



UESB

Universidade Estadual
do Sudoeste da Bahia

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LUZIA RIBEIRO DA SILVA SANTOS

**INVESTIGANDO AS CONSTRUÇÕES DE TRIÂNGULO A PARTIR DA TEORIA
ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO**

VITÓRIA DA CONQUISTA

2026

LUZIA RIBEIRO DA SILVA SANTOS

**INVESTIGANDO AS CONSTRUÇÕES DE TRIÂNGULO A PARTIR DA TEORIA
ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada.

Orientadora: Profa. Dra. Elizabeth Cristina Rosendo Tomé da Silva

VITÓRIA DA CONQUISTA

2026

LUZIA RIBEIRO DA SILVA SANTOS

**INVESTIGANDO AS CONSTRUÇÕES DE TRIÂNGULO A PARTIR DA TEORIA
ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada.

Vitória da Conquista, 10 de julho de 2026.

BANCA EXAMINADORA

Professora Dra. Elizabeth Cristina Rosendo Tomé da Silva
Orientadora

Professora Dra. Daniela Andrade Monteiro Veiga

Professor Dr. Gerson dos Santos Farias

Dedico este trabalho a todo o sagrado que me acompanha e que faz parte da Casa de Caridade do Vovô Chico, fonte de luz e equilíbrio em minha jornada. Dedico também à minha mãe, alicerce constante de amor e incentivo; à memória de meu amado e saudoso pai, que mesmo ausente faz-se presente em cada conquista; e a todos os amigos e familiares que me apoiaram ao longo deste processo

AGRADECIMENTOS

Este trabalho é fruto de uma trajetória marcada por amor, desafios, esperança e, acima de tudo, fé. Nada mais justo do que agradecer àqueles que tornaram essa caminhada possível.

Primeiramente, agradeço a Zambi por permitir que eu trilhasse esta jornada e por me conceder o privilégio de fazer parte de uma família maravilhosa que me sustenta. Agradeço também à Casa de Caridade Vovô Chico, aos guias espirituais e ao meu dirigente espiritual, Odair, por todo o acolhimento, ensinamentos e luz que guiaram meus passos. À minha mãe Oxum, minha profunda gratidão por ter ouvido meu choro, minhas preces e meus medos, e por ter me acalentado com seu abraço e com o sopro das bênçãos da vida. A certeza de que não estou sozinha e de que sou amparada em cada etapa foi essencial para que eu chegasse até aqui.

Não posso deixar de agradecer à minha mãe, Sandra, e ao meu pai, Paulo. Mãe, você é uma força da natureza que admiro e que me inspira. A senhora me ensinou a correr atrás do que acredito e do que sonho, e tenho certeza de que, sem você, esta conquista não seria possível. Pai, agradeço por ter me amado até o seu último suspiro e por continuar me amando mesmo em planos espirituais distintos. Sou privilegiada por ter um pai tão honesto, carinhoso, educado e gentil, que sempre incentivou a mim e à minha mãe a voarmos. Os dois são referências.

À minha orientadora, professora Elizabeth Cristina Rosendo Tomé da Silva, minha eterna gratidão. Obrigada por acreditar em mim desde o início, por me incentivar a ir além e por me auxiliar com paciência e dedicação em cada etapa deste processo. Sua confiança no meu trabalho foi fundamental para que eu chegasse até aqui. Agradeço também ao meu amado Lucky, que foi meu suporte emocional e dando a força necessária para trilhar esta trajetória. Sua partida deixa saudade, mas sua presença em minha vida é um presente que levo sempre.

Sou extremamente grata aos amigos e colegas que encontrei pelo caminho, que me auxiliaram neste processo com conversas que aliviavam o coração. Em meio às dificuldades, lembravam-me de que somos resistência e de que temos o direito de estar aqui, ocupando um espaço que, mesmo sendo público, nem sempre nos foi apresentado como nosso. Não citarei nomes para não correr o risco de esquecer alguém, mas cada pessoa que cruzou meu caminho e contribuiu, de alguma forma, para esta conquista tem um lugar especial em meu coração. A vida, com seus mistérios e encantos, sempre me forneceu os recursos necessários para cumprir meu propósito. Agradeço àqueles que entraram e àqueles que saíram da minha vida, pois com cada um aprendi algo valioso. E, principalmente, agradeço por ter aprendido a me amar.

Geometria existe por toda a parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la.

Johannes Kepler

RESUMO

O ensino de Geometria no Brasil enfrenta desafios históricos, especialmente no que diz respeito à dissociação entre teoria e prática. As construções geométricas, frequentemente reduzidas a roteiros mecânicos, são executadas sem que os estudantes compreendam as justificativas e os fundamentos teóricos que as sustentam. Com base nisso, o objetivo deste trabalho é analisar, à luz da Teoria Antropológica do Didático, como os elementos praxeológicos (Tarefa, Técnica, Tecnologia e Teoria) se articulam em construções geométricas de triângulos, evidenciando a relação entre os saberes práticos e teóricos mobilizados nessas atividades. Trata-se de uma pesquisa de natureza qualitativa, descritiva e analítica. O corpus é composto por cinco questões da apostila *Construção de Polígonos* de Mário Duarte Costa. As construções foram realizadas no software GeoGebra com o uso de controle deslizante para a variação dos parâmetros. Os dados foram sistematizados em quadros com três colunas (Técnica, Ferramenta, Comentário) e analisados a partir da articulação entre os níveis praxeológicos da TAD. Os resultados evidenciam que, nas cinco questões analisadas, os quatro níveis praxeológicos estão presentes, embora em diferentes graus de explicitação. A análise praxeológica, ao explicitar os quatro níveis, oferece um caminho para superar a dissociação entre teoria e prática, mostrando o que precisa ser ensinado além do "como fazer": o "por que fazer" e o "por que funciona". A pesquisa evidencia que a dissociação não é uma questão de presença ou ausência da Tecnologia e da Teoria, mas do grau de explicitação desses níveis no ensino, e contribuindo para a reflexão sobre o ensino de Geometria e para a formação de professores de Matemática. Destacamos que essa pesquisa se desenvolveu no âmbito do projeto de Iniciação Científica Modelos praxeológicos para o Ensino de Geometria Gráfica, sendo foi selecionada para representar a UESB no evento Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciências (SBPC), atestando a sua relevância para a Educação Matemática.

Palavra-chave: Construção geométrica, Teoria Antropológica do Didático; Triângulo; Ensino de Geometria; Formação de professores de Matemática.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	8
2 PROBLEMÁTICA E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	15
2.1 Ensino de Geometria e das construções geométricas	15
2.2 Teoria Antropológica do Didático.....	18
2.3 Elementos Tecnológico necessário para as construções geométrica.....	19
3 METODOLOGIA	24
4 DESCRIÇÃO DAS ANÁLISES PRAXEOLÓGICAS.....	30
4.1 Questão 03	30
4.1.1 Análise de dados da Questão 03	30
4.1.2 Descrição da Técnica e das Ferramentas Utilizadas da Questão 3.....	31
4.1.3 Tecnologia e Teoria da Questão 3	33
4.2 Questão 11	34
4.2.1 Análise de dados da Questão 11	34
4.2.2 Descrição da Técnica e das Ferramentas Utilizadas da Questão 11	34
4.2.3 Tecnologia e Teoria da Questão 11	37
4.3 Questão 22	38
4.3.1 Análise de dados da Questão 22	38
4.3.2 Descrição da Técnica e das Ferramentas Utilizadas da Questão 22.....	38
4.3.3 Tecnologia e Teoria da Questão 22	41
4.4 Questão 37	42
4.4.1 Análise de dados da Questão 37	42
4.4.2 Descrição da Técnica e das Ferramentas Utilizadas da Questão 3.....	42
4.4.3 Tecnologia e Teoria da Questão 37	46
4.5 - Questão 38.....	46
4.5.1 Análise de dados da Questão 38	46

4.5.2 Descrição da Técnica e das Ferramentas Utilizadas da Questão 38.....	47
4.5.3 Tecnologia e Teoria da Questão 38.....	49
4.6 - Discussão Comparativa das Questões 3, 11, 22, 37 e 38	50
5 CONCLUSÃO.....	52
ANEXO A	60

1 INTRODUÇÃO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), instituída em 2018, constitui um importante documento orientador da Educação Básica brasileira ao estabelecer as aprendizagens essenciais que devem ser desenvolvidas pelos estudantes ao longo de sua trajetória escolar, na qual está organizada a partir de competências e habilidades. A BNCC destaca que o ensino de Matemática deve contribuir para a formação integral do indivíduo, promovendo não apenas o domínio de procedimentos matemáticos, mas também o desenvolvimento do pensamento crítico, da autonomia, da argumentação e da capacidade de interpretar e intervir em diferentes situações da realidade (Brasil, 2018).

Apesar das orientações estabelecidas pelos documentos oficiais, os resultados de avaliações educacionais evidenciam desafios persistentes relacionados ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática no Brasil. Os dados do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) de 2022 apontam dificuldades significativas no desempenho dos estudantes brasileiros nessa área, indicando a necessidade de refletir sobre as práticas pedagógicas desenvolvidas e sobre os conhecimentos matemáticos mobilizados no ambiente escolar.

Nesse contexto, a Geometria destaca-se como uma das áreas fundamentais da Matemática, compondo uma das Unidades Temáticas previstas pela BNCC. Essa relevância decorre dos conceitos que mobilizam quanto pelas dificuldades historicamente observadas no processo de ensino e aprendizagem. De acordo com a BNCC (Brasil, 2018), os estudos geométricos abrangem: formas geométricas, transformações geométricas (translação, rotação, reflexão); plano cartesiano; geometria dinâmica; congruência e semelhança. Além disso, o documento também prevê que tais conteúdos sejam articulados com outras áreas do conhecimento, por exemplo, a física e arte. Desta forma, evidencia-se a transversalidade¹ da Geometria no processo ensino aprendizagem. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência.

Para além do ambiente escolar, a Geometria configura-se como uma linguagem essencial para a leitura e a intervenção no mundo. Sua presença é constante em campos como tecnologia, arquitetura, design e artes, o que torna seu domínio uma ferramenta poderosa tanto para a compreensão da realidade quanto para sua transformação. A BNCC afirma: “As ideias

¹ Utilizar os conceitos geométricos não como um conteúdo isolado da matemática, mas como um eixo conector que atravessa e dá sentido a outras disciplinas.

matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência.” (2018, p. 273). Nesse sentido, o estudo da Geometria não se restringe ao desenvolvimento de habilidades matemáticas específicas; ela contribui para a formação de um pensamento crítico, para o exercício do raciocínio lógico e para a capacidade de resolver problemas em contextos diversos, competências estas que transcendem a vida acadêmica e se estendem à atuação profissional e pessoal.

Apesar da importância reconhecida da Geometria, seu ensino no Brasil enfrenta desafios significativos. Estudos como os de Lorenzato (1993) e Cans *et al.* (2024) apontam para uma desvalorização histórica a essa área do conhecimento matemático. Tal quadro foi agravado pela retirada, em muitos currículos, da disciplina específica de Geometria, que passou a ser abordada de forma diluída no componente curricular de Matemática. Como resultado, as construções geométricas (atividades que articulam desenho, visualização e raciocínio dedutivo) perderam espaço, e a necessidade de retomar essa discussão tornou-se evidente tanto na formação inicial de professores quanto na prática cotidiana da Educação Básica.

Frantz e Bisognin (2022) caracterizam essa defasagem como um problema de natureza sistêmica, ou seja, enraizado em múltiplos fatores que estão vinculados. Entre eles, destacam-se: A dificuldade dos docentes em estabelecer conexões entre os conteúdos geométricos e o cotidiano dos alunos; A insegurança e o despreparo de muitos professores para abordar a Geometria de maneira significativa; A negligência curricular, que leva escolas a priorizarem outros tópicos em detrimento da Geometria; As lacunas na formação inicial, que não proporcionam uma compreensão aprofundada dos conceitos e de suas abordagens didáticas; E os instrumentos de avaliação, que frequentemente privilegiam a memorização em detrimento da compreensão conceitual (Frantz; Bisognin, 2022)

A esse cenário soma-se uma dimensão histórica. Pavanello (1989) demonstra que, desde as reformas educacionais inspiradas no movimento da Matemática Moderna², houve uma progressiva valorização da álgebra e da aritmética em detrimento da Geometria. Essa tendência resultou em uma redução significativa da carga horária destinada aos conteúdos geométricos, tanto nos currículos escolares quanto nos cursos de formação de professores, consolidando o que a autora denomina como uma "herança de invisibilidade". Como consequência, professores em formação podem apresentar limitações quanto ao domínio conceitual e às possibilidades

² Reforma educacional global que unificou o ensino escolar por meio da lógica e da teoria dos conjuntos, tendo como principal objetivo substituir a memorização mecânica pela compreensão profunda e abstrata

metodológicas para abordar essa área de maneira significativa. Dessa forma, os licenciandos podem se limitar a abordagens teóricas e descontextualizadas que não exploram adequadamente os aspectos visuais, espaciais e aplicados da área.

Vieira e Cyrino (2022) defendem que a formação inicial deve contemplar atividades que promovam o desenvolvimento do pensamento geométrico. Somente assim, ao ingressarem na docência, os futuros professores poderão refletir criticamente sobre sua prática e mobilizar os conhecimentos adquiridos em sua. Entretanto, mesmo nos contextos em que a Geometria é ensinada, persiste uma dificuldade estrutural: a dissociação entre teoria e prática. Por um lado, os conteúdos são apresentados por meio de definições, propriedades e teoremas, frequentemente de forma abstrata e desvinculada de situações concretas. Por outro, as atividades práticas (construções com régua e compasso, manipulação de materiais didáticos ou uso de softwares) são executadas como roteiros mecânicos, sem que os alunos estabeleçam relações com os fundamentos teóricos que as sustentam.

Pastre e Dias (2018) observam que, na sala de aula, a Geometria é frequentemente reduzida à reprodução de procedimentos, na qual a compreensão conceitual cede lugar à execução de passos predeterminados. Essa abordagem fragiliza o desenvolvimento do senso crítico e da autonomia do estudante. Um exemplo ilustrativo é o aluno que memoriza o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, mas não consegue utilizá-lo para construir um triângulo a partir de dois ângulos dados. Da mesma forma, um estudante pode reproduzir corretamente uma construção com régua e compasso, mas ser incapaz de explicar a validade geométrica de cada etapa realizada.

Essa cisão entre o fazer e o saber não é um problema restrito à aprendizagem dos alunos. Reflete uma organização didática que privilegia o produto em detrimento do processo, a aplicação em detrimento da compreensão, e a técnica em detrimento do discurso que a justifica. Machado (1999) alerta que o ensino de Matemática, de modo geral, tende a ensinar o "como fazer", mas negligencia o "por que fazer" e o "por que funciona". Essa lacuna é particularmente grave no âmbito da Geometria, na qual a demonstração e a justificativa são elementos constitutivos da própria natureza do conhecimento geométrico.

É nesse contexto que se insere o objeto da presente investigação: as construções geométricas de triângulos. A escolha do triângulo como figura de análise não é súbita. Trata-se do polígono mais simples e, ao mesmo tempo, o mais fundamental da Geometria Euclidiana. Segundo Bicudo (2009), os triângulos são as primeiras figuras a serem estudadas

nos *Elementos* de Euclides³, e suas propriedades constituem a base para a compreensão de figuras mais complexas. Além disso, as construções de triângulos estão presentes em diferentes níveis de ensino, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Superior, o que confere relevância e transversalidade ao tema. A análise de tarefas que envolvem a construção de triângulos, portanto, permite examinar, de forma exemplar, como os saberes práticos e teóricos se articulam, ou deixam de se articular, no ensino da Geometria.

Diante desse quadro, torna-se necessário buscar referenciais teóricos que permitam analisar a dissociação entre teoria e prática, oferecendo subsídios para sua superação. A Teoria Antropológica do Didático (TAD), proposta por Yves Chevallard a partir da década de 1990, apresenta-se como um desses referenciais. Dentro da TAD, temos como ferramentas metodológicas a Análise praxeológica que é composta por quatro níveis: Tarefa (T), Técnica (τ), Tecnologia (θ) e Teoria (Θ) (Chevallard, 2005), sendo esses utilizados em nossa pesquisa para a análise das construções de triângulos.

A relevância desse modelo justifica-se pela possibilidade de analisar justamente a articulação ou a ausência dela entre o procedimento realizado e os conhecimentos que explicam sua validade. A TAD oferece, portanto, um instrumental analítico que permite investigar se determinada atividade é apresentada apenas como uma sequência de passos a serem executados ou se possibilita compreender as propriedades e os fundamentos matemáticos envolvidos em sua realização. Ao tornar explícitos os quatro níveis praxeológicos, a análise possibilita identificar lacunas na organização do ensino e apontar caminhos para uma abordagem integrada, na qual o fazer e o saber sejam efetivamente religados.

As atividades analisadas neste trabalho foram extraídas da apostila "Construção de Polígonos", de autoria de Mário Duarte Costa (1995). Trata-se de um material didático composto por 150 (cem e cinquenta) tarefas que envolvem a construção de diferentes polígonos (triângulos e quadriláteros) a partir de dados métricos e geométricos variados. A escolha dessa apostila justifica-se por sua utilização em cursos de formação de professores de geometria gráfica (Silva, 2026, no prelo) e era objeto de estudo da Iniciação Científica (IC) a qual será abordada posteriormente.

No âmbito da IC, foram selecionadas 20 tarefas de construção de triângulos por dados métricos para serem resolvidas no ambiente do GeoGebra e posteriormente analisadas com base

³ Volume de 13 livros de Geometria Plana que reuniu e sistematizou conhecimentos matemáticos e geométricos e de aritmética da Grécia Antiga, servindo de base para o ensino da Geometria por séculos.

na TAD. A partir dessas 20 tarefas, selecionamos cinco questões específicas para a análise praxeológica: a Questão 3, que envolve a construção de um triângulo a partir de dois lados e o ângulo; a Questão 11, que propõe a construção a partir de um lado, um ângulo e a altura relativa a esse lado; e a Questão 22, que solicita a construção a partir de um lado, um ângulo e uma mediana; a Questão 37 e 38, que propõe a construção a partir das bissetrizes internas e externas respectivamente.

Essas cinco questões foram escolhidas por representarem diferentes níveis de complexidade e por mobilizarem distintos conhecimentos geométricos, desde os casos de congruência até as propriedades da altura, da mediana e das bissetrizes, permitindo uma análise comparativa e uma discussão mais ampla sobre a articulação entre técnica e teoria.

Para a realização da análise das questões selecionadas, optou-se por utilizar o software GeoGebra como ambiente para a execução e o registro das construções geométricas. O software é amplamente reconhecido na literatura da área por suas potencialidades didáticas, especialmente por sua capacidade de promover a visualização dinâmica, o arraste de elementos e a percepção de invariâncias, aspectos que podem favorecer a compreensão de propriedades e relações geométricas (Mariotti, 2019; Bellemain, 2024).

Todavia, é necessário enfatizar que o GeoGebra não ocupa o papel central nesta investigação. O software é empregado como um recurso auxiliar, um meio que viabiliza a construção e o registro dos procedimentos adotados. Portanto, o objeto de estudo não é o software em si, mas as construções geométricas analisadas sob a ótica da TAD. Uma vez que a questão não é a ferramenta, mas o uso que se faz dela e o conhecimento teórico que a acompanha.

As experiências desenvolvidas durante a Iniciação Científica (IC) que antecedeu esta pesquisa contribuíram para a construção do problema investigado neste trabalho, desta forma cada ferramenta do GeoGebra mobiliza uma justificativa geométrica, e cada etapa da construção só adquire sentido quando apoiada em definições, propriedades ou teoremas. O software pode atuar como um "amplificador de perguntas", na medida em que, ao exibir o resultado de uma construção, convida o aluno a refletir: "por que isso funciona?" ou "o que garante a validade dessa construção?". Contudo, essa potencialidade só se concretiza se houver uma mediação pedagógica intencional, caso contrário, o software reduz-se a um instrumento sofisticado para a mera execução de desenhos (Santos; Silva, 2025).

Com base nas considerações apresentadas, a presente investigação orienta-se pela seguinte questão: *Como a descrição das técnicas de construções de triângulos pode favorecer a articulação com a tecnologia e teoria fundamentada nas Análises praxeológicas?* Esta pesquisa justifica-se por sua relevância em quatro dimensões associadas: acadêmica, profissional, social e pessoal. No plano acadêmico, o trabalho contribui para as discussões da Educação Matemática ao utilizar a TAD como instrumento de análise de construções geométricas, permitindo compreender como os conhecimentos matemáticos são estruturados e mobilizados em atividades de ensino. Além disso, amplia estudos relacionados ao ensino de Geometria ao discutir a relação entre procedimentos e fundamentos teóricos.

Do ponto de vista profissional, a pesquisa apresenta contribuições para a formação de professores de Matemática ao possibilitar uma reflexão sobre a organização das atividades geométricas desenvolvidas em sala de aula. Compreender os elementos que compõem uma praxeologia matemática pode auxiliar docentes na elaboração de propostas que ultrapassem a execução mecânica de procedimentos e favoreçam a construção de significados.

A relevância social da pesquisa está associada à importância de um ensino de Matemática que promova compreensão, argumentação e autonomia. Ao investigar formas de superar a separação entre teoria e prática no ensino da Geometria, este trabalho busca contribuir para uma aprendizagem matemática mais significativa e alinhada às competências propostas pela BNCC (Brasil, 2018).

Pessoalmente, esta pesquisa é fruto de uma trajetória de redescoberta e engajamento com a Geometria. Como estudante de Licenciatura em Matemática, o interesse pela área despertou-se durante a disciplina de Desenho Geométrico⁴, cursada no primeiro semestre, experiência que, no entanto, não teve continuidade ao longo da formação. A lacuna no aprofundamento da Geometria tornou-se evidente ao observar as dificuldades enfrentadas por colegas. Foi por meio da Iniciação Científica “Modelos praxeológico para o ensino de Geometria Gráfica” (2024-2025), sob a orientação da professora Elizabeth Cristina Rosendo Tomé da Silva, que o reencontro com a Geometria ocorreu de maneira consistente, transformando uma inquietação pessoal em compromisso acadêmico.

⁴ Ementa: Construções geométricas com régua e compasso, perspectivas e projeções. Transformações geométricas no plano e no espaço. Desenvolvimento manual e computacional das técnicas de desenho utilizadas para construção de formas geométricas.

Cabe destacar que o projeto desenvolvido no âmbito da Iniciação Científica, vinculado a esta pesquisa, foi contemplado no Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB). Na ocasião, fomos selecionadas, juntamente com um número reduzido de discentes, para representarmos a instituição no evento Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência (SBPC). Portanto, este trabalho representa, a convergência entre a trajetória formativa e a atuação como pesquisadora, na busca por contribuir para uma formação geométrica mais sólida e significativa para os futuros professores de Matemática.

O objetivo deste trabalho é analisar, à luz da Teoria Antropológica do Didático, como os elementos praxeológicos (Tarefa, Técnica, Tecnologia e Teoria) se articulam em construções geométricas de triângulos, evidenciando a relação entre os saberes práticos e teóricos mobilizados nessas atividades.

Para alcançar esse objetivo, serão desenvolvidas as seguintes ações:

- Realizar a análise praxeológica de cinco problemas envolvendo construções geométricas de triângulos, identificando as Tarefas (T), Técnicas (τ), Tecnologias (θ) e Teorias (Θ) presentes;
- Descrever os procedimentos utilizados nas construções, incluindo as ferramentas do GeoGebra mobilizadas;
- Identificar os conhecimentos geométricos que justificam e validam as técnicas empregadas;
- Analisar como a articulação entre os elementos praxeológicos contribui para compreender a relação entre teoria e prática no ensino de Geometria.

Para atingir os objetivos, este trabalho está organizado em cinco capítulos.

No Capítulo 2, trago a problemática e fundamentação teórica, dividida em três momentos: uma discussão sobre o ensino de Geometria e as construções geométricas, a apresentação da Teoria Antropológica do Didático e seus elementos praxeológicos e a retomada dos conceitos geométricos que serão mobilizados nas análises. No Capítulo 3, descrevo o percurso metodológico, explicando como os dados foram categorizados, como as construções foram realizadas no GeoGebra e como organizei as análises. No Capítulo 4, apresento os resultados da análise praxeológica das cinco questões selecionadas, seguidos de uma discussão comparativa. Por fim, no Capítulo 5, trago as considerações finais, retomando a questão de pesquisa, as contribuições do trabalho e as possibilidades para investigações futuras.

2 PROBLEMÁTICA E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Ensino de Geometria e das construções geométricas

A Geometria constitui uma área fundamental da Matemática por possibilitar a compreensão das formas, das relações espaciais e das propriedades que estruturam diferentes objetos matemáticos presentes tanto no contexto escolar quanto em situações do cotidiano. Seu estudo contribui para o desenvolvimento de capacidades relacionadas à visualização, argumentação, elaboração de hipóteses e construção de raciocínios dedutivos. Elementos estes, essenciais para a formação do pensamento matemático (Brasil, 2018).

Contudo, pesquisadores como Lorenzato (1993) evidenciaram que a negligência no currículo escolar é um problema histórico, uma vez que os conteúdos geométricos foram frequentemente deixados de lado ou abordados de forma superficial. Essa situação foi agravada pela extinção, em muitas escolas, da disciplina específica de Geometria, que passou a ser diluída no componente curricular de Matemática, acabou perdendo sua identidade e sua relevância no processo de formação dos estudantes.

A esse cenário soma-se o que Pavanello (1989, 2006) denomina como uma "herança de invisibilidade". A autora afirma que, desde as reformas educacionais inspiradas no movimento da Matemática Moderna, houve uma progressiva valorização da álgebra e da aritmética em detrimento da Geometria. Essa tendência resultou em uma redução significativa da carga horária destinada aos conteúdos geométricos, tanto nos currículos escolares quanto nos cursos de formação de professores. Consequentemente, professores em formação podem apresentar limitações quanto ao domínio conceitual e às possibilidades metodológicas para abordar essa área de maneira significativa.

Frantz e Bisognin (2022) caracterizam essa defasagem no ensino de Geometria como um problema de natureza sistêmica, enraizado em fatores como a dificuldade de contextualização, o despreparo docente, a negligência curricular, as lacunas na formação inicial e a avaliação inadequada. Diante disso, Pastre e Dias (2018) observam que a Geometria, quando abordada em sala de aula, é frequentemente reduzida à reprodução de procedimentos, nos quais a compreensão conceitual cede lugar à execução de passos predeterminados. Indo ao encontro dessa crítica, Machado (1999) alerta que o ensino de Matemática tende a priorizar o "como fazer", mas negligencia o "por que fazer" e o "por que funciona". Essa lacuna acaba sendo

particularmente grave na Geometria, uma vez que a demonstração e a justificação são elementos constitutivos do próprio conhecimento.

Para superar essas limitações, é necessário compreender os processos cognitivos subjacentes a essa área. Costa (2020) define o pensamento geométrico, de forma generalizada, como "a capacidade mental de produzir conhecimentos em Geometria" (p. 14). No entanto, essa definição, embora válida, não explicita os processos cognitivos envolvidos nessa produção de conhecimento. Por sua vez, Vieira e Cyrino (2022) defendem que a formação inicial deve contemplar atividades que promovam o desenvolvimento do pensamento; geométrico, entendido por eles como um processo cognitivo que envolve a compreensão e o raciocínio sobre propriedades, relações e representações geométricas. Desta forma, ao ingressarem na docência, os futuros professores poderão refletir criticamente sobre sua prática e mobilizar os conhecimentos adquiridos em sua formação para planejar e conduzir atividades significativas em sala de aula.

Sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático (TAD), as carências apontadas por Frantz e Bisognin (2022) e a negligência curricular mencionada por Lorenzato (1993) podem ser compreendidas como ausência da articulação entre os níveis praxeológicos. Quando se nota um privilégio do processo de ensino aprendizagem da prática em detrimento da teoria ou vice-versa, o ensino reduz a Geometria a um conjunto de técnicas desconectadas de suas justificativas. A TAD, ao explicitar os quatro níveis praxeológicos, oferece um caminho para superar essa limitação, mostrando o que precisa ser ensinado além da técnica: isto é, as justificativas (tecnologia) e os fundamentos teóricos (teoria) que dão sentido à construção.

Para operacionalizar essa análise, este trabalho utiliza as construções geométricas realizadas no software GeoGebra (Figura 1).

Figura 1 – Logo do software GeoGebra



Fonte: Site do GeoGebra. Disponível em: <https://www.geogebra.org/>.

O GeoGebra é amplamente reconhecido por suas potencialidades didáticas, especialmente por sua capacidade de promover a visualização dinâmica, o arraste de elementos e a percepção de invariâncias (Mariotti, 2019; Bellemain, 2024). Todavia, é necessário enfatizar

que o software não ocupa o papel central nesta investigação, ele é empregado como um recurso auxiliar, um meio que viabiliza a construção e o registro dos procedimentos adotados. O objeto de estudo não é a ferramenta em si, mas as construções geométricas analisadas sob a ótica da TAD.

Ao utilizar o GeoGebra como suporte, sem torná-lo o foco da pesquisa, busca-se evidenciar que o problema da dissociação entre teoria e prática não é de natureza tecnológica, mas didático-pedagógica. O software, por si só, não é capaz de superar essa dissociação, ao contrário, pode reforçá-la se for utilizado sem a devida explicitação dos níveis praxeológicos. Essa potencialidade só se concretiza se houver uma mediação pedagógica intencional. O software pode atuar como um "amplificador de perguntas", na medida em que, ao exibir o resultado de uma construção, convida o aluno a refletir sobre a validade de cada etapa realizada. Essa visualização dinâmica permite testar hipóteses e validar a construção.

Um exemplo prático dessa dinâmica ocorre na construção de um triângulo a partir dos comprimentos das suas três medianas, como proposto na questão 28 da apostila *Construção de Polígonos* (Costa, 1995). Essa atividade instiga tanto o estudante quanto o professor a imaginar como essas medianas se relacionam na construção geométrica, uma vez que precisam conceber mentalmente que as medianas se encontram no baricentro, dividindo-se na razão 2: 1, e que, a partir dessas informações, é possível deduzir a forma do triângulo. Essa imaginação não é fantasia, trata-se de uma construção mental fundamentada em conhecimentos prévios, como definições, teoremas, proposições, axiomas e postulados.

Enquanto a execução da atividade no GeoGebra, o estudante intui que, ao traçar uma circunferência com centro em um vértice e raio igual a um dos lados, está garantindo que todos os pontos dessa curva estão a uma distância fixa do centro. Ele "sente" que esse procedimento é correto porque já internalizou a definição de circunferência como lugar geométrico dos pontos equidistantes de um centro. Essa intuição é o resultado de sua experiência com construções anteriores e com o estudo da Geometria Euclidiana. Nesse momento, observa-se que teoria e prática estão alinhadas para o êxito da ação.

Durante a construção, quando ocorre a visualização concreta, ou seja, o estudante acompanha a construção passo a passo do triângulo por meio do GeoGebra, ele conseguirá verificar se cada etapa está sendo executada corretamente. Já após a conclusão, quando o estudante visualiza o triângulo completo, tem a oportunidade de movimentar seus vértices no

software para verificar se as propriedades geométricas mantêm constantes. Essa oportunidade consolida a articulação praxeológica por permitir que o discente se questione no processo, por exemplo: Ao deslocar um dos vértices do triângulo ainda seria possível observar que a mediana continua passando pelo ponto médio do lado oposto?

2.2 Teoria Antropológica do Didático

A Teoria Antropológica do Didático (TAD), proposta pelo matemático e didata francês Yves Chevallard, a partir da década de 1990, oferece um modelo teórico que parte do pressuposto de que toda atividade humana, em especial a atividade matemática, pode ser descrita e analisada em termos de uma praxeologia.

A palavra “Praxeologia” é formada por aglutinação, composta pela combinação dos radicais gregos *praxis* e *logos*, que significa respectivamente: prática (ação) e teoria (estudo) (Bittar; Freitas, 2022). Portanto, a TAD busca articular a dimensão prática e a dimensão teórica do conhecimento, oferecendo um modelo instrumental para compreender como os saberes são organizados, mobilizados e transformados em situações de ensino.

No âmbito da TAD, o saber matemático é descrito por meio de uma Organização Praxeológica, composta por quatro níveis inter-relacionados: Tarefa (*T*), Técnica (τ), Tecnologia (θ) e Teoria (θ) (Chevallard, 2005). Esses quatro elementos constituem o que Chevallard denomina de quarteto praxeológico, e sua análise permite explicitar a estrutura do conhecimento matemático, desde os procedimentos mais elementares até os sistemas teóricos mais abstratos.

Com base em Chevallard a Tarefa (*T*) corresponde ao que se pede, ao problema a ser resolvido ou à atividade a ser realizada. No contexto desta pesquisa, a tarefa corresponde as questões de construções de triângulo da apostila “Construção de Polígonos” (Costa, 1995). Portanto, a tarefa é o ponto de partida da atividade matemática, é o que mobiliza o sujeito a agir.

A Técnica (τ) refere-se ao modo de fazer, ao procedimento empregado para executar a tarefa. É a sequência de ações, passos ou operações que permitem resolver o problema proposto (Chevallard, 2005). No caso dessa pesquisa a técnica é o passo a passo da construção, é o saber fazer, por exemplo: traçar um segmento, marcar um ângulo, traçar uma circunferência, obter o ponto de interseção etc.

A Tecnologia (θ) é o discurso que justifica a técnica, respondendo à pergunta: "por que essa técnica funciona?". A tecnologia expõe as propriedades, definições e relações matemáticas que fundamentam as técnicas utilizadas (Chevallard, 2005). Por exemplo, ao usar a circunferência na construção do triângulo, você se respaldará na definição de lugar geométrico (tecnologia). Portanto, a tecnologia é o primeiro nível teórico, pois conecta a ação ao conhecimento matemático.

A Teoria (θ), por sua vez, é o discurso que valida a tecnologia, situando as justificativas em um sistema mais amplo de axiomas, teoremas e definições (Chevallard, 2005). A teoria responde à pergunta: "por que essa justificativa é verdadeira?". Desta forma, a teoria poderia corresponder a Geometria Hiperbólica (Baseia-se na negação do postulado das paralelas de Euclides.), Geometria Projetiva (introduz o conceito de "pontos no infinito", onde linhas paralelas se encontram), entre outras. Contudo, nesta pesquisa, a teoria corresponde ao corpo da Geometria Euclidiana, com seus postulados, teoremas de congruência e propriedades dos triângulos, que fundamentam e validam as justificativas apresentadas no nível da tecnologia.

2.3 Elementos Tecnológico necessário para as construções geométrica

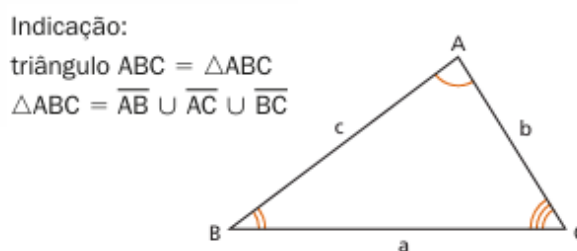
Para uma melhor análise das construções geométricas propostas neste trabalho, é necessário retomar alguns fundamentos da Geometria Euclidiana Plana. Segundo Bicudo (2009), os triângulos são as primeiras figuras a serem estudadas nos *Elementos* de Euclides, e suas propriedades constituem a base para a compreensão de figuras mais complexas. Esses fundamentos são os conhecimentos tecnológicos que serão mobilizados ao longo da análise praxeológica das questões selecionadas.

Antes de definir os conhecimentos tecnológicos necessário, é preciso compreender o que seria um triângulo. De acordo Dolce e Pompeo (2013), em *Fundamentos de Matemática Elementar Geometria Plana*.

Definição: Dados três pontos, A , B e C não colineares, a reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ chama-se triângulo ABC . (

Figura 2)

Figura 2 - Triângulo ABC

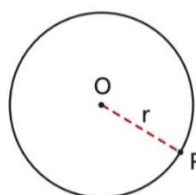


Fonte: Adaptado de Dolce e Pompeo (2013, p.35)

Após isso, será introduzido a definição dos elementos tecnológicos necessário para a Análise Praxeológica do Capítulo 4:

- Circunferência: “é um conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é igual a uma distância (não nula) dada.” (Dolce; Pompeo, 2013, p. 143) (Figura 3)

Figura 3 - Circunferência.

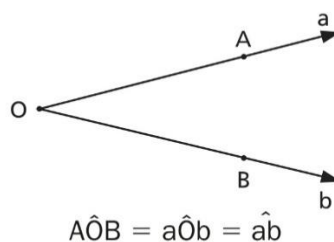


Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p.143)

Essa definição é fundamental para a construção de triângulos, pois permite estabelecer a posição de um vértice a partir de uma distância conhecida em relação a outro ponto.

- Ângulo: “reunião de duas semirretas de mesma origem, não contidas numa mesma reta (não colineares).” (Dolce; Pompeo, 2013, p. 20) (Figura 4)

Figura 4 – Ângulo



Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p.20)

Nas construções analisadas, o ângulo estabelece a direção que um dos lados do triângulo deve assumir, definindo assim o lugar geométrico dos pontos que atendem a essa condição angular.

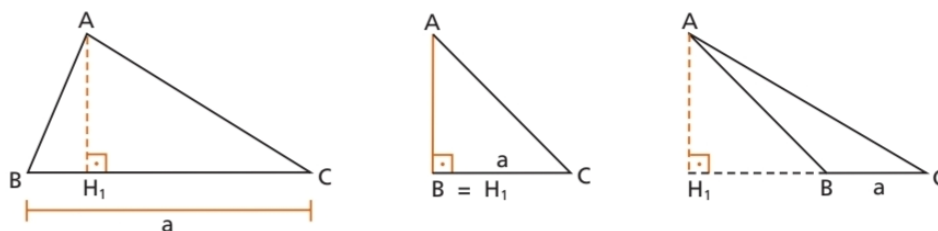
- Ponto de interseção: “ponto de encontro, ou ponto de concurso” (Dolce; Pompeo, 2013, p. 120)

A interseção de lugares geométricos estabelece que um ponto deve satisfazer simultaneamente duas condições geométricas, determinada pela interseção dos lugares geométricos que representam cada condição. Em todas as questões analisadas é mobilizado esse conhecimento, quando o vértice desconhecido é determinado pela interseção de dois lugares geométricos (circunferência e semirreta; arco capaz e reta; duas retas).

A condição de existência da interseção é um elemento tecnológico fundamental, pois estabelece os limites da validade da construção. A interseção entre dois objetos geométricos existe somente se as condições forem compatíveis. Caso contrário, a construção é inviável, o que significa que os dados fornecidos não permitem a construção do triângulo.

- Altura: “é o segmento de reta perpendicular à reta suporte de um lado do triângulo com extremidades nesta reta e no vértice oposto ao lado considerado” (Dolce; Pompeo, 2013, p. 82) (Figura 5)

Figura 5 – Altura

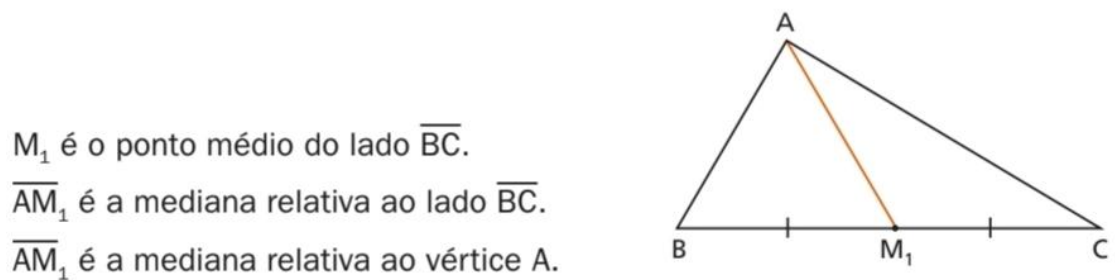


Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p.83)

Portanto a altura de um triângulo relativa ao lado a ser analisado.

- Ponto Médio: “Um ponto M é ponto médio do segmento $\overline{AB}$ se, e somente se, M está entre A e B e $\overline{AM} = \overline{MB}$.” (Dolce; Pompeo, 2013, p. 12)
- Mediana: “é um segmento com extremidades num vértice e no ponto médio do lado oposto.” (Dolce; Pompeo, 2013, p. 43) (Figura 6)

Figura 6 - Mediana.



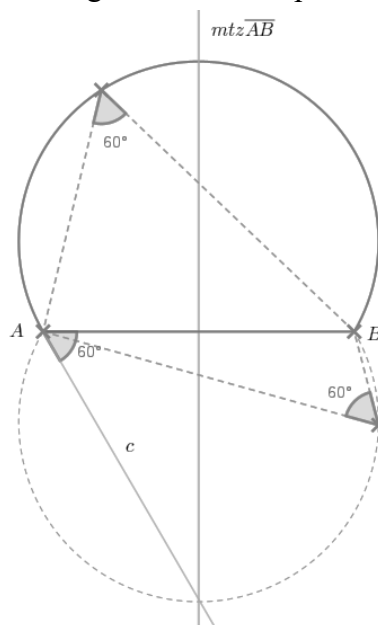
Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p.43)

- Retas Paralelas: “Duas retas são paralelas (símbolo://) se, e somente se, são coincidentes (iguais) ou são coplanares e não têm nenhum ponto comum”
- Axiomas das paralelas: “Por um ponto fora de uma reta m pode se traçar uma única reta paralela a reta m .” (Barbosa, 1997, p. 58)

Esse axioma fundamenta a construção de retas paralelas que estabelecem lugares geométricos para a determinação de vértices.

- Arco capaz: O lugar geométrico dos pontos que vêem um segmento dado sob um ângulo de medida conhecida é o par de arcos capazes do ângulo, construídos sobre o segmento (Figura 7). Em particular, se o ângulo dado é um ângulo reto, então os dois arcos são semicircunferências, tendo o segmento dado como diâmetro, excluindo as extremidades desse segmento. (Carvalho, 1970)

Figura 7 - Arco capaz



Fonte: Silva (2026, p. 102. *no prelo*)

- Bissetriz: “Uma bissetriz de um triângulo é um segmento da bissetriz de cada ângulo do triângulo compreendido entre o vértice correspondente e o lado oposto.” (Silva, 2026, *no prelo*)
- Teorema da Base Média do triângulo: “Se um segmento tem extremidades nos pontos médios de dois lados de um triângulo, então: 1º) ele é paralelo ao terceiro lado; 2º) ele é metade do terceiro lado.” (Dolce; Pompeo, 2013, p. 109)

Esses fundamentos geométricos serão mobilizados no Capítulo 4, quando analisarmos as questões 3, 11, 22, 37 e 38 da apostila de Costa (1995). A análise buscou evidenciar como a partir da descrição das técnica (construção no GeoGebra) é possível articular com a tecnologia (propriedades geométricas que justificam cada passo) e com a teoria (teoremas da Geometria Euclidiana que validam a construção). Dessa forma, pretende-se contribuir para a compreensão da dissociação entre teoria e prática no ensino de Geometria e discutir possíveis contribuições da abordagem praxeológica para a prática docente.

3 METODOLOGIA

A metodologia adotada neste trabalho insere-se no campo da pesquisa qualitativa, descritiva e analítica. É qualitativa porque se dedica à interpretação de questões que não podem ser compreendidas por meio de proporções estatísticas (Silva *et al.*, 2023). É descritiva, uma vez que se propõe a descrever as construções geométricas de forma detalhada e minuciosa, valorizando a riqueza dos procedimentos observados. E é analítica, na medida em que submete os dados a um processo sistemático de organização e interpretação à luz da Teoria Antropológica do Didático (Silva *et al.*, 2023), permite explicitar como os elementos praxeológicos se articulam nas atividades investigadas.

O corpus da pesquisa é composto por cinco questões (Quadro 1) extraídas da apostila *Construção de Polígonos*, de autoria de Mário Duarte Costa (1995). Embora a apostila contemple triângulos e quadriláteros, o recorte desta investigação concentra-se exclusivamente nas construções de triângulos, por ser esse objeto matemático um dos mais fundamentais da Geometria Euclidiana, por mobilizarem conhecimentos essenciais para a articulação entre técnica e teoria além de ser objeto de estudo do projeto desenvolvido na Iniciação Científica que antecedeu esta pesquisa.

Quadro 1 - Tarefas selecionadas para análise

Identificação da questão	Elementos
--------------------------	-----------

3	Lado, lado, ângulo
11	Lado, ângulo, altura
22	Lado, ângulo, mediana
37	Lado, ângulo, bissetriz interna
38	Lado, ângulo, bissetriz externa

Fonte: Acervo da autora.

O procedimento metodológico foi organizado em quatro etapas, com base na Teoria Antropológica do Didático (Chevallard, 2005).

A primeira etapa foi a análise das tarefas da apostila *Construção de Polígonos* (Costa, 1995). Inicialmente, os dados fornecidos em cada enunciado foram categorizados. Essa categorização, desenvolvida durante a Iniciação Científica fundamentou na compreensão de que a natureza dos dados influencia diretamente a complexidade da construção e o nível de articulação teórica exigido para sua execução.

Os dados foram classificados em seis categorias, definidas por Costa (1995), que se complementam na caracterização de cada tarefa. A primeira distinção refere-se à simplicidade ou composição dos dados:

- Dados simples correspondem a uma única medida, como segmento linear, ângulo, lado, mediana, altura ou ângulo interno;
- Dados compostos estabelecem uma relação entre duas ou mais linhas ou entre ângulos do triângulo, por exemplo, a soma ou diferença de dois lados, perímetro, área ou igualdade entre dois lados.

Outra distinção relevante diz respeito à aplicabilidade imediata dos dados na construção:

- Dados diretos são aqueles que podem ser utilizados diretamente na construção da figura, como uma medida linear ou angular;
- Dados indiretos precisam ser associados a outro dado para que se deduza um terceiro elemento a ser utilizado na construção gráfica, o que pode envolver desde uma dedução imediata até a constituição de um problema geométrico mais ou menos complexo.

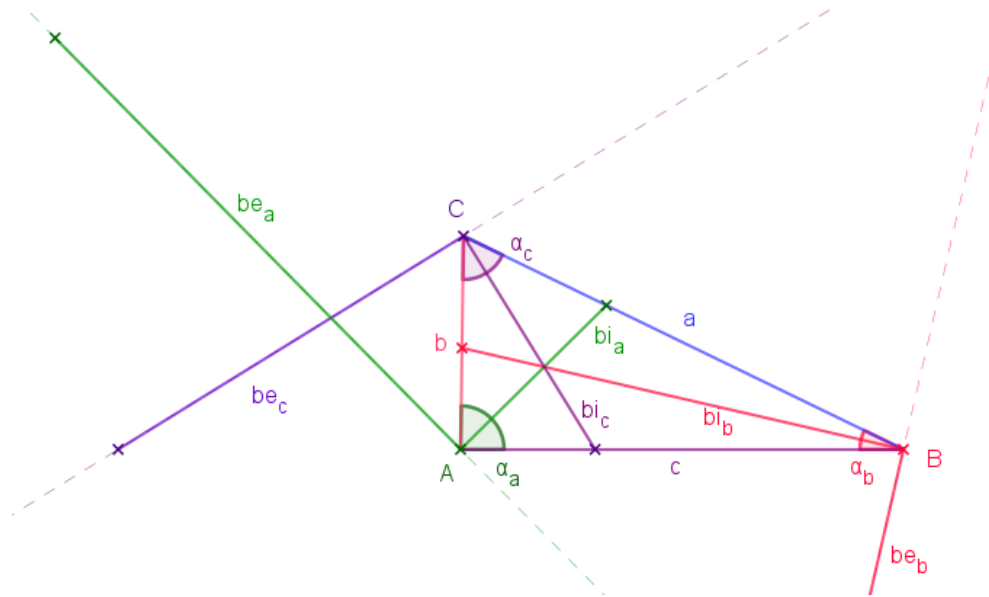
Por fim, os dados foram também classificados quanto à forma de apresentação no enunciado:

- Dados explícitos são aqueles fornecidos por meio de uma medida ou relação textualmente contida no enunciado, como o tipo do triângulo, o perímetro ou a área;
- Dados implícitos estão contidos em adjetivos ou propriedades que precisam ser traduzidos em dados simples ou compostos, por exemplo, a indicação de que o triângulo é retângulo ou que a altura dada deve coincidir com uma mediana (no caso de um triângulo isósceles).

Essa categorização é relevante para compreender a complexidade envolvida em cada tarefa. Tarefas com dados simples e diretos demandam técnicas mais imediatas e menor mobilização teórica, enquanto tarefas com dados compostos ou indiretos exigem maior articulação entre os saberes práticos e teóricos, o que as torna particularmente ricas para a análise praxeológica proposta no trabalho.

Para fins de padronização e clareza na apresentação dos resultados, as construções propostas na apostila, originalmente enunciadas com os vértices nomeados como X, Y e Z , foram adaptadas para a notação convencional A, B e C , com lados oposto a cada vértice nomeados respectivamente de a ($\overline{BC}$), b ($\overline{AC}$) e c ($\overline{AB}$). Os ângulos internos são indicados por α_A , α_B e α_C , as bissetrizes internas de bi_a , bi_b e bi_c e as bissetrizes externas de be_a , be_b e be_c correspondente aos respectivos vértices A, B e C . (Figura 8)

Figura 8 - Triângulo adotado para a construção



Fonte: Acervo da autora.

Essa escolha justifica-se pela ampla utilização dessa notação na literatura de Geometria (Dolce; Pompeo, 2013; Barbosa, 1997), bem como pela necessidade de evitar ambiguidades com as coordenadas cartesianas, frequentemente representadas pelas letras x , y e z . Além disso, essa adaptação (Quadro 2) já havia sido adotada e validada durante a Iniciação Científica que antecedeu esta pesquisa, o que conferiu consistência à análise e facilitou a comparação entre as tarefas investigadas.

Quadro 2 - Dados adaptados usando na construção de forma respectiva.

Elemento do triângulo	Notação original (Costa, 1995)	Notação adaptada
Vértices	X, Y, Z	A, B, C
Lados	x, y, z	a, b, c
Comprimento dos lados	x^y, y^z, x^z	$\alpha_c, \alpha_a, \alpha_b$
Comprimento das alturas	a_x, a_y, a_z	a_a, a_b, a_c
Comprimento das medianas	mn_x, mn_y, mn_z	mn_a, mn_b, mn_c
Comprimento das bissetrizes internas	bi_x, bi_y, bi_z	bi_a, bi_b, bi_c

Fonte: Acervo da autora.

A segunda etapa consistiu na resolução das questões selecionadas no software GeoGebra. Optou-se pelo GeoGebra por sua interface intuitiva, gratuidade, precisão nas construções e potencial para explicitar as propriedades geométricas envolvidas, especialmente por meio da visualização dinâmica e da percepção de invariâncias.

Para cada questão, foram construídos *applets* utilizando a ferramenta de controle deslizante. Essa ferramenta permite variar os parâmetros da construção (como comprimentos de lados, alturas, mediana ou as medidas de ângulos) e observar, em tempo real, como o triângulo se comporta diante dessas variações.

As questões da apostila não apresentam valores específicos para os dados métricos, o que torna o controle deslizante um recurso metodológico particularmente adequado. Ele possibilita não apenas a execução da construção para um conjunto fixo de valores, mas também a exploração de diferentes configurações do triângulo, permitindo verificar em quais condições a figura existe e em quais condições ela deixa de existir.

Em algumas questões da apostila, no entanto, há ressalvas que impõem uma condição específica para a construção. Por exemplo, determinadas tarefas indicam que o triângulo a ser construído é retângulo, ou isósceles ou equilátero. Essas ressalvas introduzem condições implícitas que, embora não estejam presentes nas questões selecionadas para este trabalho, são relevantes para a compreensão da diversidade de situações que podem ser analisadas à luz da TAD.

A análise das condições de existência, tanto as gerais (como a desigualdade triangular) quanto as específicas (como a restrição a um triângulo retângulo), é um aspecto fundamental da construção geométrica, pois está diretamente relacionada aos elementos tecnológico-teóricos da TAD. Ao variar os parâmetros e observar quando o triângulo se mantém ou se desfaz, o estudante mobiliza conhecimentos como a desigualdade triangular, a relação entre lados e ângulos, e as propriedades que garantem a unicidade ou a viabilidade da construção. Assim, o controle deslizante não é apenas um recurso de conveniência técnica, ele se torna um instrumento de investigação que potencializa a visualização dinâmica e a percepção de invariâncias, aspectos que podem favorecer a compreensão das propriedades geométricas envolvidas.

Após a construção realizou-se a sistematização dos dados da análise praxeológica, sendo essa a terceira etapa. Para cada questão, foi elaborado um quadro com três colunas. A primeira

coluna, intitulada "Técnica", descreve, por meio de um verbo de ação, a subtarefa realizada em cada etapa da construção. A segunda coluna, denominada "Ferramenta", indica o comando do GeoGebra utilizado para executar aquela etapa. A terceira coluna, nomeada "Comentário", apresenta as observações realizadas durante a construção, detalhando o que foi feito em cada etapa e registrando as propriedades geométricas que emergem do procedimento.

É imprescindível destacar que a coluna "Comentário" não corresponde diretamente ao nível da Tecnologia (θ) na TAD. Ela constitui um registro descritivo e observacional que permite identificar, posteriormente, onde se encontram os elementos tecnológicos e teóricos da construção. O quadro, em sua totalidade, é o instrumento que viabiliza a análise praxeológica aprofundada, pois é a partir da articulação entre as três colunas (Técnica, Ferramenta e Comentário) que se torna possível explicitar os quatro níveis do saber matemático: Tarefa, Técnica, Tecnologia e Teoria.

Essa estrutura de quadro permite visualizar, para cada ação realizada, o conhecimento teórico que a legitima, mas essa legitimação não está na coluna "Comentário" de forma imediata. Ela emerge da análise integrada do quadro como um todo, quando se examina como a Técnica (o fazer) se relaciona com as propriedades geométricas registradas nos Comentários e com os fundamentos teóricos que as validam. Dessa forma, o quadro evidencia a articulação entre os diferentes níveis praxeológicos, contribuindo para a compreensão da dissociação entre teoria e prática no ensino de Geometria.

A categorização dos dados, embora fundamentada na TAD e nos procedimentos adotados na Iniciação Científica, envolve certo grau de interpretação por parte da pesquisadora, o que pode introduzir subjetividade na análise. Para minimizar esse aspecto, a categorização foi sistematizada com base em critérios explícitos e documentada nos quadros analíticos apresentados no Capítulo 4.

Os registros das construções foram documentados por meio de prints de tela do GeoGebra, que foram capturadas durante a construção e pelos quadros analíticos descritos anteriormente. Essa documentação sistemática permite a reprodutibilidade da análise e oferece subsídios para a discussão dos resultados no Capítulo 4.

A quarta etapa consistiu na determinação das propriedades e teoremas que sustentam a construção, a partir da análise integrada do quadro. Nesse momento, examinou-se a coluna "Comentário" em articulação com a coluna "Técnica" e "Ferramenta", com o objetivo de

identificar os elementos que caracterizam a Tecnologia (θ), ou seja, as justificativas geométricas que explicam por que cada procedimento funciona.

Essa identificação não se dá de forma imediata ou automática, ela emerge da análise cuidadosa de cada etapa da construção. Por exemplo, ao observar que uma circunferência foi traçada com centro em um vértice e raio igual a um dos lados, a coluna "Comentário" registra essa ação, mas é a análise integrada do quadro que permite identificar que essa técnica se justifica pela definição de lugar geométrico: todos os pontos da circunferência estão a uma distância fixa do centro, o que garante que o vértice procurado esteja nessa circunferência.

A partir da identificação das propriedades e definições que justificam a técnica, avançou-se para a determinação da Teoria (θ) que valida a construção como um todo. Trata-se do corpo mais amplo de conhecimentos que fundamenta e valida as justificativas identificadas no nível da Tecnologia. No contexto das construções geométricas analisadas neste trabalho, a teoria que sustenta as justificativas é a Geometria Euclidiana Plana.

A Geometria Euclidiana Plana é o sistema teórico que organiza os axiomas, postulados, definições e teoremas mobilizados em cada construção. Seus fundamentos são os elementos que validam, no nível mais profundo, cada procedimento realizado. A escolha por esse sistema teórico justifica-se pelo fato de que as tarefas analisadas são tipicamente abordadas no âmbito da Geometria Euclidiana, tanto nos materiais didáticos quanto nas práticas de ensino.

Assim, a quarta etapa da análise consiste em explicitar a articulação entre os quatro níveis praxeológicos: a Tarefa (o que se pede), a Técnica (como se faz), a Tecnologia (porque funciona) e a Teoria (porque é verdade). Essa articulação é o que permite compreender se a construção é apresentada apenas como um roteiro mecânico ou se há uma integração entre os saberes práticos e teóricos.

4 DESCRIÇÃO DAS ANÁLISES PRAXEOLÓGICAS

Neste capítulo, são apresentados os resultados da análise praxeológica das cinco questões selecionadas da apostila *Construção de Polígonos* (Costa, 1995). A análise de cada questão está estruturada a partir da articulação entre os quatro níveis praxeológicos da TAD

(Tarefa (T), Técnica (τ), Tecnologia (θ) e Teoria (θ)) buscando evidenciar como os saberes práticos e teóricos se relacionam em cada etapa da construção.

Para cada questão, são apresentados: a Tarefa proposta, a análise dos dados fornecidos, o quadro com a descrição da Técnica e das Ferramentas utilizadas, os Comentários sobre cada etapa e a identificação da Tecnologia e da Teoria mobilizadas. Cada análise é seguida por uma discussão que busca evidenciar como os níveis praxeológicos se articulam na construção.

Ao final do capítulo, também será apresentada uma síntese das cinco questões, evidenciando como a articulação entre técnica e teoria se manifesta em diferentes níveis de complexidade ao longo das construções analisadas.

4.1 Questão 3

A Questão 3 da apostila *Construção de Polígonos* (Costa, 1995) propõe a seguinte tarefa (Figura 9):

Figura 9- Questão 3 da apostila de Costa (1995)



Fonte: Costa (1995, p.7)

4.1.1 Análise de dados da Questão 3

A tarefa consiste em construir um triângulo a partir de três dados métricos: dois lados (a e b) e o ângulo entre o lado a e o lado c (que não é fornecido). Em relação à categorização proposta na Metodologia, os dados da Questão 3 podem ser classificados da seguinte forma, conforme proposto no Quadro 3:

Quadro 3 - Categorização dos dados da questão 03

Notação original (Costa, 1995)	x, y e x^z
Notação adaptada	a, b, α_B
Tipo do triângulo	-
Tipo de dados fornecidos	Dados simples; Dados diretos; Dados explícitos.
Elementos do triângulo fornecidos	Comprimento dos lados; Abertura de ângulo interno do triângulo;

Fonte: Acervo da autora

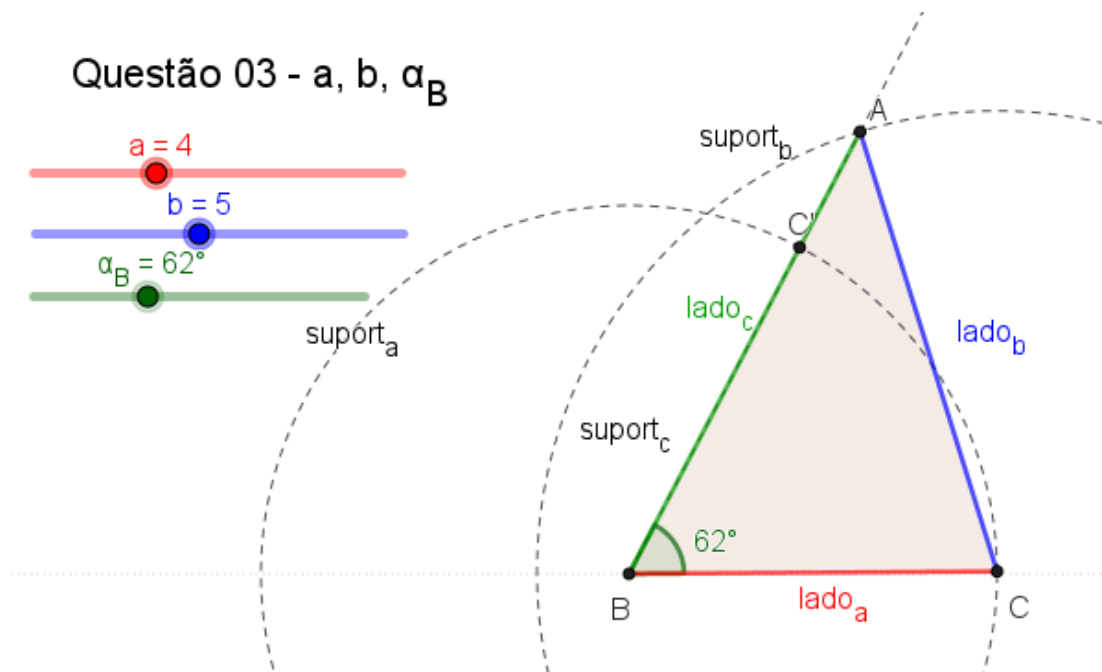
4.1.2 Descrição da Técnica e das Ferramentas Utilizadas da Questão 3

A construção foi realizada no software GeoGebra (

Figura 10 - Construção geométrica da questão 3

Figura 10), utilizando a ferramenta de controle deslizante para permitir a variação dos parâmetros dos lados (de 1 a 10, incremento igual a 1), denominado de a e b e do ângulo interno (de 0° a 180° , incremento igual 1), denominado de α_B . O Quadro 4 apresenta a descrição da Técnica (com verbos de ação), a Ferramenta do GeoGebra utilizada em cada etapa e os Comentários sobre o procedimento.

Figura 10 - Construção geométrica da questão 3



Fonte: Acervo da autora

À medida que a atividade foi sendo construída renomeei em configurações os pontos, semirretas, segmentos, circunferências para ficar mais compreensível a construção.

Quadro 4 - Descrição da Técnica e das ferramentas utilizadas da Questão 03.

t	Técnica (subtarefa)	Descrição da técnica com o uso de ferramentas	Comentários
t_1	Delimitar o lado a	Com a ferramenta “Círculo: Centro & Raio” determinou-se ao selecionar o ponto B de raio a , uma circunferência denominada <i>suport_a</i> Com a ferramenta “Ponto em Objeto” selecionou a	O ponto B é estabelecido ao selecionar uma posição no plano, que servirá como referência para a construção. A circunferência com centro em B e raio a define o lugar geométrico dos pontos que estão a uma distância fixa a de

		circunferência <i>suport_a</i>, criando o ponto <i>C</i> Com a ferramenta “Segmento”, selecione o ponto <i>B</i> e o ponto <i>C</i>, criando o <i>lado_a</i>	<i>B</i>, ou seja, todos os pontos que podem ser o vértice <i>C</i>. A ferramenta "Ponto em Objeto" foi utilizada para fixar <i>C</i> sobre essa circunferência, garantindo que a distância $\overline{BC}$ seja exatamente <i>a</i>. A escolha dessa ferramenta é significativa: mesmo que o ponto <i>C</i> seja movido ao longo da circunferência, a distância $\overline{BC}$ permanece invariante, o que evidencia a definição de circunferência como lugar geométrico. O segmento $\overline{BC}$ é então traçado, consolidando o lado <i>a</i> como um elemento fixo da construção.
t_2	Estabelecer uma circunferência de raio <i>b</i> centro <i>C</i> .	Com a ferramenta “Círculo: Centro & Raio” determinou-se ao selecionar o ponto <i>C</i> de raio <i>b</i> , uma circunferência denominada <i>suport_b</i>	A circunferência com centro em <i>C</i> e raio <i>b</i> estabelece o lugar geométrico dos pontos que estão a uma distância fixa <i>b</i> de <i>C</i> . Isso indica a posição possível do vértice <i>A</i> , que deverá estar simultaneamente a essa distância de <i>C</i> e sobre a semirreta que definirá o ângulo.
t_3	Estabelecer o ângulo α_B	Com a ferramenta “Ângulo com Amplitude Fixa” selecione o ponto <i>B</i>, o ponto <i>C</i> e crie um ângulo de valor α_B Com a ferramenta “Semirreta” selecionei o ponto <i>C</i> e o ponto <i>B'</i> gerado, denominado de <i>suport_c</i>	O ângulo α_B , com vértice em <i>C</i> , é estabelecido a partir do segmento $\overline{CB}$ (lado <i>a</i>), definindo a direção que o lado <i>c</i> deverá assumir. A ferramenta "Ângulo com Amplitude Fixa" fixa a abertura desejada, e a semirreta <i>suport_c</i> é traçada a partir de <i>C</i> , passando pelo ponto <i>C'</i> gerado pelo ângulo. Essa semirreta estabelece o lugar geométrico dos pontos que atendem à condição angular: o vértice <i>A</i> deve pertencer a essa semirreta para que o ângulo entre $\overline{CB}$ e $\overline{CA}$ seja exatamente α_B . Contudo, o ponto <i>A</i> também deve pertencer à circunferência <i>suport_b</i> para atender à condição de distância <i>b</i> .
t_4	Obter o ponto <i>A</i>	Com a ferramenta “Interseção de Dois Objetos”, selecione a semirreta <i>suport_c</i> e a circunferência <i>suport_b</i> , gerando o ponto <i>A</i>	O ponto <i>A</i> é determinado pela interseção da semirreta <i>suport_c</i> com a circunferência <i>suport_b</i> . Essa interseção garante que <i>A</i> satisfaça simultaneamente as duas condições estabelecidas: estar sobre a semirreta que define o

			ângulo α_B . (garantindo a direção do lado c) e sobre a circunferência de raio b com centro em C (garantindo a distância $\overline{CA} = b$). A existência da interseção, no entanto, depende da relação entre os dados: se o ângulo e a distância forem compatíveis, o ponto A existe; caso contrário, a construção é inviável.
t_1	Delimitar o lado b	Com a ferramenta “Segmento”, selecione o ponto C e o ponto A , criando o <i>lado_b</i>	O segmento $\overline{CA}$ é traçado, consolidando o lado b como um elemento fixo da construção. Sua medida é exatamente b , conforme estabelecido pela circunferência <i>suport_b</i> .
t_1	Delimitar o lado c	Com a ferramenta “Segmento”, selecione o ponto B e o ponto A , criando o <i>lado_c</i>	O segmento $\overline{BA}$ é traçado, consolidando o lado c como um elemento fixo da construção. Sua medida é exatamente c , conforme estabelecido pela circunferência <i>suport_c</i> .

Fonte: Acervo da autora.

4.1.3 Tecnologia e Teoria da Questão 3

A Tecnologia (θ) corresponde ao conjunto de definições, propriedades e proposições matemáticas que justificam cada etapa da construção. A análise integrada do Quadro 4 permite identificar os seguintes elementos tecnológicos mobilizados ao longo da construção:

- Definição de circunferência como lugar geométrico;
- Definição de ângulo;
- Teorema da interseção de lugares geométricos;
- Condição de existência da interseção.

A Teoria (θ) que valida a construção é a Geometria Euclidiana Plana. Trata-se do sistema teórico que organiza os axiomas, postulados, definições e teoremas mobilizados ao longo da construção.

4.2 Questão 11

A Questão 11 da apostila *Construção de Polígonos* (Costa, 1995) propõe a seguinte tarefa (Figura 11):

Figura 11 - Questão 11 da apostila de Costa (1995)

11 x $y^{\wedge}z$ a_x

Fonte: Costa (1995, p.7)

4.2.1 Análise de dados da Questão 11

A tarefa consiste em construir um triângulo a partir de três dados métricos: um lado (a), um ângulo entre o lado b e c (que não são disponibilizados) e a altura em relação ao lado fornecido. Em comparação à categorização proposta na Metodologia, os dados da Questão 11 podem ser classificados da seguinte forma, conforme proposto no Quadro 5 - Categorização dos dados da questão 11

Quadro 5 - Categorização dos dados da questão 11

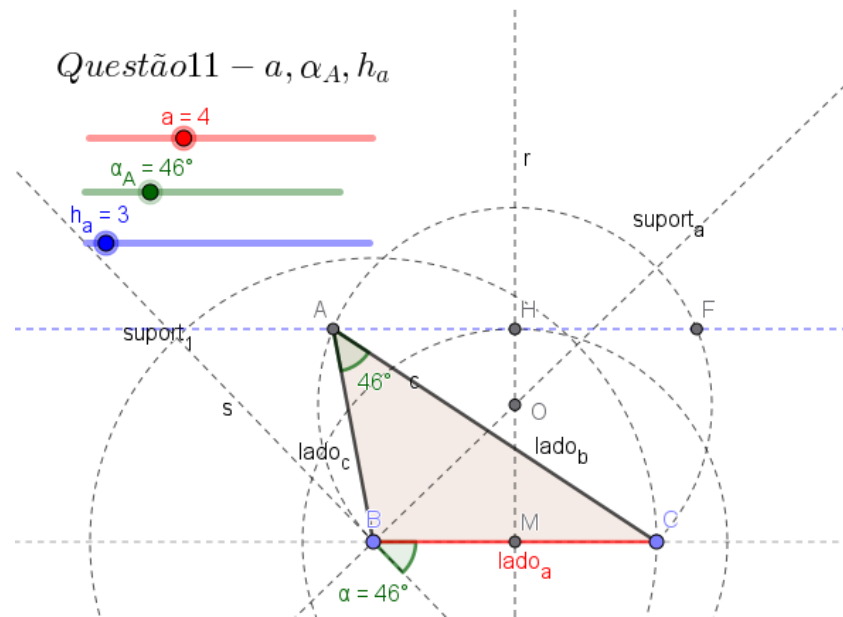
Notação original (Costa, 1995)	$x, y^{\wedge}z, a_x$
Notação adaptada	a, α_A, h_a
Tipo do triângulo	-
Tipo de dados fornecidos	Dados simples; Dados diretos; Dados explícitos.
Elementos do triângulo fornecidos	Comprimento dos lados; Abertura de ângulo interno do triângulo; Comprimento das alturas.

Fonte: Acervo da autora

4.2.2 Descrição da Técnica e das Ferramentas Utilizadas da Questão 11

A construção foi realizada no software GeoGebra (Figura 12), utilizando a ferramenta de controle deslizante para permitir a variação dos parâmetros do lado (de 1 a 10, incremento igual a 1), denominado de a , do ângulo interno (de 0° a 180° , incremento igual 1), denominado de α_A , e da altura (de 1 a 10, incremento igual a 1), denominada h_a . O Quadro 6 apresenta a descrição da Técnica (com verbos de ação), a Ferramenta do GeoGebra utilizada em cada etapa e os comentários sobre o procedimento.

Figura 12 - Construção geométrica da questão 11.



Fonte: Acervo da autora.

À medida que a atividade foi sendo construída renomeei pontos, retas, segmentos, circunferências para ficar mais compreensível a construção.

Quadro 6 - Descrição da Técnica e das Ferramentas Utilizadas da Questão 11

t	Técnica (subtarefa)	Descrição da técnica com o uso de ferramentas	Comentários
t_1	Delimitar o lado a	Com a ferramenta “Círculo: Centro & Raio” determinou-se ao selecionar o ponto B de raio a, uma circunferência denominada $suport_a$ Com a ferramenta “Ponto em Objeto” selecionou a circunferência $suport_a$, criando o ponto C Com a ferramenta “Segmento”, seleccione o ponto B e o ponto C, criando o $lado_a$	O ponto B é estabelecido ao selecionar uma posição no plano, que servirá como referência para a construção. A circunferência com centro em B e raio a define o lugar geométrico dos pontos que estão a uma distância fixa a de B, ou seja, todos os pontos que podem ser o vértice C. A ferramenta "Ponto em Objeto" foi utilizada para fixar C sobre essa circunferência, garantindo que a distância $\overline{BC}$ seja exatamente a. A escolha dessa ferramenta é significativa: mesmo que o ponto C seja movido ao longo da circunferência, a distância $\overline{BC}$ permanece invariante, o que evidencia a definição de circunferência como lugar geométrico. O segmento $\overline{BC}$ é então traçado, consolidando o lado a como um elemento fixo da construção.
	Estabelecer o arco capaz de ângulo α_A em relação ao lado a	Com a ferramenta “Ângulo com Amplitude Fixa” seleccione o	O arco capaz é o lugar geométrico dos pontos que

		ponto C, o ponto B e crie um ângulo de valor α_A sentido horário Com a ferramenta “Reta” selecionei o ponto B e o ponto C’ gerado, formando a reta s Com a ferramenta “Reta Perpendicular”, selecione a reta s e o ponto B, gerando a reta t Com a ferramenta “Mediatriz” selecionei o ponto B e o ponto C, gerando a reta r. Com a ferramenta “Interseção a Dois Objetos”, selecione a reta t e a reta r, criando o ponto O Com a ferramenta “Arco Circular”, selecione os pontos O, C e B, criando um arco denominado se suport_A	enxergam o segmento $\overline{BC}$ sob um ângulo α_A. Todo ponto pertencente a esse arco satisfaz a condição de que o ângulo entre os segmentos que ligam esse ponto aos extremos B e C é exatamente α_A. Para construí-lo, é necessário obter o centro O do arco, que é obtido pela interseção da mediatriz de $\overline{BC}$ (reta r) com a reta perpendicular à reta s (que define a direção do ângulo) passando por B. O centro O é o ponto equidistante de B e C, e o raio $\overline{OB}$ determina o arco que contém todos os pontos que enxergam $\overline{BC}$ sob o ângulo α_A. Este arco estabelece, portanto, o lugar geométrico onde o vértice A deve estar.
	Delimitar a altura h_a	Com a ferramenta “Interseção a Dois Objetos”, selecione a reta r e o segmento <i>lado_a</i>, criando o ponto M. Com a ferramenta “Círculo: Centro & Raio” determinou-se ao selecionar o ponto M de raio h_a, uma circunferência denominada <i>suport_h</i> Com a ferramenta “Interseção a Dois Objetos”, selecione a reta r e a circunferência <i>suport_h</i>, criando o ponto H. Com a ferramenta “Reta Paralela”, selecione o ponto H e o seguimento $\overline{BC}$, gerando a reta <i>altura</i>	A altura h_a é o segmento perpendicular à reta suporte do lado a ($\overline{BC}$) que liga o vértice oposto A a essa reta. Para delimitá-la, determina-se inicialmente o ponto médio M do lado $\overline{BC}$, pois a mediatriz r passa por M e é perpendicular a $\overline{BC}$. A partir de M, estabelece-se uma circunferência com raio h_a, que determina os pontos que estão a essa distância de M. O ponto H, interseção da mediatriz r com a circunferência <i>suport_h</i>, é o ponto sobre a mediatriz que está a uma distância h_a de M. A reta paralela a $\overline{BC}$ passando por H estabelece o lugar geométrico dos pontos que estão a uma distância h_a da base $\overline{BC}$. O vértice A deve estar sobre essa reta para que a altura do triângulo seja exatamente h_a.
	Obter o ponto A	Com a ferramenta “Interseção de Dois Objetos”, selecione a reta <i>altura</i> e a circunferência <i>suport_b</i>, gerando o ponto A	O ponto A é determinado pela interseção de duas condições: estar sobre a reta <i>altura</i> (que garante que a distância de A à base $\overline{BC}$ seja h_a) e estar sobre o arco capaz <i>suport_A</i> (que garante que o ângulo $\widehat{BAC}$ seja α_A). Essa interseção garante

			que A satisfaça simultaneamente as duas condições, determinando assim o vértice do triângulo. A existência da interseção depende da compatibilidade dos dados: se a reta <i>altura</i> intersectar o arco capaz, a construção é viável; caso contrário, os dados fornecidos não permitem a construção do triângulo.
	Delimitar o lado b	Com a ferramenta “Segmento”, selecione o ponto C e o ponto A , criando o <i>lado_b</i>	O segmento $\overline{CA}$ é traçado, consolidando o lado b como um elemento fixo da construção. Sua medida é determinada pela posição do vértice A , que por sua vez foi estabelecida pelas condições de altura e ângulo.
	Delimitar o lado c	Com a ferramenta “Segmento”, selecione o ponto B e o ponto A , criando o <i>lado_c</i>	O segmento $\overline{BA}$ é traçado, completando o triângulo ABC . O lado c , que não foi fornecido, é determinado pela construção, sendo o segmento que une os vértices B e A . A figura final possui o lado a ($\overline{BC}$), a altura h_a relativa a esse lado, e o ângulo α_A no vértice A , conforme solicitado.

Fonte: Acervo da Autora.

4.2.3 Tecnologia e Teoria da Questão 11

A análise integrada do Quadro 6 permite identificar os seguintes elementos tecnológicos mobilizados ao longo da construção.

- Definição de circunferência como lugar geométrico;
- Teorema do Arco Capaz;
- Definição de altura como distância perpendicular;
- Teorema das paralelas;
- Teorema da interseção de lugares geométricos;
- Condição de existência da interseção.

A Teoria (θ) que valida a construção é a Geometria Euclidiana Plana. Trata-se do sistema teórico que organiza os axiomas, postulados, definições e teoremas mobilizados ao longo da construção.

4.3 Questão 22

A Questão 22 da apostila *Construção de Polígonos* (Costa, 1995) propõe a seguinte tarefa (Figura 13):

Figura 13 - Questão 22 da apostila de Costa (1995)

22 ✓ x $x^{\wedge}y$ mn_z

Fonte: Costa (1995, p.7)

4.3.1 Análise de dados da Questão 22

A tarefa consiste em construir um triângulo a partir de três dados métricos: um lado, um ângulo interno e o comprimento da mediana. Em relação à categorização proposta na Metodologia, os dados da Questão 22 podem ser classificados da seguinte forma, conforme proposto no Quadro 7:

Quadro 7 - Categorização dos dados da questão 22

Notação original (Costa, 1995)	$x, x^{\wedge}y, mn_c$
Notação adaptada	a, α_c, mn_c
Tipo do triângulo	-
Tipo de dados fornecidos	Dados simples; Dados diretos; Dados explícitos.
Elementos do triângulo fornecidos	Comprimento dos lados; Abertura de ângulo interno do triângulo; Comprimento das mediana.

Fonte: Acervo da autora

4.3.2 Descrição da Técnica e das Ferramentas Utilizadas da Questão 22

A construção foi realizada no software GeoGebra (Figura 14), utilizando a ferramenta de controle deslizante para permitir a variação dos parâmetros do lado (de 1 a 10, incremento igual a 1), denominado de a , do ângulo interno (de 0° a 180° , incremento igual 1), denominado de α_c , e da mediana (de 1 a 10, incremento igual a 1), denominada mn_c . O Quadro 8 apresenta a descrição da Técnica (com verbos de ação), a Ferramenta do GeoGebra utilizada em cada etapa e os Comentários sobre o procedimento.

Figura 14 - Construção geométrica da questão 22

	Estabelecer o ângulo α_C	Com a ferramenta “Ângulo com Amplitude Fixa” selecione o ponto B, o ponto C e crie um ângulo de valor α_C Com a ferramenta “Semirreta” selecionei o ponto C e o ponto B' gerado, denominado de <i>suport_b</i>	O ângulo α_C, com vértice em C, é estabelecido a partir do segmento $\overline{CB}$ (lado a), definindo a direção que o lado b deverá assumir. A ferramenta “Ângulo com Amplitude Fixa” fixa a abertura desejada, e a semirreta <i>suport_b</i> é traçada a partir de C, passando pelo ponto B' gerado pelo ângulo. Essa semirreta estabelece o lugar geométrico dos pontos que atendem à condição angular: o vértice A deve pertencer a essa semirreta para que o ângulo entre $\overline{CB}$ e $\overline{CA}$ seja exatamente α_C.
	Obter o ponto médio do lado C	Com a ferramenta “Ponto Médio ou Centro”, selecione o ponto B e o ponto C, gerando o ponto M. Com a ferramenta “Reta Paralela”, selecione a reta <i>suport_b</i> e o ponto M, gerando a reta r Com a ferramenta “Círculo: Centro & Raio” determinou-se ao selecionar o ponto C de raio mn_z, uma circunferência denominada <i>suport_m_n</i> Com a ferramenta “Interseção de Dois Objetos”, selecione a circunferência <i>suport_m_n</i> e a reta r, gerando o ponto M'	O ponto médio M do lado a é determinado, pois a mediana parte do vértice C e encontra o lado oposto AB em seu ponto médio. A reta r, traçada paralelamente à semirreta <i>suport_b</i> passando por M, estabelece o lugar geométrico dos pontos que estão alinhados com a direção do lado b a partir do ponto médio. A circunferência com centro em C e raio mn_z estabelece o lugar geométrico dos pontos que estão a uma distância fixa mn_z de C. O ponto M', interseção da reta r com a circunferência <i>suport_m_n</i>, é o ponto que determina a mediana relativa ao lado c. Esse ponto é fundamental, pois a mediana é o segmento que liga o vértice C ao ponto médio do lado oposto $\overline{AB}$, e M' define a direção e a posição dessa mediana.
	Obter o vértice A	Com a ferramenta “Reta”, selecione os pontos B e M', denominado de <i>suport_c</i> Com a ferramenta “Interseção de Dois Objetos”, selecione as retas <i>suport_c</i> e <i>suport_b</i>, gerando o ponto A	O vértice A é determinado pela interseção de duas condições: estar sobre a reta <i>suport_c</i> (que passa por B e M', definindo a direção do lado c) e estar sobre a semirreta <i>suport_b</i> (que garante o ângulo α_C). A reta <i>suport_c</i> é traçada a partir do ponto B, passando pelo ponto M', que está sobre a mediana. Essa reta estabelece o lugar geométrico dos pontos que, juntamente com M', definem a mediana do triângulo. A interseção de

			$suport_c$ com $suport_b$ garante que A satisfaça simultaneamente as duas condições: estar alinhado com B e M' (garantindo que $\overline{CM'}$ seja a mediana relativa ao lado $\overline{AB}$) e estar sobre a semirreta que define o ângulo α_C (garantindo a direção do lado b). A existência da interseção depende da compatibilidade dos dados: se as retas se intersectarem, a construção é viável; caso contrário, os dados fornecidos não permitem a construção do triângulo.
	Delimitar os lados b e c	Com a ferramenta "Segmento", selecione o ponto C e o ponto A, criando o $lado_b$. Com a ferramenta "Segmento", selecione o ponto B e o ponto A, criando o $lado_c$.	Os segmentos $\overline{CA}$ e $\overline{BA}$ são traçados, completando o triângulo ABC. O lado b ($\overline{CA}$) é estabelecido pela posição do vértice A, que foi determinado pelas condições de ângulo e mediana. O lado c ($\overline{BA}$), que não foi fornecido, é determinado pela construção, sendo o segmento que une os vértices B e A. A figura final possui o lado a ($\overline{BC}$), o ângulo α_C no vértice C, e a mediana mn_z relativa ao lado c ($\overline{AB}$), conforme solicitado.

Fonte: Acervo da autora.

4.3.3 Tecnologia e Teoria da Questão 22

A análise integrada do Quadro 8 permite identificar os seguintes elementos tecnológicos mobilizados ao longo da construção:

- Definição de circunferência como lugar geométrico;
- Definição de ângulo;
- Definição de ponto médio;
- Definição de mediana;
- Teorema da interseção de lugares geométricos;
- Condição de existência da interseção.
- Teorema da base média do triângulo

A Teoria (θ) que valida a construção é a Geometria Euclidiana Plana. Trata-se do sistema teórico que organiza os axiomas, postulados, definições e teoremas mobilizados ao longo da construção.

4.4 Questão 37

A Questão 37 da apostila *Construção de Polígonos* (Costa, 1995) propõe a seguinte tarefa (Figura 15):

Figura 15 - Questão 37 da apostila de Costa (1995)

37✓ x $x^{\wedge}y$ bi_z

Fonte: Costa (1995, p.7)

4.4.1 Análise de dados da Questão 37

A tarefa consiste em construir um triângulo a partir de três dados métricos: um lado (a), um ângulo entre o lado a e o lado b (que não é fornecido) e a bissetriz interna do ângulo α_c (não fornecido). Em relação à categorização proposta na Metodologia, os dados da Questão 37 podem ser classificados da seguinte forma, conforme proposto no Quadro 9:

Quadro 9 - Categorização dos dados da questão 37

Notação original (Costa, 1995)	$x, x^{\wedge}y, bi_z$
Notação adaptada	a, α_c, bi_c
Tipo do triângulo	-
Tipo de dados fornecidos	Dados Simples; Dados Diretos; Dados Explícitos.
Elementos do triângulo fornecidos	Comprimento do lado Abertura do ângulo interno do triângulo Bissetriz internas do triângulo

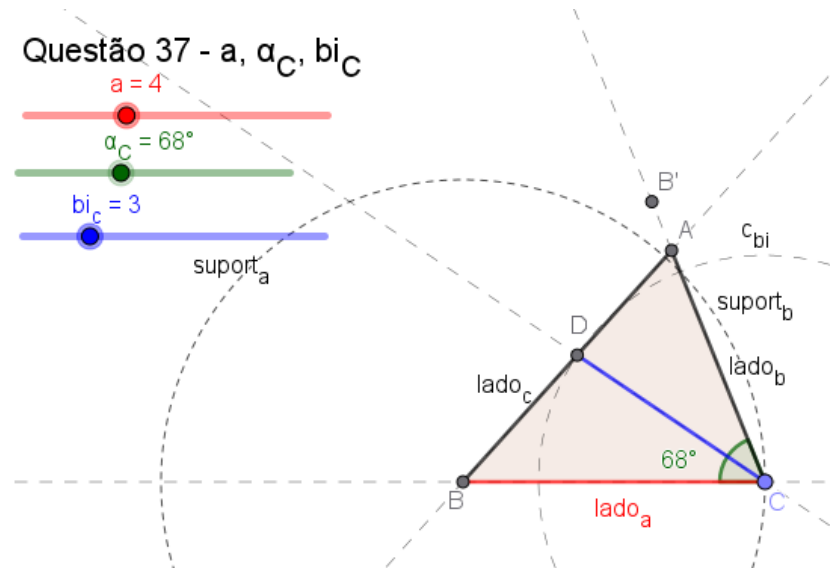
Fonte: Acervo da autora

4.4.2 Descrição da Técnica e das Ferramentas Utilizadas da Questão 37

A construção foi realizada no software GeoGebra (Figura 16), utilizando a ferramenta de controle deslizante para permitir a variação dos parâmetros do lado e da bissetriz (de 1 a 10, incremento igual a 1), denominado de a e bi_c , e do ângulo interno (de 0° a 180° , incremento igual 1), denominado de α_B . O Quadro 10 apresenta a descrição da Técnica (com verbos de

ação), a Ferramenta do GeoGebra utilizada em cada etapa e os Comentários sobre o procedimento.

Figura 16 - Construção geométrica da questão 37



Fonte: Acervo da autora.

À medida que a atividade foi sendo construída renomeei pontos, retas, segmentos, circunferências para ficar mais compreensível a construção.

Quadro 10 - Descrição da Técnica e das Ferramentas Utilizadas da Questão 37

<i>T</i>	Técnica (subtarefa)	Descrição da técnica com o uso de ferramentas	Comentários
<i>t</i> ₁	Delimitar o lado <i>a</i>	Com a ferramenta “Círculo: Centro & Raio” determinou-se ao selecionar o ponto <i>B</i> de raio <i>a</i>, uma circunferência denominada <i>suport_a</i> Com a ferramenta “Ponto em Objeto” selecionou a circunferência <i>suport_a</i>, criando o ponto <i>C</i> Com a ferramenta “Segmento”, selecione o ponto <i>B</i> e o ponto <i>C</i>, criando o <i>lado_a</i>	O ponto <i>B</i> é estabelecido ao selecionar uma posição no plano, que servirá como referência para a construção. A circunferência com centro em <i>B</i> e raio <i>a</i> define o lugar geométrico dos pontos que estão a uma distância fixa <i>a</i> de <i>B</i>, ou seja, todos os pontos que podem ser o vértice <i>C</i>. A ferramenta "Ponto em Objeto" foi utilizada para fixar <i>C</i> sobre essa circunferência, garantindo que a distância $\overline{BC}$ seja exatamente <i>a</i>. A escolha dessa ferramenta é significativa: mesmo que o ponto <i>C</i> seja movido ao longo da circunferência, a distância $\overline{BC}$ permanece invariante, o que evidencia a definição de circunferência como lugar geométrico. O segmento $\overline{BC}$ é

			então traçado, consolidando o lado a como um elemento fixo da construção.
	Estabelecer o ângulo α_C	Com a ferramenta “Ângulo com Amplitude Fixa” selecione o ponto B, o ponto C e crie um ângulo de valor α_C Com a ferramenta “Semirreta” selecionei o ponto C e o ponto B' gerado, denominado de $suport_b$	O ângulo α_C, com vértice em C, é estabelecido a partir do segmento $\overline{CB}$ (lado a), definindo a direção que o lado b deverá assumir. A ferramenta “Ângulo com Amplitude Fixa” fixa a abertura desejada, e a semirreta $suport_b$ é traçada a partir de C, passando pelo ponto B' gerado pelo ângulo. Essa semirreta estabelece o lugar geométrico dos pontos que atendem à condição angular: o vértice A deve pertencer a essa semirreta para que o ângulo entre $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ seja exatamente α_C.
	Delimitar a bi_c	Com a ferramenta “Bissetriz”, selecione os pontos B, C e B', denominando a reta $suport_{b_i}$ Com a ferramenta “Círculo: Centro e Raio”, selecione o ponto C, raio bi_c, gera a circunferência c_{b_i} Com a ferramenta “Interseção de Dois Objetos”, selecione a circunferência c_{b_i} e a reta $suport_{b_i}$, gerando o ponto D Com a ferramenta “Segmento” selecione os pontos C e D.	A bissetriz do ângulo α_C, com vértice em C, é construída a partir dos pontos B, C e B', dividindo o ângulo em dois ângulos congruentes, conforme a definição de bissetriz. A circunferência c_{b_i}, com centro em C e raio bi_c, estabelece o lugar geométrico dos pontos que estão a uma distância fixa bi_c do vértice C, garantindo que o comprimento da bissetriz interna seja preservado. O ponto D, obtido pela interseção da bissetriz com a circunferência c_{b_i}, satisfaz simultaneamente as duas condições: estar sobre a direção definida pela bissetriz (posição angular específica em relação ao ângulo α_C) e estar a uma distância bi_c de C. O segmento $\overline{CD}$ é então traçado, consolidando o comprimento da bissetriz interna como um elemento da construção. O ponto D deve pertencer à reta suporte do lado c (AB), e por estar sobre a bissetriz interna, está localizado no segmento $\overline{AB}$, pois a bissetriz interna de um ângulo de um triângulo intercepta o lado oposto em um ponto compreendido entre seus extremos, garantindo a validade geométrica da construção.

	Obter o vértice A	Com a ferramenta “Semirreta” selecione os pontos B e D, formando a semirreta $suport_c$. Com a ferramenta “Interseção de dois objetos” selecione $suport_b$ e $suport_c$, gerando o ponto A.	A semirreta $suport_c$, que contém os pontos B e D. Essa semirreta define a direção que o lado c deverá assumir na construção. O vértice A é então determinado pela interseção da semirreta $suport_c$ com a semirreta $suport_b$, que estabelece a direção do lado b a partir do vértice C. Como A é obtido como ponto de interseção de duas semirretas, ele pertence à semirreta $suport_c$, garantindo que A, B e D sejam colineares. Essa colinearidade assegura que o lado c ($\overline{AB}$) esteja alinhado com a direção estabelecida pela bissetriz interna e pelo ponto D, de modo que a bissetriz interna intercepte o lado oposto conforme exigido pelos dados da tarefa. Simultaneamente, a interseção com $suport_b$ garante que o ângulo α_C seja preservado, completando as condições necessárias para a formação do triângulo ABC.
	Delimitar os lados b e c	Com a ferramenta “Segmento”, selecione os pontos A e B, gerando $lado_c$. Com a ferramenta “Segmento”, selecione os pontos A e C, gerando $lado_b$.	Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são traçados, consolidando os lados c e b do triângulo ABC, respectivamente. O lado c, que não foi fornecido inicialmente, é determinado pela construção, sendo o segmento que une os vértices A e B, enquanto o lado b é estabelecido pela posição do vértice A, previamente determinada pelas condições de ângulo e interseção dos lugares geométricos. Com o traçado desses segmentos, o triângulo ABC é completado, apresentando o lado a ($\overline{BC}$), o ângulo α_C no vértice C e os lados b e c conforme estabelecidos pela construção, atendendo às condições solicitadas.

Fonte: Acervo da autora.

4.4.3 Tecnologia e Teoria da Questão 37

A análise integrada do Quadro 10 permite identificar os seguintes elementos tecnológicos mobilizados ao longo da construção:

- Definição de circunferência como lugar geométrico;
- Definição de ângulo;
- Definição de bissetriz;
- Teorema da interseção de lugares geométricos;
- Condição de existência da interseção.

A Teoria (θ) que valida a construção é a Geometria Euclidiana Plana. Trata-se do sistema teórico que organiza os axiomas, postulados, definições e teoremas mobilizados ao longo da construção.

4.5 - Questão 38

A Questão 38 da apostila *Construção de Polígonos* (Costa, 1995) propõe a seguinte tarefa (Figura 17):

Figura 17 - Questão 38 da apostila de Costa (1995)



Fonte: Costa (1995, p.7)

4.5.1 Análise de dados da Questão 38

A tarefa consiste em construir um triângulo a partir de três dados métricos: um lado (a), um ângulo entre o lado a e o lado b (que não é fornecido) e a bissetriz externa do ângulo α_c (não fornecido). Em relação à categorização proposta na Metodologia, os dados da Questão 38 podem ser classificados da seguinte forma, conforme proposto no Quadro 11:

Quadro 11 - Categorização dos dados da questão 38

Notação original (Costa, 1995)	x, x^y, bez
Notação adaptada	a, α_c, be_c
Tipo do triângulo	-
Tipo de dados fornecidos	Dados Simples; Dados Diretos; Dados Explícitos.

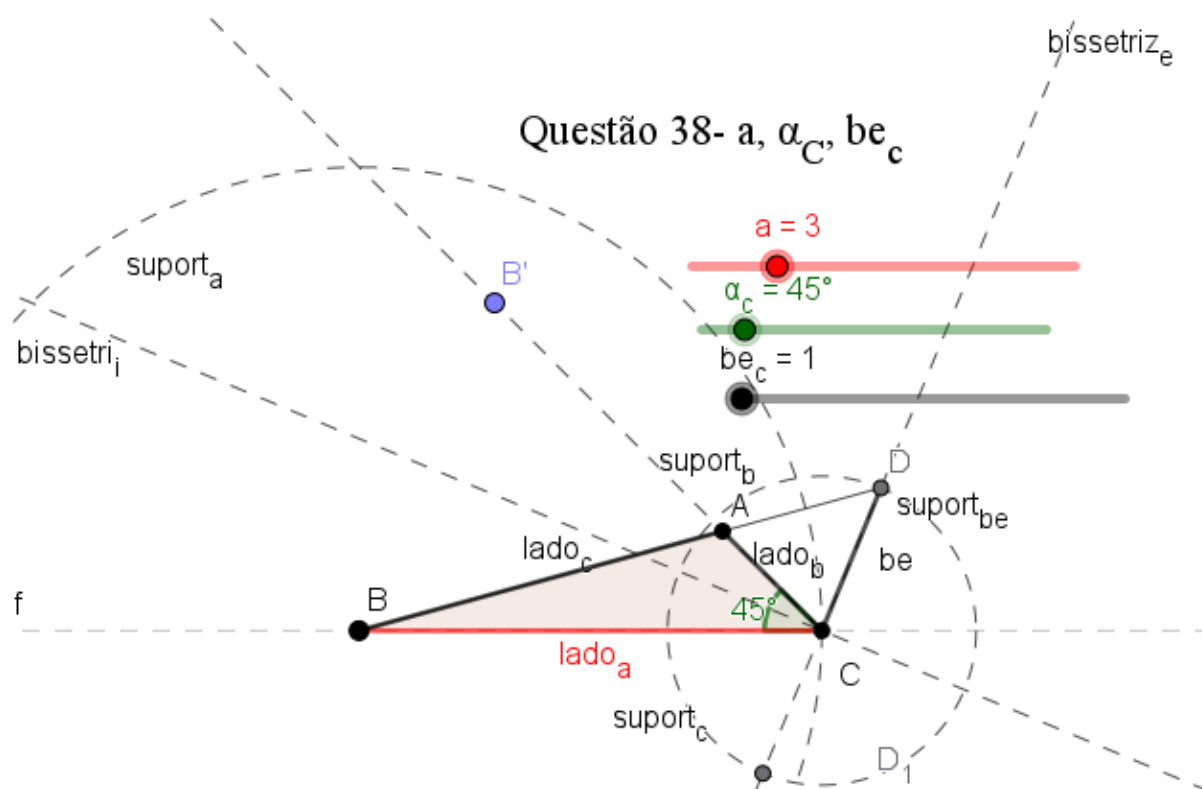
Elementos do triângulo fornecidos	Comprimento do lado
	Abertura do ângulo interno do triângulo
	Bissetriz externa do triângulo

Fonte: Acervo da autora

4.5.2 Descrição da Técnica e das Ferramentas Utilizadas da Questão 38

A construção foi realizada no software GeoGebra (Figura 18), utilizando a ferramenta de controle deslizante para permitir a variação dos parâmetros do lado e da bissetriz (de 1 a 10, incremento igual a 1), denominado de a e be_C , e do ângulo interno (de 0° a 180° , incremento igual 1), denominado de α_C . O Quadro 12 apresenta a descrição da Técnica (com verbos de ação), a Ferramenta do GeoGebra utilizada em cada etapa e os Comentários sobre o procedimento.

Figura 18 - Construção geométrica da questão 38



Fonte: Acervo da autora.

À medida que a atividade foi sendo construída renomeei pontos, retas, segmentos, circunferências para ficar mais compreensível a construção.

Quadro 12 - Descrição da Técnica e das Ferramentas Utilizadas da Questão 38

<i>T</i>	Técnica (subtarefa)	Descrição da técnica com o uso de ferramentas	Comentários
<i>t</i> ₁	Delimitar o lado <i>a</i>	Com a ferramenta “Círculo: Centro & Raio” determinou-se ao selecionar o ponto <i>B</i> de raio <i>a</i>, uma circunferência denominada <i>suport_a</i> Com a ferramenta “Ponto em Objeto” selecionou a circunferência <i>suport_a</i>, criando o ponto <i>C</i> Com a ferramenta “Segmento”, selecione o ponto <i>B</i> e o ponto <i>C</i>, criando o lado <i>a</i>	O ponto <i>B</i> é estabelecido ao selecionar uma posição no plano, que servirá como referência para a construção. A circunferência com centro em <i>B</i> e raio <i>a</i> define o lugar geométrico dos pontos que estão a uma distância fixa <i>a</i> de <i>B</i>, ou seja, todos os pontos que podem ser o vértice <i>C</i>. A ferramenta "Ponto em Objeto" foi utilizada para fixar <i>C</i> sobre essa circunferência, garantindo que a distância $\overline{BC}$ seja exatamente <i>a</i>. A escolha dessa ferramenta é significativa: mesmo que o ponto <i>C</i> seja movido ao longo da circunferência, a distância $\overline{BC}$ permanece invariante, o que evidencia a definição de circunferência como lugar geométrico. O segmento $\overline{BC}$ é então traçado, consolidando o lado <i>a</i> como um elemento fixo da construção.
	Estabelecer o ângulo α_C	Com a ferramenta “Ângulo com Amplitude Fixa” selecione o ponto <i>B</i>, o ponto <i>C</i> e crie um ângulo de valor α_C Com a ferramenta “Semirreta” selecionei o ponto <i>C</i> e o ponto <i>B'</i> gerando a semirreta <i>suport_b</i>	O ângulo α_C, com vértice em <i>C</i>, é estabelecido a partir do segmento $\overline{CB}$ (lado <i>a</i>), definindo a direção que o lado <i>b</i> deverá assumir. A ferramenta "Ângulo com Amplitude Fixa" fixa a abertura desejada, e a semirreta <i>suport_b</i> é traçada a partir de <i>C</i>, passando pelo ponto <i>B'</i> gerado pelo ângulo. Essa semirreta estabelece o lugar geométrico dos pontos que atendem à condição angular: o vértice <i>A</i> deve pertencer a essa semirreta para que o ângulo entre $\overline{CB}$ e $\overline{AB}$ seja exatamente α_B.
	Delimitar a bissetriz externa do ângulo α_C	Com a ferramenta “Bissetriz”, selecione $\overline{BC}$ e <i>suport_b</i>, formando as retas <i>bissetriz_i</i> e <i>bissetriz_e</i> Com a ferramenta “Círculo: Centro & Raio”, selecione o vértice <i>C</i> e raio <i>be_C</i>, gerando a circunferência <i>suport_b_e</i>. Com a ferramenta “Interseção de Dois Objetos” selecione <i>suport_b_e</i> e <i>bissetriz_e</i>, obtendo o ponto <i>D</i> Com a ferramenta “Segmento” selecione os pontos <i>C</i> e <i>D</i>, formando o segmento <i>lado_b_e</i>	A bissetriz externa <i>bissetriz_e</i> é construída a partir do vértice <i>C</i>, dividindo o ângulo externo formado pelo lado <i>a</i> ($\overline{CB}$) e pelo prolongamento do lado <i>b</i> em dois ângulos congruentes. Diferentemente da bissetriz interna, que divide o ângulo interno do triângulo, a bissetriz externa define pontos equidistantes dos prolongamentos dos lados, o que é fundamental para a determinação da posição do ponto <i>D</i>. A circunferência <i>suport_b_e</i>, com centro em <i>C</i> e raio <i>be_C</i>, estabelece o lugar geométrico dos pontos que estão a uma distância fixa <i>be_C</i> do vértice <i>C</i>, garantindo que o comprimento da bissetriz externa seja preservado. O ponto <i>D</i>, obtido pela interseção da bissetriz externa com a circunferência <i>suport_b_e</i>, satisfaz simultaneamente as duas condições: estar sobre a direção definida pela bissetriz externa (posição angular específica em relação ao ângulo externo de <i>C</i>) e estar a uma distância <i>be_C</i> de <i>C</i>. O segmento $\overline{CD}$

			é então traçado, consolidando o comprimento da bissetriz externa como um elemento da construção. O ponto D deve pertencer à reta suporte do lado c , entretanto, por estar sobre a bissetriz externa, não necessariamente pertence ao segmento que define o lado do triângulo, mas sim ao seu prolongamento, o que é consistente com a natureza da bissetriz externa e com os dados fornecidos
	Obter o vértice A	Com a ferramenta “Segmento” selecione os pontos B e D , denominando o segmento como $suport_c$ Com a ferramenta “Interseção de dois Objetos”, selecione $suport_b$ e $suport_c$	O segmento $\overline{BD}$ é traçado para estabelecer a reta suporte $suport_c$, que contém os pontos B e D . Essa reta define a direção que o lado c deverá assumir na construção. O vértice A é então determinado pela interseção da reta $suport_c$ com a semirreta $suport_b$, que estabelece a direção do lado b a partir do vértice C . Como A é obtido como ponto de interseção de duas retas, ele pertence à reta $suport_c$, garantindo que A , B e D sejam colineares. Essa colinearidade assegura que o lado c ($\overline{AB}$) esteja alinhado com a direção estabelecida pela bissetriz externa e pelo ponto D , de modo que a bissetriz externa intercepte o prolongamento do lado oposto conforme exigido pelos dados da tarefa. Simultaneamente, a interseção com $suport_b$ garante que o ângulo α_C seja preservado, completando as condições necessárias para a formação do triângulo ABC .
	Delimitar os lados b e c	Com a ferramenta “Segmento”, selecione os pontos A e B , gerando $lado_c$ Com a ferramenta “Segmento”, selecione os pontos A e C gerando $lado_b$	Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são traçados, consolidando os lados c e b do triângulo ABC , respectivamente. O lado c , que não foi fornecido inicialmente, é determinado pela construção, sendo o segmento que une os vértices A e B , enquanto o lado b é estabelecido pela posição do vértice A , previamente determinada pelas condições de ângulo e interseção dos lugares geométricos. Com o traçado desses segmentos, o triângulo ABC é completado, apresentando o lado a ($\overline{BC}$), o ângulo α_C no vértice C e a bissetriz do ângulo externo. Logo, conforme estabelecidos pela construção os lados b e c atende às condições solicitadas.

Fonte: Acervo da autora.

4.5.3 Tecnologia e Teoria da Questão 38

A análise do Quadro 12 permite identificar os seguintes elementos tecnológicos mobilizados ao longo da construção:

- Definição de circunferência como lugar geométrico;
- Definição de ângulo;
- Definição de bissetriz externa;
- Teorema da interseção de lugares geométricos;
- Condição de existência da interseção.
- Propriedade fundamental das bissetrizes de ângulos suplementares

A Teoria (θ) que valida a construção é a Geometria Euclidiana Plana. Trata-se do sistema teórico que organiza os axiomas, postulados, definições e teoremas mobilizados ao longo da construção.

4.6 - Discussão das Questões 3, 11, 22, 37 e 38

A análise das cinco questões permite identificar uma progressão na complexidade das técnicas mobilizadas e na articulação entre os níveis praxeológicos da TAD.

Em termos de complexidade da Técnica, observa-se uma progressão clara. A Questão 3 envolve a interseção de uma circunferência com uma semirreta. A Questão 11 acrescenta a construção de um arco capaz e a determinação de uma altura. A Questão 22 exige a determinação do ponto médio, a construção de uma reta paralela e a interseção de retas. A Questão 37 introduz o conceito de bissetriz interna, exigindo a construção de um ponto que divide o ângulo em duas partes iguais e a aplicação do Teorema da Bissetriz Interna. A Questão 38, por sua vez, trabalha com a bissetriz externa, que atua sobre o prolongamento dos lados, exigindo do estudante uma compreensão mais elaborada das relações de proporcionalidade e da noção de reta suporte. Essa progressão reflete o aumento da complexidade dos dados fornecidos e das relações geométricas envolvidas.

A Tecnologia mobilizada também se torna mais elaborada. Na Questão 3, predominam definições básicas (circunferência como lugar geométrico, ângulo) e o teorema da interseção de lugares geométricos. Na Questão 11, acrescentam-se o teorema do arco capaz, a definição de altura como distância perpendicular e o teorema das paralelas. Na Questão 22, somam-se a definição de ponto médio e a definição de mediana. Nas Questões 37 e 38, mobilizam-se a definição de bissetriz (interna e externa) e os teoremas da bissetriz interna e externa, que estabelecem relações de proporcionalidade entre os segmentos formados no lado oposto ou em seu prolongamento.

Apesar dessas diferenças, a Teoria que valida as cinco construções é a mesma: a Geometria Euclidiana Plana. O que varia é o grau de explicitação necessário para a compreensão de cada construção. Na Questão 3, os elementos tecnológicos são mais elementares e podem permanecer implícitos. Na Questão 11, conceitos como arco capaz e altura exigem maior explicitação. Na Questão 22, a definição de mediana e a relação com o ponto médio precisam ser explicitadas com clareza, pois não são intuitivas. Nas Questões 37 e 38, as definições e teoremas relacionados às bissetrizes exigem um nível ainda maior de explicitação, especialmente no caso da bissetriz externa (Questão 38), cujo ponto de interseção com o lado oposto ocorre em seu prolongamento, situação que não é imediatamente evidente para o estudante uma vez que demanda a compreensão da diferença entre segmento e reta suporte.

Outra característica comum das cinco questões é a presença de um dado desconhecido: o lado c ($\overline{AB}$), que não é fornecido e precisa ser determinado pela construção. Esse elemento comum torna as tarefas particularmente ricas para a análise praxeológica, pois exige que o estudante compreenda a relação entre os dados fornecidos e os elementos que serão determinados.

Portanto, a análise evidencia que esse tipo de descrição das técnicas favorece a articulação com a tecnologia e a teoria, pois permite observar a complexidade das tarefas em relação aos tipos de dados mobilizados e aos aspectos teóricos envolvidos. O papel do professor é fundamental para mediar essa explicitação, garantindo que os estudantes compreendam não apenas o "como fazer", mas também o "por que fazer" e o "por que funciona".

5 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo analisar, à luz da Teoria Antropológica do Didático, como os elementos praxeológicos (T , τ , θ e Θ) se articulam em construções geométricas de triângulos, evidenciando a relação entre os saberes práticos e teóricos mobilizados nessas atividades.

Para tanto, foram selecionadas cinco questões da apostila "Construção de Polígonos" (Costa, 1995): a Questão 3, envolve a construção de um triângulo a partir de dois lados e um ângulo; a Questão 11, que propõe a construção a partir de um lado, um ângulo e a altura relativa a esse lado; a Questão 22, que solicita a construção a partir de um lado, um ângulo e uma mediana; a Questões 37 e 38 propõem a construção a partir de um lado, ângulo e uma bissetriz (Interna na questão 37 e externa na questão 38).

O percurso metodológico foi organizado em três etapas: categorização dos dados fornecidos em cada questão, resolução das construções no software GeoGebra com o auxílio de controle deslizante, sistematização das técnicas em quadros com três colunas (Técnica, Ferramenta, Comentário) e determinação das propriedades e teoremas que sustentam cada construção, com base na análise integrada dos quadros.

A questão que orientou esta investigação foi: *Como a descrição das técnicas de construções de triângulos pode favorecer a articulação com a tecnologia e teoria fundamentada nas Análises praxeológicas?*

A análise realizada permitiu constatar que, nas cinco questões estudadas, os quatro níveis praxeológicos foram observados, ainda que em diferentes graus de explicitação. A Técnica (o conjunto de passos executados para construir o triângulo) é sempre acompanhada por uma Tecnologia (as justificativas geométricas que explicam por que cada passo funciona) e por uma Teoria (o corpo mais amplo da Geometria Euclidiana que valida essas justificativas).

O que varia entre as questões é o grau de explicitação necessário para a compreensão da construção. Na Questão 3, a Tecnologia e a Teoria podem permanecer implícitas, pois as justificativas envolvidas são mais elementares e já internalizadas pelo estudante. Na Questão 11, conceitos como arco capaz e altura exigem maior explicitação. Na Questão 22, a definição de mediana e a relação com o ponto médio precisam ser explicitadas com clareza, pois não são intuitivas. Nas Questões 37 e 38, as definições e teoremas relacionados às bissetrizes (interna e

externa) demandam um nível ainda maior de explicitação, especialmente no caso da bissetriz externa, cujo ponto de interseção com o lado oposto ocorre em seu prolongamento, exigindo que o estudante compreenda a diferença entre segmento e reta suporte, bem como as relações de proporcionalidade estabelecidas pelo Teorema da Bissetriz Externa

Essa progressão evidencia que a dissociação entre teoria e prática não é uma questão de presença ou ausência da Tecnologia e da Teoria, mas do grau de explicitação desses níveis no ensino. O estudante pode executar a técnica sem compreender as justificativas que a sustentam, o que fragiliza sua compreensão geométrica e o reduz a um executor de procedimentos.

A análise praxeológica, ao explicitar os quatro níveis, oferece um caminho para superar essa dissociação, mostrando o que precisa ser ensinado além do "como fazer": o "por que fazer" e o "por que funciona". A TAD, portanto, não apenas diagnostica a dissociação entre teoria e prática, mas também oferece subsídios para sua superação, ao revelar a estrutura do saber geométrico que muitas vezes permanece oculta nas práticas de ensino.

Esta pesquisa oferece contribuições em diferentes dimensões: No plano teórico, o trabalho contribui para a consolidação da Teoria Antropológica do Didático como um referencial analítico para o estudo de construções geométricas. Ao aplicar a TAD as cinco questões específicas, a pesquisa demonstra como a análise praxeológica pode revelar a articulação entre os diferentes níveis do saber matemático, oferecendo um modelo para a compreensão da estrutura do conhecimento geométrico.

No plano metodológico, o trabalho oferece um procedimento sistemático para a análise praxeológica de construções geométricas, que pode ser adaptado e replicado em outros contextos. A utilização de quadros com três colunas (Técnica, Ferramenta, Comentário) mostrou-se um instrumento eficaz para a sistematização dos dados e para a identificação dos elementos tecnológicos e teóricos mobilizados em cada construção.

O uso do GeoGebra com controle deslizante também se revelou um recurso metodológico relevante, pois permitiu não apenas a execução das construções, mas também a exploração das condições de existência do triângulo, evidenciando como a visualização dinâmica pode potencializar a compreensão das propriedades geométricas.

No plano prático, a pesquisa oferece contribuições para o ensino de Geometria e para a formação de professores de Matemática. Ao explicitar os quatro níveis praxeológicos, a análise

revela o que precisa ser ensinado além da técnica: as justificativas (Tecnologia) e os fundamentos teóricos (Teoria) que dão sentido à construção.

Para o professor, compreender a estrutura praxeológica das construções geométricas significa poder planejar atividades que não se limitem à execução mecânica de procedimentos, mas que promovam a compreensão das propriedades e relações geométricas envolvidas. O professor pode, assim, atuar como mediador da explicitação dos níveis tecnológico e teórico, garantindo que os estudantes compreendam não apenas o "como fazer", mas também o "por que fazer" e o "por que funciona".

Para o futuro professor de Matemática, a pesquisa oferece um instrumento de reflexão sobre sua própria prática. Ao compreender os elementos que compõem uma praxeologia matemática, o licenciando pode desenvolver uma visão mais crítica e fundamentada sobre o ensino de Geometria, superando a abordagem tradicional que reduz as construções a roteiros mecânicos.

Conforme já mencionado no Capítulo 3, a pesquisa apresenta limitações que devem ser consideradas na interpretação dos resultados.

O corpus é composto por apenas cinco questões de uma única apostila, o que não permite generalizações sobre o ensino de construções geométricas como um todo. Os resultados obtidos referem-se especificamente às tarefas analisadas e não podem ser estendidos a outros contextos ou materiais didáticos sem as devidas ressalvas.

A análise é de natureza teórica, ou seja, não envolve a aplicação das tarefas com alunos ou professores em situação de sala de aula. Isso limita a compreensão sobre como a dissociação entre teoria e prática se manifesta na prática efetiva de ensino, uma vez que não foram observadas as interações, as dificuldades ou as estratégias dos estudantes durante a resolução das construções.

Além disso, o uso do GeoGebra pressupõe familiaridade com a ferramenta, o que pode não corresponder à realidade de muitos estudantes ou professores. A pesquisa não investigou o impacto do uso do software na aprendizagem, uma vez que o foco da análise está na estrutura praxeológica das construções, e não na ferramenta em si.

Por fim, a categorização dos dados envolve certo grau de interpretação por parte da pesquisadora, o que pode introduzir subjetividade na análise. Para minimizar esse aspecto, a

categorização foi sistematizada com base em critérios explícitos e documentada nos quadros analíticos apresentados no Capítulo 4.

As limitações apontadas abrem caminho para investigações futuras que possam ampliar e aprofundar os resultados aqui obtidos.

Uma primeira sugestão é a ampliação do corpus, com a análise de um número maior de questões da apostila ou de outras fontes, permitindo uma compreensão mais abrangente da estrutura praxeológica de construções geométricas. Seria igualmente relevante analisar questões de diferentes níveis de ensino, desde a Educação Básica até o Ensino Superior, para verificar como a articulação entre técnica e teoria se manifesta em diferentes contextos.

Uma segunda sugestão é a realização de pesquisas empíricas que envolvam a aplicação das tarefas com alunos ou professores. Seria particularmente relevante investigar como os estudantes mobilizam os diferentes níveis praxeológicos durante a resolução das construções, e como o professor pode mediar a explicitação desses níveis.

Uma terceira sugestão é a investigação do papel do GeoGebra como ferramenta de mediação da aprendizagem geométrica. Embora o software tenha sido utilizado neste trabalho como um recurso auxiliar para a execução e registro das construções, seria relevante investigar como o uso do GeoGebra pode potencializar a compreensão das propriedades geométricas e a articulação entre técnica e teoria.

Por fim, a última sugestão é o desenvolvimento de sequências didáticas baseadas na análise praxeológica, que explicitem os quatro níveis em atividades de construção geométrica. Tais sequências poderiam ser aplicadas e avaliadas em contextos reais de ensino, contribuindo para a superação da dissociação entre teoria e prática.

Esta pesquisa partiu da constatação de que o ensino de Geometria no Brasil enfrenta desafios significativos, especialmente no que diz respeito à dissociação entre teoria e prática. A análise praxeológica, fundamentada na Teoria Antropológica do Didático, mostrou-se um instrumento poderoso para compreender essa dissociação e para apontar caminhos para sua superação.

A análise das cinco questões da apostila *Construção de Polígonos* (Costa, 1995) revelou que, mesmo em tarefas aparentemente simples, é possível trabalhar com os quatro níveis praxeológicos. O que varia é o grau de explicitação necessário para a compreensão da

construção, visto que em tarefas mais simples, a Tecnologia e a Teoria podem permanecer implícitas já em tarefas mais complexas, elas precisam ser explicitadas com maior clareza.

A articulação entre os blocos praxeológicos da TAD permiti uma compreensão mais ampla do processo de construção geométrica. O papel do professor é fundamental para mediar essa explicitação, garantindo que os estudantes não apenas executem a técnica, mas também compreendam as justificativas e os fundamentos teóricos que a sustentam.

Ao final deste percurso, reafirma-se a importância de um ensino de Geometria que vá além da execução mecânica de procedimentos, que promova a compreensão das propriedades e relações geométricas, e que religue o fazer ao saber. A Geometria, como afirma a epígrafe que abre este trabalho, existe por toda a parte, mas é preciso olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la.

Que este trabalho possa contribuir, ainda que modestamente, para que professores e estudantes possam enxergar, compreender e admirar a Geometria em sua plenitude, religando a prática à teoria e o fazer ao saber.

REFERÊNCIAS

- BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. 11. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1997. (Coleção do Professor de Matemática).
- BELLEMAIN, Franck. Geometria instrumental: a transdisciplinaridade das formas para a pesquisa e o ensino em geometria. **REMATEC**, Belém, v. 19, n. 48, p. e2024013, 2024. DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n48.e2024013.id600. Disponível em: <https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/600>. Acesso em: 22 fev. 2026.
- BICUDO, I. **Os elementos/Euclides**; tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.
- BITTAR, Marilena; FREITAS, José Luiz Magalhães de. UMA ENTREVISTA COM YVES CHEVALLARD SOBRE A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, [S. l.], v. 11, n. 25, p. 11–22, 2022. Disponível em: <https://periodicos.unespar.edu.br/rpem/article/view/7019>.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Divulgados resultados do Brasil no Pisa 2022**. Portal Gov.br, Brasília, DF, 5 dez. 2023. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/centrais-de-conteudo/noticias/acoes-internacionais/divulgados-os-resultados-do-pisa-2022>. Acesso em: 1 jul. 2026
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- CANS, E. et al. O ensino de Geometria no Brasil: um olhar histórico. **Revista Brasileira de Educação Matemática**, v. 12, n. 3, p. 45-62, 2024.
- CHEVALLARD, Yves. La didactique dans la cité avec les autres sciences. In: SYMPOSIUM DE DIDACTIQUE COMPARÉE, 2005, Montpellier. **Anais [...]**. Montpellier: REF, 2005. p. 1-15. Disponível em: [\(YC - La didactique dans la cité\)](#)
- COSTA, M. Construção de Polígonos. 2ª ed. Recife, 1995
- DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 9.
- FRANTZ, D.; BISOGNIN, V. Ensino da Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental: um problema sistêmico. **Revista Educar Mais**, [S. l.], v. 6, p. 28–45, 2022. DOI: 10.15536/reducarmais.6.2022.2648. Disponível em: <https://periodicos.ifsul.edu.br/educarmais/article/view/2648> . Acesso em: 1 jul. 2026.
- GUIMARÃES, Bruno Alysson Andrade. A PROBLEMÁTICA NO ENSINO DA GEOMETRIA. **Maiêutica - Ensino de Física e Matemática**, [S. l.], v. 2, n. 1, 2014.

Disponível em: https://revistas.uniasselvi.com.br/index.php/MAD_EaD/article/view/1210 .

Acesso em: 23 jan. 2026.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **A Educação Matemática em Revista**, Blumenau, n. 1, p. 3-13, 1993.

MARIOTTI, M. **A Geometria em sala de aula**: reflexões sobre ensino e aprendizagem. 1. ed. Recife: Editora UFPE, 2019. Tradução de: Sandra de Souza Melo.

PASTRE, Gerson; DIAS, Mariana. Construções em Geometria Euclidiana Plana: as perspectivas abertas por estratégias didáticas com tecnologias. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 32, n. 60, p. 92-116, 2018. DOI: 10.1590/1980-4415v32n60a05. Disponível em:

https://www.researchgate.net/publication/324971974_Construcoes_em_Geometria_Euclidian_a_Plana_as_perspectivas_abertas_por_estrategias_didaticas_com_tecnologias . Acesso em: 5 jun. 2026

PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono do ensino da geometria: uma visão histórica**. 1989. 196 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, 1989. Disponível em: <https://hdl.handle.net/20.500.12733/1576649> . Acesso em: 9 jun. 2025

PENTEADO, Daniele Regina; PEREIRA, Ana Lúcia; BRANDT, Célia Finck. Geometria no Ensino Fundamental: Das Exigências Legais às Práticas Cotidianas. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, [S. l.], v. 8, n. 16, p. 48–81, 2020. DOI: 10.33871/22385800.2019.8.16.48-81. Disponível em: <https://periodicos.unespar.edu.br/rpem/article/view/6143> . Acesso em: 28 jun. 2025.

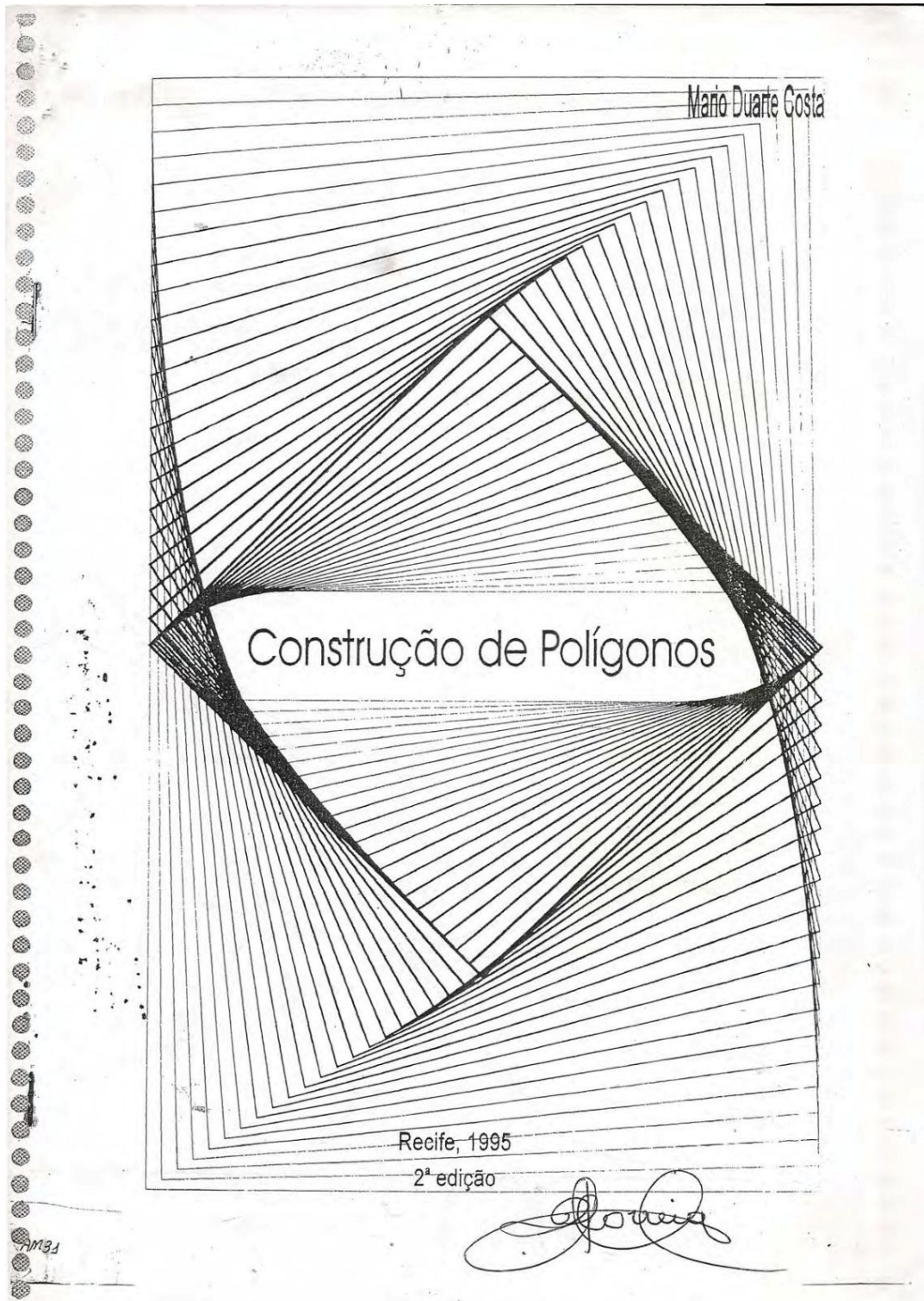
REZENDE, E.; QUEIROZ, M. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. Campinas: Editora da Unicamp, 2001.

SAMPAIO, R.; RITTO, T. G. **Mini-curso: Dinâmica de estruturas flexíveis** – Análise determinística e estocástica. Rio de Janeiro: PUC-Rio, 2008. 207 p.

SANTOS, Luzia Ribeiro da Silva; DA SILVA, Elizabeth Cristina Rosendo Tomé. MODELOS PRAXEOLÓGICOS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA GRÁFICA COM SUPORTE DE SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA. **Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica**, [S. l.], v. 4, p. 1–4, 2026. Disponível em: <https://anais2.uesb.br/index.php/semicit/article/view/5007> . Acesso em: 7 jul. 2026.

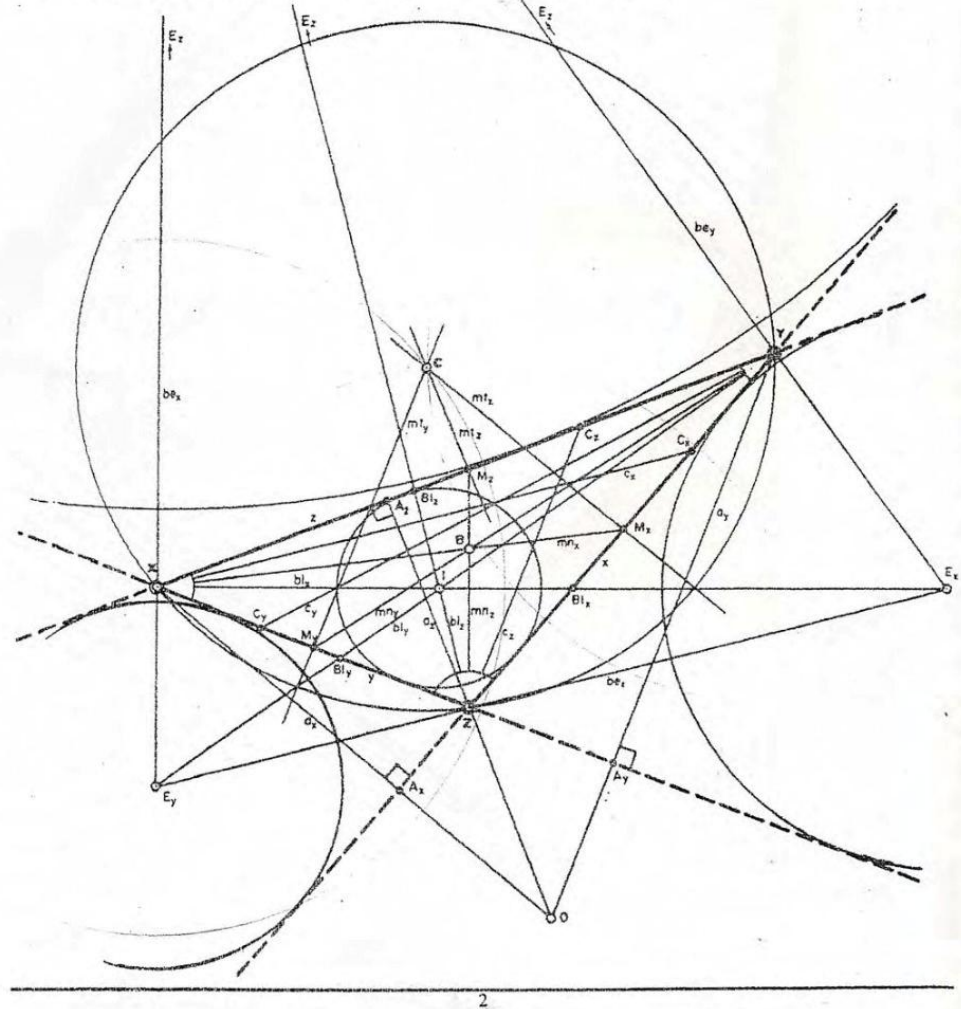
SILVA, Adeilton Elias da; MEDEIROS, Lis Paiva de; SILVA, Lyvia Gabrielle da; BARBOSA, Márcia Regina; BONA, Viviane de (org.). **Pesquisa qualitativa em educação**: métodos e técnicas em evidência. Recife: Ed. dos Autores, 2023. (Coleção GEPIFHRI).

VIEIRA, Anna Flávia Magnoni; CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade. Pensamento geométrico: reflexões manifestadas por futuros professores de matemática em estudos do modelo de van Hiele. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 24, n. 8, p. 286-314, dez. 2022. Acesso em: 28 jun. 2025.

ANEXO A**Construção de polígono**

NOTAÇÃO DOS ELEMENTOS DE UM TRIÂNGULO X Y Z

Lados	$x\ y\ z$	Ortocentro	O
Ângulos internos	$\hat{x}\ \hat{y}\ \hat{z}$	Baricentro	B
Medianas	$mn_x\ mn_y\ mn_z$	Circuncentro	C
Alturas	$a_x\ a_y\ a_z$	Incentro	I
Bissetrizes internas	$bi_x\ bi_y\ bi_z$	Ex-incentros	$E_x\ E_y\ E_z$
Bissetrizes externas	$be_x\ be_y\ be_z$	Pontos médios dos lados	$M_x\ M_y\ M_z$
Mediatrizes	$mt_x\ mt_y\ mt_z$	Pés das alturas	$A_x\ A_y\ A_z$
Cevianas quaisquer	$c_x\ c_y\ c_z$	Pés das bissetrizes internas	$BI_x\ BI_y\ BI_z$
Raio do círculo circunscrito	r_c	Pés das bissetrizes externas	$BE_x\ BE_y\ BE_z$
Raio do círculo inscrito	r_i	Pés das cevianas	$C_x\ C_y\ C_z$
Raio dos círculos ex-inscritos	$re_x\ re_y\ re_z$	Área do triângulo	S



DETERMINAÇÃO MÉTRICA DE TRIÂNGULOS QUAISQUER

A - QUANTIDADE DE DADOS

1. Um ou dois dados métricos

1.1. Dados compatíveis:

- INFINIDADE DE SOLUÇÕES - Problema indeterminado
- Exemplo: Dados: $x = 5\text{cm}$ $y = 3\text{cm}$
- Há uma infinidade de triângulos com dois lados com tais medidas.

1.2. Dados incompatíveis:

- NÃO HÁ SOLUÇÃO - Problema impossível
- Exemplo: Dados: $x^{\wedge}y = 90^{\circ}$ $y^{\wedge}z = 120^{\circ}$
- Não é possível construir um triângulo com dois ângulos somando mais de 180° .

2. Mais de 3 dados métricos

2.1. 4º dado compatível com os três primeiros:

- NÚMERO FINITO DE SOLUÇÕES - Problema determinado porém superabundante.
- Exemplo:
- Dados: $x = 3\text{cm}$ $x^{\wedge}y = 30^{\circ}$ $y^{\wedge}z = 60^{\circ}$ $x^{\wedge}z = 90^{\circ}$
- Uma vez que a soma dos três ângulos dados é 180° , a construção é possível, mas o ângulo $x^{\wedge}z$ não precisaria ter sido dado, uma vez que é decorrente dos outros.

2.2. 4º dado incompatível com os dois primeiros:

- NÃO HÁ SOLUÇÃO - Problema impossível
- Exemplo:
- Dados: $x^{\wedge}y = 90^{\circ}$ $x = 3\text{cm}$ $y = 4\text{cm}$ $z = 6\text{cm}$
- Uma análise dos dados mostra que um triângulo retângulo de catetos medindo 3cm e 4cm deveria ter uma hipotenusa medindo 5cm, e não 6m como foi dado. Não é possível sua construção.

3.3 dados métricos

3.1. Há uma relação de igualdade envolvendo os dados

3.1.1. A relação se verifica para os três dados fornecidos:

- INFINIDADE DE SOLUÇÕES - Problema indeterminado, pois recai em 1.1.
- Exemplo:
- Dados: $x^{\wedge}y = 60^{\circ}$ $x^{\wedge}z = 40^{\circ}$ $y^{\wedge}z = 80^{\circ}$
- Uma vez que $x^{\wedge}y + y^{\wedge}z + x^{\wedge}z = 180^{\circ}$ em qualquer triângulo e os dados fornecidos satisfazem esta equação, tudo se passa como se tivessem sido dados apenas 2 ângulos.

3.1.2. A relação não se verifica para os três dados fornecidos:

- NÃO HÁ SOLUÇÃO - Problema impossível.
- Exemplo:
- Dados: $x^{\wedge}y = 30^{\circ}$ $y^{\wedge}z = 20^{\circ}$ $x^{\wedge}z = 70^{\circ}$
- Desde que a soma desses ângulos é inferior a 180° não é possível construir nenhum triângulo com tais medidas.

3.2. Há uma relação de desigualdade envolvendo os dados.

3.2.1. A relação se verifica para os três dados fornecidos:

- NÚMERO FINITO DE SOLUÇÕES - Problema determinado.
- Exemplo:
- Dados: $x = 3\text{cm}$ $y = 4\text{cm}$ $z = 2\text{cm}$
- Entre os lados de qualquer triângulo a soma de dois deles deve ser maior que o terceiro. As medidas fornecidas satisfazem essa relação, e é possível construir 2 triângulos distintos com tais dados.

3.2.2. A relação não se verifica para os três dados fornecidos:

- NÃO HÁ SOLUÇÃO - Problema impossível.
- Exemplo:
- Dados: $x = 4\text{cm}$ $y = 6\text{cm}$ $z = 1\text{cm}$
- Desde que $x + z$ é menor que y , não é possível construir um triângulo com tais dados.

3.3. Os dados são inteiramente independentes entre si.

- O problema será sempre determinado. A construção gráfica a instrumento dependerá do conhecimento de propriedades específicas que envolvam os dados.
- Exemplo:
- Dados: $x = 3\text{cm}$ $y = 5\text{cm}$ $\hat{x}y = 30^\circ$
- Dois lados de um triângulo, quaisquer que sejam suas medidas, podem formar entre si qualquer ângulo.

B- TIPOS DE DADOS MÉTRICOS

1. Dados simples e compostos

Qualquer segmento linear ou ângulo dado por sua medida é um dado simples, tal como um dos lados, uma mediana, uma altura, um ângulo interno, etc.

Um dado composto estabelece uma relação entre duas ou mais linhas ou entre ângulos do triângulo. É o caso da soma ou diferença de dois lados, do perímetro, da área, da igualdade entre dois lados, e assim por diante. Um dado composto se comporta da mesma forma que um dado simples quanto à determinação do triângulo, conforme os critérios do item A.

2. Dados diretos e indiretos

Um dado direto é fornecido por uma medida linear, angular ou de superfície, mesmo que se refira tal medida a uma operação entre linhas ou ângulos de um triângulo, como é o caso do perímetro ou da área, desde que tal dado possa ser utilizado diretamente na construção da figura.

Se o dado tiver que ser associado a outro para uma dedução de um terceiro dado a ser utilizado na construção gráfica ele se constitui um dado indireto. Tal dedução pode ser imediata ou se constituir em um problema geométrico mais ou menos complexo. Por exemplo, dada em um problema a relação $x = y$, indireta, e o dado $x = 5\text{cm}$, é deduzido imediatamente o dado direto $y = 5\text{cm}$. Mas dada a área medindo 10cm^2 , o perímetro medindo 12cm e um lado $x = 3\text{cm}$, se forem utilizadas as propriedades que relacionam em um triângulo a área com os lados e alturas, podem chegar a ser determinadas as medidas dos 3 lados, por exemplo.

3. Dados explícitos e implícitos

Um dado explícito é fornecido através de uma medida ou relação textualmente contida no enunciado, como todos os exemplos citados até aqui de um triângulo, como é o caso do perímetro ou da área, desde que tal dado possa ser utilizado diretamente na construção da figura.

Mas um dado pode estar contido em um adjetivo ou propriedade que são traduzidos em dados simples ou compostos. Por exemplo, se um problema estabelece que o triângulo é retângulo, está implícito o dado simples de um ângulo medir 90° . Se estabelece que é isósceles, está implícito o dado composto $x = y$. EQUILÁTERO é um qualificativo que implica em dois dados compostos: $x = y$ e $x = z$. Uma propriedade pode fazer o mesmo efeito: estabelecer que uma altura deve coincidir com uma mediana implica em ser isósceles o triângulo, pois tal propriedade é exclusiva de tais triângulos.

C - CONSTRUÇÃO GRÁFICA DE TRIÂNGULOS POR DADOS MÉTRICOS

É vã a pretensão de conhecer todos os problemas de construção de triângulos. Basta notar que, apenas com dados simples explícitos, é possível combinar três a três as medidas lineares e angulares da primeira página para obter já um número considerável de problemas. Mesmo eliminando algumas combinações, como a de 3 ângulos, por exemplo, que não determinam o triângulo por não serem dados independentes, e também reunindo como o mesmo problema combinações tais como x , y e $x^{\wedge}y$; x , z e $x^{\wedge}z$; e y , z e $y^{\wedge}z$, resta uma quantidade enorme de combinações válidas como problemas determinados e distintos. Pensando nos problemas compostos, é ilimitado o número de relações que podem ser estabelecidas entre os dados simples e bem maior o número de suas combinações, que se tornará ainda bastante acrescido com a introdução dos dados implícitos.

O domínio de um assunto como este é muito melhor demonstrado pela capacidade de formular problemas em que o triângulo fique determinado por um número finito de soluções em função dos dados escolhidos. Outro aspecto a ser desenvolvido é o de saber reduzir o maior número possível de problemas a outros de solução gráfica já conhecida, utilizando como dados indiretos os do problema original para deduzir os dados diretos dos problemas de mais fácil construção gráfica.

Os seguintes problemas constituem uma base para estudo. Cada aluno deve escolher valores numéricos para os dados, que se referem à notação mostrada na primeira página, e procurar resolvê-los graficamente, quer usando os dados diretos, quer usando-os como indiretos para a dedução de dados diretos de problemas mais simples.

Construção de Polígonos

Também deve determinar o limite de variação das medidas escolhidas para que o problema tenha solução.

01✓	x	y	z	02✓	x	y	x^y
03✓	x	y	x^z	04✓	x	x^y	x^z
05✓	x	x^y	y^z	06✓	x	y	ax
07✓	x	y	a_z	08✓	x	x^y	a_x
09✓	x	x^y	ay	10✓	x	x^y	a_z
11	x	y^z	a_x	12✓	x	y^z	a_y
13	x^y	x^z	a_x	14	x	a_x	a_y
15	x	a_y	a_z	16	x^y	a_x	a_y
17	x^y	a_x	a_z	18	x	y	mn_x
19	x	y	mn_z	20	x	x^y	mn_x
21	x	x^y	mn_y	22✓	x	x^y	mn_z
23	x	y^z	mn_x	24✓	x	y^z	mn_y
25	x^y	y^z	mn_x	26✓	x	mn_x	mn_y
27	x	mn_y	mn_z	28✓	mn_x	mn_y	mn_z
29	x	a_x	mn_x	30	x	a_x	mn_y
31	x	a_y	mn_x	32	x	a_y	mn_y
33	x	a_y	mn_z	34	x^y	a_x	mn_x
35✓	x^y	a_x	mn_y	36	x^y	a_x	mn_z
37✓	x	x^y	bi_z	✓38	x	x^y	be_z
39	x	a_y	bi_z	40	x	x^y	bi_y
41	x	y	rc	✓42	x	x^y	rc
43	x	re	a_x	44	x	rc	a_y
45	x	x^y	ri	46	x^z	bi_y	ri
47	x^y	ri	a_x	48	x^y	ri	a_z
49	x	ri	rc	50	x^y	ri	re_x
✓51	$x+y$	z	x^z	52	$x+y$	z	x^y
53	$x+y$	z	a_x	54	$x+y$	x^z	a_x
55	$x+y$	a_x	x^y	✓56	$x-y$	z	x^z
57	$x-y$	z	x^y	58	$x-y$	z	a_x
59	$x-y$	x^z	a_x	60	$x-y$	a_x	x^y
61	$x+y+z$	x^y	x^z	62	$x+y+z$	x^y	a_x
63	x	y	S	64	x	x^y	S
65	x	S	mn_y				

Construção de Polígonos

Sabendo-se que o triângulo deve ser retângulo, construí-lo com os seguintes dados:

66	x	a_x	67	x	a_y
68	x	a_z	69	x	$y^{\wedge}z$
70	$x^{\wedge}z$	a_x	71	a_x	a_y
72	x	mn_x	73	x	mn_y
74	$y^{\wedge}z$	mn_x	75	a_x	mn_x
76	x	bi_z	77	x	be_z
78	x	rc	79	x	ri
80	x+y	z			

Sabendo-se que o triângulo deve ser isósceles, construí-lo com os seguintes dados:

81	x	y	82	x	$x^{\wedge}y$
83	x	a_z	84	x	a_y
85	x	mn_x	86	x	mn_x
87	$y^{\wedge}z$	mn_x	88	mn_x	mn_y
89	a_x	mn_y	90	x	rc
91	$x^{\wedge}y$	ri	92	x+y	z
93	x-y	$x^{\wedge}z$	94	x+y+z	a_x
95	x	S			

Sabendo-se que o triângulo deve ser equilátero, construí-lo com os seguintes dados:

- 96- mn_x
- 97- re_x
- 98- Quadrado de área equivalente
- 99- Círculo de área equivalente
- 100- Retângulo de área equivalente.

D- DETERMINAÇÃO DE UM TRIÂNGULO LOCALIZADO

Se, além de metricamente, se pretende determinar um triângulo em uma dada posição no plano, são necessários 3 pontos notáveis da figura, admitindo-se tais pontos independentes entre si.

O problema mais imediato é aquele em que são dados os 3 vértices X , Y e Z . Desde que tais pontos não estejam em linha reta, sempre haverá um triângulo único determinado pelos mesmos.

Se os pontos dados forem relacionados entre si, deixarão o problema indeterminado, ou então impossível, se não verificarem a relação geométrica. Exemplo: Dados X , M_y e A_y . Acompanhando na primeira página o significado desses pontos, observa-se que os três pertencem ao lado y ; se tais pontos não forem fornecidos em linha reta o problema será impossível, e se o forem será indeterminado, pois estavam sujeitos a essa relação de dependência.

Havendo uma relação de dependência entre os três dados, geralmente não adianta fornecer um quarto dado ao triângulo, pois tornará o problema impossível ou superabundante. No exemplo acima citado, suponha-se o fornecimento do vértice Y . Se tal ponto for dado sobre a altura a_y levantada do ponto A_y , o problema se tornará determinado, porém terá um excesso de dados, uma vez que X , Y e M_y teriam sido bastantes para tal determinação. Se Y não for dado sobre a_y o problema não terá solução.

Em exemplos desse tipo, o problema poderá se tornar determinado sem superabundância de dados se for fornecido um dado métrico ou uma linha que deva conter um quarto ponto desse triângulo. No exemplo citado, poderia ser fornecida a altura a_y , ou a medida do ângulo $z^{\wedge}y$, ou a medida do lado z , ou outros dados métricos. Também ficaria determinado com o fornecimento de uma reta ou de uma curva que contivesse o vértice Y ou o ortocentro O .

Segue-se uma relação de 50 problemas. O aluno deve colocar 3 pontos quaisquer no desenho e dar aos mesmos a denominação dos dados de cada problema, procurando construir graficamente o triângulo.

É importante complementar o estudo de cada problema deixando fixos 2 dados e procurando fazer variar a posição do terceiro para verificar posições limites em que o número de soluções se modifica.

Fica a advertência de que alguns dos problemas que se seguem são indeterminados (ou impossíveis, de acordo com a posição dos dados). Ao encontrar um assim, o aluno deve dispor os pontos dados de modo a tornar o problema possível e analisar quais os dados métricos ou de linhas que podem ser fornecidos para tornar o problema determinado.

Construção de Polígonos

101✓	X	Y	B	102✓	X	Y	O
103✓	X	Y	I	104✓	X	Y	C
105✓	X	Y	E_z	106✓	X	Y	E_x
107✓	X	Y	M_x	108✓	X	Y	BI_x
109✓	X	Y	BI_z	110✓	X	Y	BE_x
111✓	X	Y	A_x	112✓	X	Y	S_y
113✓	X	B	O	114✓	X	B	C
115✓	X	O	C	116✓	X	I	M_y
117✓	X	E_x	M_y	118	X	C	I
119	X	I	BI_y	120	X	I	BE_y
121	X	BI_y	BE_y	122	X	A_y	A_x
123	X	A_y	M_x	124	X	I	A_y
125	X	I	A_x	126	X	C	A_x
127	A_x	A_y	A_z	128	B	C	M_x
129	O	C	M_y	130	O	A_x	A_y
131	O	B	A_x	132	I	BI_x	A_x
133	I	BI_x	BE_x	134	O	A_x	M_y
135	M_x	M_y	M_z	136	B	M_x	M_y
137	C	M_x	M_x	138	M_y	BI_x	BE_x

dúvida?

concluir

Sabendo-se que deve ser retângulo, construir o triângulo com os dados:

- 139- X B Reta que contém Y
 140- X C Reta que contém Y
 141- X M_y Reta que contém Y
 142- C Um vértice em cada uma de três retas dadas

Sabendo-se que deve ser isósceles, construir o triângulo com os dados:

- 143- X Y x^y
 144- B Reta suporte de x Reta que contém M_y
 145- O A_x Reta que contém X
 146- M_x Reta suporte de y Reta que contém Z

Sabendo-se que deve ser equilátero, construir o triângulo com os dados:

- 147- X Reta suporte de x
 148- X Reta suporte de a_y
 149- O Reta suporte de x
 150- X 2 linhas, uma que contém Y e outra que contém Z.

DETERMINAÇÃO DE QUADRILÁTEROS

A - QUADRILÁTEROS EM GERAL

Um quadrilátero qualquer pode ser dividido em dois triângulos por uma de suas diagonais. Sua determinação recai então na de 2 triângulos com um lado comum. Com 3 dados métricos o primeiro fica determinado em forma, necessitando o segundo apenas de mais dois dados métricos, pois um dos lados já foi determinado na construção do primeiro. Generalizando, um polígono de n lados pode ser dividido em $n-2$ triângulos pelas diagonais que partem de um mesmo vértice, e cada um deles necessita 2 dados a mais que o antecedente; como o primeiro de tais triângulos necessita de 3 dados, o total necessário será de $2(n-2) + 1$, ou seja, $2n-3$ dados. Aplicada tal fórmula ao triângulo resulta o valor 3; ao quadrilátero, 5; ao pentágono, 7; e assim por diante.

Quanto à posição, os três pontos que determinam o primeiro triângulo têm que ser acrescidos de apenas mais um ponto para o segundo triângulo, pois 2 vértices do primeiro já são vértices do segundo. Portanto, 4 pontos notáveis fixam em posição um quadrilátero.

A notação dos vértices nos problemas será 1,2,3,4; dos lados, 12, 23, 34, 41; dos ângulos internos, $\angle 123$, $\angle 234$, $\angle 341$ e $\angle 412$; das diagonais, 13 e 24; do ponto de interseção das diagonais, D; dos pontos médios dos lados, M_{12} , M_{23} , M_{34} , M_{41} ; dos pontos médios das diagonais, M_{13} e M_{24} .

B - QUADRILÁTEROS PARTICULARES

As propriedades que caracterizam os trapézios, os quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis, os paralelogramos, os retângulos, os losangos e os quadrados, equivalem a dados implícitos que reduzem em quantidade os dados explícitos necessários para determinar um problema de construção da figura.

1. TRAPÉZIOS

São caracterizados pelo paralelismo de 2 lados. São necessários 4 dados métricos para sua determinação em forma e 3 pontos mais um dado métrico ou linha que contenha um 4º ponto para sua determinação em posição.

Se o trapézio é retângulo, cai para 3 o número necessário de dados métricos, e também com apenas 3 pontos fica localizado no plano.

Se o trapézio é isósceles, também necessita de 3 dados métrico ou de 3 pontos para localização.

2. QUADRILÁTEROS INSCRITÍVEIS E CIRCUNSCRITÍVEIS

Diferentemente dos triângulos, para os quais sempre há circunferências tangentes aos três lados ou passando nos três vértices, não é todo quadrilátero que tem uma circunferência que passe em seus 4 vértices (inscritível) ou que tangencie seus 4 lados (circunscritível). Uma ou outra dessas propriedades equivale a um dado implícito. 4 dados métricos ou 3 pontos e um dado métrico determinam esses tipos de quadriláteros em forma ou em posição.

3. PARALELOGRAMOS

São trapézios duplos. Portanto, 3 dados métricos ou 3 pontos deixam tais quadriláteros determinados em forma ou em posição, respectivamente.

4. RETÂNGULOS

Sendo paralelogramos com ângulo reto, necessitam de 2 dados métricos ou de 2 pontos e uma medida para problemas de forma ou posição.

4. LOSANGOS

Também são paralelogramos com mais uma característica: a mesma medida para lados adjacentes. À semelhança dos retângulos, necessitam de 2 dados métricos ou 2 pontos e um dado métrico para serem localizados.

5. QUADRADOS

São retângulos losangos. 1 dado métrico ou 2 pontos determinam sua construção em forma ou posição.

C - PROBLEMAS PROPOSTOS DE CONSTRUÇÃO DE QUADRILÁTEROS

1. Quadriláteros quaisquer

Problemas Métricos

151	12	23	<123	24	<341
152	12	<421	13	<341	34
153	12	34	24	<312	<134
154	12	23	13	<2D3	<341

Construção de Polígonos

155	12+23	<123	13	24	34=41
156	13-12	23	<132	12=41	S

Problemas de Localização

157	1	2	3	M_{24}
158	4	M_{12}	M_{23}	M_{13}
159	1	D	M_{23}	M_{34}
160	D	M_{12}	M_{23}	M_{34}
161	D	M_{12}	M_{13}	Reta suporte de 12
162	3	M_{12}	Reta que contém M_{23} e M_{41}	Direção da 2 diagonais

2. Trapézios (bases: 12 e 34 - altura: a)

Problemas Métricos

163	12	23	34	41
* 164	23	<123	13	mediana de Euler
165	12+34	<1D2	13+24	<412
166	<412	<123	23	<312
167	Retângulo	24	13	<1D2
* 168	Retângulo	2412	135	<1D2 ³⁴ → corrigir
169	Isósceles	13	a	<412
170	Isósceles	12	a	S

Problemas de Localização

171	1	2	3	<341
172	2	3	D	a
173	D	M_{41}	M_{12}	Reta que contém 2
174	M_{12}	M_{23}	Reta suporte de 14	Direção de 23
175	Retângulo	M_{12}	M_{23}	M_{34}
176	Retângulo	D	3	Reta suporte de 12
177	Retângulo	1	2	<124
	circunscritível			
178	Isósceles	2	3	M_{41}
179	Isósceles	1	4	Reta suporte de 23
180	Isósceles	3	M_{12}	M_{41}

Construção de Polígonos

3. Quadriláteros Circunscritíveis

Problemas Métricos

181	12	23	34	<123
(82)	ri	<123	<134	24

Problemas de Localização

183	1	2	M_{41}	ri
184	M_{12}	Reta suporte de 23	Reta suporte de 41	Direção de 34

4. Quadriláteros Inscritíveis

Problemas Métricos

185	12	34	<123	<234
186	12	13	<341	24

Problemas de Localização

187	D	M_{12}	M_{23}	(12) suporte 12
188	D	1	2	(12) circunscritível

5. Paralelogramos

Problemas Métricos

189	13+24	<1D2	12
190	12-23	24	<412

Problemas de Localização

191	1	M_{23}	M_{34}	
192	M_{12}	D	Reta suporte de 2	Reta suporte de 3

Construção de Polígonos

6. Retângulos

Problemas Métricos

193 Perímetro <1D2

194 Perímetro S

Problemas de Localização

195 1 D Reta suporte de 2

196 M_{12} M_{23} Direção de 24

7. Losangos

Problemas Métricos

197 12 altura

198 13 S

Problemas de Localização

199 M_{12} M_{23} Reta suporte de 4200 D M_{12} ri

8. Quadrados

201 D Suporte de 1 Suporte de 2

202 1 Direção de 13 Suporte de 2

PROPRIEDADES DOS POLÍGONOS CONVEXOS

1. Qualquer lado deve medir menos que a soma dos outros lados.
2. Qualquer linha que envolva completamente o polígono tem comprimento maior que o perímetro do polígono.
3. O número de diagonais de um polígono de n lados é $n(n-3)/2$.
4. A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é $(n-2)180^\circ$.
5. A soma dos ângulos externos é 360° .
6. Qualquer polígono regular é inscritível e circunscritível.

PROPRIEDADES DOS TRIÂNGULOS

Além das propriedades gerais dos polígonos convexos e daquelas que definem todos os elementos relacionados na primeira página da apostila - CONSTRUÇÃO DE POLÍGONOS - são as seguintes propriedades que permitem resolver e discutir seus 150 problemas de triângulos:

1. Dois triângulos de lados paralelos são semelhantes e possuem ângulos iguais. Suas linhas correspondentes estão todas na mesma razão.
2. Todos os triângulos que têm um mesmo lado e o ângulo oposto igual têm a mesma circunferência circunscrita. O arco que tem esse lado como corda mede, em graus, o dobro do ângulo oposto.
3. O baricentro está a $1/3$ de cada mediana, a partir do seu pé.
- * 4. O triângulo construído com lados iguais aos dobros das medianas de um dado triângulo tem as distâncias de seu baricentro aos vértices iguais aos lados deste.
5. Chamando d a distância entre o incentro e o circuncentro, é verdadeira a relação $d^2 = rc (rc - 2r_i)$
6. A área do triângulo é o semi-produto de qualquer lado pela altura relativa a esse lado.

Construção de Polígonos

7. As bissetrizes interna e externa de um mesmo vértice divide harmonicamente o lado oposto; a razão entre os segmentos em que cada uma delas divide o lado oposto é a mesma dos lados adjacentes a esse vértice.
8. O circuncentro, o baricentro e o ortocentro estão sempre em linha reta e $2CB = BO$.
9. O triângulo órtico (vértices A_x , A_y e A_z) tem x , y e z como bissetrizes.

PROPRIEDADES DOS QUADRILÁTEROS

1. Os pontos médios dos lados são os vértices de um paralelogramo de lados paralelos às diagonais do quadrilátero e medindo a metade destas.
2. Em um trapézio a mediana de Euler (segmento cujos extremos são os pontos médios das diagonais) mede a semi-diferença das bases; a base média (segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos) mede a semi-soma das bases.
3. A área de um trapézio é obtida pelo produto da base média pela altura.
4. Em todo quadrilátero circunscritível a soma de dois lados opostos é igual a soma dos outros dois.
5. Em todo quadrilátero inscritível os ângulos internos opostos são suplementares.
6. As diagonais de um losango são perpendiculares entre si.