

$$d_T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^n |y_i - x_i| = d_T(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

(iii) Para cada $i = 1, \dots, n$, vale a desigualdade triangular do valor absoluto:

$$|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|.$$

Somando sobre todos os i , obtemos:

$$\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^n |z_i - y_i|,$$

que é equivalente a:

$$d_T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d_T(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d_T(\mathbf{z}, \mathbf{y}).$$

Assim $d_T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, satisfaz todas as propriedades de uma métrica, sendo portanto chamada de **métrica do taxista**.

Capítulo 2

Tópicos de Topologia em Espaços Normados

2.1 Conjuntos Abertos

Antes de abordar noções de continuidade é necessário entender os principais conceitos e resultados referentes à topologia dos Espaços Métricos. Neste capítulo apresentamos o que é o interior de um conjunto, o que significa um ponto ser interior a algum conjunto, conjuntos abertos, conjuntos fechados e não menos importante enunciamos também alguns teoremas e resultados importantes. Para mais informações deixo como sugestão o livro de [15] a saber [15], e para um estudo mais aprofundado sugerimos o que [17] fez em [17]. Antes de explorarmos sistematicamente as propriedades dos conjuntos abertos, convém comentar conceitos preliminares cruciais.

Definição 2.1.1. Seja (M, d) um espaço métrico. Para cada $a \in M$ onde $r > 0$, definimos

$$\begin{aligned} B(a; r) &= \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}, \\ B[a; r] &= \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}, \\ S(a; r) &= \{x \in E \mid \|x - a\| = r\}. \end{aligned}$$

Considere $d(x, y) = \|x - y\|$. Os conjuntos $B(a; r)$, $B[a; r]$ e $S(a; r)$ são chamados, respectivamente, de *bola aberta*, *bola fechada* e *esfera* de centro a e raio r .

Definição 2.1.2. Seja $X \subset M$ um espaço normado. Um ponto $a \in X$ chama-se *ponto interior* a X quando é centro de alguma bola aberta $B(a; \delta) \subset X$, ou seja, quando existe $\delta > 0$ tal que $\|x - a\| < \delta \Rightarrow x \in B(a; \delta) \subset X$.

O *interior* de X é o conjunto $\text{int}(X)$, formado pelos pontos interiores a X . O **interior** de um conjunto consiste na coleção de todos os seus pontos interiores aqueles em torno dos quais podemos encontrar uma vizinhança completamente inserida no conjunto. Ao longo deste capítulo, exploraremos como estas noções se articulam no contexto dos espaços métricos, estabelecendo os alicerces para a compreensão de conceitos topológicos mais avançados. Dizer que um ponto $a \in X$ não é interior a X equivale a afirmar que toda bola aberta de centro a , contém pontos do complementar de X , ou seja, que para todo $\delta > 0$ existe $y \in \mathbb{R}^n - X$ com $\|y - a\| < \delta$. Perceba que esse y arbitrário não pertence a X , mas apenas ao seu complementar.

Definição 2.1.3. Seja M um espaço métrico. Dado um ponto $a \in M$, chama-se **vizinhança** de a a qualquer subconjunto $V \subset M$ que contenha uma bola aberta de centro a . Isso significa que existe $r > 0$ tal que

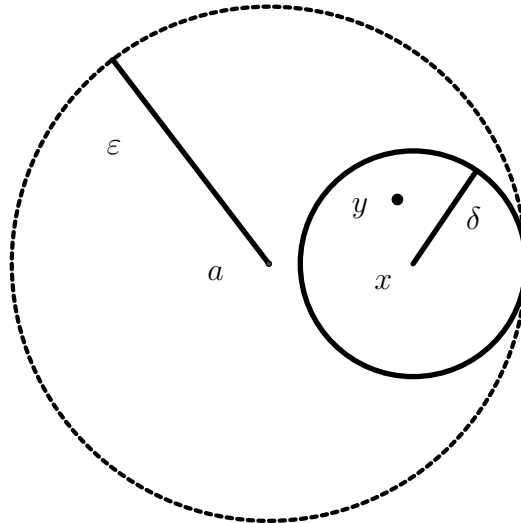
$$B(a; r) = \{x \in M \mid d(x, a) < r\} \subset V.$$

Definição 2.1.4. Um conjunto $X \subset M$ chama-se *aberto* quando todos os seus pontos são interiores, isto é, quando para cada $x \in X$ existe $\delta > 0$ tal que $B(x; \delta) \subset X$. Assim, X é aberto $\Leftrightarrow \text{int } X = X$.

Demonstramos a seguir que toda bola aberta definido em um espaço métrico qualquer é um conjunto aberto.

Proposição 2.1.1. *Toda bola aberta de M é um conjunto aberto.*

Demonstração. Com efeito, qualquer $x \in B(a; \varepsilon)$, temos $\|x - a\| < \varepsilon$. Logo o existe um $\delta > 0$ tal que $\|x - a\| + \delta = \varepsilon$. Assim teremos que $B(x; \delta) \subset B(a; \varepsilon)$. De fato, se $y \in B(x; \delta)$. então pela desigualdade triangular, $\|y - a\| \leq \|y - x\| + \|x - a\| < \delta + \|x - a\| = \varepsilon \Rightarrow y \in B(a; \varepsilon)$.



$$B(x; \delta) \subset B(a; \varepsilon)$$

FIGURA 1. Fonte: Autor.

□

2.2 Conjuntos Fechados

Na topologia dos espaços normados, além dos conjuntos abertos definidos na seção (2.1), é igualmente fundamental a classe de conjuntos fechados. Eles representam, em certo sentido, o complemento lógico dos abertos e possuem propriedades de “fechamento” em relação a limites e fronteiras.

Proposição 2.2.1. *Sejam M um espaço métrico, $X \subset M$ e $a \in M$. Então $a \in \overline{X}$ se, e somente se, existe uma sequência (x_n) em X tal que $\lim x_n = a$.*

Demonstração. Suponhamos que (x_n) seja uma sequência em X tal que $\lim x_n = a$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $\|x_n - a\| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$. Logo $x_n \in B(a, \varepsilon) \cap X$ para todo $n > n_0$, implicando que $B(a, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. Portanto $a \in \overline{X}$.

Reciprocamente, suponhamos que $a \in \overline{X}$. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $B(a; 1/n) \cap X \neq \emptyset$. Assim podemos tomar $x_n \in B(a; 1/n) \cap X$ para cada $n \in \mathbb{N}^*$. A sequência (x_n) é uma sequência em X que satisfaz $\|x_n - a\| < 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Portanto $\lim x_n = a$. □

Definição 2.2.1. Seja M um espaço métrico. Um ponto $a \in M$ é dito ser **ponto de acumulação** de $X \subset M$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ tem-se:

$$(B(a; \varepsilon) - \{a\}) \cap X \neq \emptyset$$

onde $B(a; \varepsilon)$ é a bola aberta de centro a e raio ε em $\mathbb{R}^n$.

Podemos definir pontos de acumulação usando a definição de sequências.

Definição 2.2.2. Uma **sequência** em um espaço métrico M é uma função $x: \mathbb{N} \rightarrow M$, que associa a cada número natural k um ponto $x_k \in M$. As notações usuais são $(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ou simplesmente (x_k) .

Podemos também definir o que é o limite de uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em M . Dizemos que (x_n) **converge** para um ponto $a \in M$, e escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{ou} \quad x_n \rightarrow a,$$

se para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, a) < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Nesse caso, dizemos que a é o **limite** da sequência.

Definição 2.2.3 (Ponto de acumulação via sequências). Seja M um espaço métrico e $X \subset M$. Dizemos que $x \in M$ é um **ponto de acumulação** de X se existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $X \setminus \{x\}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Exemplo 2.2.1. Se tomarmos $X = B(0; 1) \subset \mathbb{R}^n$ a bola aberta de centro na origem e raio 1 em $\mathbb{R}^n$, o ponto $a = (1, 0, \dots, 0)$ não pertence a X . Considere a sequência (x_k) dada por $x_k = (1 - \frac{1}{k}, 0, \dots, 0)$. Para todo $k \in \mathbb{N}$, temos $|x_k| < 1$ (pois $1 - \frac{1}{k} < 1$), logo $x_k \in X$ e $x_k \neq a$. Além disso, $|x_k - a| = \frac{1}{k} \rightarrow 0$, portanto $\lim x_k = a$. Pela caracterização sequencial, a é ponto de acumulação de X .

A definição de ponto de acumulação é importante para entender o conceito de limites de funções.

Definição 2.2.4. Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos, $f: E \rightarrow Y$ uma função definida em $E \subset X$ e $a \in X$ um ponto de acumulação de E . Diz-se que $b \in Y$ é o limite de $f(x)$ quando x tende para a e escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

quando a seguinte condição é satisfeita:

“Para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $x \in E$ e $0 < d_X(x, a) < \delta$ implicam $d_Y(f(x), b) < \varepsilon$.”

Teorema 2.2.1. A sequência (x_k) em $\mathbb{R}^n$ converge para o ponto $a = (a_1, \dots, a_n)$ se, e somente se, para cada $i = 1, \dots, n$, tem-se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{ki} = a_i,$$

isto é, cada coordenada de x_k converge para a coordenada correspondente de a .

Demonstração. Para cada $i = 1, \dots, n$, tem-se $|x_{ki} - a_i| \leq \|x_k - a\|_M$, portanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{ki} = a_i.$$

Reciprocamente, se vale esta última igualdade então, dado $\varepsilon > 0$, existem $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ tais que

$$k > k_i \Rightarrow |x_{ki} - a_i| < \varepsilon \quad (i = 1, \dots, n).$$

Tomando $k_0 = \max\{k_1, \dots, k_n\}$ e adotando em $\mathbb{R}^n$ a norma do máximo, vemos que

$$k > k_0 \Rightarrow \|x_k - a\|_M < \varepsilon.$$

Logo $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$. □

Definição 2.2.5. Sejam M um espaço métrico e $X \subset M$. Dizemos que um ponto $a \in M$ é **aderente** a X quando, para todo $\varepsilon > 0$, tem-se $B(a; \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$.

Chamamos de **fecho** ou **aderência** de um conjunto $X \subset M$, ao conjunto $\overline{X}$ formado pelos pontos de M que são aderentes a X .

Por exemplo, todo ponto a pertencente a X é aderente a X pois podemos escrever $a = \lim x_k$, com $x_k = a$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Mas a pode ser aderente a X sem pertencer a X , neste caso, a é necessariamente um ponto de acumulação do conjunto X .

Exemplo 2.2.2. Seja $a \in \mathbb{R}$, e $x \in X$ onde a **não é aderente** a $X \subset \mathbb{R}$. Existe pelo menos um $\varepsilon > 0$ tal que o intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ não contém elementos de X .

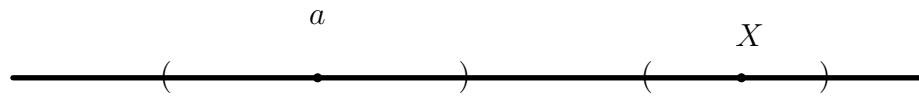


FIGURA 2.

Fonte: Autor.

Ou seja

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap X = \emptyset$$

Podemos pensar que $a \in \mathbb{R}$ está “isolado” de X , no sentido de que existe uma vizinhança de a que não contém pontos de X .

Teorema 2.2.2. *Seja M um espaço métrico e $X \subset M$. Um ponto $a \in M$ é aderente a X se, e somente se, existe uma sequência $(x_k) \subset X$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$.*

Demonstração. Suponha que a seja aderente a X . Então, para cada $k \in \mathbb{N}$, a interseção $B\left(a; \frac{1}{k}\right) \cap X$ é não vazia. Escolha, para cada k , um ponto $x_k \in B\left(a; \frac{1}{k}\right) \cap X$. Temos $d(x_k, a) < \frac{1}{k}$ para todo k , logo $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$.

Reciprocamente, suponha que exista $(x_k) \subset X$ com $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_k, a) < \varepsilon$ para todo $k \geq k_0$. Em particular, $x_{k_0} \in B(a; \varepsilon) \cap X$, portanto $B(a; \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, a é aderente a X . $\square$

Definição 2.2.6. Dizemos que um conjunto $F \subset M$ é um *conjunto fechado* num espaço métrico E quando $F = \overline{F}$, isto é, se todo ponto aderente a F pertencer a F .

Proposição 2.2.2. *Se $X \subset F$ e F é fechado então $\overline{X} \subset F$.*

Demonstração. Para cada $a \in \overline{X}$, podemos tomar $(x_n) \in X, \forall n \in \mathbb{N}$, uma sequência em X que tende ao ponto a . Logo, $a \in \overline{F} = F$ já que (x_n) é uma sequência em F . Segue daí que $\overline{X} \subset F$. $\square$

Definição 2.2.7. Seja M um espaço normado e consideremos $a \in M, r > 0$, e $\lambda > 0$. Definindo

$$a + B(0; r) = \{x \in M; x = a + y, \text{ com } y \in B(0; r)\}$$

e

$$\lambda \cdot B(0; r) = \{x \in M; x = \lambda y, \text{ com } y \in B(0; r)\}.$$

Lema 2.2.1. Com a notação acima, em espaços normados temos:

- (i) $a + B(0; r) = B(a; r) \forall a \in M;$
- (ii) $\lambda \cdot B(0; r) = B(0; \lambda r) \forall \lambda > 0.$

Demonstração. (i) Para mostrarmos essa afirmação, tomemos $w \in B(a; r)$ e consideremos $y = w - a$. Temos, então, que $w = a + y$, sendo $y \in B(0; r)$, já que $\|y\| = \|w - a\| < r$. Com isso, vemos que $w \in a + B(0; r)$.

Por outro lado, tomemos $w \in a + B(0; r)$. Por definição, $w = a + y$, onde $y \in B(0; r)$. Assim $\|w - a\| = \|y\| < r$, o que mostra que $w \in B(a; r)$.

(ii) Tomemos $w \in B(0; \lambda r)$. Logo $\|w\| < \lambda r$. Seja $y = w/\lambda$. Temos $w = \lambda y$, com $y \in B(0; r)$, já que

$$\|y\| = \left\| \frac{w}{\lambda} \right\| = \left| \frac{1}{\lambda} \right| \cdot \|w\| = \frac{1}{\lambda} \cdot \|w\| < \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda r = r.$$

Com isso, temos que $w \in \lambda \cdot B(0; r)$.

Para mostrarmos a outra inclusão, tomemos $w \in \lambda \cdot B(0; r)$. Daí temos que $w = \lambda y$ com $y \in B(0; r)$. Notemos que

$$\|w\| = \|\lambda y\| = |\lambda| \cdot \|y\| = \lambda \cdot \|y\| < \lambda r,$$

o que mostra que $w \in B(0; \lambda r)$. $\square$

Proposição 2.2.3. *Seja M um espaço normado. Se F é um subespaço vetorial de M , com $F \neq M$, então $\text{int}(F) = \emptyset$.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $\text{int}(F) \neq \emptyset$. Então existem $x \in F$ e $r > 0$ tais que $B(x; r) \subset F$. Pelo Lema (2.2.1), temos:

$$x + B(0; r) = B(x; r) \subset F.$$

Como F é um subespaço vetorial de E , segue que:

$$B(0; r) \subset F - x \subset F \quad (2.1)$$

e

$$B(0; r) \subset \lambda^{-1}F \subset F. \quad (2.2)$$

Para todo $\lambda > 0$. Como

$$\lambda \cdot B(0; r) = B(0; \lambda r)$$

de (2.1) obtemos:

$$B(0; \lambda r) \subset F \quad \text{para todo } \lambda > 0.$$

Tomemos agora $y \in E$ arbitrário:

Se $y = 0$, então $y \in F$ (pois F é subespaço).

Se $y \neq 0$, escolha $\lambda = \frac{2\|y\|}{r}$. Logo:

$$B(0; 2\|y\|) = B(0; \lambda r) \subset F.$$

Como $y \in B(0; 2\|y\|)$, temos $y \in F$.

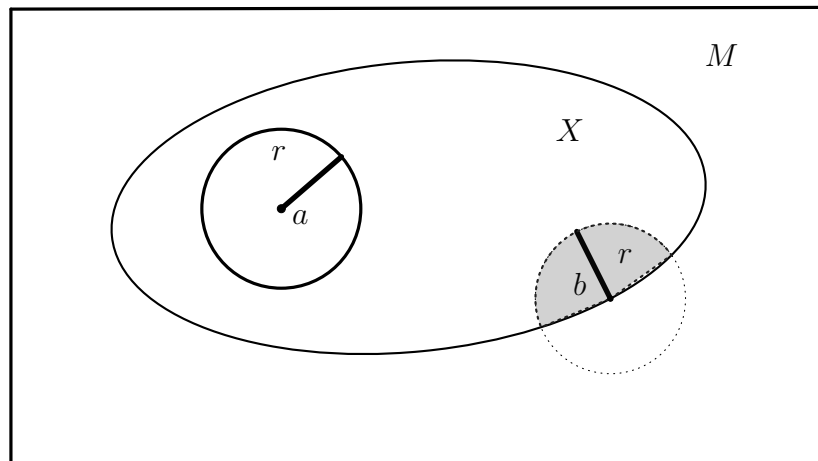
Concluimos que $M \subset F$, o que é absurdo pois F é subespaço próprio de M . Portanto, $\text{int}(F) = \emptyset$. □

Proposição 2.2.4. *Seja $F \subset M$ um conjunto fechado. Então $F = \text{int}(F) \cup \partial F$, onde $\text{int}(F)$.*

Definição 2.2.8. Seja E um espaço normado e $X \subset E$. O conjunto dos pontos $b \in E$ tais que, para todo $r > 0$, se tem

$$B(b; r) \cap X \neq \emptyset \quad \text{e} \quad B(b; r) \cap (E \setminus X) \neq \emptyset$$

é chamado de *fronteira* de X e denotado por ∂X .



$$a \in \text{int}(X) \text{ e } b \in \partial X.$$

FIGURA 3.

Fonte: Autor.

Corolário 2.2.1. Sejam M um espaço métrico e $F \subset M$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) F é fechado;
- (b) Se (x_n) é uma sequência em F convergindo para $a \in M$, então $a \in F$.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b): Suponhamos que $F = \overline{F}$ e que (x_n) seja uma sequência em F tal que $\lim x_n = a$. Pela Proposição anterior, temos que $a \in \overline{F}$. Daí $a \in F$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Com efeito, basta mostrar que $\overline{F} \subset F$. Tomemos $a \in \overline{F}$. Pela Proposição (2.2.1), existe uma sequência (x_n) em F tal que $\lim x_n = a$. Pela hipótese, temos que $a \in F$ e, portanto, $\overline{F} \subset F$. Daí F é fechado. $\square$

2.3 Sequência de Cauchy

Do curso de Análise Real sabemos que toda sequência de números reais monótona limitada é convergente. Porém esse critério não é geral. Pois nem toda sequência convergente é monótona [4]. Logo se faz necessário o estudo de um novo critério, que para o estudos em espaços de Banach mostra-se extremamente importante. As sequências de Cauchy são assim nomeadas em homenagem ao matemático francês Augustin-Louis Cauchy, essas sequências caracterizam-se por uma propriedade notável: seus termos se aproximam uns dos outros à medida que avançamos na sequência. O que torna as sequências de Cauchy particularmente importantes é que elas fornecem um **critério interno de convergência** apenas se o espaço for um espaço métrico completo, podemos determinar se uma sequência converge sem necessariamente conhecer seu limite. Esta propriedade é crucial em contextos onde o limite é desconhecido ou difícil de calcular diretamente.

No contexto de $\mathbb{R}^n$ e espaços vetoriais, as sequências de Cauchy revelam uma característica essencial desses espaços: a **completude**. A famosa propriedade de que “toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$ é convergente” não é trivial e reflete a continuidade do espaço e distingue $\mathbb{R}^n$ de outros espaços que podem ter “buracos” ou “falhas”.

Definição 2.3.1. Uma sequência (x_n) em um espaço métrico M , é dita uma sequência de Cauchy quando, para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ sempre que $n, m > n_0$.

Proposição 2.3.1. *Seja (x_k) uma sequência convergente em $\mathbb{R}^n$. Então (x_k) é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Seja (x_k) uma sequência convergente em $\mathbb{R}^n$. Então existe $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_k \rightarrow a$. Tomemos $\varepsilon > 0$. Existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_k - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $k > k_0$. Tomando $m, k > k_0$, temos

$$\|x_k - x_m\| \leq \|x_k - a\| + \|x_m - a\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, (x_k) é de Cauchy. □

A existência de uma métrica permite definir o conceito de distância entre pontos, o que é essencial para caracterizar sequências de Cauchy. Uma maneira natural de obter tal estrutura é trabalhar com espaços normados, pois toda norma induz uma métrica. Nesse contexto, vale a importante propriedade de que toda sequência convergente em um espaço métrico é de Cauchy. Este resultado fornece um método prático para construir sequências de Cauchy.

Teorema 2.3.1. *Toda sequência convergente em um espaço métrico é uma sequência de Cauchy. A prova é análoga à da proposição (2.3.1).*

Em geral, **a recíproca não é verdadeira** em qualquer espaço métrico.

Capítulo 3

Espaços de Banach

3.1 Espaços de Banach

Os espaços de Banach formam uma classe especial de espaços normados. Os espaços de Banach, nomeados em homenagem ao matemático polonês Stefan Banach, representam um dos pilares fundamentais da Análise Funcional. Espaços vetoriais normados e completos, eles constituem um conceito fundamental para o entendimento de operadores lineares, reunindo em uma única estrutura as propriedades algébricas dos espaços vetoriais, as propriedades topológicas da convergência e a além é claro da completude.

Devemos mencionar que no diagrama abaixo inclui apenas um lado da escola polonesa, a saber, a ramificação que trabalhou com a Análise Funcional. Tão importante quanto o ramo de Lwów é o ramo de Varsóvia, que inclui, entre outros nomes ilustres, os seguintes matemáticos: Zaremba, Sierpinski, Mazurkiewicz, Kuratowski, Saks, Borsuk, Zygmund, Tarski, Marcinkiewicz e Janiszewski.

$$\begin{array}{l}
\text{Hilbert} \rightarrow \text{Steinhaus} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Kac, Schauder} \\ \text{Orlicz} \rightarrow \text{Ciesielski} \rightarrow \text{Kwapien Ulam} \\ \text{Banach} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Mazur} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Bessaga} \\ \text{Rolewicz} \\ \text{Zelazko} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \\
\text{Mazur} \rightarrow \text{Petczynski} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tomczak} \\ -\text{Jaergerman} \\ \text{Figiel} \\ \text{Wojtaszczyk} \end{array} \right.
\end{array}$$

Em 1903, J. Hadamard passou a chamar uma transformação linear a valores no corpo de escalares de funcional, e assim o termo Análise Funcional, apareceu pela primeira vez em um livro de P. Lévy publicado em 1922 [3], [5].

Os axiomas de norma apareceram nos anos 1920-1922 em trabalhos de N. Wiener, E. Helly, S. Banach e H. Hahn. Em um notável trabalho de abstração a partir de problemas mais concretos estudados por Volterra e Hadamard, Banach apresentou os axiomas como os conhecemos hoje em sua tese, defendida em 1920 e publicada em 1922. Banach e seus companheiros poloneses se referiam aos espaços normados completos como espaços de tipo B. O termo espaço de Banach foi cunhado pelo matemático francês M. Fréchet em 1928. Alguns trabalhos de Banach da área são: [1929a] **Sur les fonctionnelles linéaires**, *Studia Math.* **1**, [A: Banach, 1979]. [1932] **Théorie des opérations linéaires**, *Monografie Matematyczne* **1**, Warszawa; reprint: [A: Banach, 1967]; translations: Ukrainian (Kiev, 1948, translated by M. Zaryckij), English (North-Holland, 1987; Chelsea, n.d.) [5].

Definição 3.1.1. Os espaços normados que têm a propriedade de que toda sequência de Cauchy é convergente são chamados espaços de Banach.

O fato de que uma sequência converge em $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, é sequência de Cauchy é geralmente conhecido como critério de convergência de Cauchy. O critério de

convergência abaixo é importante para verificar se um espaço é completo. Quando nos referimos a espaço normado completo, estamos falando sobre um espaço de Banach. Sabe-se que uma sequência de números reais é convergente se, e somente se, ela é de Cauchy. Assim por exemplo $\mathbb{R}$, com sua norma usual, é um espaço de Banach. O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ também é um espaço de Banach. Mais precisamente podemos generalizar e afirmar que todo espaço normado de dimensão finita é um espaço de Banach.

Teorema 3.1.1. *Todo espaço normado de dimensão finita é um espaço de Banach. Consequentemente, todo subespaço de dimensão finita de um espaço normado E é fechado em E .*

Demonstração. Sejam E um espaço normado de dimensão finita e $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ uma base normalizada de E (isto é, $\|\beta_i\| = 1$ para todo i). Dada uma sequência de Cauchy $(x_k)_{k=1}^\infty$ em E , para cada $k \in \mathbb{N}$, existem únicos escalares $(x_1^k, \dots, x_n^k)$ tais que

$$x_k = x_1^k \beta_1 + \dots + x_n^k \beta_n.$$

Dado $\varepsilon > 0$, pode-se tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_k - x_m\| < c \cdot \varepsilon$ para todo $k, m \geq n_0$, onde c é a constante. Segue que

$$\sum_{j=1}^n |x_j^k - x_j^m| \leq \frac{1}{c} \left\| \sum_{j=1}^n (x_j^k - x_j^m) \beta_j \right\| = \frac{1}{c} \|x_k - x_m\| < \varepsilon, \quad \forall k, m \geq n_0.$$

Daí, para cada $j = 1, \dots, n$, a sequência de escalares $(x_j^k)_{k=1}^\infty$ é de Cauchy e, portanto, convergente.

Seja $b_j = \lim_{k \rightarrow \infty} x_j^k$ para $j = 1, \dots, n$. Neste caso, temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n |x_j^k - b_j| = 0.$$

Definindo $x = b_1 \beta_1 + \dots + b_n \beta_n$, temos $x \in E$ e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=1}^n (x_j^k - b_j) \beta_j \right\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n |x_j^k - b_j| = 0.$$

Assim, podemos concluir que $x_k \rightarrow x$. Portanto, E é espaço de Banach.

□

Além disso, sendo E um espaço normado qualquer, todo subespaço de dimensão finita de E será Banach pelo que acabamos de provar e, em particular, será fechado em E pela Proposição 3.1.1, apresentada e demonstrada a seguir.

Proposição 3.1.1. *Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço vetorial de E . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) F é um espaço de Banach;
- (b) F é fechado em E .

Demonstração. **(a) $\Rightarrow$ (b):** Suponhamos que F é um espaço de Banach. Tomemos (x_n) sendo uma sequência em F que converge para $a \in E$. Temos que (x_n) é de Cauchy em F pois se a sequência é convergente em um espaço normado ela então é de Cauchy por definição. Logo existe $b \in F$ tal que (x_n) converge para b , já que F é um espaço de Banach. Pela unicidade do limite de uma sequência convergente em um espaço normado, temos $a = b$. logo, F é fechado.

(b) $\Rightarrow$ (a): Suponhamos agora que F é fechado. Tomemos (x_n) uma sequência de Cauchy em F . Segue que (x_n) é de Cauchy em E e, como E é um espaço de Banach, existe $a \in E$ tal que $x_n \rightarrow a$. Pelo fato de F ser fechado, novamente, pelo Corolário (2.2.1), $a \in F$. Assim F é um espaço de Banach. □

Definição 3.1.2. Denotemos por c_0 o conjunto de todas as sequências de números reais ou de números complexos que convergem para zero. Mais precisamente, fixado $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, temos

$$c_0 = \{(x_n) : x_n \in \mathbb{K} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}^* \text{ e } x_n \rightarrow 0\}.$$

Consideremos em c_0 as seguintes operações de adição e multiplicação por um escalar: sejam (x_n) e (y_n) em c_0 e $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$(x_n) + (y_n) = (z_n), \text{ em que } z_n = x_n + y_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lambda \cdot (x_n) = (z_n), \text{ em que } z_n = \lambda \cdot x_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}^*.$$

Então c_0 com as operações que foram definidas, é um espaço vetorial.

Definição 3.1.3. Denotemos por ℓ_∞ o espaço vetorial das sequências limitadas de números reais ou complexos. Formalmente,

$$\ell_\infty = \{x = (x_1, x_2, \dots) = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} : \exists M_x > 0 \text{ tal que } |x_i| \leq M_x \text{ para todo } i \in \mathbb{N}\}.$$

As operações de soma e multiplicação por escalar são definidas coordenada a coordenada, dadas por $x = (x_i), y = (y_i) \in \ell_\infty$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$),

$$x + y = (x_i + y_i), \quad \alpha x = (\alpha x_i).$$

Com essas operações, ℓ_∞ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Podemos equipar ℓ_∞ com uma norma, chamada norma do supremo ou norma infinito, definida por

$$\|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|, \quad \text{para } x = (x_i) \in \ell_\infty.$$

$$\text{A métrica induzida por essa norma é } d(x, y) = \|x - y\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i - y_i|.$$

O espaço ℓ_∞ , formado por todas as sequências limitadas de escalares, desempenha um papel fundamental na Análise Funcional. Na seguinte proposição, verifica-se que ℓ_∞ é um **espaço de Banach**, ou seja, um espaço normado completo, o que significa que toda sequência de Cauchy em ℓ_∞ converge para um elemento dentro do próprio espaço.

A completude de ℓ_∞ é essencial para diversas aplicações, como na teoria de operadores lineares e em estudos de dualidade, garantindo que limites de sequências limitadas permaneçam limitados. Esse resultado reforça a importância de ℓ_∞ como um ambiente robusto para análise e demonstrações. A seguir vamos verificar que ℓ_∞ é um espaço de Banach.

Proposição 3.1.2. *Seja ℓ_∞ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em ℓ_∞ . Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $m, n \geq n_0$, então $\|x_m - x_n\|_\infty < \varepsilon$.

Temos que, para cada $m \in \mathbb{N}$, $x_m = (x_{mj})_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}
x_1 &= (x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots), \\
x_2 &= (x_{21}, x_{22}, x_{23}, \dots), \\
&\vdots \\
x_m &= (x_{m1}, x_{m2}, x_{m3}, \dots), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Portanto, a desigualdade

$$|x_{mj} - x_{nj}| \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_{mj} - x_{nj}| = \|x_m - x_n\|_\infty < \varepsilon,$$

para $m, n > n_0$ e qualquer $j \in \mathbb{N}$, mostra que $(x_{mj})_{m \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$ (para qualquer j). Sendo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ completo, então para cada $j \in \mathbb{N}$ existe

$$a_j = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{mj}.$$

Afirmamos que $a = (a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é o limite da sequência $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ em ℓ_∞ . De fato, para qualquer $j \in \mathbb{N}$,

$$|x_{mj} - x_{nj}| < \varepsilon,$$

para $m, n > n_0$ (por hipótese). Tomando o limite quando $m \rightarrow \infty$, temos

$$|a_j - x_{nj}| < \varepsilon,$$

para qualquer $j \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\|a - x_n\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j - x_{nj}| < \varepsilon,$$

para $n > n_0$. Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{em } \ell_\infty.$$

Finalmente percebe-se que o limite a está em ℓ_∞ . De fato, para qualquer $m > n_0$,

$$\|a\|_\infty \leq \|a - x_n\|_\infty + \|x_n\|_\infty < \varepsilon + \|x_n\|_\infty < C < \infty.$$

□

Proposição 3.1.3. *O espaço normado c_0 é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seguindo as mesmas ideias da demonstração da Proposição (3.1.2), dada qualquer sequência de Cauchy $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ em c_0 , como $c_0 \subset \ell_\infty$ e ℓ_∞ é completo, existe $a = (a_j) \in \ell_\infty$ tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m - a\|_\infty = 0. \quad (1)$$

Resta, portanto, comprovar que $a \in c_0$, ou seja, que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0.$$

De fato, pela convergência em (1), para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m \geq m_0$ então

$$\|x_m - a\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Isto implica, em particular, que para um m fixo com $m \geq m_0$ e para todo $j \in \mathbb{N}$, vale

$$|x_{m,j} - a_j| \leq \|x_m - a\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2},$$

onde denotamos $x_m = (x_{m,1}, x_{m,2}, \dots)$.

Por outro lado, como $x_m \in c_0$, temos $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{m,j} = 0$. Logo, para o mesmo $\varepsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{m,j}| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $j > j_0$.

Assim, combinando as desigualdades, para todo $j > j_0$ obtemos

$$|a_j| \leq |x_{m,j} - a_j| + |x_{m,j}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Concluimos que $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0$ e, portanto, $a \in c_0$. □

A seguir, apresentaremos um exemplo de um espaço normado que não é completo. Utilizaremos o fato de que, para ser um espaço de Banach, é necessário que toda sequência de Cauchy no espaço convirja para um elemento do próprio espaço.

Exemplo 3.1.1. O espaço $E = (C([0, 1]),$ com norma $\|f\|_1$ definida por:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt,$$

é um espaço normado. Mostraremos que $E = (C([0, 1], \|\cdot\|))$ não é um espaço de Banach.

De fato considere a sequência de funções $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C([0, 1])$ dada por:

$$f_n(t) = t^n, \quad \text{para } t \in [0, 1].$$

Verifiquemos que $\{f_n\}$ é de Cauchy Para $n < m$, temos:

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_0^1 |t^n - t^m| dt = \int_0^1 (t^n - t^m) dt = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1}.$$

Quando $n, m \rightarrow \infty$, temos:

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \rightarrow 0.$$

Portanto, $\{f_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $(C([0, 1]), \|\cdot\|_1)$. Agora mostremos que a sequência $\{f_n\}$ não converge em $C([0, 1])$. O limite pontual de $\{f_n\}$ é dado por:

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t < 1, \\ 1, & \text{se } t = 1. \end{cases}$$

Note que f não é contínua em $t = 1$, logo $f \notin C([0, 1])$. Calculando a distância entre f_n e f na norma $\|\cdot\|_1$:

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |t^n - f(t)| dt = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Isso mostra que $f_n \rightarrow f$, mas $f \notin C([0, 1])$. A sequência $\{f_n\}$ é de Cauchy em $(C([0, 1]), \|\cdot\|_1)$, mas não converge para um elemento de $C([0, 1])$. Portanto, $E = (C([0, 1]), \|\cdot\|_1)$ não é um espaço completo. Apresentamos a abaixo mais um critério para determinar se um espaço é de Banach ou não.

Proposição 3.1.4. *Seja E um espaço normado sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$. Então E é um espaço de Banach se, e somente se, toda série de elementos de E absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que E é um espaço de Banach e seja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ uma série absolutamente convergente em E , isto é,

$$\{x_k\} \subset E \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty.$$

Definamos as somas parciais:

$$S_n := \sum_{k=1}^n x_k.$$

Para $n > m$, temos:

$$\|S_n - S_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n x_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|x_k\|.$$

Como a série $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ converge, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n > m \geq N$:

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} \|x_k\| - \sum_{k=m+1}^{\infty} \|x_k\| \right| = \sum_{k=m+1}^n \|x_k\| < \varepsilon.$$

Portanto, $\|S_n - S_m\| < \varepsilon$ para $n > m \geq N$, o que mostra que $\{S_n\}$ é uma sequência de Cauchy em E . Sendo E completo por hipótese, existe $S \in E$ tal que $S_n \rightarrow S$, ou seja, a série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge.

($\Leftarrow$) Reciprocamente suponha agora que toda série absolutamente convergente em E é convergente. Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ uma sequência de Cauchy. Devemos mostrar que $\{x_n\}$ converge. É suficiente mostrar que $\{x_n\}$ possui uma subsequência convergente, pois em um espaço métrico, se uma sequência de Cauchy possui uma subsequência convergente, então a sequência original converge para o mesmo limite, a demonstração desse fato pode ser encontrada em [16].

Como $\{x_n\}$ é de Cauchy, podemos escolher uma subsequência $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que:

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Considere a série:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}).$$

Esta série é absolutamente convergente, pois:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 < \infty.$$

Por hipótese, a série converge. Observemos que as somas parciais são telescópicas:

$$S_m = \sum_{k=1}^m (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x_{n_{m+1}} - x_{n_1}.$$

Como S_m converge quando $m \rightarrow \infty$, existe $y \in E$ tal que $S_m \rightarrow y$. Portanto:

$$x_{n_{m+1}} = S_m + x_{n_1} \rightarrow y + x_{n_1} \in E.$$

Assim, a subsequência $\{x_{n_m}\}$ converge. Sendo $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy com uma subsequência convergente, segue que $\{x_n\}$ converge. Portanto, E é completo, ou seja, é um espaço de Banach. $\square$

Este resultado fornece uma caracterização útil dos espaços de Banach que é frequentemente empregada em análise funcional. A demonstração da volta constrói explicitamente uma subsequência convergente usando o critério das séries absolutamente convergentes.

Proposição 3.1.5. *Seja $E_1 \times \cdots \times E_n$ munido de uma norma, é Banach se, e somente se, $E_1, \dots, E_n$ são Banach.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que $E_1 \times \cdots \times E_k$ sejam espaços de Banach com a norma

$$\|(x_1, \dots, x_k)\|_2 = \|x_1\|_{E_1} + \cdots + \|x_k\|_{E_k}.$$

Seja (x_j) uma sequência de Cauchy em $(E_j, \|\cdot\|_{E_j})$. Então a sequência

$$y_m = (0, \dots, 0, x_{m_j}, 0, \dots, 0),$$

em $E_1 \times \cdots \times E_k$ é de Cauchy em $E_1 \times \cdots \times E_k$, porque,

$$\|y_\ell - y_m\|_2 = \|x_\ell - x_m\|_{E_j} \rightarrow 0 \quad \text{quando } \ell, m \rightarrow \infty.$$

Pela completude, existe $y = (a^1, \dots, a^k) \in E_1 \times \cdots \times E_k$, a qual é limite de (y_j) . Resulta disso que

$$0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \|y_m - a\|_1 \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m - a^j\|_{E_j}.$$

Portanto, $a^j = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m$ em E_j . Assim resulta que E_j é completo. Como j é arbitrário, segue que $E_1, \dots, E_k$ são todos completos, logo espaços de Banach.

($\Leftarrow$) Seja $y_k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$ uma sequência de Cauchy em $E_1 \times \cdots \times E_k$. Por definição, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $k, \ell > k_0$, então

$$\|(x_1^k, \dots, x_n^k) - (x_1^\ell, \dots, x_n^\ell)\|_2 < \varepsilon.$$

Logo $\|x_i^k - x_i^\ell\|_{E_i} < \varepsilon$ para cada $i = 1, \dots, n$. Como cada E_i é espaço de Banach, existe $x_i = \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k$. Claramente $y = (x_1, \dots, x_n)$ é o limite de $y_k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$ em $E_1 \times \cdots \times E_n$, logo $E_1 \times \cdots \times E_n$ é espaço de Banach. $\square$

Capítulo 4

Operadores Lineares Contínuos

Os espaços normados têm uma estrutura algébrica de espaço vetorial, à qual estão associadas as transformações lineares, e uma estrutura topológica de espaço métrico, à qual estão associadas as funções contínuas. Assim os morfismos entre espaços normados são as funções que são simultaneamente lineares e contínuas. Tais funções são normalmente chamadas de **operadores lineares contínuos**. Sendo assim, um **operador linear contínuo** do espaço normado E no espaço normado F , ambos sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$, é uma função $T: E \longrightarrow F$ que é linear, isto é

$$T(x + y) = T(x) + T(y) \quad \text{para quaisquer } x, y \in E$$

$$T(ax) = aT(x) \quad \text{para todo } a \in \mathbb{K} \text{ e qualquer } x \in E,$$

e contínua, isto é, para todos $x_0 \in E$ e $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x) - T(x_0)\| < \epsilon$ sempre que $x \in E$ e $\|x - x_0\| < \delta$. O conjunto de todos os operadores lineares contínuos de E em F será denotado por $\mathcal{L}(E, F)$. É claro que $\mathcal{L}(E, F)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações usuais de funções. Quando F é o corpo dos escalares, escrevemos E' no lugar de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, chamamos esse espaço de **dual topológico** de E , ou simplesmente **dual** de E , e dizemos que seus elementos são **funcionais lineares contínuos**. Seguindo a linha de que os morfismos entre espaços normados são os operadores lineares contínuos, dizemos que dois espaços normados E e F são **topologicamente isomorfos**, ou simplesmente **isomorfos**, se existir um operador linear contínuo bijetor $T: E \longrightarrow F$ cujo operador inverso $T^{-1}: F \longrightarrow E$ – que é sempre linear – é também contínuo. Tal

operador T é chamado de **isomorfismo topológico**, ou simplesmente **isomorfismo**.

Uma função $f: E \rightarrow F$ – não necessariamente linear – tal que $\|f(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in E$ é chamada de **isometria**. Um operador linear $T: E \rightarrow F$ que é uma isometria é chamado de **isometria linear**. Observe que toda isometria linear é injetora e contínua. Um isomorfismo que é também uma isometria é chamado de **isomorfismo isométrico**, e nesse caso dizemos que os espaços são **isomorfos isometricamente** [3].

4.0.1 Caracterizações dos operadores lineares contínuos

Relembremos duas classes importantes de funções no contexto de espaços métricos: uma função $f: M \rightarrow N$ entre espaços métricos é:

- **Lipschitziana** se existe uma constante $L > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y)$ para todos $x, y \in M$;
- **Uniformemente contínua** se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ sempre que $x, y \in M$ e $d(x, y) < \delta$.

Sabe-se que para funções entre espaços métricos, as implicações

lipschitziana $\implies$ uniformemente contínua $\implies$ contínua $\implies$ contínua em um ponto,

são verdadeiras e que, em geral, todas as implicações inversas são falsas. O próximo resultado, que remonta aos trabalhos de F. Riesz, mostra que todos esses conceitos são equivalentes no contexto de operadores lineares entre espaços normados. Ou seja, a linearidade, ou em última instância a estrutura algébrica, simplifica o comportamento topológico. Além disso provaremos outras equivalências que muito úteis serão no decorrer do texto.

Teorema 4.0.1. *Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $T: E \rightarrow F$ linear. As seguintes condições são equivalentes:*

- T é lipschitziano.
- T é uniformemente contínuo.

(c) T é contínuo.

(d) T é contínuo em algum ponto de E .

(e) T é contínuo na origem.

(f) $\sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} < \infty$.

(g) Existe uma constante $C \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in E$.

Demonstração. As implicações (a) $\implies$ (b) $\implies$ (c) $\implies$ (d) são válidas no contexto de espaços métricos, isto é, não dependem da linearidade de T .

(d) $\implies$ e) Suponha T contínuo no ponto $x_0 \in E$. Seja $\epsilon > 0$. Então existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x) - T(x_0)\| < \epsilon$ sempre que $\|x - x_0\| < \delta$. Tome $x \in E$ tal que $\|x - 0\| = \|x\| < \delta$. Então $\|(x + x_0) - x_0\| = \|x\| < \delta$. Portanto

$$\begin{aligned}\|T(x) - T(0)\| &= \|T(x) - 0\| = \|T(x)\| = \|T(x) + T(x_0) - T(x_0)\| \\ &= \|T(x + x_0) - T(x_0)\| < \epsilon,\end{aligned}$$

provando que T é contínuo na origem.

(e) $\implies$ (f) Da continuidade de T na origem existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x)\| < 1$ sempre que $\|x\| < \delta$. Se $\|x\| \leq 1$, $\|\frac{\delta}{2}x\| < \delta$, e então $\frac{\delta}{2}\|T(x)\| = \|T(\frac{\delta}{2}x)\| < 1$. Isso prova que

$$\sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \leq \frac{2}{\delta} < \infty.$$

(f) $\implies$ (g) Para $x \in E$, $x \neq 0$, temos

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \sup\{\|T(y)\| : \|y\| \leq 1\},$$

e portanto $\|T(x)\| \leq (\sup\{\|T(y)\| : \|y\| \leq 1\})\|x\|$ para todo $x \neq 0$. O resultado segue pois essa desigualdade é trivialmente verificada para $x = 0$.

(g) $\implies$ (a) Dados $x_1, x_2 \in E$,

$$\|T(x_1) - T(x_2)\| = \|T(x_1 - x_2)\| \leq C\|x_1 - x_2\|,$$

e portanto T é lipschitziano com constante C . $\square$

Corolário 4.0.1. *Seja $T: E \longrightarrow F$ um operador linear bijetor entre espaços normados. Então T é um isomorfismo se, e somente se, existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que*

$$C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\| \quad \text{para todo } x \in E.$$

Da condição (f) do Teorema (4.0.1) segue que os operadores lineares contínuos são exatamente aqueles que transformam conjuntos limitados no domínio em conjuntos limitados no contradomínio. Por isso os operadores lineares contínuos são muitas vezes chamados de **operadores lineares limitados**. Para evitar ambiguidade seguiremos com o termo operador linear contínuo e com a noção de função limitada como aquela que tem imagem limitada.

Por outro lado, a mesma condição (f) nos ensina como normar o espaço $\mathcal{L}(E, F)$ dos operadores lineares contínuos de E em F .

Proposição 4.0.1. *Sejam E e F espaços normados.*

(a) *A expressão*

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\},$$

define uma norma no espaço $\mathcal{L}(E, F)$.

(b) *$\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ para todos $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $x \in E$.*

(c) *Se F for Banach, então $\mathcal{L}(E, F)$ também é Banach.*

Demonstração. Deixamos (a) e (b) a cargo do leitor. Provemos (c). Seja $(T_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E, F)$. Dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\| \leq \epsilon$ sempre que $n, m \geq n_0$. Logo

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| \leq \epsilon\|x\| \quad (2.1)$$

para todos $x \in E$ e $n, m \geq n_0$. Segue que para cada $x \in E$, a sequência $(T_n(x))_{n=1}^\infty$ é de Cauchy em F , logo convergente pois F é Banach. Podemos então definir

$$T: E \longrightarrow F, \quad T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x).$$

A linearidade de T segue das propriedades dos limites. Fazendo $m \rightarrow \infty$ em (2.1) obtemos

$$\|(T_n - T)(x)\| = \|T_n(x) - T(x)\| \leq \epsilon \|x\| \quad (2.2)$$

para todos $x \in E$ e $n \geq n_0$. Em particular,

$$\|(T_{n_0} - T)(x)\| = \|T_{n_0}(x) - T(x)\| \leq \epsilon \|x\|$$

para todo $x \in E$, o que nos garante que $(T - T_{n_0}) \in \mathcal{L}(E, F)$. Portanto $T = (T - T_{n_0}) + T_{n_0} \in \mathcal{L}(E, F)$. De (2.2) segue também que $\|T_n - T\| \leq \epsilon$ para todo $n \geq n_0$, e assim segue que $T_n \rightarrow T$ em $\mathcal{L}(E, F)$. $\square$

Corolário 4.0.2. *O dual E' de qualquer espaço normado E é um espaço de Banach.*

Em qualquer espaço normado E , a identidade em E é um operador linear contínuo de norma 1, e que, entre dois espaços normados quaisquer, o operador nulo é um operador linear contínuo de norma 0. Também é possível verificar que se $\phi \in E'$ e $y \in F$, então

$$\phi \otimes y: E \rightarrow F, \quad \phi \otimes y(x) = \phi(x)y,$$

é um operador linear contínuo de norma $\|\phi\| \cdot \|y\|$. Vejamos alguns exemplos em espaços específicos:

Seja $1 \leq p < \infty$. Escolha uma sequência $(b_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p$ e considere o operador

$$T: \ell_\infty \rightarrow \ell_p, \quad T((a_j)_{j=1}^\infty) = (a_j b_j)_{j=1}^\infty.$$

A linearidade de T é imediata. De

$$\begin{aligned} \|T((a_j)_{j=1}^\infty)\|_p &= \left(\sum_{j=1}^\infty |a_j b_j|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^\infty |b_j|^p \right)^{1/p} \cdot \sup_j |a_j| \\ &= \|(b_j)_{j=1}^\infty\|_p \cdot \|(a_j)_{j=1}^\infty\|_\infty \end{aligned}$$

para toda sequência $(a_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty$, concluímos que T é contínuo e que $\|T\| \leq \|(b_j)_{j=1}^\infty\|_p$. Tomando $x = (1, 1, 1, \dots) \in \ell_\infty$ temos $\|x\|_\infty = 1$ e $\|T(x)\| = \|(b_j)_{j=1}^\infty\|_p$, logo $\|T\| = \|(b_j)_{j=1}^\infty\|_p$. Este operador T é chamado de **operador diagonal** pela sequência $(b_j)_{j=1}^\infty$.

Transportando o exemplo acima para os espaços de funções, considere $1 \leq p < \infty$ e escolha uma função $g \in L_p[0, 1]$. Assim como antes, o operador

$$T: C[0, 1] \longrightarrow L_p[0, 1], \quad T(f) = fg,$$

é linear, contínuo e $\|T\| = \|g\|_p$. Neste caso T é chamado de **operador multiplicação** pela função g .

Exemplo 4.0.1. Considere o subconjunto $\mathcal{P}[0, 1]$ de $C[0, 1]$ formado pelas funções polinomiais (ou polinômios). É claro que $\mathcal{P}[0, 1]$ é um subespaço vetorial de $C[0, 1]$, logo é um espaço normado com a norma $\|\cdot\|_\infty$ herdada de $C[0, 1]$. É claro também que o operador derivação

$$T: \mathcal{P}[0, 1] \longrightarrow \mathcal{P}[0, 1], \quad T(f) = f' = \text{derivada de } f,$$

é linear. Suponha que T seja contínuo. Nesse caso existe C tal que $\|T(f)\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$ para todo polinômio $f \in \mathcal{P}[0, 1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tome $f_n \in \mathcal{P}[0, 1]$ a função dada por $f_n(t) = t^n$. Então

$$n = \|f'_n\|_\infty = \|T(f_n)\|_\infty \leq C\|f_n\|_\infty = C$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, e isso configura uma contradição, logo T é descontínuo.

Capítulo 5

Teorema da Aplicação Aberta e do Gráfico Fechado

O Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado foram publicados por Banach em 1932, o que normalmente é considerado o marco da fundação da Análise Funcional como disciplina matemática [3]. A primeira demonstração do Teorema da Aplicação Aberta é atribuída a Juliusz Schauder, em 1930. Neste capítulo apresentaremos os Teoremas da Aplicação aberta e do Gráfico Fechado, além do arcabouço teórico para compreensão das demonstrações e aplicações. devido a Banach (1929), e estabelece que se E e F são espaços de Banach, então todo operador linear contínuo e sobrejetor $T: E \longrightarrow F$ é uma aplicação aberta, isto é, $T(A)$ é aberto em F sempre que A for aberto em E .

5.1 Conceitos Fundamentais

Antes de abordar o Teorema da Aplicação Aberta, é importante definir o que se entende por aplicação aberta.

Definição 5.1.1. Uma aplicação $T: E \rightarrow F$, onde E e F são espaços normados, é uma *aplicação aberta* se $T(A)$ é um aberto em F sempre que A é um aberto em E .

A proposição a seguir evidencia um resultado que será importante para a demonstração do Teorema da Aplicação Aberta.

Proposição 5.1.1. *Sejam E e F espaços normados e $T : E \rightarrow F$ uma aplicação linear. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) T é aberta;
- (b) Existe $r > 0$ tal que $B_F(0, r) \subset T(B_E(0, 1))$.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b). Como $B_E(0, 1)$ é um aberto em E , $T(B_E(0, 1))$ é um aberto em F além disso, note que,

$$0 \in T(B_E(0, 1)),$$

já que $T(0) = 0$, assim existe $r > 0$ tal que $B_F(0, r) \subset T(B_E(0, 1))$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Tome A um aberto em E . Devemos mostrar que $T(A)$ é um aberto em F . Para isso, tomemos $y \in T(A)$, então existe $x \in A$ tal que $y = T(x)$. Como A é um aberto, existe $s > 0$ tal que

$$x + sB_E(0, 1) = B_E(x, s) \subset A,$$

pelo Lema (2.2.1) e pela linearidade de T ,

$$T(x) + s \cdot T(B_E(0, 1)) \subset T(A).$$

Pela hipótese, existe $r > 0$ tal que $B_F(0, r) \subset T(B_E(0, 1))$, ou seja,

$$T(x) + sB_F(0, r) \subset T(A),$$

donde

$$B_F(y, sr) \subset T(A).$$

Portando, estão verificadas as implicações. □

Exemplo 5.1.1. A aplicação $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$, é aberta.

Exemplo 5.1.2. A aplicação $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, não é aberta, pois $T(-1, 1) = [0, 1)$.

A seguir apresentaremos Teorema de Baire, será extremamente importante para abordarmos o Teorema da Aplicação Aberta. O Teorema de Baire é um dos resultados amplamente aplicados em Análise Funcional e Topologia Geral. Sua importância reside no fato de garantir que, em espaços completos (como espaços de Banach), a interseção de uma família enumerável de abertos densos é ainda densa ou, equivalentemente, uma união enumerável de fechados com interior vazio tem interior vazio. A demonstração do teorema que apresentamos abaixo é a versão apresentada por [3], escolhemos essa demonstração por ser mais adequada aos nossos objetivos.

Teorema 5.1.1. *[Teorema de Baire] Sejam (M, d) um espaço métrico completo e $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de subconjuntos fechados de M tais que*

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que F_{n_0} tem interior não-vazio.

Demonstração. Denotemos por $\text{int } A$ o interior de um subconjunto A de M . Façamos por absurdo, e para isso suponhamos que $\text{int}(F_n) = \emptyset$ para todo n . Chamando $A_n = (F_n)^c = M \setminus F_n$, cada A_n é aberto e

$$\overline{A_n} = \overline{(F_n)^c} = (\text{int}(F_n))^c = \emptyset^c = M$$

para todo n . Em particular, cada A_n é não-vazio.

Escolha $x_1 \in A_1$ e use o fato de A_1 ser aberto para garantir a existência de $0 < \delta_1 < 1$ tal que a bola fechada de centro x_1 e raio δ_1 , denotada por $B[x_1, \delta_1]$, está contida em A_1 . De $\overline{A_2} = M$ temos $A_2 \cap B(x_1, \delta_1) \neq \emptyset$, onde $B(x_1, \delta_1)$ denota a bola aberta de centro x_1 e raio δ_1 . E como $A_2 \cap B(x_1, \delta_1)$ é aberto, existem $x_2 \in A_2$ e $0 < \delta_2 < \frac{1}{2}$ tais que

$$B[x_2, \delta_2] \subseteq A_2 \cap B(x_1, \delta_1) \subseteq A_2 \cap B[x_1, \delta_1].$$

Continuando o processo, construímos uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em M e uma sequência $(\delta_n)_{n=1}^{\infty}$ de números reais tais que

$$0 < \delta_n < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad B[x_{n+1}, \delta_{n+1}] \subseteq A_{n+1} \cap B[x_n, \delta_n]$$

para todo n . Dado $\varepsilon > 0$, escolha $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$. Se $m, n \geq n_0$, como $B[x_n, \delta_n] \cap B[x_m, \delta_m] \subseteq B[x_{n_0}, \delta_{n_0}]$, temos

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{n_0}) + d(x_n, x_{n_0}) \leq 2\delta_{n_0} < \frac{2}{n_0} < \varepsilon.$$

Isso mostra que $(x_n)_{n=1}^\infty$ é de Cauchy em M , logo convergente. Digamos $x_n \rightarrow x \in M$. Seja $n \in \mathbb{N}$. Como $x_m \in B[x_m, \delta_m] \subseteq B[x_n, \delta_n]$ para todo $m \geq n$ e $B[x_n, \delta_n]$ é um conjunto fechado, segue que $x \in B[x_n, \delta_n] \subseteq A_n$. Portanto,

$$x \in \bigcap_{n=1}^\infty A_n = \bigcap_{n=1}^\infty (F_n)^c = \left(\bigcup_{n=1}^\infty F_n \right)^c = M^c = \emptyset,$$

o que é uma contradição. Isto conclui a demonstração. $\square$

Lema 5.1.1. *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $T: E \rightarrow F$ um operador linear contínuo. Se existirem $R, r > 0$ tais que $\overline{T(B_E(0; R))} \supseteq B_F(0; r)$, então $T(B_E(0; R)) \supseteq B_F\left(0; \frac{r}{2}\right)$.*

Demonstração. Da linearidade de T e da propriedade $\overline{aM} = a\overline{M}$ (válida para $a > 0$ e $M \subset F$), obtemos para todo $a > 0$:

$$\overline{T(B_E(0; aR))} = \overline{aT(B_E(0; R))} = a\overline{T(B_E(0; R))} \supseteq aB_F(0; r) = B_F(0; ar). \quad (1)$$

Seja $y \in B_F(0; r/2)$. Fazendo $a = 1/2$ em (1).

$$\overline{T(B_E(0; R/2))} \supseteq B_F(0; r/2).$$

Como $y \in B_F(0; r/2) \subset \overline{T(B_E(0; R/2))}$, existe $x_1 \in B_E(0; R/2)$ tal que

$$\|y - T(x_1)\| < \frac{r}{4}.$$

Agora, $y_1 := y - T(x_1)$ satisfaz $\|y_1\| < r/4$. Aplicando (1) com $a = 1/4$, temos

$$\overline{T(B_E(0; R/4))} \supseteq B_F(0; r/4).$$

Como $y_1 \in B_F(0; r/4) \subset \overline{T(B_E(0; R/4))}$, existe $x_2 \in B_E(0; R/4)$ tal que

$$\|y_1 - T(x_2)\| < \frac{r}{8}.$$

Prosseguindo indutivamente, construímos $x_1, \dots, x_{n-1}$ com

$$x_k \in B_E(0; R/2^k), \quad \left\| y - \sum_{i=1}^k T(x_i) \right\| < \frac{r}{2^{k+1}} \quad (k = 1, \dots, n-1).$$

Defina $y_{n-1} := y - \sum_{i=1}^{n-1} T(x_i)$, note que temos $\|y_{n-1}\| < r/2^n$. Fazendo $a = 1/2^n$, obtemos

$$\overline{T(B_E(0; R/2^n))} \supseteq B_F(0; r/2^n).$$

Como $\|y_{n-1}\| < r/2^n$, temos $y_{n-1} \in B_F(0; r/2^n) \subset \overline{T(B_E(0; R/2^n))}$; logo existe $x_n \in B_E(0; R/2^n)$ tal que

$$\|y_{n-1} - T(x_n)\| < \frac{r}{2^{n+1}},$$

isto é,

$$\left\| y - \sum_{i=1}^n T(x_i) \right\| < \frac{r}{2^{n+1}}. \quad (2)$$

Assim construímos uma sequência $(x_n)_{n \geq 1}$ em E com $\|x_n\| < R/2^n$ para todo n . Considere as somas parciais

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k.$$

Para $m > n$, pela desigualdade triangular,

$$\|S_m - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|x_k\| < \sum_{k=n+1}^m \frac{R}{2^k}.$$

Como a série geométrica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{R}{2^k} = R$ converge, sua cauda tende a zero. Ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{R}{2^k} < \varepsilon.$$

Portanto, para $m > n \geq N$, temos

$$\|S_m - S_n\| < \varepsilon,$$

o que mostra que (S_n) é uma sequência de Cauchy em E . Sendo E um espaço de Banach, (S_n) converge. Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge em E .

Logo $x \in B_E(0; R)$. Tomando o limite $n \rightarrow \infty$ em (2) e usando a continuidade de T , obtemos

$$\left\| y - T\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) \right\| = 0,$$

ou seja, $y = T(x)$. Portanto $y \in T(B_E(0; R))$. Como y era arbitrário em $B_F(0; r/2)$, concluímos

$$T(B_E(0; R)) \supseteq B_F\left(0; \frac{r}{2}\right).$$

□

O Teorema de Banach-Steinhaus, também conhecido como **Princípio da Limitação Uniforme**, garante que se uma família de operadores lineares contínuos é pontualmente limitada, então é uniformemente limitada em norma.

Teorema 5.1.2. *(Teorema de Banach-Steinhaus ou Princípio da Limitação Uniforme)*
Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $\{T_i\}_{i \in I}$ uma família de operadores em $\mathcal{L}(E; F)$ tal que para cada $x \in E$ existe $C_x < \infty$ com

$$\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < C_x.$$

Então, existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| \leq C,$$

Ou seja, a família é uniformemente limitada em norma.

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere o conjunto:

$$A_n = \left\{ x \in E : \sup_{i \in I} \|T_i(x)\| \leq n \right\} = \bigcap_{i \in I} \{x \in E : \|T_i(x)\| \leq n\}.$$

Cada A_n é fechado por ser interseção de fechados (devido à continuidade dos $A_n = (\|\cdot\| \circ T)^{-1}([0, n])$). Pela hipótese de limitação pontual, para cada $x \in E$ existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_{n_x}$. Logo:

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Pelo Teorema de Baire (5.1.1), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que A_{n_0} tem interior não-vazio. Seja $a \in \text{int}(A_{n_0})$, então existe $\rho > 0$ tal que $B(a, \rho) \subseteq A_{n_0}$. Tome $r = \rho/2$; temos $B[a, r] \subset B(a, \rho) \subseteq A_{n_0}$. Seja $y \in E$ com $\|y\| \leq 1$. Note que, para $x = a + ry$, temos $\|x - a\| = r\|y\| \leq r$, logo $x \in A_{n_0}$. Assim,

$$\|T_i(x)\| \leq n_0 \quad \text{e} \quad \|T_i(a)\| \leq n_0, \quad \text{para todo } i \in I.$$

Logo

$$\begin{aligned} \|T_i(ry)\| &= \|T_i(x - a)\| \leq \|T_i(x)\| + \|T_i(a)\| \leq 2n_0 \\ \|T_i(y)\| &\leq \frac{2n_0}{r} \end{aligned}$$

Agora, seja $y \in E$ com $\|y\| \leq 1$. Considere $x = a + ry$. Notamos que

$$\|x - a\| = \|ry\| = r\|y\| \leq r,$$

logo $x \in B[a, r] \subset A_{n_0}$. Portanto, $x, a \in A_{n_0}$, o que implica

$$\|T_i(x)\| \leq n_0 \quad \text{e} \quad \|T_i(a)\| \leq n_0, \quad \text{para todo } i \in I.$$

Pela linearidade de T_i e pela desigualdade triangular,

$$\|T_i(ry)\| = \|T_i(x - a)\| = \|T_i(x) - T_i(a)\| \leq \|T_i(x)\| + \|T_i(a)\| \leq n_0 + n_0 = 2n_0.$$

Como $r > 0$, obtemos

$$\|T_i(y)\| = \frac{1}{r}\|T_i(ry)\| \leq \frac{2n_0}{r}.$$

Portanto,

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| \leq \frac{2n_0}{r} < \infty.$$

□

Corolário 5.1.1. *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathcal{L}(E; F)$ tal que $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é convergente em F para todo $x \in E$. Se definirmos*

$$T : E \longrightarrow F, \quad T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x),$$

então T é um operador linear contínuo.

Proposição 5.1.2. *Sejam E, F espaços de Banach e $(T_n) \subseteq \mathcal{L}(E, F)$ uma sequência de operadores lineares contínuos tal que*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| = +\infty. \text{ Existe } x_0 \in E \text{ tal que, } \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n x_0\| = +\infty.$$

(O ponto x_0 é dito **ponto de ressonância**.)

O resultado demonstra que se uma família de operadores lineares contínuos é ilimitada em norma, então deve existir pelo menos um ponto $x_0 \in E$ onde essa família é “ressonante” isto é, onde as imagens $T_n x_0$ são ilimitadas em F .

Exemplo 5.1.3. Sejam E, F espaços de Banach e $(T_n) \subset \mathcal{L}(E, F)$ uma sequência de operadores lineares contínuos tal que, para cada $x \in E$, a sequência $(T_n(x))$ é de Cauchy em F . então, $(\|T_n\|)$ é limitada em $\mathbb{R}$.

Por hipótese, temos que E e F são espaços de Banach, $(T_n) \subset \mathcal{L}(E, F)$ e para cada $x \in E$ fixo, a sequência $(T_n(x))$ é de Cauchy em F . Como F é completo (por ser espaço de Banach), toda sequência de Cauchy em F é convergente. Portanto, para cada $x \in E$, existe o limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = T(x) \in F.$$

Em particular, para cada $x \in E$, a sequência $(T_n(x))$ é limitada em F , ou seja,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n(x)\| < \infty, \quad \text{para cada } x \in E.$$

Pelo **Princípio da Limitação Uniforme** (Teorema de Banach-Steinhaus). Aplicando este princípio, concluímos que:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty,$$

o que significa que a sequência $(\|T_n\|)$ é limitada.

5.2 Teorema da Aplicação aberta.

Teorema 5.2.1. (*Teorema da Aplicação Aberta*) *Sejam E e F espaços de Banach e $T: E \rightarrow F$ linear, contínuo e sobrejetor. Então T é uma aplicação aberta. Em particular, todo operador linear contínuo e bijetor entre espaços de Banach é um isomorfismo.*

Demonstração. De $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_E(0; n)$ e da sobrejetividade de T segue que

$$F = T(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_E(0; n)) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_E(0; n))} \subset F,$$

portanto,

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_E(0; n))}.$$

Pelo Teorema de Baire, Teorema (5.1.1) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{T(B_E(0; n_0))}$ tem interior não-vazio. Assim, existem $b \in \overline{T(B_E(0; n_0))}$ e $r > 0$ tais que

$$B_F(b; r) \subseteq \overline{T(B_E(0; n_0))}.$$

Como

$$\overline{T(B_E(0; n_0))} = -\overline{T(B_E(0; n_0))},$$

resulta que

$$B_F(-b; r) = -B_F(b; r) \subseteq \overline{T(B_E(0; n_0))}.$$

Para todo $x \in B_F(0; r)$ temos $x = \frac{1}{2}(b+x) + \frac{1}{2}(-b+x)$. Como

$$b+x \in B_F(b; r) \subseteq \overline{T(B_E(0; n_0))} \quad \text{e} \quad -b+x \in B_F(-b; r) \subseteq \overline{T(B_E(0; n_0))},$$

e como $\overline{T(B_E(0; n_0))}$ é convexo, segue que

$$x \in \overline{T(B_E(0; n_0))}.$$

Logo,

$$B_F(0; r) \subseteq \overline{T(B_E(0; n_0))}.$$

Pelo Lema acima 5.1.1 sabemos que $T(B_E(0; n_0)) \supseteq B_F(0; \rho)$ para $\rho = \frac{r}{2}$, e portanto $T(B_E(0; cn_0)) \supseteq B_F(0; c\rho)$ para todo real positivo c . Vejamos que:

$$T(B_E(x; cn_0)) \supseteq B_F(T(x); c\rho)$$

para todo $x \in E$ e todo $c > 0$. De fato, $B_E(x; cn_0) = x + B_E(0, cn_0)$, e então

$$T(B_E(x; cn_0)) = T(x) + T(B_E(0; cn_0)) \supseteq T(x) + B_F(0; c\rho) = B_F(T(x); c\rho).$$

Agora podemos provar que $T(U)$ é aberto em F para cada U aberto em E . Sejam $x \in U$ e $c > 0$ tais que $B_E(x, cn_0) \subseteq U$. Então

$$T(U) \supseteq T(B_E(x; cn_0)) \supseteq B_F(T(x); c\rho).$$

Assim, todo ponto $T(x) \in T(U)$ possui uma vizinhança aberta contida em $T(U)$, portanto $T(U)$ é aberto. $\square$

Corolário 5.2.1. *Seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$, com E e F sendo espaços de Banach. Se T é sobrejetora então existe $c > 0$ tal que $B_F(0, c) \subset T(B_E(0, 1))$.*

Proposição 5.2.1. *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \rightarrow F$ um operador linear contínuo e sobrejetivo.*

- (i) *Para toda sequência limitada $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em F , existe uma sequência limitada $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em E tal que $Tx_n = y_n$ para todo n .*
- (ii) *Para toda sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em F com $y_n \rightarrow 0$, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em E com $x_n \rightarrow 0$ e $Tx_n = y_n$ para todo n .*

Demonstração. (i) Pelo Teorema da Aplicação Aberta, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_F(\delta, 0) \subset T(B_E(1, 0)),$$

Seja $M > 0$ tal que $\|y_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Escolha $M' > M$. Então para cada n ,

$$\left\| \frac{\delta}{M'} y_n \right\| \leq \frac{\delta}{M'} M < \delta.$$

Portanto, $w_n := \frac{\delta}{M'} y_n \in B_F(\delta, 0)$. Pela inclusão acima, existe $z_n \in B_E(1, 0)$ com $Tz_n = w_n$. Defina

$$x_n := \frac{M'}{\delta} z_n,$$

Temos

$$Tx_n = \frac{M'}{\delta} Tz_n = \frac{M'}{\delta} w_n = y_n,$$

e

$$\|x_n\| = \frac{M'}{\delta} \|z_n\| \leq \frac{M'}{\delta}$$

Logo (x_n) é limitada em E .

(ii) Pelo Teorema da Aplicação Aberta, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_F(\delta, 0) \subset T(B_E(1, 0)).$$

Dado $y \in F$, $y \neq 0$, temos $\frac{\delta}{\|y\|} y \in B_F(\delta, 0)$ (pois sua norma é δ). Logo existe $z \in B_E(1, 0)$ com $Tz = \frac{\delta}{\|y\|} y$. Definindo $x := \frac{\|y\|}{\delta} z$, obtemos $Tx = y$ e

$$\|x\| = \frac{\|y\|}{\delta} \|z\| \leq \frac{1}{\delta} \|y\|.$$

Apliquemos essa construção a cada y_n . Se $y_n = 0$, tome $x_n = 0$. Se $y_n \neq 0$, escolha $z_n \in B_E(1, 0)$ com $Tz_n = \frac{\delta}{\|y_n\|} y_n$ e ponha

$$x_n = \frac{\|y_n\|}{\delta} z_n.$$

Então $Tx_n = y_n$ e

$$\|x_n\| \leq \frac{1}{\delta} \|y_n\|$$

Como $\|y_n\| \rightarrow 0$, temos $\|x_n\| \rightarrow 0$, ou seja, $x_n \rightarrow 0$ em E . □

5.3 Teorema do Gráfico Fechado

O Teorema do Gráfico Fechado estabelece uma condição necessária e suficiente para a continuidade de um operador linear entre espaços de Banach: um operador linear $T : E \rightarrow F$ é contínuo se, e somente se, seu gráfico

$$G(T) = \{(x, T(x)) \in E \times F : x \in E\}$$

é um subconjunto fechado de $E \times F$. A principal utilidade prática deste teorema reside em simplificar a demonstração da continuidade. Se formos usar sequências para provar que T é contínuo deve-se mostrar que, para toda sequência convergente $x_n \rightarrow x$ em E , tem-se $T(x_n) \rightarrow T(x)$ em F . O Teorema do Gráfico Fechado permite substituir essa exigência por uma verificação em geral mais simples, para concluir que T é contínuo, basta provar que seu gráfico é fechado. Usando sequências, isso se reduz a:

1. Supor que $x_n \rightarrow x$ em E e que $T(x_n) \rightarrow y$ em F para algum $y \in F$.
2. Demonstrar que, necessariamente, $y = T(x)$,

ou seja, não é necessário provar que $(T(x_n))$ converge sempre que (x_n) converge, basta mostrar que se ela convergir, seu limite só pode ser $T(x)$.

Definição 5.3.1. Sejam E e F espaços normados e $T : E \rightarrow F$ um operador linear. O gráfico de T é o conjunto

$$G(T) = \{(x, y) : x \in E \text{ e } y = T(x)\} = \{(x, T(x)) : x \in E\} \subseteq E \times F.$$

Note que $G(T)$ é um subespaço vetorial de $E \times F$. Mas em geral $G(T)$ pode ser um subconjunto fechado de $E \times F$ ou não. Vejamos que, para operadores lineares entre espaços de Banach, a continuidade de T é equivalente ao fato de $G(T)$ ser fechado, como veremos na seção 5.4.

Teorema 5.3.1. (*Teorema do Gráfico Fechado*): Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \rightarrow F$ um operador linear. Então T é contínuo se, e somente se, $G(T)$ é fechado em $E \times F$.

Demonstração. Suponha T contínuo. Então a função

$$f: E \times F \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \|T(x) - y\|,$$

é contínua, e portanto $G(T) = f^{-1}(\{0\}) = \{(x, y) \in E \times F : T(x) - y = 0\}$, então $G(T)$ é fechado por ser a imagem inversa do fechado $\{0\}$ pela função contínua f . Reciprocamente, suponha $G(T)$ fechado. Sabemos que $E \times F$ é espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_1$. A função

$$\pi: G(T) \longrightarrow E, \quad \pi(x, T(x)) = x,$$

é claramente linear e bijetora. Além disso, π é contínua para todo $x \in E$

$$\|\pi(x, T(x))\| = \|x\| \leq \|x\| + \|T(x)\| = \|(x, T(x))\|_1.$$

Do Teorema da Aplicação Aberta segue então que π^{-1} é contínua, e portanto, existe $C > 0$ tal que $\|(x, T(x))\|_1 \leq C \|x\|$ para todo $x \in E$. Logo

$$\|T(x)\| \leq \|T(x)\| + \|x\| = \|(x, T(x))\|_1 \leq C \|x\|,$$

para todo $x \in E$. Isso prova que T é contínuo.

□

Agora vamos apresentar um exemplo que, para quem estudou os tópicos principais até aqui pode parecer trivial, mas ele carrega explicações de que como o teorema se comporta em casos simples como $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exemplo 5.3.1. Considere $X = \mathbb{R}$ com norma usual e $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x) = cx$, tal que (c é constante).

$$G(T) = \{(x, cx) ; x \in \mathbb{R}\}.$$

Tome uma sequência,

$$(x_n, T(x_n)) = (x_n, cx_n)$$

no gráfico $G(T)$. Suponha que (x_n, cx_n) , converge para (x, y) em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Então:

$$x_n \rightarrow x,$$

$$cx_n \rightarrow cx = y.$$

Logo $(x, y) \in G(T)$. Logo $G(T)$ é fechado e portando T é contínuo, pelo Teorema do Gráfico Fechado. Antes de enunciarmos e provarmos a próxima proposição temos que definir o que é um produto interno.

5.4 Equivalência do Teorema da Aplicação Aberta e do Gráfico Fechado.

Neste tópico vamos verificar a equivalência do Teorema do Gráfico Fechado com o Teorema da Aplicação Aberta. A demonstração abaixo apresenta que o Teorema da Aplicação Aberta implica o Teorema do Gráfico Fechado. Em seguida veremos que o Teorema do Gráfico Fechado implica o Teorema da Aplicação Aberta. Mais precisamente, esses dois resultados clássicos da Análise Funcional são equivalentes. Abaixo podemos ver uma ilustração da relação dos teoremas e a continuidade da aplicação. A demonstração aqui presente foi retirada do livro [2]. A seguir fizemos um diagrama onde ilustramos a relação de equivalência entre esses teoremas além de mostrar que ambos se relacionam com a continuidade de T .

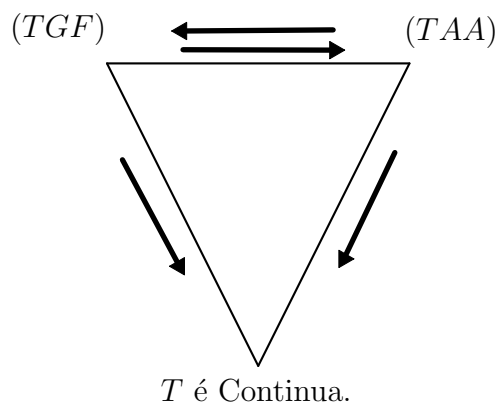


FIGURA 4.

Fonte: Autor.

5.4.1 Teorema da Aplicação Aberta implica o Teorema do Gráfico Fechado.

Teorema 5.4.1. (*Teorema do Gráfico Fechado*) *Sejam E e F dois espaços de Banach. Se $T : E \rightarrow F$ é uma aplicação linear cujo gráfico é fechado, então T é contínua.*

Demonstração. Seja $T : E \rightarrow F$ uma aplicação linear com gráfico fechado. Queremos mostrar que T é contínua, para isso vamos mostrar que T é a composição de duas funções contínuas.

Considere $T_1 : (x, T(x)) \in G(T) \mapsto x \in E$. Como, por hipótese, $G(T)$ é fechado em $E \times F$ e $E \times F$ é um espaço de Banach pela Proposição 3.1.5, segue da Proposição (3.1.1) que $G(T)$ é um espaço de Banach. Assim, T_1 é uma aplicação linear, contínua e bijetiva entre espaços de Banach e, portanto, pelo Teorema da Aplicação Aberta, T_1 é aberta, o que equivale a dizer que T_1^{-1} é contínua.

Agora, consideremos $T_2 : (x, T(x)) \in G(T) \mapsto T(x) \in F$. Segue que T_2 é linear e contínua e, assim,

$$T = T_2 \circ T_1^{-1},$$

é contínua em E , como a composta de duas funções contínuas. □

5.4.2 Teorema do Gráfico Fechado implica o Teorema da Aplicação Aberta.

Para mostrarmos que o Teorema do Gráfico Fechado implica o Teorema da Aplicação Aberta, precisamos de algumas definições importantes.

Definição 5.4.1. Seja E um espaço vetorial. Consideremos E_1 um subespaço vetorial de E . Sejam $a, b \in E$, dizemos que a é equivalente a b módulo E_1 se

$$a - b \in E_1,$$

e denotamos por $a \sim b$ ou $a \sim b(\text{mod } E_1)$. Podemos definir, então, uma relação de equivalência em E , onde a classe de equivalência do vetor a , denotada por $[a]$, é dada por

$$[a] = \{u \in E; u \sim a\}.$$

Observemos que a classe de equivalência do vetor nulo é o subespaço E_1 , ou seja,

$$[0] = E_1.$$

Seja E_1 um subespaço do espaço vetorial E . As operações de adição e multiplicação por escalar no conjunto das classes de equivalência módulo E_1 definidas por

$$[a] + [b] = [a + b]$$

$$\lambda[a] = [\lambda a],$$

onde $a, b \in E$, e $\lambda \in \mathbb{K}$, tornam o conjunto das classes de equivalência módulo E_1 um espaço vetorial, chamado espaço quociente de E por E_1 e denotado por E/E_1 .

Precisamos verificar que estas operações estão bem definidas e que satisfazem os axiomas de espaço vetorial.

Definição das operações:

Sejam $a, a', b, b' \in E$ tais que $[a] = [a']$ e $[b] = [b']$. Isso significa que:

$$a - a' \in E_1 \quad \text{e} \quad b - b' \in E_1.$$

Para a adição:

$$(a + b) - (a' + b') = (a - a') + (b - b') \in E_1,$$

pois E_1 é subespaço vetorial. Logo, $[a + b] = [a' + b']$. Para a multiplicação por escalar:

$$\lambda a - \lambda a' = \lambda(a - a') \in E_1,$$

pois E_1 é subespaço vetorial. Logo, $[\lambda a] = [\lambda a']$.

Verificando os axiomas de espaço vetorial:

Sejam $[a], [b], [c] \in E/E_1$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

(i) Associatividade da adição:

$$([a] + [b]) + [c] = [a + b] + [c] = [(a + b) + c] = [a + (b + c)] = [a] + [b + c] = [a] + ([b] + [c])$$

(ii) Comutatividade da adição:

$$[a] + [b] = [a + b] = [b + a] = [b] + [a]$$

(iii) Elemento neutro: O elemento neutro é $[0] = E_1$, pois,

$$[a] + [0] = [a + 0] = [a]$$

(iv) Elemento oposto: O oposto de $[a]$ é $[-a]$, pois,

$$[a] + [-a] = [a + (-a)] = [0]$$

(v) Distributividade mista:

$$\lambda([a] + [b]) = \lambda[a + b] = [\lambda(a + b)] = [\lambda a + \lambda b] = [\lambda a] + [\lambda b] = \lambda[a] + \lambda[b]$$

(vi) Distributividade em relação à soma de escalares:

$$(\lambda + \mu)[a] = [(\lambda + \mu)a] = [\lambda a + \mu a] = [\lambda a] + [\mu a] = \lambda[a] + \mu[a]$$

(vii) Associatividade mista:

$$(\lambda\mu)[a] = [(\lambda\mu)a] = [\lambda(\mu a)] = \lambda[\mu a] = \lambda(\mu[a])$$

(viii) Elemento unidade:

$$1 \cdot [a] = [1 \cdot a] = [a]$$

Portanto, E/E_1 é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. A aplicação $\pi : E \longrightarrow E/E_1$ definida por $\pi(x) = [x]$, para cada $x \in E$, é chamada de aplicação quociente. A aplicação, π é linear e sobrejetiva.

Proposição 5.4.1. *Seja E um espaço normado e E_1 um subespaço fechado de E . Defina*

$$\|[x]\| = \inf_{y \in [x]} \|y\|, \quad [x] \in E/E_1.$$

Então:

- (i) $[x] = \{x\} + E_1$;
- (ii) A função $[x] \in E/E_1 \longmapsto \|[x]\| \in \mathbb{R}$ é uma norma em E/E_1 .
- (iii) A aplicação quociente $\pi : E \rightarrow E/E_1$ é contínua e aberta.
- (iv) Se E é um espaço de Banach, então E/E_1 é um espaço de Banach.

Demonstração. (i) Tome $a \in [x]$, dada Definição (5.4.1), temos que $a - x \in E_1$. Tome $y = a - x$ tal que, de forma que $a = x + y$. Isso implica que $a \in \{x\} + E_1$ podemos concluir que $[x] \subset \{x\} + E_1$. Assim precisamos verificar a outra inclusão, tome $a \in \{x\} + E_1$ então $a = x + y$, tal que $y \in E_1$. Assim temos que $a - x = y \in E_1$ e logo $a \in [x]$, segue que $\{x\} + E_1 \subset [x]$ o que implica que $[x] = \{x\} + E_1$

(ii) Para verificar que $\|[x]\| = \inf_{y \in [x]} \|y\|$ define uma norma no espaço quociente E/E_1 , devemos demonstrar que satisfaz os três axiomas de norma:

(i*) Positividade:

Seja $[x] \in E/E_1$. Por definição do ínfimo, temos:

$$\|[x]\| = \inf_{y \in [x]} \|y\| \geq 0,$$

pois $\|y\| \geq 0$ para todo $y \in E$. Agora, suponha que $\|[x]\| = 0$. Então existe uma sequência $\{y_n\} \subset [x]$ tal que $\|y_n\| \rightarrow 0$. Como $y_n \in [x] = \{x\} + E_1$, temos que $y_n = x + z_n$ com $z_n \in E_1$. Logo,

$$\|x + z_n\| \rightarrow 0 \Rightarrow x + z_n \rightarrow 0 \Rightarrow z_n \rightarrow -x.$$

Como E_1 é fechado, segue que $-x \in E_1$, portanto $x \in E_1$. Assim, $[x] = [0]$, o elemento neutro do espaço quociente.

(ii*) Homogeneidade:

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Temos:

$$\|\alpha[x]\| = \|[\alpha x]\| = \inf_{y \in [\alpha x]} \|y\| = \inf_{z \in [x]} \|\alpha z\| = |\alpha| \inf_{z \in [x]} \|z\| = |\alpha| \|[x]\|,$$

Para $\alpha = 0$, temos $\|[0]\| = 0 = |0| \|[x]\|$, trivialmente.

(iii*) Desigualdade Triangular:

Sejam $[x], [y] \in E/E_1$. Para quaisquer $x' \in [x]$, $y' \in [y]$, temos:

$$x' + y' \in [x + y],$$

pois $(x' + y') - (x + y) = (x' - x) + (y' - y) \in E_1$. Logo:

$$\|[x + y]\| = \inf_{z \in [x+y]} \|z\| \leq \|x' + y'\| \leq \|x'\| + \|y'\|,$$

Tomando o ínfimo sobre $x' \in [x]$ e $y' \in [y]$, obtemos:

$$\|[x + y]\| \leq \inf_{x' \in [x]} \|x'\| + \inf_{y' \in [y]} \|y'\| = \|[x]\| + \|[y]\|,$$

Portanto, $\|[x]\|$ define uma norma em E/E_1 .

(iii) Queremos mostrar que a aplicação quociente é contínua e aberta.

Continuidade: Para qualquer $x \in E$, temos:

$$\|\pi(x)\| = \|[x]\| = \inf_{y \in [x]} \|y\| \leq \|x\|,$$

pois $x \in [x]$. Assim:

$$\|\pi(x) - \pi(z)\| = \|[x - z]\| \leq \|x - z\|,$$

Logo, π é Lipschitz contínua, pelo teorema 4.0.1 e, portanto, contínua.

Seja $U \subset E$ um conjunto aberto. Queremos mostrar que $\pi(U)$ é aberto em E/E_1 . Seja $[x] \in \pi(U)$, com $x \in U$. Como U é aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset U$.

Afirmamos que $B_{E/E_1}([x], \epsilon) \subset \pi(U)$, onde $B_{E/E_1}([x], \epsilon)$ é a bola aberta no espaço quociente.

De fato, seja $[y] \in B_{E/E_1}([x], \epsilon)$, isto é, $\|[y - x]\| < \epsilon$. Por definição do ínfimo, existe $z \in [y - x]$ tal que $\|z\| < \epsilon$.

Como $z \in [y - x]$, temos $y - x - z \in E_1$, logo $y - z \in [x]$. Escreva $y - z = x + w$ com $w \in E_1$.

$$y = x + w + z.$$

Considere $\tilde{y} = x + z$. Note que $\tilde{y} \in B(x, \epsilon) \subset U$ pois $\|z\| < \epsilon$,

$$[\tilde{y}] = [x + z] = [x + z + w] = [y],$$

pois $w \in E_1$. Portanto, $[y] = \pi(\tilde{y}) \in \pi(U)$. Assim, $B_{E/E_1}([x], \epsilon) \subset \pi(U)$, mostrando que $\pi(U)$ é aberto.

(iv) Seja $([x_n])$ uma sequência de Cauchy em E/E_1 . Podemos extrair uma subsequência $([x_{n_k}])$ tal que

$$\|[x_{n_{k+1}}] - [x_{n_k}]\| < 2^{-k} \quad \forall k.$$

Pela definição da norma quociente, para cada k existe $z_k \in E_1$ tal que

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k} + z_k\| < 2^{-k}.$$

Defina $y_1 = x_{n_1}$ e, para $k \geq 1$,

$$y_{k+1} = x_{n_{k+1}} + \sum_{i=1}^k z_i.$$

Então $\|y_{k+1} - y_k\| < 2^{-k}$. Logo (y_k) é Cauchy em E (Banach), portanto converge para algum $y \in E$. Como $\pi(y_k) = [x_{n_k}]$ (pois os z_i estão em E_1) e π é contínua, temos $[x_{n_k}] \rightarrow [y]$ em E/E_1 . Como $([x_n])$ é Cauchy e tem uma subsequência convergente, a sequência original converge para $[y]$. Portanto E/E_1 é completo. Agora, $([x_n])$ é uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente $([x_{n_k}]) \rightarrow [y]$. Em qualquer espaço métrico, se uma sequência de Cauchy tem uma subsequência convergente, então a sequência original converge para o mesmo limite. Dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que

$$\|[x_m] - [x_n]\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m, n \geq N.$$

Escolha k suficientemente grande com $n_k \geq N$ e $\|[x_{n_k}] - [y]\| < \varepsilon/2$. Então, para todo $n \geq N$,

$$\|[x_n] - [y]\| \leq \|[x_n] - [x_{n_k}]\| + \|[x_{n_k}] - [y]\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, $[x_n] \rightarrow [y]$ em E/E_1 .

Como toda sequência de Cauchy em E/E_1 é convergente, concluímos que E/E_1 é um espaço de Banach. $\square$

Seja $T : E \rightarrow F$ uma aplicação linear contínua, com E e F espaços de Banach. Consideremos $\ker T$. Pelo fato de T ser contínua, $\ker T$ é um subespaço fechado de E . Portanto, a Proposição acima se aplica ao núcleo de T e, conseqüentemente, a aplicação $\pi : E \rightarrow E/\ker T$ é contínua e aberta e $E/\ker T$ é um espaço de Banach. O próximo resultado também será necessário para provarmos que o Teorema do Gráfico Fechado implica o Teorema da Aplicação Aberta [2].

Proposição 5.4.2. *Seja $T : E \rightarrow F$ uma aplicação linear contínua, com E e F espaços de Banach. A aplicação $\tilde{T} : E/\ker T \rightarrow F$, definida por:*

$$\tilde{T}(x + \ker T) = T(x)$$

é linear, contínua e bijetiva.

Demonstração. Linearidade: Sejam $x + \ker T, y + \ker T \in E/\ker T$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\lambda(x + \ker T) + \lambda(y + \ker T)) &= \tilde{T}(\lambda(x + y) + \ker T) \\ &= \tilde{T}(\lambda(x + y) + \ker T) = T(\lambda(x) + \ker T) + T(\lambda(y) + \ker T) \\ &= \lambda\tilde{T}(x + \ker T) + \lambda\tilde{T}(y + \ker T), \end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{T}$ é linear.

Injetividade: Se $\tilde{T}(x + \ker T) = 0$, então $T(x) = 0$, logo $x \in \ker T$, o que implica $[x] = [0]$. Assim, $\tilde{T}$ é injetiva.

Sobrejetividade: Dado $y \in \text{Im}(T)$, existe $x \in E$ tal que $T(x) = y$. Então $\tilde{T}(x + \ker T) = T(x) = y$, logo $\tilde{T}$ é sobrejetiva em $\text{Im}(T)$. Como $\tilde{T}$ tem imagem contida em $\text{Im}(T)$, segue que é bijetiva sobre $\text{Im}(T)$.

Continuidade: Pela definição da norma quociente:

$$\|x + \ker T\| = \inf\{\|x + z\| : z \in \ker T\},$$

temos que para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $z \in \ker T$ tal que:

$$\|x + z\| \leq \|x + \ker T\| + \varepsilon.$$

Como T é contínua, existe $C > 0$ tal que $\|T(w)\| \leq C\|w\|$ para todo $w \in E$. Então:

$$\begin{aligned}\|\tilde{T}(x + \ker T)\| &= \|T(x)\| = \|T(x + z)\| \\ &\leq C\|x + z\| \leq C(\|x + \ker T\| + \varepsilon).\end{aligned}$$

Como ε é arbitrário, temos:

$$\|\tilde{T}(x + \ker T)\| \leq C\|x + \ker T\|,$$

logo $\tilde{T}$ é contínua. □

Vamos, agora, provar o Teorema da Aplicação Aberta com o Teorema do Gráfico Fechado e, assim, provar que esses dois resultados são equivalentes.

Teorema 5.4.2. *Seja $T : E \rightarrow F$ uma aplicação linear, sobrejetiva e contínua, com E e F espaços de Banach. Então, T é aberta.*

Demonstração. Consideremos a aplicação

$$\tilde{T} : E / \ker T \longrightarrow F$$

definida por $\tilde{T}(x + \ker T) = T(x)$. Pela Proposição (5.4.2), $\tilde{T}$ é linear, contínua e bijetiva. Assim, a aplicação inversa $\tilde{T}^{-1}$ é linear. Vejamos que $\tilde{T}^{-1}$ é contínua. Ora, seja

$$G(\tilde{T}^{-1}) = \{(y, \tilde{T}^{-1}(y)); y \in F\},$$

onde

$$\tilde{T}^{-1}(y) = \{x' \in E; T(x') = y\} = x + \ker T,$$

para qualquer $x \in \tilde{T}^{-1}(y)$. Para cada $x \in E$, consideremos $[x] = \{x\} + \ker T$ (5.4.2). Tomemos $(y, [x]) \in G(\tilde{T}^{-1})$. Existe, portanto, uma sequência

$$\left(y_n, \tilde{T}^{-1}(y_n)\right)_{n \in \mathbb{N}},$$

em $\text{Graf}(\tilde{T}^{-1})$ tal que

$$(y_n, \tilde{T}^{-1}(y_n)) \longrightarrow (y, [x]),$$

e, conseqüentemente,

$$y_n \rightarrow y \quad \text{e} \quad \tilde{T}^{-1}(y_n) \rightarrow [x].$$

Como $\tilde{T}$ é contínua,

$$\tilde{T}(\tilde{T}^{-1}(y_n)) \rightarrow \tilde{T}([x]),$$

ou seja,

$$y_n \longrightarrow \tilde{T}([x]).$$

Pela unicidade dos limites, temos

$$y = \tilde{T}([x]).$$

Daí,

$$[x] = \tilde{T}^{-1}(y).$$

Assim, $(y, [x]) \in \text{G}(\tilde{T}^{-1})$. Pelo Teorema do Gráfico Fechado, $\tilde{T}^{-1}$ é contínua. Consequentemente, $\tilde{T}$ é aberta. Como T é a composta de $\tilde{T}$ com a aplicação quociente da Definição (5.4.1) $\pi : x \in E \rightarrow [x] \in E/\ker T$, temos que T é aberta, já que $\tilde{T}$ e π são aplicações abertas.

$$\begin{array}{ccc} & [x] \in E/\ker(T) & \\ \uparrow \pi & \nearrow \tilde{T} & \\ x \in E & \xrightarrow{T} & T(x) \in F \end{array}$$

$$T = \tilde{T} \circ \pi.$$

FIGURA 5.

Fonte: Autor.

□

5.5 O Caso Bilinear para a Aplicação Aberta e Para o Gráfico Fechado.

Este tópicó é particularmente relevante no contexto dos Teoremas da Aplicação Aberta e do Gráfico Fechado nesse estudo. Esses teoremas, que estabelecem condições sob as quais operadores lineares entre espaços de Banach são contínuos e abertos, encontram generalizações importantes para o caso bilinear. A Definição 5.5.1 introduz as formas bilineares no contexto algébrico puro, enquanto a Definição 5.5.2 estendem esse conceito para espaços normados, preparando para investigações sobre continuidade, limitação e outras propriedades dessas aplicações, a respeito de aplicações bilineares, para mais detalhes sobre forma bilinear ou aplicação bilinear segue a leitura de, [14],[10],[2].

Definição 5.5.1. Sejam E, F espaços vetoriais. Uma **forma bilinear** $b : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função $b(u, v)$, linear em cada uma das duas variáveis $u \in E, v \in F$. Mais precisamente, para quaisquer $u, u' \in E, v, v' \in F$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ devem valer:

$$\begin{aligned} b(u + u', v) &= b(u, v) + b(u', v); & b(\alpha u, v) &= \alpha b(u, v); \\ b(u, v + v') &= b(u, v) + b(u, v'); & b(u, \alpha v) &= \alpha b(u, v); \end{aligned}$$

As operações evidentes de soma e produto por um número fazem do conjunto $L(E \times F, \mathbb{R})$ das formas bilineares $b : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ um espaço vetorial.

Definição 5.5.2. Sejam E_1, E_2 e F espaços normados. Dizemos que uma aplicação $T : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ é bilinear se T é linear em cada variável. Ou seja, T é bilinear se a aplicação

$$x_1 \in E_1 \mapsto T(x_1, x_2) \in F,$$

for linear, para todo $x_2 \in E_2$ fixado (linearidade em relação à primeira variável), e se a aplicação

$$x_2 \in E_2 \mapsto T(x_1, x_2) \in F,$$

for linear, para todo $x_1 \in E_1$ fixado (linearidade em relação à segunda variável).

Exemplo 5.5.1. Sejam E e F espaços vetoriais. A aplicação

$$(x, T) \in E \times \mathcal{L}(E, F) \mapsto T(x) \in F,$$

é bilinear.

A demonstração do resultado a seguir pode ser encontrada na pagina 45 no capítulo 2 do livro [2].

Teorema 5.5.1. *Sejam E_1, E_2 e F espaços normados e $T : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ uma aplicação bilinear. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) T é contínua;
- (ii) T é contínua na origem;
- (iii) $\sup \{\|T(x_1, x_2)\|; (x_1, x_2) \in E \text{ e } \|(x_1, x_2)\| \leq 1\} < \infty$,
- (iv) existe uma constante $M > 0$ tal que $\|T(x_1, x_2)\| \leq M\|x_1\| \cdot \|x_2\|$ para qualquer $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$.

Proposição 5.5.1. *Sejam E e F dois espaços normados. Seja $T : E \times E \rightarrow F$ uma aplicação m -linear sobrejetiva. Se T é aberta na origem, então todo subconjunto limitado de F pode ser obtido como imagem de algum subconjunto limitado de $E \times E$.*

Demonstração. Seja L um subconjunto limitado de F . Queremos mostrar que existe $M \subset E^m$ limitado tal que $T(M) = L$. De fato, seja $B = B_E(0, 1) \times \cdots \times B_E(0, 1)$ a bola aberta de centro zero e raio 1 em E^m . Como T é uma aplicação aberta na origem, $T(B)$ é um aberto contendo a origem. Assim, existe $r > 0$ tal que

$$B_F(0, r) \subset T(B).$$

Por L ser limitado, existe $R > 0$ tal que $L \subset B_F(0, R)$. Seja $\lambda > 0$ tal que $\lambda R < r$. Daí, $\lambda L \subset T(B)$ segue,

$$T(B) = \{y \in F; y = T(x_1, \dots, x_m) \text{ com } x_j \in B_E(0, 1) \text{ para todo } j \in \{1, \dots, m\}\}.$$

Seja

$$M = \{(x_1, \dots, x_m) \in B_E(0, \lambda^{-1}) \times B_E(0, 1) \times \dots \times B_E(0, 1) \text{ tal que } T(x_1, \dots, x_m) \in L\}.$$

É claro que $T(M) \subset L$. Vejamos que $L \subset T(M)$. Para isso, tomemos $y \in L$. Dessa forma, $y = \lambda^{-1}T(x_1, \dots, x_m)$ com $x_j \in B_E(0, 1)$ para todo $j \in \{1, \dots, m\}$. Assim, $y = T(\lambda^{-1}x_1, \dots, \lambda^{-1}x_m)$ com $x_j \in B_E(0, 1)$ para todo $j \in \{1, \dots, m\}$, Portanto, $y \in T(M)$. Logo, $T(M) = L$. Como M é limitado, a proposição está demonstrada. $\square$

Passemos ao contraexemplo de C. Horowitz [11].

Exemplo 5.5.2. Consideremos em $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, a norma $\|x\| = |x_1| + \dots + |x_n|$ para todo $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. Seja a aplicação $T : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^4$ definida por

$$T((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1y_1, x_1y_2, x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_2, x_3y_2 + x_2y_1).$$

A bilinearidade e a continuidade de T são fáceis de serem verificadas. Vejamos que T é sobrejetiva. Tomemos $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4$ arbitrário.

caso (i): Se z_3 e z_4 são quaisquer e $z_1 = z_2 = 0$, basta escolhermos $x = (0, z_4, z_3)$ e $y = (1, 0, 0)$ para que $T(x, y) = z$.

caso (ii): Se z_2, z_3 e z_4 são quaisquer e $z_1 \neq 0$, basta escolhermos $x = (1, \frac{z_4}{z_1}, 0)$ e $y = (z_1, z_2, \frac{z_3 - \frac{z_4 z_2}{z_1}}{z_1})$ para que $T(x, y) = z$.

caso (iii): Se z_1, z_3 e z_4 são quaisquer e $z_2 \neq 0$ basta escolhermos $x = (1, 0, \frac{z_4}{z_2})$ e $y = (z_1, z_2, \frac{z_3 - \frac{z_4 z_1}{z_2}}{z_1})$ para que $T(x, y) = z$. Os casos acima mostram a sobrejetividade de T . Mostraremos agora que T não é uma aplicação aberta na origem. Como T é sobrejetiva, para todo $a \in \mathbb{R}$, existe $(x, y) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$ tal que $T(x, y) = (a, a, a, 1)$. Seja $A = \{(a, a, a, 1); a \in \mathbb{R}_+^* \mid a \leq 1\}$. É fácil verificar que A é um subconjunto limitado de $\mathbb{C}^4$. Da definição de T , podemos afirmar que para todo $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$ e $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{C}^3$

tais que $T(x, y) = (a, a, a, 1) \in A$ temos $x_1 \neq 0$ (porque $a \neq 0$), $y_1 = y_2 = \frac{a}{x_1}$, $x_2 + \frac{x_3}{a} = \frac{x_1}{a}$ e $y_3 = \frac{a-1}{x_1}$. Daí, $(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3) = 3a + 2 - \frac{1}{a}$. Consequentemente, para cada $a \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $|a| < 1$, temos

$$\{(x, y) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3; T(x, y) = (a, a, a, 1)\} \subset$$

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3; (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3) = 3a + 2 - \frac{1}{a} \right\}. \quad (2.3)$$

Como A é limitado, se T fosse uma aplicação aberta, existiria, pela Proposição 2.7, um limitado $N \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$ tal que $T(N) = A$. Mas, se N é limitado, existe $r > 0$ tal que para todo $(x, y) \in N$, temos $\|(x, y)\| < r$, isto é, $\max\{\|x\|, \|y\|\} < r$. Daí, teríamos que $\|x\|\|y\| < r^2$ para todo $(x, y) \in N$. Isto implicaria em

$$(|x_1| + |x_2| + |x_3|)(|y_1| + |y_2| + |y_3|) < r^2,$$

$$\left| 3a + 2 - \frac{1}{a} \right| = |(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)| < r^2,$$

para todo $a \in \mathbb{R}_+^*$ com $|a| < 1$. Tomemos $a = \frac{1}{n}$ com $n \in \mathbb{N}^*$. Então, $\left| \frac{3}{n} + 2 - n \right| < r^2$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, donde temos que $n < r^2 + 5$ já que $n \geq 1$. Mas, isso é um absurdo, pois $\mathbb{N}^*$ é ilimitado superiormente. Isto prova que T não é uma aplicação aberta na origem.

Proposição 5.5.2. *Sejam E um espaço de Banach, F e G espaços normados e $T : E \times F \rightarrow G$ uma aplicação bilinear separadamente contínua. Então T é contínua.*

Demonstração. Seja $X = \{T_y; y \in \overline{B_F(0, 1)}\}$, onde $T_y : E \rightarrow G$ é dada por $T_y(x) = T(x, y)$. Temos que $T_y \in \mathcal{L}(E; G)$ para cada $y \in \overline{B_F(0, 1)}$.

Tomemos $x \in E$. Vamos mostrar que existe $r_x > 0$ tal que $\|T_y(x)\| \leq r_x$ para todo $T_y \in X$. De fato, como a aplicação $T_x : F \rightarrow G$ dada por $T_x(y) = T(x, y)$ é linear e contínua, existe $r_x > 0$ tal que $\|T_x(y)\| \leq r_x\|y\|$ para todo $y \in F$. Em particular, $\|T_x(y)\| \leq r_x$ para todo $y \in \overline{B_F(0, 1)}$. Daí, $\|T_y(x)\| \leq r_x$ para todo $T_y \in X$. Pelo (Teorema de Banach–Steinhaus 5.1.2), X é limitado em $\mathcal{L}(E; G)$, isto é, existe $M > 0$ tal que $\|T_y\| \leq M$ para todo $y \in \overline{B_F(0, 1)}$. Logo, $\|T(x, y)\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in E$ e para

todo $y \in \overline{B_F(0, 1)}$. Consequentemente, $\|T(x, y)\| \leq M\|x\|\|y\|$ para todo $x \in E$ e $y \in F$. Portanto, T é contínua.

Agora veremos a seguir o caso do Teorema do Gráfico Fechado para Aplicações Bilineares.

Teorema 5.5.2 (Teorema do Gráfico Fechado para aplicações bilineares). *Sejam E , F e G espaços de Banach. Se $T : E \times F \rightarrow G$ é uma aplicação bilinear cujo gráfico é fechado, então T é contínua.*

Demonstração. Fixemos $a \in E$. Definimos $T_a : F \rightarrow G$ por $T_a(y) = T(a, y)$. T_a é linear. Mostremos que seu gráfico $\text{Graf}(T_a) \subset F \times G$ é fechado. Seja $(y_n, T_a(y_n)) \rightarrow (y, z)$ em $F \times G$. Então

$$y_n \rightarrow y \quad \text{e} \quad T_a(y_n) \rightarrow z.$$

Em $(E \times F) \times G$, temos

$$((a, y_n), T(a, y_n)) = ((a, y_n), T_a(y_n)) \rightarrow ((a, y), z).$$

Como o gráfico de T é fechado, o limite pertence a ele, ou seja,

$$z = T(a, y) = T_a(y).$$

Logo $(y, z) \in \text{Graf}(T_a)$, mostrando que $\text{Graf}(T_a)$ é fechado. Pelo Teorema do Gráfico Fechado aplicado a $T_a : F \rightarrow G$ (com F e G Banach), T_a é contínua. Portanto, T é contínua na segunda variável para cada $a \in E$ fixo.

Analogamente, fixando $b \in F$ e definindo $T_b(x) = T(x, b)$, mostra-se que T_b tem gráfico fechado (usando a mesma ideia) e, pelo TGF, é contínua. Logo T é contínua na primeira variável. Agora sabemos que T é separadamente contínua. Como E é Banach, podemos aplicar o argumento clássico.

Para cada $y \in F$ com $\|y\|_F \leq 1$, defina $T_y : E \rightarrow G$ por $T_y(x) = T(x, y)$. Cada T_y é linear e contínua (pela continuidade na primeira variável, provada no Passo 1). Além

disso, para cada $x \in E$ fixo, a aplicação $y \mapsto T(x, y)$ é linear e contínua (pela continuidade na segunda variável), logo

$$\sup_{\|y\|_F \leq 1} \|T_y(x)\|_G = \sup_{\|y\|_F \leq 1} \|T(x, y)\|_G < \infty.$$

Pelo Princípio da Limitação Uniforme (Banach-Steinhaus) (5.1.2) aplicado à família $\{T_y : \|y\|_F \leq 1\} \subset \mathcal{L}(E; G)$, existe $C > 0$ tal que

$$\|T_y\| \leq C \quad \text{para todo } y \text{ com } \|y\|_F \leq 1.$$

Em outras palavras,

$$\|T(x, y)\|_G \leq C\|x\|_E \quad \text{para todo } x \in E, \|y\|_F \leq 1.$$

Para $y \neq 0$ qualquer, escreva $y = \|y\|_F \tilde{y}$ com $\|\tilde{y}\|_F = 1$. Então

$$\|T(x, y)\|_G = \|y\|_F \|T(x, \tilde{y})\|_G \leq \|y\|_F C\|x\|_E.$$

Portanto,

$$\|T(x, y)\|_G \leq C\|x\|_E\|y\|_F \quad \text{para todos } x \in E, y \in F,$$

o que mostra que T é contínua (e limitada). □

Considerações Finais

Este trabalho teve como objetivo principal realizar um estudo aprofundado sobre o Teorema da Aplicação Aberta (TAA) e o Teorema do Gráfico Fechado (TGF). Adotou-se uma metodologia qualitativa, baseada em revisão bibliográfica de referenciais teóricos consolidados, com foco na compreensão das estruturas matemáticas que fundamentam esses teoremas, suas equivalências e implicações. Em seguida, buscou-se explorar as equivalências dos teoremas, destacando como o TAA e o TGF se relacionam entre si e com outros resultados fundamentais. Por fim, interpretaram-se as implicações desses resultados, tanto do ponto de vista teórico quanto por meio de exemplos clássicos de aplicação.

A realização deste trabalho permitiu alcançar um entendimento aprofundado de dois teoremas fundamentais da Análise Funcional. Buscou-se trazer para a graduação teoremas que costumam ser abordados apenas em mestrados ou doutorados, com o objetivo de propor uma organização didática que torne o conteúdo acessível a estudantes de graduação. Essa abordagem também representa uma conquista intelectual ao explorar temas que transcendem o currículo usual da graduação. Este trabalho não apenas sintetiza e explica resultados clássicos, mas também abre portas para estudos futuros, como a investigação de extensões e contraexemplos.

Os espaços vetoriais possuem uma estrutura algébrica que permite realizar operações [14]. Os espaços normados vão além, mantendo as operações dos espaços vetoriais e introduzindo uma noção de tamanho. Os axiomas de norma surgiram nos anos 1920-1922 em trabalhos de N. Wiener, E. Helly, S. Banach e H. Hahn. Os axiomas de Wiener eram confusos; Helly não exigia que a norma estivesse definida em todos os elementos do espaço; e Hahn incluiu muitas exigências adicionais, inclusive a completude [3]. Esse tópico é extremamente importante para compreender os teoremas principais

deste trabalho, trazendo uma definição e contextualização da norma do taxista, além de apresentar outras normas relevantes.

Convém recordar conceitos preliminares cruciais. Ao longo dos capítulos sobre conjuntos abertos e fechados, explora-se como essas noções se articulam no contexto dos espaços métricos, estabelecendo os alicerces para a compreensão de conceitos topológicos mais avançados que permitem analisar propriedades de funções e sequências em ambientes abstratos, porém geometricamente intuitivos. Para abordar noções de limite em um conjunto, é necessário entender as principais propriedades dos espaços topológicos. Antes de introduzi-las, relembra-se o que é o interior de um conjunto e o que significa um ponto interior. Conjuntos abertos e fechados, bem como alguns teoremas e resultados importantes, são apresentados. Para mais informações, indicam-se as obras de [15] e, para um aprofundamento maior, [17].

Na parte sobre aplicações lineares, vê-se que o conjunto de todas as aplicações lineares de E em F , denotado por $\mathcal{L}(E, F)$, é um espaço vetorial munido das operações de adição e multiplicação. Além disso, conceitos como operador linear e aplicação são fundamentais para a compreensão dos teoremas, organizando-se um estudo resumido desses tópicos para facilitar o entendimento dos capítulos principais. Os espaços de Banach formam uma classe especial de espaços normados, pois neles é possível verificar a convergência de uma sequência de modo mais eficiente. Sequências de Cauchy tornam-se fundamentais para identificar espaços de Banach. Salienta-se que se buscou um estudo aprofundado sobre Banach e outros pesquisadores para manter um trabalho consistente.

Assim, chega-se ao Teorema da Aplicação Aberta e ao Teorema do Gráfico Fechado, publicados por Banach em 1932, marco geralmente considerado como a fundação da Análise Funcional como disciplina matemática. A primeira demonstração do Teorema da Aplicação Aberta deve-se a J. Schauder, em 1930 [3]. Todos os resultados vistos anteriormente contribuíram para o entendimento dos teoremas apresentados a seguir, que têm como objetivo verificar a continuidade em espaços de dimensão infinita. O **Teorema da Aplicação Aberta** é um resultado famoso da Análise Funcional, devido a Banach (1929), e garante que se E e F são espaços de Banach, então todo operador linear contínuo e sobrejetor $T: E \longrightarrow F$ é uma *aplicação aberta*, isto é, $T(A)$ é aberto em F sempre que A for aberto em E [3]. Buscou-se organizar os tópicos mais importantes para o estudo desses

teoremas, acrescentando observações e comparações com enunciados de outros livros, explorando um levantamento bibliográfico que reforça a importância do aprofundamento do conteúdo e da busca por referências que abordem esses teoremas. Ressalta-se ainda a abordagem do caso bilinear para os teoremas, propondo uma apresentação que introduza esses teoremas avançados e seus comportamentos na álgebra multilinear.

Conseguiu-se cumprir os objetivos, trazendo demonstrações, complementando alguns resultados com desenvolvimentos detalhados e elaborando exemplos resolvidos. Durante o processo, houve dificuldades, pois o estudo desses tópicos é desafiador na graduação, mas elas foram superadas com parceria e contribuição do professor orientador, o que demandou tempo, mas, com esforço, permitiu cumprir os requisitos e atingir os objetivos. Como sugestão para o futuro, busca-se explorar espaços além dos de Banach e mais aplicações desses teoremas, com ênfase na investigação dos casos bilineares, principalmente do Teorema da Aplicação Aberta, para o qual é possível encontrar contraexemplos, procurando elaborá-los e demonstrá-los. Deseja-se seguir na pesquisa em matemática pura, explorando novos tópicos, mas mantendo-se no âmbito da Análise e da Álgebra.

Referências Bibliográficas

- [1] BANACH, S., 1922, “Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales”, *Fundamenta mathematicae*, v. 3, n. 1, pp. 133–181. Citado na página [1](#).
- [2] BAZÁN, A., PEREIRA, A. F., DE SOUZA FERNANDEZ, C., 2023. “Introdução aos espaços de Banach”. . Citado nas páginas , [iii](#), [52](#), [59](#), [63](#) e [64](#).
- [3] BOTELHO, G., PELLEGRINO, D., TEIXEIRA, E., 2012, *Fundamentos de análise funcional*. SBM. Citado nas páginas , [iii](#), [23](#), [34](#), [39](#), [41](#), [69](#) e [70](#).
- [4] DE QUEIROZ, A. J. M., 2020, “Elon Lages Lima: Estudo sobre os anos iniciais de sua carreira”, *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, v. 7, n. 21, pp. 44–58. Citado na página [20](#).
- [5] DUDA, R., 2014, *Pearls from a lost city: The Lvov school of mathematics*, v. 40. American Mathematical Society. Citado nas páginas , [iii](#) e [23](#).
- [6] ELON, L. L., 2009, “Curso de Analise vol. 2”, *Projeto Euclides IMPA*. Citado nas páginas , [iii](#) e [8](#).
- [7] FRÉCHET, M. M., 1906, “Sur quelques points du calcul fonctionnel”, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)*, v. 22, n. 1, pp. 1–72. Citado na página [6](#).
- [8] HAUSDORFF, F., 1978, *Grundzuge der mengenlehre*, v. 61. American Mathematical Soc. Citado na página [6](#).
- [9] HILBERT, D., 2013, *Grundlagen der geometrie*. Springer-Verlag. Citado na página [6](#).
- [10] HOFFMAN, K., KUNZE, R., FINSTERBUSCH, H. E., et al., 1973, *Álgebra lineal*. Prentice-Hall Hispanoamericana. Citado na página [63](#).
- [11] HOROWITZ, C., 1975, “An elementary counterexample to the open mapping principle for bilinear maps”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 53, n. 2, pp. 293–294. Citado na página [65](#).

- [12] KREYSZIG, E., 1991, *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley & Sons. Citado nas páginas e [iii](#).
 - [13] LAGES, E., 2010, “Curso de Análise, v. 1”, *Rio de Janeiro: SBM*. Citado nas páginas , [iii](#) e 8.
 - [14] LIMA, E., 2006. “Álgebra Linear/Elon Lages Lima”. . Citado nas páginas [1](#), [63](#) e [69](#).
 - [15] LIMA, E. L., 1970, *Elementos de topologia geral*. Ao Livro Técnico, Editôra da Universidade de São Paulo. Citado nas páginas [11](#) e [70](#).
 - [16] LIMA, E. L., 1983, *Espaços métricos*, v. 4. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq Rio de Janeiro. Citado nas páginas , [iii](#), [7](#) e [30](#).
 - [17] MUNKRES, P., OTHERS, 2005, *Introduction to topology*. MIT Course Number. Citado nas páginas [11](#) e [70](#).
 - [18] RUDIN, W., 1976, “Principles of mathematical analysis”, *McGraw-Hill Science/Engineering/Math*. Citado nas páginas e [iii](#).
 - [19] SCHMIDT, E., 1908, “Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten”, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)*, v. 25, n. 1, pp. 53–77. Citado na página [1](#).
-