

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas

Licenciatura em Matemática

Alison Oliveira Neves Alves

Introdução à Geometria Diferencial: uma abordagem no
GeoGebra

AD PLENAM VITAM

Vitória da Conquista
2026

Alison Oliveira Neves Alves

Introdução à Geometria Diferencial: uma abordagem no GeoGebra

Monografia apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Campus Vitória da Conquista - BA, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Genilson Soares de Santana.

**Vitória da Conquista
2026**

Alison Oliveira Neves Alves

Introdução à Geometria Diferencial: uma abordagem no GeoGebra

Monografia apresentada ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para aprovação na disciplina Seminário de Pesquisa II do Curso de Licenciatura em Matemática.

Trabalho aprovado em 10 de julho de 2026.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Genilson Soares de Santana - UESB

Orientador

Prof. Dr. Adson Martins Meira - UESB

Convidado

Prof. Dr. Ricardo Freire da Silva - UESB - UESB

Convidado

Vitória da Conquista

2026

*“Porque todas as estrelas
Estão desaparecendo
Apenas tente não se preocupar
Você as verá algum dia
Pegue o que você precisa
E siga seu caminho
E pare de chorar tanto.”*
Oasis

AGRADECIMENTOS

Acredito que estas páginas carregam um dos mais importantes ensinamentos, o de que somos formados daquilo que construímos de nós mesmos e com as outras pessoas. E por isso, queria agradecer a todos que tornaram essa etapa da minha vida tão especial e que me ajudaram a crescer como ser humano e profissional.

Antes de tudo, queria agradecer a Deus, por ter me amparado quando eu mais precisei e por ter me dado forças para seguir em frente.

Agradeço a minha família por ser meu alicerce e por quem eu devo minha profunda gratidão, à minha mãe Elizabete e ao meu pai Osvaldo por me ensinarem tanto e não terem deixado faltar nada na minha vida. Ao meu irmão Alex pelo carinho, espero ser sempre motivo de orgulho para você. E aos demais familiares pelo acolhimento e calorosas conversas, em especial, a minha prima Roberta por sempre me ter em sua vida e por me ensinar tanto, você merece todo sucesso do mundo. E também em memória a minha avó materna Eunice, por me ensinar a ser um homem gentil e amoroso, sempre guardarei aquela memória literário que foi destaque em 2016 que falava um pouquinho sobre sua vida.

Queria ter mais espaço para agradecer a todas amigas que fiz durante a graduação e em outras etapas da minha jornada, as convivências, trocas, conversas e risadas fazem de cada segundo da vida uma preciosidade, sempre irei me lembrar desses momentos em meu coração. Em especial, queria agradecer aos meus amigos de infância David e Laisa por estarem sempre comigo, me apoiando e me vendo crescer. E obviamente, não poderia deixar de citar as memoráveis amigas de Franciele, Luane, Maria Clara, Maria Luiza e Wéllington, que me acompanharam de perto nessa dura batalha na graduação, todos os estudos, risadas e momentos juntos foram essenciais para tornar a jornada mais tranquila, sentirei muita saudade dos momentos juntos.

Obrigado ao prof. Genilson pela sua orientação, atenciosidade e compreensão, todos os seus ensinamentos foram extremamente importantes e necessários para a construção desse trabalho, sempre levarei sua imagem como referência de pessoa e como profissional. Um abraço especial também ao meu professor de matemática do ensino médio, o prof. Ricardo, aquele que sempre foi minha inspiração e referência de professor, e me direcionou a estar onde estou hoje.

Não poderia deixar de agradecer a Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB) por me fornecer o ambiente e estrutura necessários para meu processo educativo que trouxe tantos aprendizados em diversas áreas, ao Grupo de Estudos de Matemática Pura e Aplicada (GEMPA) pela base e ensinamentos tão preciosos para o meu aprendizado, ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) pelo primeiro contato com o ambiente escolar com enriquecedores ensinamentos para a minha formação e também ao Programa de Iniciação Científica (PIC) da OBMEP, que me proporcionou

uma experiência ampliada sobre o ensino de matemática.

Agradeço a banca examinadora pelas valiosas contribuições e críticas para o enriquecimento deste trabalho, e também aos professores e colegas do curso que me fizeram aprender tanto durante todos esses anos.

Minha eterna gratidão a todos que torceram por mim.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma introdução à Geometria Diferencial, com ênfase na teoria local de curvas e superfícies regulares no espaço euclidiano tridimensional. Uma vez que as superfícies regulares são localmente difeomorfas ao plano, constituem um ambiente adequado para a extensão dos métodos do cálculo diferencial. Nesse contexto, esta monografia tem por objetivo expor resultados fundamentais dessa teoria sob a perspectiva da diferenciabilidade, abordando conceitos como curvatura, torção, aplicações diferenciáveis entre superfícies regulares, plano tangente e primeira forma fundamental. Como recurso didático complementar, faz-se uso do software de geometria dinâmica GeoGebra para a construção de visualizações tridimensionais interativas, das quais são disponibilizadas ao longo do texto com a finalidade de facilitar a compreensão dos conceitos apresentados e aproximar o leitor da intuição geométrica por de trás da teoria.

Palavras-chave: Geometria Diferencial; Curvas; Superfícies; GeoGebra.

ABSTRACT

This work presents an introduction to Differential Geometry, emphasizing the local theory of curves and regular surfaces in three-dimensional Euclidean space. Since parameterized regular surfaces are locally diffeomorphic to the plane, they provide a suitable setting for extending the methods of differential calculus. In this context, this monograph aims to present fundamental results of the theory from the perspective of differentiability, covering concepts such as curvature, torsion, differentiable maps between regular surfaces, the tangent plane, and the first fundamental form. As a complementary educational tool, the dynamic geometry software GeoGebra is used to create interactive three-dimensional visualizations; these are provided throughout the text to facilitate understanding of the concepts presented and to help the reader grasp the geometric intuition underlying the theory.

Keywords: Differential Geometry; Curves; Surfaces; GeoGebra

Lista de Figuras

1.1	Rotação dos vetores u, v e $u + v$.	16
1.2	Rotação dos vetores e_1 e e_2 .	16
1.3	Norma do vetor $u \in \mathbb{R}^3$.	20
1.4	Ângulo entre os vetores u e v .	21
1.5	Bolas abertas em $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.	23
1.6	Continuidade de uma $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$.	24
1.7	Continuidade da F sobre um conjunto arbitrário A .	26
1.8	Diferencial dF_p .	29
2.1	Traço da Hélice.	34
2.2	Gráfico de β .	34
2.3	Vetores tangentes em diferentes curvas.	37
2.4	Vetores velocidade, normal e binormal sobre a curva.	38
2.5	Plano osculador e principais vetores sobre a curva em $\alpha(s)$.	38
2.6	Principais planos e retas que passam por $\alpha(s)$.	40
3.1	Vizinhança coordenada $V \cap S$ da parametrização $\mathbf{x}$.	43
3.2	Construção das curvas coordenadas $v = v_0$ e $u = u_0$.	44
3.3	Esfera unitária.	45
3.4	Aplicações $\mathbf{x}_i$ transladadas.	45
3.5	Cone de uma folha $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.	48
3.6	Mudança de coordenadas h .	49
3.7	Função f definida sobre a superfície S .	50
3.8	Função altura $h(p)$.	51
3.9	Aplicação diferenciável entre superfícies.	52
3.10	Construção de uma curva regular.	53
3.11	Superfície tangente.	54
3.12	Base associada a $\mathbf{x}$ do plano tangente $T_p(S)$.	56
3.13	Construção que determina as coordenadas do vetor $w \in T_p(S)$.	56
3.14	Construção da diferencial $d\varphi_p(w)$.	58
3.15	Ângulo entre as superfícies S_1 e S_2 .	59
3.16	Representação da área gerada pelos vetores $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$.	62

3.17 Toróide.	63
-----------------------	----

Sumário

Introdução	9
1 Preliminares	11
1.1 Noções de Álgebra Linear	11
1.1.1 Espaços Vetoriais	11
1.1.2 Dependência e Independência Linear	12
1.1.3 Base	13
1.1.4 Transformações Lineares	14
1.1.5 Imagem e Núcleo	16
1.1.6 Produto Interno	17
1.1.7 Ortogonalidade	18
1.1.8 Norma	19
1.1.9 Produto Vetorial em $\mathbb{R}^3$	21
1.2 Noções de Análise em $\mathbb{R}^n$	22
1.2.1 Conjuntos em $\mathbb{R}^n$	22
1.2.2 Continuidade em $\mathbb{R}^n$	23
1.2.3 Diferenciabilidade em $\mathbb{R}^n$	27
2 Curvas	33
2.1 Curvas Regulares Parametrizadas pelo Comprimento de Arco	33
2.2 Teoria Local das Curvas	36
3 Superfícies Regulares	42
3.1 Primeiras Definições e Exemplos	42
3.2 Mudança de Parâmetros	48
3.3 Funções Diferenciáveis sobre Superfícies	50
3.4 Plano Tangente	55
3.5 Primeira Forma Fundamental	59
Conclusão	65

Introdução

A Geometria Diferencial é uma área da matemática que tem por foco a compreensão do comportamento local e global de curvas e superfícies no espaço euclidiano tridimensional a partir de propriedades e métodos do Cálculo Diferencial e Integral. As curvas são definidas como aplicações diferenciáveis de um intervalo real em $\mathbb{R}^3$, enquanto as superfícies regulares, a grosso modo, são subconjuntos do espaço tridimensional obtidos a partir de pedaços do plano que são deformados suavemente e “colados” de modo que não formem pontas, arestas ou auto-interseções. Tais objetos geométricos são ferramentas fundamentais no estudo de diversos fenômenos em áreas como a física e a engenharia, oferecendo suporte teórico para a modelagem de estruturas, campos vetoriais, entre outros.

A Geometria Diferencial das curvas e superfícies possui dois ramos de estudo. O primeiro é a Geometria Diferencial Clássica, que é o estudo das propriedades locais das curvas e superfícies. Entendemos propriedades locais como sendo aquelas propriedades que dependem apenas do comportamento da curva ou superfície nas proximidades de um ponto, e os métodos adequados a essa compreensão vêm do cálculo diferencial. Por este motivo, as curvas e superfícies consideradas nessa geometria são definidas por funções que possam ser derivadas um certo número de vezes. O outro ramo é a chamada Geometria Diferencial Global, no qual estuda-se a influência das propriedades locais sobre o comportamento da curva ou superfície como um todo.

Tal geometria foi introduzida por Carl Friedrich Gauss (1777-1855) em um artigo publicado em 1828, intitulado *Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas*, mas acredita-se que esta tenha se originado com o estudo de curvas notáveis, que são frequentemente encontradas nas obras de Euclides, Arquimedes de Siracusa e Apolônio de Perga, tidos como os três maiores matemáticos da antiguidade. Nesse artigo, Gauss propõe uma nova abordagem às superfícies por meio de parametrizações locais e introduz o conceito de curvatura (gaussiana), estabelecendo, então, dois belos e surpreendentes resultados que o envolvem, hoje conhecidos como Teorema *Egregium* e Teorema *Elegantissimum* [3, p. 4].

O objetivo do presente trabalho é apresentar a geometria diferencial por trás da teoria das curvas e superfícies regulares, abordando os principais conceitos e resultados, trazendo uma gama de aspectos visuais criados com o software de geometria dinâmica Geogebra, e exemplos para facilitar a compreensão do leitor.

O trabalho foi dividido em capítulos. No capítulo 1, apresentamos alguns conheci-

mentos e resultados preliminares necessários para a compreensão dos métodos utilizados nessa geometria, e espera-se que o leitor tenha uma certa familiaridade com o Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear e Análise em $\mathbb{R}^n$. No capítulo 2 trazemos um pouco sobre as curvas parametrizadas regulares e o desenvolvimento da teoria local desse tipo de curvas. No capítulo 3, apresentamos as superfícies regulares com as principais definições para desenvolvimento do cálculo diferencial sobre esse conceito, abordando a mudança de parâmetro, funções diferenciáveis sobre superfícies, plano tangente e a primeira forma fundamental. A obra Geometria diferencial de curvas e superfícies [2], de Manfredo Perdigão do Carmo, constituiu a principal referência para construção desse material.

Nas legendas de algumas figuras, foram disponibilizadas os links das construções geométricas feitas no GeoGebra, a visualização tridimensional dos conceitos e resultados abordados nesse trabalho constitui uma ferramenta auxiliar para compreensão do material proposto. Todas as construções interativas desenvolvidas estão disponíveis no seguinte link: <https://www.geogebra.org/search/ALISON%20LIVEIRA%20NEVES%20ALVES>.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos algumas noções de Álgebra Linear e Análise no $\mathbb{R}^n$ que consideramos essenciais para a boa compreensão dos capítulos subsequentes.

1.1 Noções de Álgebra Linear

1.1.1 Espaços Vetoriais

Uma das mais importantes noções geométricas é a ideia de localização. Neste sentido, a noção de coordenadas desempenha um papel importante, pois é por meio delas que pode-se localizar uma região em um mapa, por exemplo.

Além disso, essas noções auxiliam em organizar algumas ideias da Física chamadas de grandezas vetoriais no espaço, como posição, velocidade, aceleração e outras. Em tais noções, são necessárias operações vetoriais.

Com esta motivação, seja $u = (x_1, x_2, x_3)$ um vetor no espaço euclidiano tridimensional, onde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Se chamarmos de V o conjunto de todos vetores no espaço, podemos denotá-lo por

$$V = \{(x_1, x_2, x_3); x_i \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3.$$

Se $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $v = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então a **soma** de dois vetores e a **multiplicação** de um vetor por um número (escalar) são definidas respectivamente como

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in \mathbb{R}^3$$

e

$$\alpha u = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Observação 1.1.1. O vetor $0 = (0, 0, 0)$ é chamado de **vetor nulo**.

Definição 1.1.2. [1, p. 103] Um **espaço vetorial** real é um conjunto V , não vazio, com duas operações: soma, $+: V \times V \rightarrow V$, e multiplicação por escalar, $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$, tais que, para quaisquer $u, v, w \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, os axiomas abaixo são satisfeitos:

1. $(u + v) + w = u + (v + w)$;
2. $u + v = v + u$;
3. Existe $0 \in V$ tal que $u + 0 = u$;
4. Existe $-u \in V$ tal que $u + (-u) = 0$;
5. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;
6. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$;
7. $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$;
8. $1u = u$.

Definição 1.1.3. [1, p. 106] Dado um espaço vetorial V , um subconjunto não vazio $W \subset V$, será um **subespaço vetorial** de V se:

1. Para quaisquer $u, v \in W$ tivermos $u + v \in W$;
2. Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W$ tivermos $\alpha u \in W$.

1.1.2 Dependência e Independência Linear

Definição 1.1.4. [1, p. 112] Sejam V um espaço vetorial real, $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Então, o vetor

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

é um elemento de V o qual chamamos de **combinação linear** de $v_1, \dots, v_n$.

Fixados vetores $v_1, \dots, v_n$ em V , o conjunto W de todos os vetores de V que são combinação linear destes é um subespaço vetorial de V (consequência direta da Definição 1.1.3). O subespaço W é chamado de **subespaço gerado** por $v_1, \dots, v_n$ e usamos a notação

$$\begin{aligned} W &= [v_1, \dots, v_n] \\ &= \{v \in V; v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, \alpha_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}. \end{aligned}$$

Definição 1.1.5. [1, p. 114] Sejam V um espaço vetorial e $v_1, \dots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ é **linearmente independente (LI)**, ou que os vetores $v_1, \dots, v_n$ são LI, se a equação

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. No caso em que exista algum $\alpha_i \neq 0$ dizemos que $\{v_1, \dots, v_n\}$ é **linearmente dependente (LD)**, ou que os vetores $v_1, \dots, v_n$ são LD.

Exemplo 1.1.6. O conjunto $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é linearmente independente. Suponha que existam escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1) = 0$. Dessa forma, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$. Pela igualdade de vetores, temos: $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = 0$. Portanto, a única combinação linear que resulta no vetor nulo é aquela em que todos os coeficientes são nulos. Logo, o conjunto $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é LI.

1.1.3 Base

Definição 1.1.7. [1, p. 116] Um conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ de vetores de V será uma **base** de V se:

1. $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LI;
2. $[v_1, \dots, v_n] = V$.

Neste caso, dizemos que V é um espaço vetorial de dimensão finita e o número natural n é chamado **dimensão** de V . Usamos a notação $\dim V = n$.

Exemplo 1.1.8. Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$, então $\{e_1, e_2, e_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, pois $\{e_1, e_2, e_3\}$ é LI pelo Exemplo 1.1.6 e qualquer vetor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores da base, $(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$, logo ela gera o espaço $V = \mathbb{R}^3$. Esta base é chamada de **base canônica** de $\mathbb{R}^3$.

Definição 1.1.9. [1, p. 121] Sejam $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V e $v \in V$. Então, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$. Chamamos estes números $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de **coordenadas** de v em relação à base β . A **matriz de coordenadas** de v em relação à base β é denotada por

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.1.10. Considere $V = \mathbb{R}^3$ e a base canônica $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$. Assim, a matriz

de coordenadas do vetor $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$ na base β é $[v]_\beta = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

1.1.4 Transformações Lineares

Definição 1.1.11. [1, p. 144] *Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma **transformação linear** (ou aplicação linear) é uma função de V em W , $T : V \rightarrow W$, que satisfaz as seguintes condições:*

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$, $\forall u, v \in V$;
2. $T(\alpha v) = \alpha T(v)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in V$.

Um fato importante é que toda matriz $m \times n$ está associada a uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. Em outras palavras, podemos dizer que uma matriz produz uma transformação linear. A implicação inversa também é verdadeira, isto é, uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ pode ser representada por uma matriz $m \times n$.

Exemplo 1.1.12. *Seja $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$ e A uma matriz $m \times n$. Definimos*

$$\begin{aligned} T_A : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ v &\mapsto T_A(v), \end{aligned}$$

onde v é tomado como o vetor coluna

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

e

$$T_A(v) = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

Das propriedades de operações de matrizes:

$$T_A(u + v) = A(u + v) = Au + Av = T_A(u) + T_A(v)$$

e

$$T_A(\alpha u) = A(\alpha u) = \alpha(Au) = \alpha T_A(u).$$

Portanto, T_A é uma transformação linear.

Veremos que dada uma matriz, podemos associá-la a uma transformação linear, ou seja, fixadas as bases $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\beta' = \{w_1, \dots, w_m\}$, à matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n},$$

podemos associar

$$\begin{aligned} T_A : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ v &\mapsto T_A(v). \end{aligned}$$

Seja

$$X = [v]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

logo,

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

Então, $T_A(v) = y_1 w_1 + \cdots + y_m w_m$, onde $y_i = A_i \cdot X$ e A_i é a i -ésima linha de A .

Em geral, dada uma matriz $A_{m \times n}$, ela é encarada como uma aplicação linear $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

Agora iremos encontrar a matriz associada a uma transformação linear. Seja $T : V \rightarrow W$ linear, $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V e $\beta' = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W . Então $T(v_1), \dots, T(v_n)$ são vetores de W e, portanto,

$$T(v_1) = a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m$$

$$\vdots$$

$$T(v_n) = a_{1n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m.$$

A transposta da matriz de coeficientes deste sistema, denotada por $[T]_{\beta'}^\beta$, é chamada matriz de T em relação às bases β e β' :

$$[T]_{\beta'}^\beta = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = A.$$

Observe que T passa a ser a aplicação linear associada à matriz A e bases β e β' , isto é, $T = T_A$.

Exemplo 1.1.13. A rotação $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de ângulo θ em torno da origem em $\mathbb{R}^2$ que leva cada vetor v no vetor $R(v)$ é uma transformação linear. Observando a Figura 1.1, vemos que $R(u + v) = R(u) + R(v)$ e ainda que $R(\alpha v) = \alpha R(v)$ para $v \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, logo R é uma transformação linear. Para um vetor $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrário, seja $R(v) = (x', y')$. Sabemos que $x' = ax + by$ e $y' = cx + dy$ e queremos determinar a matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

onde $R(e_1) = (a, c)$ e $R(e_2) = (b, d)$, com $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$. Ora, pelas definições de seno e cosseno, o vetor unitário $R(e_1)$, que forma com e_1 um ângulo θ , tem coordenadas $\cos(\theta)$ e $\sin(\theta)$, ou seja, $R(e_1) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$. Além disso, como e_2 forma com e_1 um ângulo reto, $R(e_2)$ também forma com $R(e_1)$ um ângulo reto. Logo $R(e_2) = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$ (veja a Figura 1.2). Portanto, a rotação $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ leva um vetor $v = (x, y)$ no vetor $R(v) = (x', y')$, onde

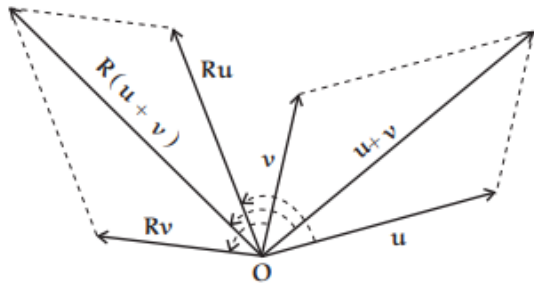
$$x' = x \cos(\theta) - y \sin(\theta);$$

$$y' = x \sin(\theta) + y \cos(\theta).$$

A matriz de R relativa à base canônica de $\mathbb{R}^2$ é

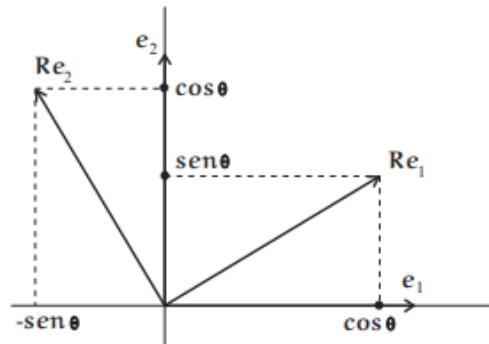
$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Figura 1.1: Rotação dos vetores u, v e $u + v$.



Fonte: Figura 4.1 de [4, p. 42].

Figura 1.2: Rotação dos vetores e_1 e e_2 .



Fonte: Figura 4.2 de [4, p. 43].

1.1.5 Imagem e Núcleo

Definição 1.1.14. [1, p. 151] Seja $T : V \rightarrow W$ uma aplicação linear. A **imagem** de T é o conjunto dos vetores $w \in W$ tais que existe um vetor $v \in V$, que satisfaz $T(v) = w$,

ou seja,

$$\text{Im}(T) = \{w \in W \mid T(v) = w \text{ para algum } v \in V\}.$$

Definição 1.1.15. [1, p. 152] Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. O conjunto de todos os vetores $v \in V$ tais que $T(v) = 0$ é chamado **núcleo** de T , sendo denotado por $\ker(T)$. Isto é,

$$\ker(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\}.$$

Definição 1.1.16. [1, p. 153] A aplicação linear $T : V \rightarrow W$ será **sobrejetora** se a imagem de T coincidir com W , ou seja $T(V) = W$.

Teorema 1.1.17. [1, p. 154] Seja $T : V \rightarrow W$ uma aplicação linear. Então $\ker(T) = \{0\}$, se e somente se, T é **injetora**.

Demonstração: [4, p. 61] Seja T injetiva. Então $v \in \ker(T) \Rightarrow T(v) = 0 = T(0) \Rightarrow v = 0$, logo $\ker(T) = \{0\}$. Reciprocamente, seja $\ker(T) = \{0\}$. Então $T(v) = T(v') \Rightarrow T(v - v') = T(v) - T(v') = 0 \Rightarrow v - v' \in \ker(T) \Rightarrow v - v' = 0 \Rightarrow v = v'$, logo T é injetiva. $\square$

Observação 1.1.18. Temos que $\text{Im}(T) \subset W$ e $\text{Ker}(T) \subset V$ são subespaços vetoriais de W e V , respectivamente.

Teorema 1.1.19. (Núcleo e Imagem) Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita e $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Então

$$\dim V = \dim \ker(T) + \dim \text{Im}(T).$$

Demonstração: Veja a demonstração do Teorema 6.6 de [4, p. 65].

Quando uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ for injetora e sobrejetora, T é chamado de **isomorfismo**, e dizemos que os espaços vetoriais V e W são isomorfos. Além disso, um isomorfismo $T : V \rightarrow W$ tem uma aplicação inversa $T^{-1} : W \rightarrow V$ que é linear e também um isomorfismo.

1.1.6 Produto Interno

Definição 1.1.20. [1, p. 221] Seja V um espaço vetorial real. Um **produto interno** sobre V é uma função que a cada par de vetores, u e v , associa um número real, denotado $\langle u, v \rangle$, satisfazendo as propriedades:

1. $\langle u, u \rangle \geq 0$, $\forall u \in V$, e $\langle u, u \rangle = 0$ se, e somente se $u = 0$;
2. $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;
3. $\langle u + w, v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle$;
4. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.

1.1.7 Ortogonalidade

Definição 1.1.21. [1, p. 224] *Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Diz-se que dois vetores $u, v \in V$ são **ortogonais** (em relação a este produto interno) se $\langle u, v \rangle = 0$. No caso em que u e v são ortogonais, escrevemos $u \perp v$.*

Proposição 1.1.22. [1, p. 224] *Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. As seguintes afirmações são válidas, para cada $u, v \in V$,*

1. $0 \perp u$ para todo $u \in V$;
2. $u \perp v$ implica que $v \perp u$;
3. Se $u \perp v$ para todo $v \in V$, então $u = 0$;
4. Se $u_1 \perp v$ e $u_2 \perp v$, então $(u_1 + u_2) \perp v$;
5. Se $u \perp v$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ é um escalar, então $\lambda u \perp v$.

Demonstração:

1. Queremos mostrar que 0 é ortogonal a todo vetor $u \in V$. Usando a condição 2 da Definição 1.1.20, temos $\langle 0, u \rangle = \langle 0 \cdot u, u \rangle = 0 \langle u, u \rangle = 0$.
2. Como $u \perp v$, então $0 = \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$, onde usamos na segunda igualdade, a condição 4 da Definição 1.1.20.
3. Para cada $v \in V$ temos $\langle u, v \rangle = 0$, em particular $\langle u, u \rangle = 0$ e pela condição 1 da Definição 1.1.20 segue que $u = 0$.

Os itens 4 e 5 seguem das condições 1 e 2 da Definição 1.1.20:

$$\langle u_1 + \lambda u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \lambda \langle u_2, v \rangle = 0.$$

□

Teorema 1.1.23. [1, p. 225] *Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ um conjunto de vetores não nulos, dois a dois ortogonais, isto é,*

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \text{para } i \neq j.$$

Então $\{v_1, \dots, v_n\}$ é linearmente independente.

Demonstração: Sejam $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$. Assim, para cada v_i temos $\langle a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, v_i \rangle = \langle 0, v_i \rangle = 0$, portanto,

$$a_1 \langle v_1, v_i \rangle + \dots + a_i \langle v_i, v_i \rangle + \dots + a_n \langle v_n, v_i \rangle = 0.$$

Como $\langle v_j, v_i \rangle = 0$ para $j \neq i$ e $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$, temos $a_i \langle v_i, v_i \rangle = 0$ e assim $a_i = 0$. Como isto vale para todo $i = 1, \dots, n$, temos $a_1 = 0, \dots, a_n = 0$; logo $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LI em V . $\square$

Se obtivermos um conjunto de n vetores dois a dois ortogonais num espaço de dimensão n , este conjunto será uma base ortogonal.

Definição 1.1.24. [1, p. 225] Diz-se que uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V é uma **base ortogonal** se $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ para $i \neq j$, isto é, os vetores da base são dois a dois ortogonais.

1.1.8 Norma

Definição 1.1.25. [1, p. 226] Seja V um espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Definimos a **norma** (ou comprimento) de um vetor v em relação a este produto interno por $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Se $\|v\| = 1$, isto é, $\langle v, v \rangle = 1$, v é chamado de **vetor unitário**. Dizemos também, neste caso, que v está **normalizado**.

Observe que todo vetor não nulo $v \in V$ pode ser normalizado, tornando

$$u = \frac{v}{\|v\|}.$$

Proposição 1.1.26. [1, p. 228] Seja V um espaço vetorial com produto interno. Para quaisquer $v, w \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos as seguintes propriedades.

1. $\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0$ se, e somente se $v = 0$;
2. $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$;
3. $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$ (Desigualdade de Schwarz);
4. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Desigualdade triangular).

Demonstração: (3) Sejam $v, w \in V$ com $v \neq 0$ (para $v = 0$ vale a igualdade $|\langle v, w \rangle| = \|v\| \|w\| = 0$). Para qualquer $t \in \mathbb{R}$, temos $\langle tv + w, tv + w \rangle \geq 0$, isto é, $\langle v, v \rangle t^2 + 2\langle v, w \rangle t + \langle w, w \rangle \geq 0$. Temos então um trinômio do 2º grau que deve ser positivo para qualquer valor de t . Como o coeficiente $\langle v, v \rangle$ de t^2 é sempre positivo ($v \neq 0$), o discriminante Δ deve ser negativo: $\Delta = 4\langle v, w \rangle^2 - 4\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle \leq 0$. Isto é, $4\langle v, w \rangle^2 - 4\|v\|^2 \|w\|^2 \leq 0$, o que implica que $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$. $\square$

Definição 1.1.27. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno e $v, w \in V$ não nulos. Definimos o **ângulo** θ entre v e w de forma que:

$$\cos(\theta) = \frac{|\langle v, w \rangle|}{\|v\| \|w\|}.$$

Definição 1.1.28. [1, p. 229] *Seja V um espaço vetorial com produto interno. Diz-se que uma base $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V é **ortonormal** se for ortogonal e cada vetor for unitário, isto é,*

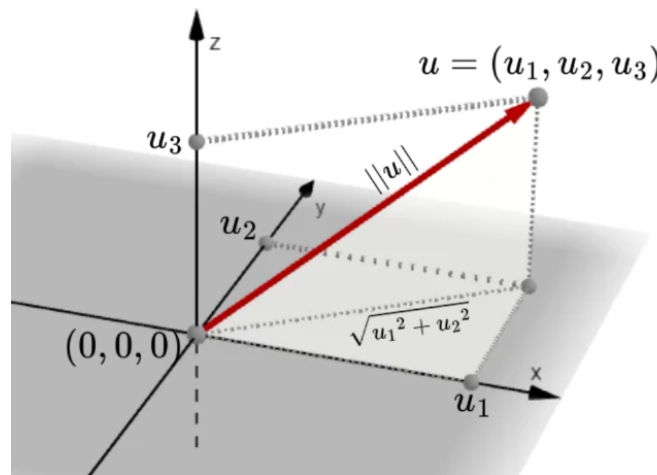
$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}.$$

Definição 1.1.29. *Seja $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ um vetor, a **norma** (ou “comprimento”) de u é definida por*

$$\|u\| = \|(u_1, \dots, u_n)\| = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}.$$

Sob o ponto de vista de $\mathbb{R}^3$, geometricamente, $\|u\|$ é a distância do ponto $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ à origem $O = (0, 0, 0)$ (veja a Figura 1.3).

Figura 1.3: Norma do vetor $u \in \mathbb{R}^3$.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Restringindo nossas observações para o espaço $\mathbb{R}^3$, veremos a seguir a definição de produto escalar (veja na Figura 1.4 a representação dos vetores).

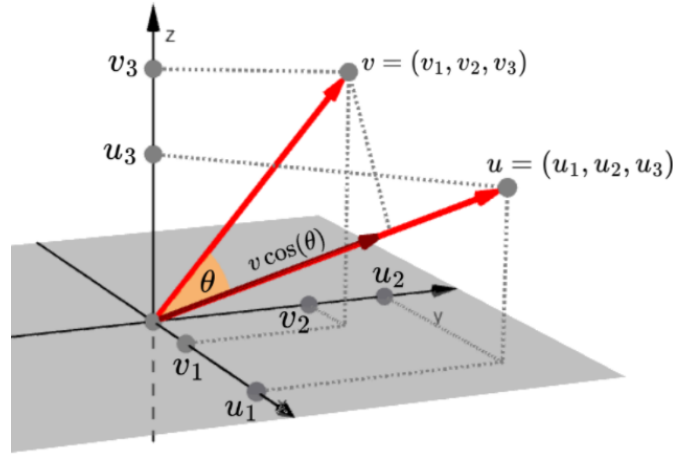
Definição 1.1.30. *Sejam $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ e $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, e seja θ , $0 \leq \theta \leq \pi$, o ângulo formado pelos segmentos Ou e Ov . O **produto escalar** $u \cdot v$ é definido por:*

$$u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \theta.$$

Exemplo 1.1.31. *O produto escalar de vetores do espaço $\mathbb{R}^3$ é um produto interno, pois $\langle u, v \rangle = u \cdot v$ satisfaz as propriedades de produto interno.*

Existe uma maneira mais simples de calcular o produto escalar. Escrevemos os vetores u e v na base canônica:

Figura 1.4: Ângulo entre os vetores u e v .



Fonte: Elaborada pelo autor (2026) e disponível em <https://www.geogebra.org/m/ucynwnaf>.

$$u = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3 \quad (1.1)$$

e

$$v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3, \quad (1.2)$$

onde, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$. Pela Definição 1.1.30, concluímos que $e_i \cdot e_j = 1$ se $i = j$ e que $e_i \cdot e_j = 0$ se $i \neq j$, onde $i, j = 1, 2, 3$. Utilizando as propriedades de produto interno, vemos que ao calcular $u \cdot v$ com o segundo membro das igualdades 1.1 e 1.2, o produto escalar pode ser expresso como:

$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Observação 1.1.32. Se $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$, então

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \sqrt{u_1u_1 + u_2u_2 + u_3u_3} = \sqrt{u \cdot u}.$$

1.1.9 Produto Vetorial em $\mathbb{R}^3$

Definição 1.1.33. [2, p. 14] Sejam $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$. O **produto vetorial** de u e v (nesta ordem) é o único vetor $u \wedge v \in \mathbb{R}^3$ caracterizado por

$$(u \wedge v) \cdot w = \det(u, v, w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix},$$

para todo $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$.

Propriedades: Sejam u, v e w vetores.

1. $u \wedge v = -v \wedge u$;
2. $u \wedge v$ depende linearmente de u e v (ou seja, para quaisquer números reais a, b temos $(au + bv) \wedge w = a(u \wedge w) + b(v \wedge w)$);
3. $u \wedge v = 0$ se, e somente se, u e v são linearmente dependentes;
4. $(u \wedge v) \cdot u = 0, (u \wedge v) \cdot v = 0$.

Observação 1.1.34. *Segue da propriedade 4 que o produto vetorial $u \wedge v \neq 0$ é ortogonal a u e a v , logo é ortogonal ao plano gerado por u e v .*

1.2 Noções de Análise em $\mathbb{R}^n$

1.2.1 Conjuntos em $\mathbb{R}^n$

Consideraremos o espaço euclidiano n -dimensional definido como o conjunto $\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, n\}\}$.

Definição 1.2.1. [2, p. 140] *Uma **bola aberta** em $\mathbb{R}^n$ com centro $p_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ e raio $\varepsilon > 0$ é o conjunto*

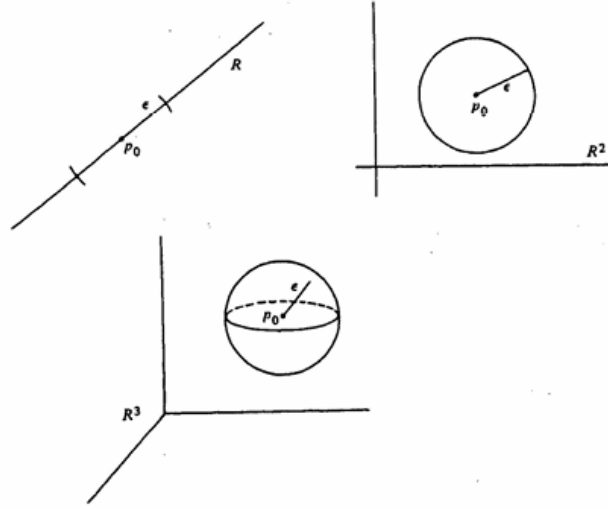
$$B_\varepsilon(p_0) := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2 < \varepsilon^2\}.$$

Exemplo 1.2.2. *Usando a Definição 1.2.1, uma bola aberta em $\mathbb{R}$ é o intervalo $|x_1 - x_1^0| < \varepsilon$ centrado em x_1^0 ; em $\mathbb{R}^2$ é o interior de um círculo $(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 < \varepsilon^2$ de centro em (x_1^0, x_2^0) e raio ε ; e em $\mathbb{R}^3$ é a região interna de uma esfera $(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2 < \varepsilon^2$ de centro (x_1^0, x_2^0, x_3^0) e raio ε (veja a Figura 1.5).*

Observação 1.2.3. *O conjunto $\mathbb{R}^n$ munido com as operações $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ e $\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$, com $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ é um espaço vetorial. E além disso, $\|u\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$. Podemos reescrever a definição anterior por $B_\varepsilon(p_0) := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2 < \varepsilon^2\} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid \|x - p_0\| < \varepsilon\}$, o que motiva a nomenclatura e ilustração geométrica apresentada na Figura 1.5.*

Definição 1.2.4. [2, p. 141] *Um conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ é um **conjunto aberto** se para cada $p \in U$ existe uma bola $B_\varepsilon(p) \subset U$.*

Figura 1.5: Bolas abertas em $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.



Fonte: Figura A2.1 de [2, p. 140].

Intuitivamente, isto significa que os pontos de U estão completamente cercados por pontos de U , ou que pontos suficientemente próximos a pontos de U ainda pertencem a U . Tais noções nos permitem falar precisamente da proximidade de pontos a um ponto fixado, um tópico essencial para propriedades locais que dependem da diferenciabilidade.

Exemplo 1.2.5. Note que $B_\varepsilon(p)$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ para cada $p \in \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$.

Definição 1.2.6. [2, p. 141] Chamamos um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ contendo um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ de *vizinhança* de p .

1.2.2 Continuidade em $\mathbb{R}^n$

Definição 1.2.7. [2, p. 142] Uma aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é **contínua** em $p \in U$ se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$F(B_\delta(p)) \subset B_\varepsilon(F(p)).$$

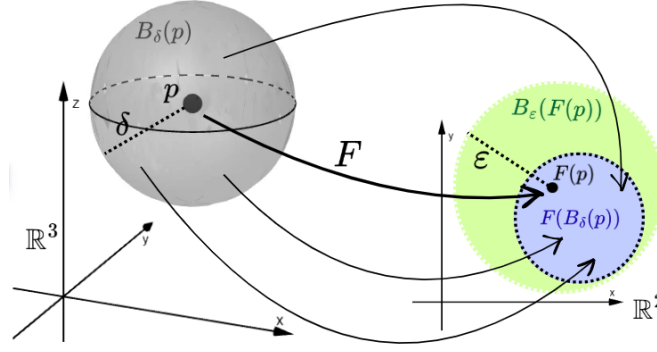
Diz-se que F é contínua em U se F é contínua para todo $p \in U$.

Observação 1.2.8. As definições de continuidade de uma função de uma variável real e duas variáveis reais são casos particulares da Definição 1.2.7. Mas de modo geral, F é contínua em p se pontos arbitrariamente próximos a $F(p)$ são imagens de pontos suficientemente próximos a p (veja a Figura 1.6).

Definição 1.2.9. [2, p. 142] Dada uma aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, de forma que, $F(p) = (y_1, \dots, y_m)$ com $p = (x_1, \dots, x_n) \in U$. Então escreveremos

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m = f_m(x_1, \dots, x_n).$$

Figura 1.6: Continuidade de uma $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

As funções $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ são chamadas de **funções componentes** de F .

Exemplo 1.2.10. Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação que associa a cada $p \in \mathbb{R}^3$ o ponto que é simétrico a p em relação à origem $O \in \mathbb{R}^3$. Então $F(p) = -p$, ou

$$F(x, y, z) = (-x, -y, -z),$$

e as funções componentes de F são

$$f_1(x, y, z) = -x, \quad f_2(x, y, z) = -y, \quad f_3(x, y, z) = -z.$$

Proposição 1.2.11. [2, p. 143] A aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua se, e somente se, cada função componente $f_i : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, é contínua.

Demonstração: ($\implies$) Suponha que F é contínua em $p \in U$. Então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $F(B_\delta(p)) \subset B_\varepsilon(F(p))$. Assim, se $q \in B_\delta(p)$, então

$$F(q) \subset B_\varepsilon(F(p)),$$

isto é,

$$(f_1(q) - f_1(p))^2 + \dots + (f_m(q) - f_m(p))^2 < \varepsilon^2,$$

e isso implica que, para cada $i = 1, \dots, m$, $|f_i(q) - f_i(p)| < \varepsilon$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $q \in B_\delta(p)$, então $|f_i(q) - f_i(p)| < \varepsilon$. Daí, cada f_i é contínua em p .

($\impliedby$) Sejam f_i , $i = 1, \dots, m$, contínuas em p . Então, dado $\varepsilon > 0$ existem $\delta_i > 0$ tais que se $q \in B_{\delta_i}(p)$, então $|f_i(q) - f_i(p)| < \varepsilon/\sqrt{m}$. Tome $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$, desta forma para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ tem-se $B_\delta(p) \subset B_{\delta_i}(p)$. Assim, para cada $q \in B_\delta(p) \subset B_{\delta_i}(p)$ temos

$$(f_1(q) - f_1(p))^2 + \dots + (f_m(q) - f_m(p))^2 < \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right)^2 = m \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right)^2 = \varepsilon^2$$

e daí a continuidade de F em p segue. □

Observação 1.2.12. *Seja $F : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Quando,*

$$F(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t)), \quad t \in U,$$

*tal aplicação é geralmente chamada de **função vetorial**, e as funções componentes de F são as componentes do vetor $F(t) \in \mathbb{R}^m$ (note que este vetor pode ser obtido identificando o ponto $F(t)$ ao segmento $OF(t)$ em que $O = (0, \dots, 0)$). Quando F é contínua, ou, de modo equivalente, as funções $x_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, são contínuas, dizemos que F é uma **curva contínua** em $\mathbb{R}^m$.*

Uma outra forma de expressar a continuidade de uma aplicação é utilizando o conceito de vizinhança.

Proposição 1.2.13. [2, p. 144] *Uma aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua em $p \in U$ se, e somente se, dada uma vizinhança V de $F(p)$ em $\mathbb{R}^m$, existe uma vizinhança W de p em $\mathbb{R}^n$ tal que $F(W) \subset V$.*

Demonstração: [2, p. 144] ($\implies$) Suponha que F é contínua em p . Como V é um conjunto aberto contendo $F(p)$, V contém uma bola $B_\varepsilon(F(p))$, para algum $\varepsilon > 0$. Pela continuidade de F , existe uma bola $B_\delta(p) = W$ tal que

$$F(W) = F(B_\delta(p)) \subset B_\varepsilon(F(p)) \subset V,$$

donde segue o resultado.

($\impliedby$) Agora suponha que vale a condição suficiente. Assim, considere $V = B_\varepsilon(F(p))$ para $\varepsilon > 0$ qualquer. Pela hipótese, existe uma vizinhança W de p em $\mathbb{R}^n$ tal que $F(W) \subset V$. Como W é conjunto aberto, existe uma bola $B_\delta(p) \subset W$. Então,

$$F(B_\delta(p)) \subset F(W) \subset V = B_\varepsilon(F(p)),$$

e daí conclui-se a continuidade de F em p . □

Exemplo 1.2.14. *A função $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $F(x, y, z) = (-x, -y, -z)$, é contínua em $\mathbb{R}^3$ (consequência direta da Proposição 1.2.11, uma vez que cada função componente é contínua em $\mathbb{R}$).*

Proposição 1.2.15. [2, p. 145] *Sejam $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $G : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ aplicações contínuas, onde U e V são conjuntos abertos tais que $F(U) \subset V$. Então $G \circ F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ é uma aplicação contínua.*

Demonstração: Seja $p \in U$ e considere W uma vizinhança de $G(F(p))$ em $\mathbb{R}^k$. Pela continuidade de G , então pela Proposição 1.2.13, existe uma vizinhança Q de $F(p)$ em

$\mathbb{R}^m$ tal que $G(Q) \subset W$. Agora, pela continuidade de F , existe uma vizinhança R de p em $\mathbb{R}^n$ tal que $F(R) \subset Q$. Assim,

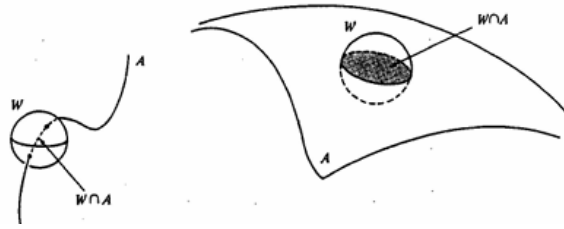
$$G(F(R)) \subset G(Q) \subset W,$$

e daí, pela Proposição 1.2.13, a continuidade de $G \circ F$ segue. $\square$

Adiante, precisaremos lidar com aplicações definidas em conjuntos arbitrários (não necessariamente abertos) em $\mathbb{R}^n$, com isso, apresentaremos a seguinte definição (verifique a Figura 1.7).

Definição 1.2.16. [2, p. 145] *Seja $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação, onde A é um conjunto arbitrário de $\mathbb{R}^n$. Diremos que F é contínua em A se, para todo $p \in A$ e dada uma vizinhança V de $F(p)$ em $\mathbb{R}^m$, existe uma vizinhança W de p em $\mathbb{R}^n$ tal que $F(W \cap A) \subset V$. Chamaremos o conjunto $W \cap A$ de vizinhança de p em A .*

Figura 1.7: Continuidade da F sobre um conjunto arbitrário A .



Fonte: Figura A2.4 de [2, p. 146].

Definição 1.2.17. [2, p. 145] *Uma aplicação contínua $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um **homeomorfismo** sobre $F(A)$ se F é injetiva e a inversa $F^{-1} : F(A) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua. Nesse caso, A e $F(A)$ são **conjuntos homeomorfos**.*

Exemplo 1.2.18. *Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por*

$$F(x, y, z) = (ax, by, cz),$$

onde a, b, c são números reais não nulo fixados. A aplicação F é contínua (veja a Proposição 1.2.11), pois suas funções componentes são contínuas, e a restrição de F à esfera

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

denotada por $F|S^2 := \tilde{F} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, também é uma aplicação contínua. Queremos descrever o conjunto $\tilde{F}(S^2)$ com coordenadas $\tilde{x}, \tilde{y}$ e $\tilde{z}$. Observe que,

$$\tilde{F}(x, y, z) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \iff (ax, by, cz) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}).$$

Então,

$$ax = \tilde{x}, \quad by = \tilde{y} \quad e \quad cz = \tilde{z} \iff x = \frac{\tilde{x}}{a}, \quad y = \frac{\tilde{y}}{b} \quad e \quad z = \frac{\tilde{z}}{c}.$$

Como $(x, y, z) \in S^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, assim

$$\left(\frac{\tilde{x}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{y}}{b}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{z}}{c}\right)^2 = 1 \iff \frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} + \frac{\tilde{z}^2}{c^2} = 1.$$

Logo, $\tilde{F}(S^2) = E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} + \frac{\tilde{z}^2}{c^2} = 1 \right\}$, ou seja, E é um elipsóide. Note que F é injetiva e que

$$F^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c} \right)$$

é contínua. Assim, $F^{-1}|_E := \tilde{F}^{-1} : E \rightarrow \mathbb{R}^3$ é contínua. Portanto, $\tilde{F}$ é um homeomorfismo da esfera S^2 sobre o elipsóide E .

1.2.3 Diferenciabilidade em $\mathbb{R}^n$

Um conceito fundamental em Geometria Diferencial é o de diferenciabilidade.

Definição 1.2.19. [2, p. 147] *Seja $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de uma variável real. A derivada $f'(x_0)$ de f em $x_0 \in U$ é o limite (quando existe)*

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad x_0 + h \in U.$$

Definição 1.2.20. [2, p. 147] *Seja $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de uma variável real. Dizemos que f é **diferenciável** (ou suave) em $x_0 \in U$, se ela possui derivadas contínuas de todas as ordens em x_0 . Dizemos que f é diferenciável, se ela possui derivadas de todas as ordens em todos os pontos de U .*

Observação 1.2.21. *Usaremos a palavra diferenciável neste texto como um sinônimo de infinitamente diferenciável (ou de classe C^∞). Fizemos isso para acompanharmos nossa principal referência.*

Exemplo 1.2.22. *Considere $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e as aplicações $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, tais $u(t) = x_1(t)e_1 + y_1(t)e_2 + z_1(t)e_3$, $v(t) = x_2(t)e_1 + y_2(t)e_2 + z_2(t)e_3$, $t \in I$ e $x_i, y_i, z_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis, então $u(t) \cdot v(t)$ é tal que, para cada $t \in I$,*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(t) \cdot v(t)) &= \frac{d}{dt}(x_1(t)x_2(t) + y_1(t)y_2(t) + z_1(t)z_2(t)) \\ &= x_1'(t)x_2(t) + x_1(t)x_2'(t) + y_1'(t)y_2(t) + y_1(t)y_2'(t) + z_1'(t)z_2(t) + z_1(t)z_2'(t) \\ &= x_1'(t)x_2(t) + y_1'(t)y_2(t) + z_1'(t)z_2(t) + x_1(t)x_2'(t) + y_1(t)y_2'(t) + z_1(t)z_2'(t) \\ &= u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t), \end{aligned}$$

assim a aplicação $u(\cdot) \cdot v(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável e

$$\frac{d}{dt}(u(t) \cdot v(t)) = u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t), \quad \forall t \in I.$$

No próximo capítulo faremos uma interpretação geométrica deste resultado.

Definição 1.2.23. [2, p. 147] *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis reais. A **derivada parcial** de f com relação a x em $(x_0, y_0) \in U$, denotada por $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, é (quando existe) a derivada em x_0 da função de uma variável $x \mapsto f(x, y_0)$. Analogamente, a derivada parcial em relação a y em (x_0, y_0) , $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, é definida como a derivada em y_0 de $y \mapsto f(x_0, y)$.*

Observação 1.2.24. *A definição de diferenciabilidade da f como função de duas variáveis reais é análogo ao apresentado para a f com uma variável real. De maneira geral, a definição de derivadas parciais e diferenciabilidade se estende para funções do tipo $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, de forma que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, é (quando existe) a derivada da função de uma variável*

$$x_i \mapsto f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_i, \dots, x_n^0).$$

Veremos agora a definição de diferenciabilidade para aplicações do tipo $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Definição 1.2.25. [2, p. 149] *Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dizemos que F é diferenciável em $p \in U$ se as suas funções componentes são diferenciáveis em p , ou seja, escrevendo*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

as funções f_i , $i = \{1, \dots, m\}$, têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em p . F é diferenciável em U se é diferenciável em todos os pontos de U .

Exemplo 1.2.26. *Seja $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por*

$$F(u, v) = (\cos(u) \cos(v), \cos(u) \sin(v), \cos^2(v)), \quad (u, v) \in U.$$

As funções componentes de F , a saber,

$$f_1(u, v) = \cos(u) \cos(v), \quad f_2(u, v) = \cos(u) \sin(v), \quad f_3(u, v) = \cos^2(v)$$

têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U . Assim, F é diferenciável em U .

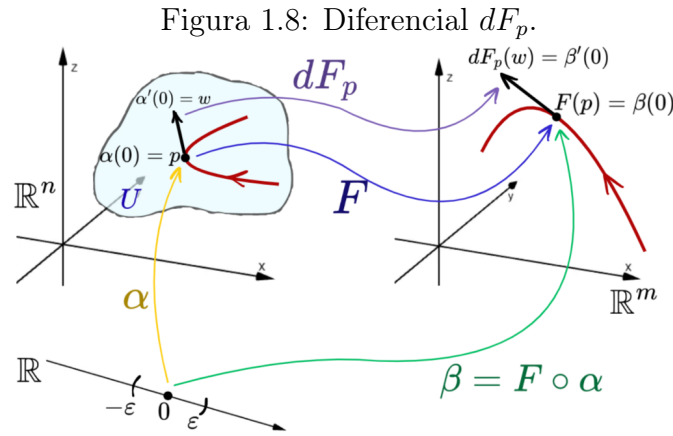
Definição 1.2.27. [2, p. 149] *Um **vetor tangente** a uma aplicação $\alpha : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$*

em $t_0 \in U$ é o vetor em $\mathbb{R}^m$

$$\alpha'(t_0) = (x'_1(t_0), \dots, x'_m(t_0)).$$

Definição 1.2.28. [2, p. 150] *Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável. Associamos a cada $p \in U$ uma aplicação linear $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ que é chamada de **diferencial** de F em p , e é definida da seguinte maneira. Sejam $w \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ uma curva diferenciável tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$. Pela regra da cadeia, a curva $\beta = F \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ também é diferenciável. Então (veja a Figura 1.8)*

$$dF_p(w) = \beta'(0).$$



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Proposição 1.2.29. *A definição dada acima para dF_p não depende da escolha da curva que passa por p com vetor tangente w , e dF_p é, de fato, uma aplicação linear.*

Demonstração: Veja a demonstração da Proposição 7 de [2, p. 150].

Pela Proposição 1.2.29 a aplicação $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é linear e, como apresentamos na Seção 1.1.4, dF_p pode ser representada pela matriz, em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, por

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right)_{m \times n}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Esta matriz é chamada **matriz Jacobiana** de F em p . Quando $n = m$, tem-se uma matriz quadrado cujo determinante é denominado **determinante Jacobiano**. Denotamos o determinante jacobiano por

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}.$$

Exemplo 1.2.30. Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Vamos encontrar $dF_{(1,1)}(2, 3)$.

Seja $p = (x, y) \in \mathbb{R}$ e uma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $\alpha(0) = (x(0), y(0)) = (x, y) = p$ e $\alpha'(0) = (a, b)$. Pela Definição 1.2.28,

$$\begin{aligned} dF_p(a, b) &= \frac{dF(\alpha(t))}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{dF(x(t), y(t))}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= (2x(t)x'(t) - 2y(t)y'(t), 2x'(t)y(t) + 2x(t)y'(t)) \Big|_{t=0} \\ &= (2x(0)x'(0) - 2y(0)y'(0), 2x'(0)y(0) + 2x(0)y'(0)) \\ &= (2xa - 2yb, 2ay + 2xb). \end{aligned}$$

Assim F é uma aplicação diferenciável. Logo, $dF_{(1,1)}(2, 3) = (-2, 10)$. Agora, em termos da matriz jacobiana, a diferencial dF_p , na base canônica, em $p = (x, y)$ é

$$dF_p = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} dF_{(1,1)}(2, 3) &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 6 \\ 4 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix} \\ &= (-2, 10). \end{aligned}$$

Podemos expressar a derivada parcial de uma composição de funções através do método conhecido como **regra da cadeia** tal qual aprendemos nos cursos de Cálculo. Por exemplo, considere as funções reais diferenciáveis $x_i : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, i \in \{1, 2, 3\}$ dadas por $x_1 = x_1(u, v), x_2 = x_2(u, v), x_3 = x_3(u, v)$ e a função real diferenciável $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^m$ como $(y_1, y_2, y_3) \mapsto f(y_1, y_2, y_3)$. Então a composição, $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, com $g(u, v) = f(x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$ é diferenciável em U e a derivada parcial, por exemplo, de g com relação a u , é dada por

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial u}.$$

A Proposição a seguir apresenta uma generalização para esta ideia.

Proposição 1.2.31. [2, p. 153] *Sejam $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $G : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ aplicações diferenciáveis, onde U e V são conjuntos abertos tais que $F(U) \subset V$. Então $G \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ é uma aplicação diferenciável, e*

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p, \quad p \in U.$$

Demonstração: O fato de $G \circ F$ ser diferenciável é uma consequência da regra da cadeia para funções. Seja agora $w_1 \in \mathbb{R}^n$ e considere a curva $\alpha : (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \rightarrow U$, com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w_1$. Defina $dF_p(w_1) = w_2$ e observe que $dG_{F(p)}(w_2) = \frac{d}{dt}(G \circ F \circ \alpha)|_{t=0}$. Então,

$$d(G \circ F)_p(w_1) = \frac{d}{dt}(G \circ F \circ \alpha)|_{t=0} = dG_{F(p)}(w_2) = dG_{F(p)} \circ dF_p(w_1).$$

□

Definição 1.2.32. [2, p. 68] Dada uma aplicação diferenciável $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida em um conjunto aberto U de $\mathbb{R}^n$, dizemos que $p \in U$ é um **ponto crítico** de F se a diferencial $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ não é uma aplicação sobrejetiva. A imagem $F(p) \in \mathbb{R}^m$ de um ponto crítico é chamada de **valor crítico** de F . Um ponto de $\mathbb{R}^m$ que não é um valor crítico é chamado de **valor regular** de F .

Exemplo 1.2.33. Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Vamos encontrar os pontos críticos de F . Pelo Exemplo 1.2.30 sabemos $dF_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$. Agora, pelo Teorema 1.1.19, $dF_{(x,y)}$ é sobrejetiva se, e somente se, $dF_{(x,y)}$ é injetiva, assim vamos encontrar (x, y) tais que $dF_{(x,y)}$ não é injetiva. Basta verificarmos que

$$\det \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} = 0 \iff 4x^2 + 4y^2 = 0 \iff (x, y) = (0, 0).$$

Daí, concluímos que o único ponto crítico de F é $p = (0, 0)$.

Observação 1.2.34. Considere $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Seja $p \in U$ ponto crítico, ou seja, $df_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ não é sobrejetiva, assim $\text{Im}(df_p) = \{0\}$ (caso exista $w \neq 0$ em $\text{Im}(df_p)$) ocorreria a sobrejetividade), ou seja, para todo $v \in \mathbb{R}^3$, $df_p(v) = 0$, em particular, $f_x(p) = df_p(1, 0, 0) = 0$, $f_y(p) = df_p(0, 1, 0) = 0$ e $f_z(p) = df_p(0, 0, 1) = 0$.

Teorema 1.2.35. (Função Inversa) [2, p. 155] Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável e suponha que em $p \in U$ a diferencial $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo. Então existe uma vizinhança V de p em U e uma vizinhança W de $F(p)$ em $\mathbb{R}^n$ tal que $F : V \rightarrow W$ tem inversa diferenciável $F^{-1} : W \rightarrow V$.

Demonstração: Veja a demonstração do Teorema 4 de [5, p. 115].

Exemplo 1.2.36. Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. No Exemplo 1.2.33 vimos que $dF_{(x,y)}$ é um isomorfismo se, e somente se, $(x, y) \neq (0, 0)$. Assim, dado $(x, y) \neq (0, 0)$ temos, pelo Teorema da Função Inversa, que existe uma vizinhança W de (x, y) e uma vizinhança V de $(x^2 - y^2, 2xy)$ tal que $F^{-1} : W \rightarrow V$ é diferenciável.

Definição 1.2.37. Uma aplicação diferenciável $F : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$ de V sobre W , onde V e W são conjuntos abertos, é chamada de **difeomorfismo** de V sobre W se F tem uma inversa diferenciável.

O teorema da função inversa afirma que se em um ponto $p \in U$ a diferencial dF_p é um isomorfismo, então F é um difeomorfismo em uma vizinhança de p . Em outras palavras, uma afirmação sobre a diferencial de F em um ponto implica uma afirmação similar sobre o comportamento de F em uma vizinhança do ponto.

Capítulo 2

Curvas

O estudo das propriedades das superfícies constitui o principal objetivo da Geometria Diferencial. Nesse capítulo faremos um breve estudo com definições e resultados das curvas. Estas primeiras, se tornam base para a compreensão das superfícies, por isso, daremos uma primeira atenção a elas.

2.1 Curvas Regulares Parametrizadas pelo Comprimento de Arco

Na Física, a trajetória de uma partícula no plano ou no espaço é comumente descrita por uma função “bem-comportada” (que no contexto significa diferenciável) em relação ao tempo. Utilizando-se de ideias vetoriais, esse movimento é representado por uma função vetorial que define o vetor posição da partícula em cada instante. A partir dessa descrição, é possível analisar grandezas cinemáticas fundamentais, como a velocidade e a aceleração, por meio das derivadas temporais desse vetor.

Neste sentido, buscando compreender tais funções que podem ser empregadas no contexto da Física, por exemplo, apresentamos a seguinte definição.

Definição 2.1.1. [2, p. 2] *Uma **curva diferenciável parametrizada** é uma aplicação diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de um intervalo aberto $I = (a, b)$ da reta real $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^3$. Chamamos a variável t de **parâmetro** da curva.*

Observação 2.1.2. *É importante destacarmos que dizer que α é uma aplicação diferenciável significa que α é uma correspondência que leva cada $t \in I$ em um ponto $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$, de modo que as funções reais $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ são diferenciáveis (veja a Definição 1.2.25).*

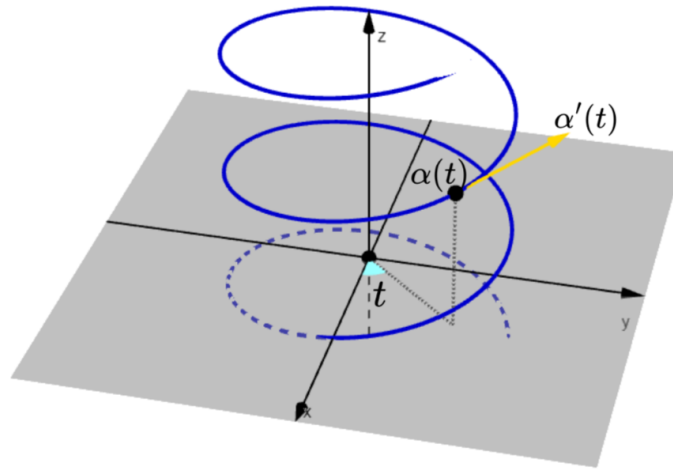
Seja $x'(t)$ a derivada de primeira ordem da função $x(t)$ em um ponto t , e usando notações análogas para as funções y e z , o vetor $(x'(t), y'(t), z'(t)) = \alpha'(t) \in \mathbb{R}^3$ é chamado

de **vetor tangente** (ou vetor velocidade) da curva $\alpha(t)$ em t (veja a Definição 1.2.27). A imagem $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^3$ é chamada de **traço** da curva α .

Observação 2.1.3. Como já dissemos, das noções da mecânica clássica sabemos que, se $\alpha(t)$ representa o vetor posição de uma partícula no instante t , $\alpha'(t)$ representa a velocidade instatânea da partícula no instante t .

Exemplo 2.1.4. A Hélice, dada pela aplicação $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ com $\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$ (onde a e b são números reais fixados), é uma curva diferenciável parametrizada, pois suas funções componetes são funções diferenciáveis. O seu traço está esboçado na Figura 2.1.4, com velocidade $\alpha'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t), b), t \in \mathbb{R}$.

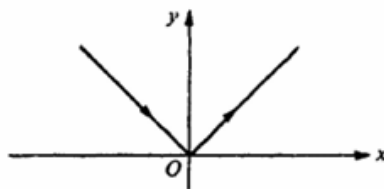
Figura 2.1: Traço da Hélice.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Exemplo 2.1.5. A aplicação β dada por $\beta(t) = (t, |t|)$, $t \in \mathbb{R}$, não é uma curva diferenciável parametrizada, pois a função $|t|$ não é diferenciável em $t = 0$. O gráfico de β está esboçado na Figura 2.2.

Figura 2.2: Gráfico de β .



Fonte: Figura 1.2 de [2, p. 3].

Dada uma curva diferenciável parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, para cada $t \in I$ tal que $\alpha'(t) \neq 0$, há uma reta bem definida contendo o ponto $\alpha(t)$ e o vetor $\alpha'(t)$, tal reta é

chamada de **reta tangente** a α em t . Ademais, podemos estabelecer uma função r que descreve a reta tangente que passa por $\alpha(t)$, basta fazermos $r(s) = \alpha(t) + s\alpha'(t)$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Será necessário que as curvas tenham em todos os pontos uma reta tangente associada, o que nos convém, portanto, chamar de **ponto singular** de α um ponto $t \in I$ onde $\alpha'(t) = 0$, e restringirmos as nossas considerações às curvas que não possuam pontos singulares.

Definição 2.1.6. [2, p. 6] *Uma curva diferenciável parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é chamada **regular** se $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Um ponto $t \in I$ onde $\alpha'(t) \neq 0$ é chamado de **ponto regular** de α .*

Definição 2.1.7. [2, p. 7] *Dado $t_0 \in I$, o **comprimento de arco** de uma curva parametrizada regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, a partir do ponto t_0 , é uma função s dada por*

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(w)\| dw,$$

onde

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \quad (2.1)$$

é o comprimento do vetor $\alpha'(t)$.

Como na definição acima $\alpha'(t) \neq 0$ (α é regular), o comprimento de arco s é uma função diferenciável de t e pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\frac{ds}{dt} = \|\alpha'(t)\|. \quad (2.2)$$

Observação 2.1.8. *Suponha que o parâmetro $t \in I$ seja o comprimento de arco a partir de um instante $t_0 \in I$, isto é, $s(t) = t - t_0, t \geq t_0$. Então $\frac{ds}{dt} = 1$ e pela equação 2.2 tem-se $\|\alpha'(t)\| = 1$. Agora, seja $t \geq t_0$ e $\|\alpha'(t)\| = 1$, logo*

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(w)\| dw = \int_{t_0}^t 1 dw = t - t_0.$$

Ou seja, t é comprimento de arco medido a partir de $t_0 \in I$.

Para desenvolvimento e melhor compreensão da teoria local das curvas, abordada na próxima seção, iremos considerar as curvas como sendo diferenciáveis regulares e parametrizadas pelo comprimento de arco, isto é, cujo vetor velocidade possui norma constante igual a 1.

2.2 Teoria Local das Curvas

Nesta seção apresentamos os principais objetos geométricos que aparecem ao fazermos um estudo local a respeito das curvas (diferenciáveis) parametrizadas, ou seja, as propriedades que podem ser extraídas quando analisamos o comportamento da curva em uma vizinhança de um ponto dado. A descoberta dessas propriedades locais está intrinsecamente ligada à Geometria Diferencial das superfícies.

Voltando ao contexto das noções da Física comentadas na seção anterior, o próximo resultado nos fornece uma interpretação para outra grandeza vetorial, a aceleração, que está relacionada à variação da velocidade da partícula (vetores tangentes à curva).

Proposição 2.2.1. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco s . O número $\|\alpha''(s)\|$ é a medida da taxa de variação do ângulo que a tangente em s faz com as tangentes vizinhas (ou seja, a velocidade com que as retas tangentes mudam de direção).*

Demonstração: Sabemos que $\alpha'(s)$ é um vetor unitário para cada s . Fixe $s_0 \in I$, então o ângulo, $\theta(h) \in [0, \pi]$ (para fixarmos ideias vamos assumir $\theta(h) > 0$ para h suficientemente pequeno), entre os valores $\alpha'(s_0)$ e $\alpha'(s_0 + h)$ é dado por

$$\cos(\theta(h)) = \|\alpha'(s_0)\| \|\alpha'(s_0 + h)\| \langle \alpha'(s_0), \alpha'(s_0 + h) \rangle = \langle \alpha'(s_0), \alpha'(s_0 + h) \rangle.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|\alpha'(s_0 + h) - \alpha'(s_0)\|^2 &= \langle \alpha'(s_0 + h) - \alpha'(s_0), \alpha'(s_0 + h) - \alpha'(s_0) \rangle \\ &= \langle \alpha'(s_0 + h), \alpha'(s_0 + h) \rangle - 2\langle \alpha'(s_0 + h), \alpha'(s_0) \rangle + \langle \alpha'(s_0), \alpha'(s_0) \rangle \\ &= 2 - 2\langle \alpha'(s_0 + h), \alpha'(s_0) \rangle \\ &= 2(1 - \cos(\theta(h))) \\ &= 4\sin^2\left(\frac{\theta(h)}{2}\right), \end{aligned}$$

então, $\|\alpha'(s_0 + h) - \alpha'(s_0)\| = 2 \sin\left(\frac{\theta(h)}{2}\right)$. Desta forma,

$$\|\alpha''(s_0)\| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\alpha'(s_0 + h) - \alpha'(s_0)\|}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\theta(h)}{h} \frac{2\sin\left(\frac{\theta(h)}{2}\right)}{\theta(h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\theta(h)}{h}.$$

e assim, $\|\alpha''(s)\|$ é a medida da taxa de variação do ângulo que a tangente em s faz com as tangentes vizinhas.

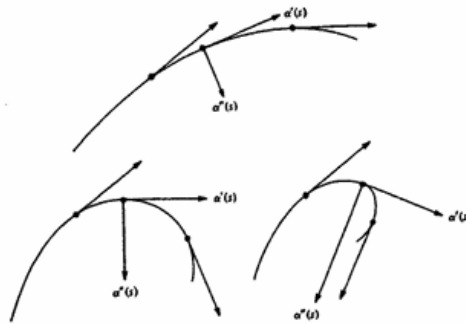
□

Dessa maneira, essa medida nos diz o quão rapidamente os pontos da curva se afastam da tangente em s , ou seja, quando maior essa medida, mais a curva é “curvada” localmente

em s . (A Figura 2.3 ilustra como a curvatura se comporta em um ponto da curva.) Tal ideia nos sugere apresentar a seguinte definição:

Definição 2.2.2. [2, p. 20] *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco $s \in I$. O número $\|\alpha''(s)\| = \kappa(s)$ chama-se **curvatura** de α em s .*

Figura 2.3: Vetores tangentes em diferentes curvas.



Fonte: Figura 1.14 de [2, p. 20].

Nos pontos onde $k(s) \neq 0$, considere o vetor unitário $n(s) = \frac{\alpha''(s)}{k(s)}$ paralelo a $\alpha''(s)$. Como $\alpha(s)$ está parametrizada pelo comprimento de arco com parâmetro s sabemos que $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1$, derivando essa equação, obtemos pelo Exemplo 1.2.22, $\langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle = 0$, isso implica que $\alpha'(s)$ e $\alpha''(s)$ são ortogonais, mas como $\alpha''(s)$ e $n(s)$ são paralelos, temos que $n(s)$ também é ortogonal a $\alpha'(s)$ (veja a Proposição 1.1.22, item 5) e é chamado de **vetor normal** em s (veja a Figura 2.4).

O plano determinado por $\alpha'(s)$ e $n(s)$ é chamado de **plano osculador** em s . Para o que se segue será necessária a existência do plano osculador para cada ponto da curva, e como para os pontos onde $k(s) = \|\alpha''(s)\| = 0$, o vetor normal, e consequentemente o plano osculador, não estão bem definidos, iremos considerar apenas as curvas α onde para todo $s \in I$, não existam pontos tais que $\alpha''(s) = 0$. Tais pontos são chamados de **pontos singulares de ordem 1**.

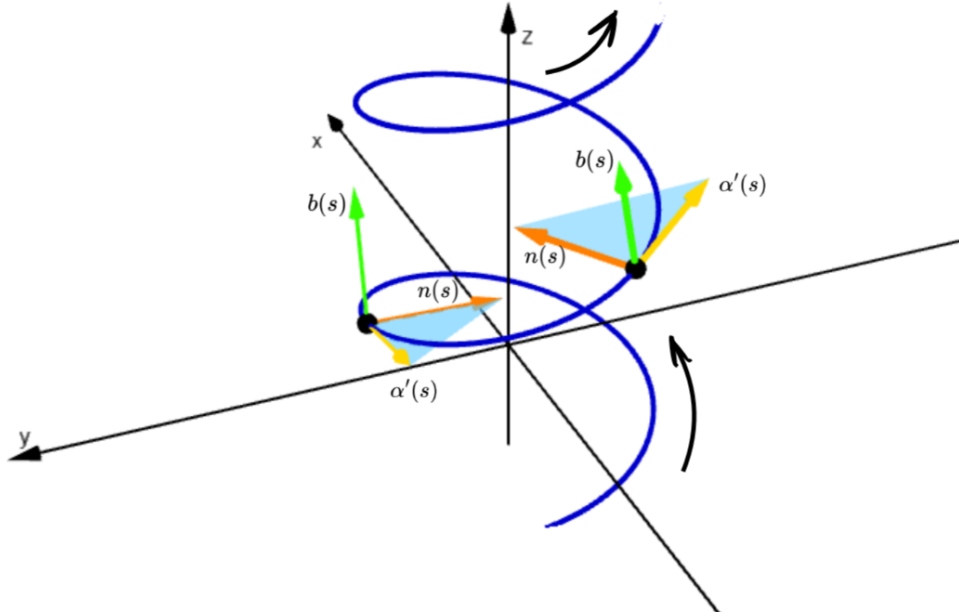
O vetor unitário $b(s) = \alpha'(s) \wedge n(s)$ é ortogonal ao plano osculador (veja a Observação 1.1.34) e será chamado de **vetor binormal** em s (representado na Figura 2.4).

Considere $s_0 \in I$ fixo, como $b(s)$ é unitário, por um argumento análogo ao que apresentamos na demonstração da Proposição 2.2.1, observamos que,

$$\|b'(s)\| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|b(s_0 + h) - b(s_0)\|}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\theta(h)}{h},$$

logo $\|b'(s)\|$ é a medida da taxa de variação do ângulo que o plano osculador em s faz com os planos osculadores vizinhos. Dessa maneira, essa medida nos diz o quão rapidamente os pontos da curva se afastam do plano osculador em s , ou seja, quando maior essa medida, mais a curva deixa de ser plana localmente em s .

Figura 2.4: Vetores velocidade, normal e binormal sobre a curva.



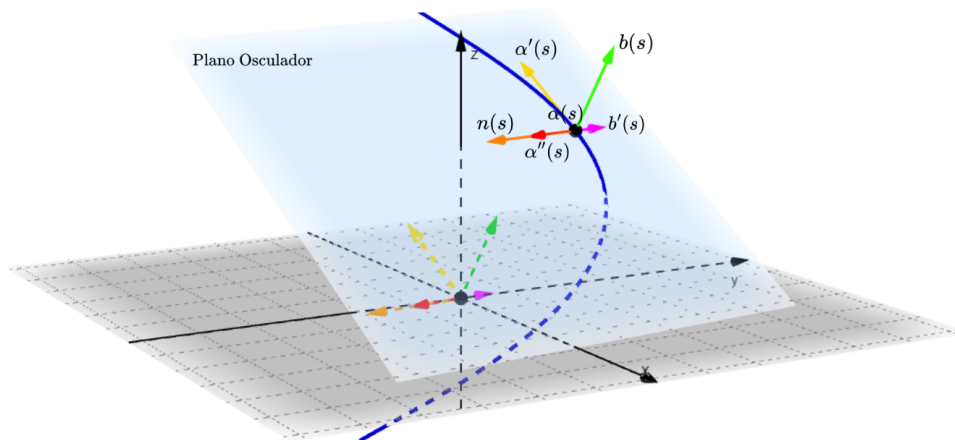
Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Para calcular $b'(s)$ note que, $b'(s)$ é normal a $b(s)$ (por um argumento análogo ao feito para $\alpha'(s)$ e $\alpha''(s)$), ou seja, $b'(s)$ está em algum lugar do plano osculador, e ainda

$$b'(s) = \alpha''(s) \wedge n(s) + \alpha'(s) \wedge n'(s) = \alpha'(s) \wedge n'(s). \quad (2.3)$$

Isto nos mostra que $b'(s)$ é normal a $\alpha'(s)$, logo, $b'(s)$ é paralelo a $n(s)$. Desta maneira, podemos escrever $b'(s)$ como um múltiplo de $n(s)$, o que nos sugere a apresentar a seguinte definição (veja a Figura 2.5).

Figura 2.5: Plano osculador e principais vetores sobre a curva em $\alpha(s)$.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026) e disponível em
<https://www.geogebra.org/m/ychdujqv>.

Observação 2.2.3. Note na Figura 2.5, os vetores com extremidades iniciais na origem. As suas extremidades finais correspondem aos valores que as principais funções vetoriais apresentadas assumem, e os vetores com extremidades iniciais em $\alpha(s)$ apenas cumprem uma representação visual e tratam-se de uma translação dos vetores na origem.

Definição 2.2.4. [2, p. 22] Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s tal que $\alpha''(s) \neq 0$, $s \in I$. O número $\tau(s)$ definido por

$$b'(s) = \tau(s)n(s)$$

é chamado **torção** de α em s .

Para cada valor do parâmetro s associamos três vetores ortogonais e unitários $\alpha'(s)$, $n(s)$ e $b(s)$, esse conjunto de vetores é chamado de **triedro de frenet** em s . Quando derivamos os vetores $\alpha'(s)$ e $b(s)$ e obtemos $\alpha''(s) = kn(s)$ e $b'(s) = \tau n(s)$, a expressão das derivadas fornecem entes geométricos (a curvatura e a torção) que informam sobre o comportamento da curva próximo de s . No objetivo de encontrar novas informações geométricas, podemos derivar o outro vetor do triedro de frenet. Sabendo que $b(s) = \alpha'(s) \wedge n(s)$ e tendo $\alpha'(s)$, $b(s)$ e $n(s)$ como ortogonais e unitários, temos $n(s) = b(s) \wedge \alpha'(s)$. Ao derivar $n(s)$, obtemos:

$$\begin{aligned} n'(s) &= (b(s) \wedge \alpha'(s))' = b'(s) \wedge \alpha'(s) + b(s) \wedge \alpha''(s) = \tau n(s) \wedge \alpha'(s) + b(s) \wedge kn(s) \\ &= -\tau(\alpha'(s) \wedge n(s)) - k(n(s) \wedge b(s)) \\ &= -\tau b(s) - k\alpha'(s). \end{aligned}$$

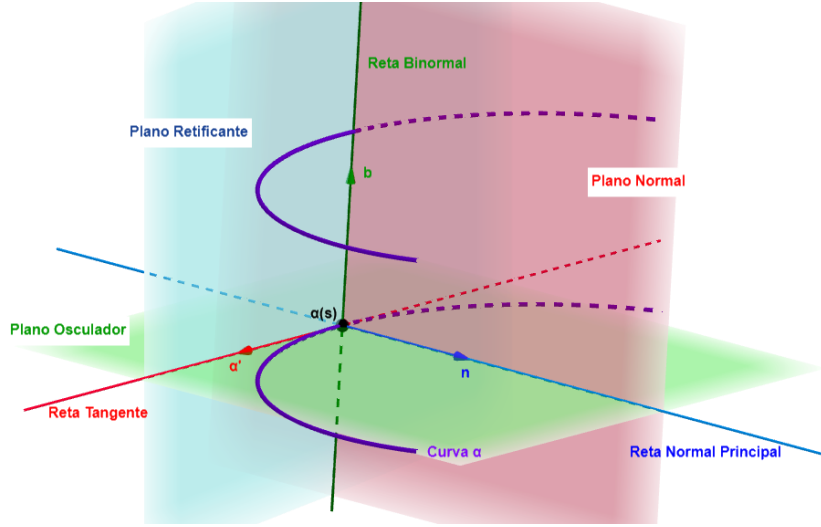
Assim, obtemos uma outra expressão com os entes geométricos já descobertos. As equações

$$\begin{aligned} \alpha''(s) &= kn(s), \\ n'(s) &= -\tau b(s) - k\alpha'(s), \\ b'(s) &= \tau n(s), \end{aligned}$$

são chamadas de **fórmulas de frenet**.

A seguir, faremos algumas denominações importantes sobre os principais planos e retas que passam por $\alpha(s)$. O plano contendo os vetores $\alpha'(s)$ e $b(s)$ é chamado de **plano retificante** e o que contém os vetores $n(s)$ e $b(s)$ é chamado de **plano normal**. As retas passando por $\alpha(s)$ e contendo os vetores $n(s)$ e $b(s)$ são chamadas de **reta normal principal** e **reta binormal**, respectivamente (veja a Figura 2.6). O inverso da curvatura $R = \frac{1}{k}$ é chamado de **raio de curvatura** em s .

Figura 2.6: Principais planos e retas que passam por $\alpha(s)$.



Fonte: Elaborada pela autor (2026) e disponível em
<https://www.geogebra.org/m/enan6rne>.

Exemplo 2.2.5. Vamos determinar a curvatura e a torção da curva parametrizada $\alpha(s) = \left(a \cos\left(\frac{s}{c}\right), a \sin\left(\frac{s}{c}\right), b\frac{s}{c}\right)$ (hélice), onde, $s \in \mathbb{R}$ e $c^2 = a^2 + b^2$.

Inicialmente, notemos que α está parametrizada pelo comprimento de arco s , pois,

$$\alpha'(s) = \left(-\frac{a}{c} \sin\left(\frac{s}{c}\right), \frac{a}{c} \cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{b}{c}\right),$$

logo, pela Equação 2.1,

$$\begin{aligned} \|\alpha'(s)\| &= \sqrt{\left(-\frac{a}{c} \sin\left(\frac{s}{c}\right)\right)^2 + \left(\frac{a}{c} \cos\left(\frac{s}{c}\right)\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{c^2} \left(\sin^2\left(\frac{s}{c}\right) + \cos^2\left(\frac{s}{c}\right)\right) + \frac{b^2}{c^2}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2}}. \end{aligned}$$

Como $c^2 = a^2 + b^2$, temos:

$$\|\alpha'(s)\| = \sqrt{\frac{c^2}{c^2}} = 1.$$

Dessa forma, s é o comprimento do arco. Vamos agora calcular a curvatura de α em um ponto $\alpha(s)$. Calculando a derivada de $\alpha'(s)$ e depois a sua norma, obtemos:

$$\alpha''(s) = \left(-\frac{a}{c^2} \cos\left(\frac{s}{c}\right), -\frac{a}{c^2} \sin\left(\frac{s}{c}\right), 0\right)$$

e

$$\begin{aligned}\|\alpha''(s)\| &= k(s) = \sqrt{\left(-\frac{a}{c^2} \cos\left(\frac{s}{c}\right)\right)^2 + \left(-\frac{a}{c^2} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{c}\right)\right)^2 + 0^2} = \frac{a}{c^2} \sqrt{\cos^2\left(\frac{s}{c}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{s}{c}\right)} \\ &= \frac{a}{c^2}.\end{aligned}$$

Para encontrar a torção de α , note que $\alpha''(s) = k(s)n(s) \implies n(s) = \frac{\alpha''(s)}{k(s)}$, logo,

$$n(s) = \frac{\left(-\frac{a}{c^2} \cos\left(\frac{s}{c}\right), -\frac{a}{c^2} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{c}\right), 0\right)}{\frac{a}{c^2}} = \left(-\cos\left(\frac{s}{c}\right), -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{c}\right), 0\right)$$

e assim

$$n'(s) = \left(\frac{1}{c} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{c}\right), -\frac{1}{c} \cos\left(\frac{s}{c}\right), 0\right).$$

Pela Equação 2.3, $b'(s) = \alpha'(s) \wedge n'(s)$, logo,

$$\begin{aligned}b'(s) &= \alpha'(s) \wedge n'(s) = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ -\frac{a}{c} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{c}\right) & \frac{a}{c} \cos\left(\frac{s}{c}\right) & \frac{b}{c} \\ \frac{1}{c} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{c}\right) & -\frac{1}{c} \cos\left(\frac{s}{c}\right) & 0 \end{vmatrix} = \frac{b}{c^2} \cos\left(\frac{s}{c}\right) \vec{\mathbf{i}} + \frac{b}{c^2} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{c}\right) \vec{\mathbf{j}} + 0\vec{\mathbf{k}} \\ &= \left(\frac{b}{c^2} \cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{b}{c^2} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{c}\right), 0\right).\end{aligned}$$

Por fim, pela Definição 2.2.4, $b'(s) = \tau(s)n(s)$, então,

$$\left(\frac{b}{c^2} \cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{b}{c^2} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{c}\right), 0\right) = \tau(s) \left(-\cos\left(\frac{s}{c}\right), -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{c}\right), 0\right).$$

Portanto,

$$\tau(s) = -\frac{b}{c^2}.$$

Capítulo 3

Superfícies Regulares

A grosso modo, uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$ é encontrada tomando-se pedaços do plano, deformando-os e colando-os entre si, de tal modo que a figura resultante não apresente pontas, arestas ou auto-interseções, com o objetivo de obter um plano tangente em cada ponto da figura. Nesta seção, apresentaremos alguns métodos que possibilitam caracterizar subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ como superfícies regulares.

3.1 Primeiras Definições e Exemplos

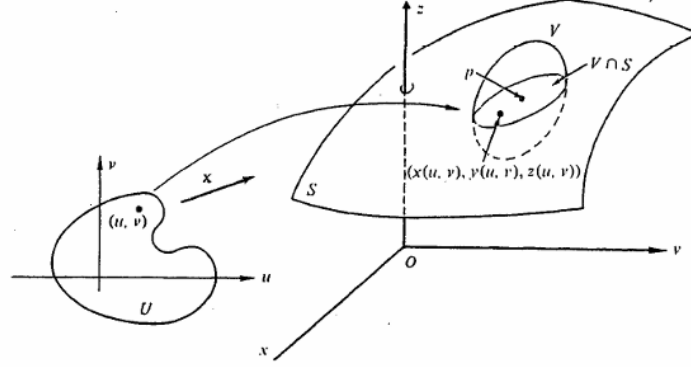
Definição 3.1.1. [2, p. 61] *Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma **superfície regular** se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$ de um aberto U de $\mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que (veja a Figura 3.1)*

1. $\mathbf{x}$ é diferenciável;
2. $\mathbf{x}$ é um homeomorfismo;
3. Para todo $q \in U$, a diferencial $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.

Em termos práticos, se escrevermos $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, com $(u, v) \in U$, $\mathbf{x}$ será diferenciável (condição 1) se as funções $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U (veja a Definição 1.2.25). Demonstrada a condição 1, temos que $\mathbf{x}$ é contínua. Para que $\mathbf{x}$ seja um homeomorfismo (condição 2), ela precisa ser bijetora para garantir a existência de uma aplicação inversa $\mathbf{x}^{-1} : V \cap S \rightarrow U$, e ainda, essa inversa terá de ser contínua. A condição 3 é chamada condição de regularidade, a seguir, apresentaremos uma maneira prática de verificar se a aplicação $\mathbf{x}$ a satisfaz.

A aplicação $\mathbf{x}$ é chamada de **parametrização** ou um sistema de coordenadas (locais) em (uma vizinhança de) p . A vizinhança $V \cap S$ de p em S é chamada de **vizinhança coordenada**.

Figura 3.1: Vizinhança coordenada $V \cap S$ da parametrização $\mathbf{x}$.



Fonte: Figura 2.1 de [2, p. 62].

Observação 3.1.2. *Seja $q = (u_0, v_0)$. O vetor $e_1 = (1, 0)$ é tangente à curva $\alpha(t) = (t + u_0, v_0)$ com $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ de modo que $\alpha(t) \subset U$ (note que este $\varepsilon > 0$ existe pois U é aberto) cuja imagem por $\mathbf{x}$ é a curva*

$$\mathbf{x}(\alpha(t)) = (x(u + u_0, v_0), y(u + u_0, v_0), z(u + u_0, v_0)).$$

Desta forma, pela Definição 1.2.28 temos

$$d\mathbf{x}_q(e_1) = \left. \frac{d\mathbf{x}(\alpha(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right).$$

Daí, com o intuito de facilitar a verificação da condição 3, iremos calcular a matriz da aplicação linear $d\mathbf{x}_q$ nas bases canônicas $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ de $\mathbb{R}^2$ com coordenadas (u, v) e $f_1 = (1, 0, 0)$, $f_2 = (0, 1, 0)$ e $f_3 = (0, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ com coordenadas (x, y, z) . Reescrevendo a Observação 3.1.2 com o parâmetro u , note que o vetor e_1 é tangente à curva $u \mapsto (u, v_0)$ (veja a Figura 3.2) cuja imagem por $\mathbf{x}$ é a curva

$$u \mapsto (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)).$$

Esta última curva (chamada **curva coordenada** $v = v_0$) está em S , tem em $\mathbf{x}(q)$ o vetor tangente

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u},$$

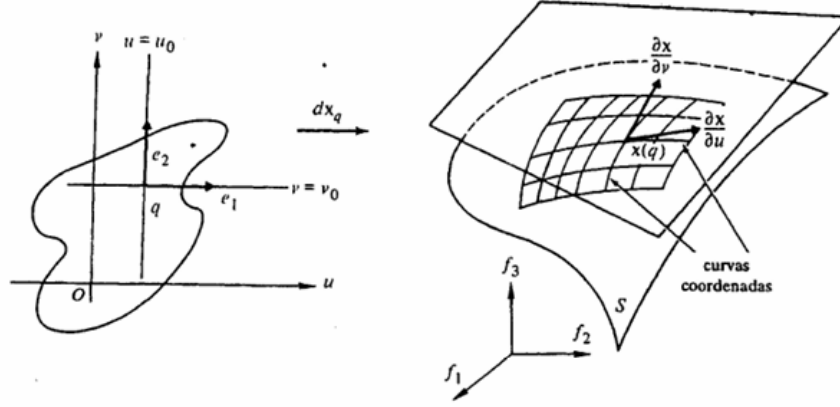
e um vetor é indicado pelas suas componentes na base $\{f_1, f_2, f_3\}$. Pela Observação 3.1.2

$$d\mathbf{x}_q(e_1) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}.$$

Analogamente, usando a curva coordenada $u = u_0$ (imagem por $\mathbf{x}$ da curva $v \mapsto (u_0, v)$), obtemos

$$d\mathbf{x}_q(e_2) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}.$$

Figura 3.2: Construção das curvas coordenadas $v = v_0$ e $u = u_0$.



Fonte: Figura 2.2 de [2, p. 63].

Portanto, a matriz da aplicação linear $d\mathbf{x}_q$ nas bases consideradas é,

$$[d\mathbf{x}_q] = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Observação 3.1.3. Dessa forma, verificar a condição 3, pelo Teorema 1.1.17 basta verificarmos que $\ker(d\mathbf{x}_q) = \{0\}$. Assim, seja $v = ae_1 + be_2$ tal que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

neste caso teremos que $a \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} + b \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = 0$, implicando em $a = b = 0$. Ou seja, $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$ e $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$ são L.I, então,

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \neq 0;$$

Ou ainda,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \neq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \neq 0.$$

As três condições da definição se tornam essenciais para o desenvolvimento da Geometria Diferencial sobre as superfícies. A condição 1 garante a aplicabilidade dos métodos do cálculo diferencial. Na condição 2, por meio da injetividade, garantimos que a superfície S não possua auto-interseções para que seja possível obter um único plano tangente em

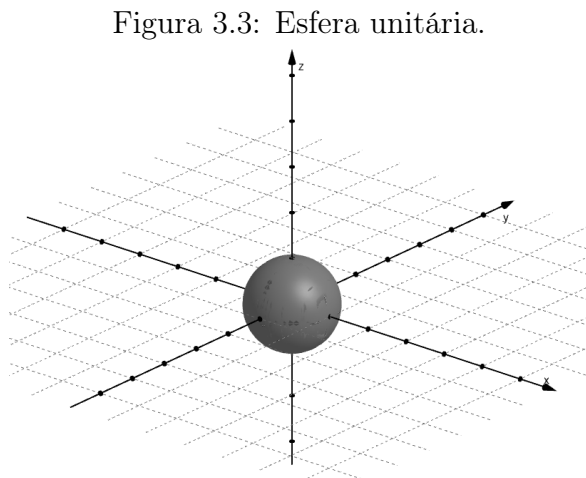
cada ponto de S . E por fim, a condição 3 garante a existência desse plano tangente para cada ponto de S .

Exemplo 3.1.4. A esfera unitária $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ é uma superfície regular pois satisfaz as 3 três condições da definição.

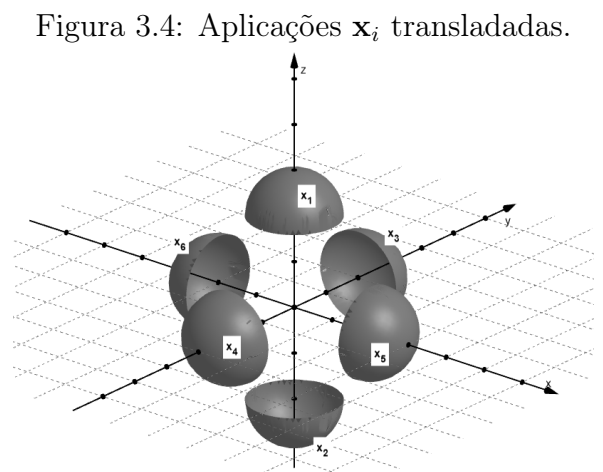
Para cobrir toda a esfera usaremos as aplicações $\mathbf{x}_i : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ onde $(u, v) \in U$, $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq 6$ e $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1(x, y) &= (x, y, +\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}), \\ \mathbf{x}_2(x, y) &= (x, y, -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}), \\ \mathbf{x}_3(x, z) &= (x, +\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z), \\ \mathbf{x}_4(x, z) &= (x, -\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z), \\ \mathbf{x}_5(y, z) &= (+\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z), \\ \mathbf{x}_6(y, z) &= (-\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z).\end{aligned}$$

Note que tais aplicações parametrizam a esfera, e ainda, $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ cobrem a esfera menos o equador, $\mathbf{x}_3$ e $\mathbf{x}_4$ cobrem os pontos do equador $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ menos os pontos $(-1, 0, 0)$ e $(1, 0, 0)$, e por fim, $\mathbf{x}_5$ e $\mathbf{x}_6$ cobrem esses últimos dois pontos (“cobrir” significa que para cada ponto $\mathbf{x}_i(u_0, v_0)$ existe uma vizinhança próxima desse ponto que contenha apenas pontos de $\mathbf{x}_i$), logo, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 \cup \mathbf{x}_2 \cup \mathbf{x}_3 \cup \mathbf{x}_4 \cup \mathbf{x}_5 \cup \mathbf{x}_6$ cobre a esfera inteira (veja as Figuras 3.3 e 3.4).



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).



Fonte: Elaborada pelo autor (2026) e disponível em <https://www.geogebra.org/m/fxm2dy44>.

Condição 1: como $u^2 + v^2 < 1$, a função $\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}$ tem derivadas contínuas de

todas as ordens, logo $\mathbf{x}_i$ é diferenciável.

Condição 2: como $\mathbf{x}_i$ é bijetiva e $\mathbf{x}_i^{-1}$ é a restrição da projeção (contínua) $\pi(x, y, z) = (u, v)$ ao conjunto $\mathbf{x}_i(U)$, desse modo, $\mathbf{x}_i^{-1}$ é contínua em $\mathbf{x}_i(U)$

Condição 3: Vemos que

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(u, v)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial v} \\ \frac{\partial v}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv 1 \neq 0.$$

Portanto S^2 é regular.

Verificar se uma superfície é regular por meio da definição pode se tornar trabalhoso. A proposição seguinte mostra uma maneira de identificar se uma superfície é regular por meio da relação entre a definição e o gráfico de uma função do tipo $z = f(x, y)$, mais especificamente que, o gráfico de uma função diferenciável é uma superfície regular.

Proposição 3.1.5. [2, p. 68] *Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em um conjunto aberto U de $\mathbb{R}^2$, então o gráfico de f , isto é, o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado por $(x, y, f(x, y))$ para $(x, y) \in U$, é uma superfície regular.*

Demonstração: [2, p. 68] Considere $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$. Seja $p \in S$ e tome a vizinhança $V = \mathbb{R}^3$ e a aplicação $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ dada por $\mathbf{x}(x, y) = (x, y, f(x, y))$. Note que as condições 1 e 2 da Definição 3.1.1 são satisfeitas, uma vez que $f(x, y)$ é diferenciável para qualquer $(x, y) \in U$ e $\mathbf{x}^{-1} : S \rightarrow U$, $\mathbf{x}^{-1}(x, y, z) = (x, y)$ é contínua. Por fim, pela Observação 3.1.3, basta notarmos que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv 1 \neq 0.$$

□

Exemplo 3.1.6. *Pela proposição acima, a aplicação*

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}\right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

onde a e b são constantes não-nulas, é uma superfície parametrizada regular, pois a função $f(u, v) = \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}$ é diferenciável, cujo traço é o parabolóide hiperbólico

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right\}.$$

A seguinte proposição possibilita identificar se uma superfície é regular por meio da relação entre a definição e subconjuntos do tipo $f(x, y, z) = c$ (constante).

Proposição 3.1.7. [2, p. 69] *Se $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $a \in f(U)$ é um valor regular de f , então $f^{-1}(\{a\})$ é uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$.*

Demonstração: A demonstração é uma consequência do Teorema da Função Inversa (Teorema 1.2.35) e da Proposição 3.1.5, para mais detalhes veja a demonstração em [2, p. 70].

Exemplo 3.1.8. *O elipsóide*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

é uma superfície regular. Temos que

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

é uma função diferenciável, e pela expressão acima, o elipsóide é descrito como $f^{-1}(0)$. Sabemos que 0 é um valor regular de f , pois suas derivadas parciais

$$f_x = \frac{2x}{a^2}, \quad f_y = \frac{2y}{b^2}, \quad f_z = \frac{2z}{c^2}$$

se anulam simultaneamente apenas no ponto $(0, 0, 0)$, que não pertence a imagem inversa $f^{-1}(0)$ (conforme a Observação 1.2.34). Portanto 0 é um valor regular e $f^{-1}(0)$ (o elipsóide) é uma superfície regular pela Proposição 3.1.7.

A proposição seguinte é uma recíproca local da Proposição 3.1.5, ou seja, afirma que qualquer superfície regular é localmente o gráfico de uma função diferenciável.

Proposição 3.1.9. [2, p. 73] *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in S$. Então existe uma vizinhança V de p em S tal que V é o gráfico de uma função diferenciável que tem uma das seguintes formas:*

$$z = f(x, y), \quad y = g(x, z), \quad x = h(y, z).$$

Demonstração: Veja a demonstração da Proposição 3 de [2, p. 73].

Exemplo 3.1.10. *O cone de uma folha C dado pela função*

$$z = +\sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

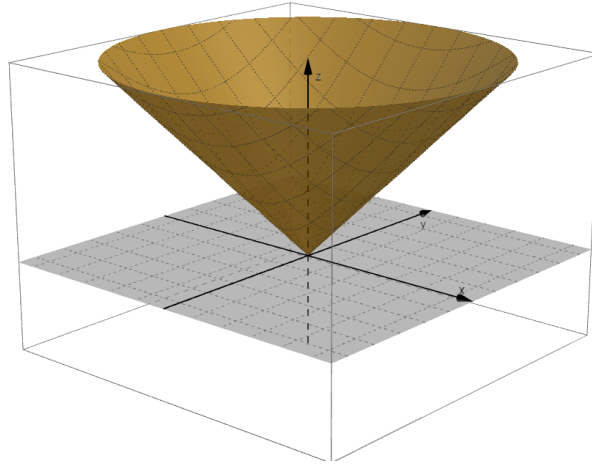
não é uma superfície regular (veja a Figura 3.5). O fato de alguma parametrização não ser diferenciável, como

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, +\sqrt{u^2 + v^2}), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

tal que a função componente $z = \sqrt{u^2 + v^2}$ não é diferenciável em $p = (0, 0)$, não garante que a superfície não é regular, pois, para alguma outra parametrização ela ainda poderia satisfazer a Definição 3.1.1. Fixado o ponto $p = (0, 0, 0) \in C$, segundo a Proposição 3.1.9,

se C fosse uma superfície regular, ela seria em alguma vizinhança de p , o gráfico de uma função diferenciável tendo a forma $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$ ou $x = h(y, z)$. Contudo, se C tivesse a forma das funções x ou y , elas não seriam injetivas. Por fim, a forma da função z em uma vizinhança do ponto $(0, 0, 0)$, coincidiria com a função dada na definição de C , e vimos que ela não é diferenciável em $(0, 0)$, o que garante formalmente que C não é uma superfície regular.

Figura 3.5: Cone de uma folha $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Fonte: Elaborada pela autor (2026).

A seguinte proposição enuncia que ao verificar as 3 condições da definição de superfície regular, não precisamos mostrar que $\mathbf{x}^{-1}$ é contínua.

Proposição 3.1.11. [2, p. 74] *Seja $p \in S$ um ponto de uma superfície regular S e seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação com $p \in \mathbf{x}(U)$ tal que as condições 1 e 3 da Definição 1 sejam satisfeitas. Suponha que $\mathbf{x}$ seja bijetiva. Então $\mathbf{x}^{-1}$ é contínua.*

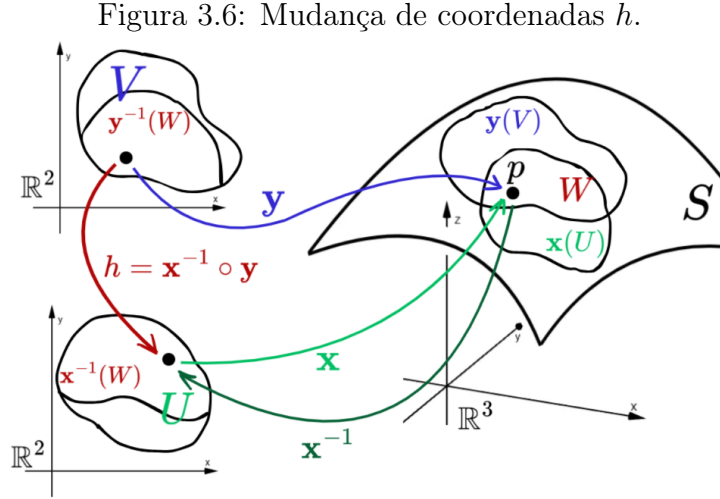
Demonstração: Veja a demonstração da Proposição 4 de [2, p. 74].

3.2 Mudança de Parâmetros

Como cada ponto p de uma superfície regular pertence a uma vizinhança coordenada e tais pontos são caracterizados pelas suas coordenadas, poderíamos definir as propriedades locais que dependam do comportamento de uma vizinhança da superfície nesse ponto através dessas coordenadas. No entanto, um ponto de uma superfície pode pertencer a várias vizinhanças coordenadas (como vimos no Exemplo 3.1.4) ou então pode ser parametrizada com outras aplicações.

Será importante que algumas construções não dependam da parametrização escolhida, dessa forma, a existência de uma função diferenciável que mude do parâmetro (u, v) para o parâmetro (ξ, η) de uma vizinhança coordenada de p , será de grande eficiência.

Proposição 3.2.1. [2, p. 82] *Seja p um ponto de uma superfície regular S , e sejam $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ e $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ duas parametrizações de S , tais que $p \in \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V) = W$ (veja a Figura 3.6). Então a “mudança” de coordenadas $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : \mathbf{y}^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(W)$ é um difeomorfismo, isto é, h é diferenciável e tem uma inversa diferenciável h^{-1} .*



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Demonstração: Veja a demonstração da Proposição 1 de [2, p. 82].

Em outras palavras, se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são dadas por

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U,$$

$$\mathbf{y}(\xi, \eta) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta)), \quad (\xi, \eta) \in V,$$

então a mudança de coordenadas h , dada por

$$u = u(\xi, \eta), \quad v = v(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \mathbf{y}^{-1}(W),$$

é tal que as funções u e v têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Além disso, a aplicação h é invertível já que h é difeomorfismo, fornecendo as funções

$$\xi = \xi(u, v), \quad \eta = \eta(u, v), \quad (u, v) \in \mathbf{x}^{-1}(W),$$

que também possuem derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Como h e h^{-1} são aplicações inversas,

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)} \cdot \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(u, v)} = 1,$$

isto implica que os determinantes Jacobianos, tanto de h como de h^{-1} , são diferentes de

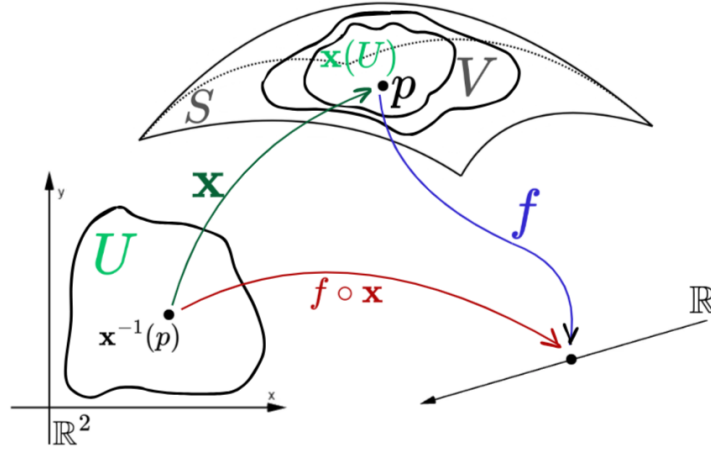
zero em todos os pontos.

3.3 Funções Diferenciáveis sobre Superfícies

A definição seguinte mostra como definimos uma função diferenciável sobre uma superfície regular.

Definição 3.3.1. [2, p. 84] *Seja $f : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, definida em um subconjunto aberto V de uma superfície regular S . Então f é diferenciável em $p \in V$ se, para alguma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, com $p \in \mathbf{x}(U) \subset V$, a composição $f \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $\mathbf{x}^{-1}(p)$. A função f é diferenciável em V se é diferenciável em todos os pontos de V (veja a Figura 3.7).*

Figura 3.7: Função f definida sobre a superfície S .



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

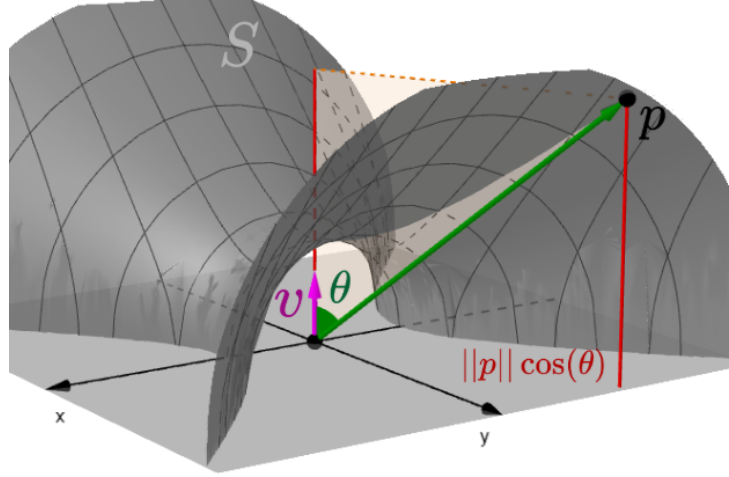
Exemplo 3.3.2. *Seja S uma superfície regular e $V \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto tal que $S \subset V$. Seja $f : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então a restrição de f a S é uma função diferenciável sobre S . De fato, para qualquer $p \in S$ e qualquer parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ em p , a função $f \circ \mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável.*

Exemplo 3.3.3. *A função altura relativa a um vetor unitário qualquer $v \in \mathbb{R}^3$, $h : S \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $h(p) = p \cdot v$, $p \in S$, onde o ponto denota o produto interno usual em $\mathbb{R}^3$, é uma função diferenciável e é um exemplo de restrição de f a S . $h(p)$ é a altura de $p \in S$ relativa a um plano normal a v e passando pela origem de $\mathbb{R}^3$ (veja a Figura 3.8). Como v é unitário, então*

$$h(p) = p \cdot v = \|p\| \|v\| \cos(\theta) = \|p\| \cos(\theta),$$

ou seja, $h(p)$ é a projeção do vetor p sobre a reta que contém a origem e o vetor v , representando de fato a altura do ponto p ao plano normal a v .

Figura 3.8: Função altura $h(p)$.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Com a definição dada acima de uma função diferenciável que leva um ponto da superfície na reta, podemos estender essa definição ao imaginar que no lugar da reta, seja outra superfície. Ou seja, definiremos uma função diferenciável que leva um ponto da superfície em outra superfície.

Definição 3.3.4. [2, p. 86] *Uma aplicação contínua $\varphi : V_1 \subset S_1 \rightarrow S_2$, de um conjunto aberto V_1 de uma superfície regular S_1 em uma superfície regular S_2 , é diferenciável em $p \in V_1$ se, dadas parametrizações*

$$\mathbf{x}_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1, \quad \mathbf{x}_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2,$$

com $p \in \mathbf{x}_1(U_1)$ e $\varphi(\mathbf{x}_1(U_1)) \subset \mathbf{x}_2(U_2)$, a aplicação

$$\mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1 : U_1 \rightarrow U_2$$

é diferenciável em $q = \mathbf{x}_1^{-1}(p)$ (veja a Figura 3.9).

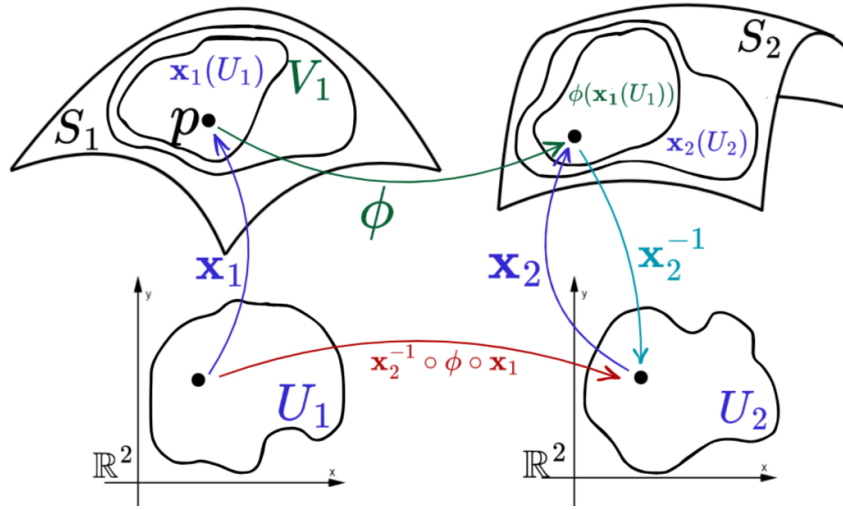
Definição 3.3.5. [2, p. 87] *Duas superfícies regulares S_1 e S_2 são **difeomorfas** se existe uma aplicação diferenciável $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ com uma inversa diferenciável $\varphi^{-1} : S_2 \rightarrow S_1$. Uma tal φ é chamada um **difeomorfismo** de S_1 em S_2 .*

O difeomorfismo é uma noção natural de equivalência associada a diferenciabilidade, logo, desse ponto de vista, duas superfícies difeomorfas são indistinguíveis.

Exemplo 3.3.6. *Se $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ é uma parametrização, então $\mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \rightarrow \mathbb{R}^2$ é diferenciável. Pois para qualquer $p \in \mathbf{x}(U)$ e qualquer parametrização $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ em p , temos que $\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : \mathbf{y}^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(W)$, onde*

$$W = \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V),$$

Figura 3.9: Aplicação diferenciável entre superfícies.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

é diferenciável pela Proposição 3.6. Como $\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y}$ é diferenciável, logo, $\mathbf{x}^{-1}$ e $\mathbf{y}$ são diferenciáveis.

Observação 3.3.7. O Exemplo 3.3.6 mostra que se $\mathbf{x}$ é uma parametrização para uma superfície, então $\mathbf{x}$ é um difeomorfismo. O que implica no fato de U e $\mathbf{x}(U)$ serem difeomorfos, ou seja, toda superfície regular é localmente difeomorfa a um plano. Logo, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em S , um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, e uma aplicação $\mathbf{x} : U \rightarrow V$, que é um difeomorfismo.

Exemplo 3.3.8. Sejam S_1 e S_2 superfícies regulares. Suponha que $S_1 \subset V \subset \mathbb{R}^3$, onde V é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^3$, e que $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ seja uma função diferenciável tal que $\varphi(S_1) \subset S_2$. Então a restrição $\varphi|_{S_1} : S_1 \rightarrow S_2$ é uma aplicação diferenciável. De fato, dado $p \in S_1$ e parametrizações $\mathbf{x}_1 : U_1 \rightarrow S_1$, $\mathbf{x}_2 : U_2 \rightarrow S_2$, com $p \in \mathbf{x}_1(U_1)$ e $\varphi(\mathbf{x}_1(U_1)) \subset \mathbf{x}_2(U_2)$, temos que a aplicação

$$\mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1 : U_1 \rightarrow U_2$$

é diferenciável.

Exemplo 3.3.9. Seja $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(x, y, z) = (xa, yb, zc)$, onde a, b e c são números reais diferentes de zero. Como φ é diferenciável, temos que a restrição $\varphi|_{S^2}$ é uma aplicação diferenciável da esfera

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

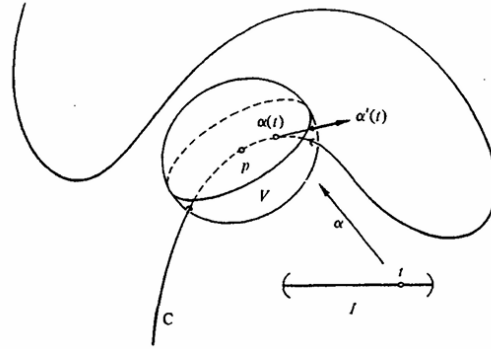
sobre o elipsóide

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

Neste momento, podemos caracterizar as curvas como sendo não mais aplicações diferenciáveis, mas subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ assim como as superfícies.

Definição 3.3.10. [2, p. 88] *Seja I um intervalo aberto. Uma **curva regular** em $\mathbb{R}^3$ é um subconjunto $C \subset \mathbb{R}^3$, tal que, para cada ponto $p \in C$, existe uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e um homeomorfismo diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow V \cap C$ tal que a diferencial $d\alpha_t$ é injetiva para cada $t \in I$ (veja a Figura 3.10).*

Figura 3.10: Construção de uma curva regular.



Fonte: Figura 2.17 de [2, p. 89].

Uma maneira alternativa de definir as superfícies será utilizando a ideia de superfície parametrizada, no entanto, essa definição permite considerar sobre as superfícies apenas propriedades locais, pois as propriedades globais nessa definição poderiam ser tratadas de forma inadequada.

Definição 3.3.11. [2, p. 92] *Uma **superfície parametrizada** $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável $\mathbf{x}$ de um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$. O conjunto $\mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^3$ é chamado o traço de $\mathbf{x}$. $\mathbf{x}$ é regular se a diferencial $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva para todo $q \in U$ (ou seja, os vetores $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$ são linearmente independentes para todo $q \in U$). Um ponto $p \in U$ onde $d\mathbf{x}_p$ não é injetiva é chamado um ponto singular de $\mathbf{x}$.*

Exemplo 3.3.12. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada regular. Defina*

$$\mathbf{x}(t, v) = \alpha(t) + v\alpha'(t), \quad (t, v) \in I \times \mathbb{R}.$$

$\mathbf{x}$ é uma superfície parametrizada chamada **superfície tangente** de α (veja a Figura 3.11). Suponha agora que a curvatura $k(t), t \in I$, de α não se anula para todo $t \in I$, e restrinja o domínio de $\mathbf{x}$ a $U = \{(t, v) \in I \times \mathbb{R}; v \neq 0\}$. Então

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \alpha'(t) + v\alpha''(t), \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \alpha'(t),$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} &= (\alpha'(t) + v\alpha''(t)) \wedge \alpha'(t) \\
&= \alpha'(t) \wedge \alpha'(t) + v\alpha''(t) \wedge \alpha'(t) \\
&= v\alpha''(t) \wedge \alpha'(t) \neq 0, \quad (t, v) \in U,
\end{aligned}$$

pois, para todo t e com $v \neq 0$,

$$\begin{aligned}
k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} \neq 0 &\implies \|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| \neq 0 \implies \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) \neq 0 \\
&\implies -v\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) \neq 0,
\end{aligned}$$

portanto, $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}$ e $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$ são linearmente dependentes. Segue que a restrição $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície parametrizada regular, cujo traço consiste em duas componentes conexas, tendo como fronteira comum o conjunto $\alpha(I)$.

Figura 3.11: Superfície tangente.



Fonte: Figura 2.19 de [2, p. 93].

A seguinte proposição mostra que é possível estender os conceitos e propriedades locais para as superfícies parametrizadas regulares.

Proposição 3.3.13. [2, p.93] *Seja $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular parametrizada e seja $q \in U$. Então existe uma vizinhança V de q em $\mathbb{R}^2$ tal que $\mathbf{x}(V) \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular.*

Demonstração: Veja a demonstração da Proposição 2 de [2, p. 93].

3.4 Plano Tangente

Vimos que a condição 3 da definição de superfície regular garante a existência de um plano tangente para cada $p \in S$. A seguir, veremos que esse plano tangente é um conjunto de vetores tangentes às curvas parametrizadas de S passando por p .

Definição 3.4.1. [2, p. 98] *Diremos que o **vetor tangente** a S , em um ponto $p \in S$, é o vetor tangente $\alpha'(0)$ de uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, com $\alpha(0) = p$ (veja a Figura 3.13).*

Proposição 3.4.2. [2, p. 98] *Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de uma superfície regular S e seja $q \in U$. O subespaço vetorial de dimensão 2,*

$$d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3,$$

coincide com o conjunto de vetores tangentes a S em $\mathbf{x}(q)$.

Demonstração: Seja $W_p = \{\alpha'(0) \mid \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S, \text{ diferenciável}, \alpha(0) = p\}$ (o conjunto dos vetores tangentes a S em $\mathbf{x}(q) = p$). Vamos mostrar que $d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2) = W_p$. De fato, seja $w \in d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$, então $w = d\mathbf{x}_q(v)$ para algum $v \in \mathbb{R}^2$. Pela Definição 1.2.28, tome $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ com $\beta(t) = q + vt$ e daí temos que $w = \frac{d\mathbf{x}(\beta(t))}{dt} \Big|_{t=0}$. Note que $\alpha(t) := \mathbf{x}(\beta(t)) \in S$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\mathbf{x}(\beta(0)) = \mathbf{x}(q) = p$ e $\alpha'(0) = w$. Logo, $w \in W_p$. Agora seja $w \in W_p$, então existe $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$. Considere a curva $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ diferenciável dada por $\beta(t) := \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(t)$ e daí, $\beta(0) = q$ e $v = \frac{d\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(t)}{dt} \Big|_{t=0}$. Assim,

$$d\mathbf{x}_q(v) = \frac{d\mathbf{x}(\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(t))}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d\alpha}{dt} \Big|_{t=0} = \alpha'(0) = w.$$

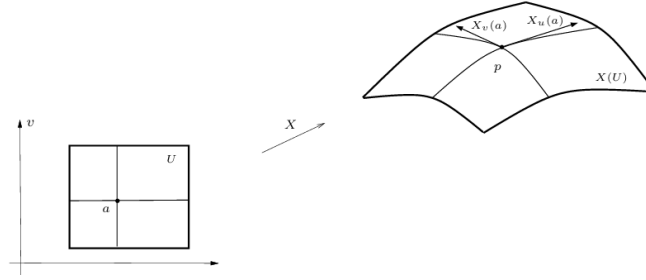
Portanto, $w \in d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$. Agora, como $d\mathbf{x}_q$ é injetiva garante que $d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$ é um subespaço bidimensional. $\square$

Observação 3.4.3. *O plano $d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$, que passa por $\mathbf{x}(q) = p$, não depende da parametrização $\mathbf{x}$. Note que a demonstração apresentada anteriormente pode ser replicada para qualquer outra parametrização enquanto que W_p mantém-se o mesmo.*

O plano $d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$ será chamado de **plano tangente** a S em p , e será denotado por $T_p S$. A escolha de uma parametrização $\mathbf{x}$ determina uma base $\left\{ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(q), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(q) \right\}$ de $T_p S$, chamada **base associada** a $\mathbf{x}$. Chamaremos $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \mathbf{x}_u$ e $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \mathbf{x}_v$ (veja a Figura 3.12).

Observação 3.4.4. *As coordenadas de um vetor $w \in T_p S$ na base associada a uma parametrização $\mathbf{x}$ são determinadas do seguinte modo: w é por definição o vetor velocidade $\alpha'(0)$ de uma curva $\alpha = \mathbf{x} \circ \beta$ diferenciável, onde $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ é dada por $\beta(t) =$*

Figura 3.12: Base associada a $\mathbf{x}$ do plano tangente $T_p(S)$.



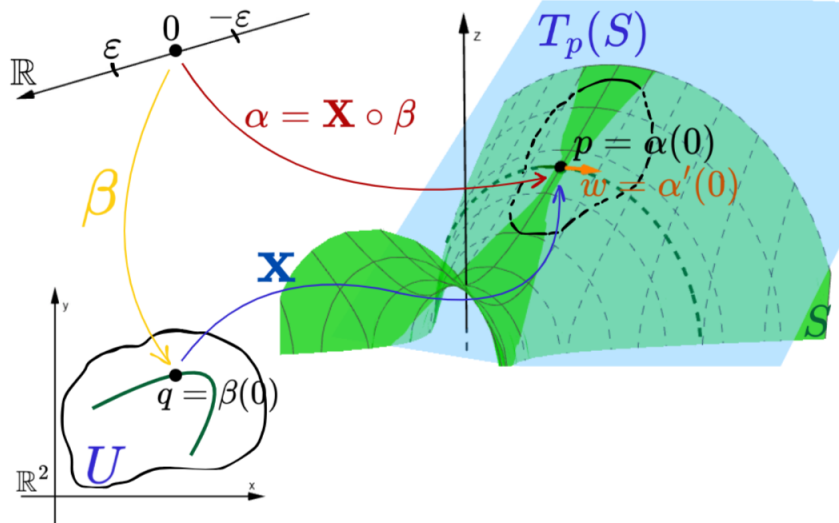
Fonte: Figura 2.12 de [6, p. 47].

$(u(t), v(t))$, com $\beta(0) = q = \mathbf{x}^{-1}(p)$ (veja a Figura 3.13). Então, pela regra da cadeia (veja Proposição 1.2.31)

$$\alpha'(0) = \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \circ \beta)(0) = \frac{d}{dt}(\mathbf{x}(u(t), v(t)))(0) = \mathbf{x}_u(q)u'(0) + \mathbf{x}_v(q)v'(0) = w.$$

Assim, na base $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$, w tem coordenadas $(u'(0), v'(0))$, onde $(u(t), v(t))$ é a expressão, na parametrização $\mathbf{x}$, de uma curva cujo vetor velocidade em $t = 0$ é w .

Figura 3.13: Construção que determina as coordenadas do vetor $w \in T_p(S)$.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Observação 3.4.5. Apesar da Figura 3.13 representar $T_p S$ como de fato um plano que tangência a superfície em p , observamos que pela Proposição 3.4.2 este conjunto é um subespaço vetorial e, portanto, deve ser um plano que contém a origem. Neste sentido, o plano representado é uma translação deste subespaço (mais conhecido como *variedade afim*).

Exemplo 3.4.6. Seja $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Suponha que 0 seja um valor regular de F , então pela Proposição 3.1.7 o conjunto $S = F^{-1}(\{0\})$ é uma superfície

regular. Agora, vamos calcular o $T_p S$ em que $p = (x_0, y_0, z_0) \in S$. Seja $v \in T_p S$, então tome $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Assim, temos $F(\alpha(t)) = 0$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$,

$$\begin{aligned} 0 = \frac{dF(\alpha(t))}{dt} \Big|_{t=0} &= F_x(\alpha(0))x'(0) + F_y(\alpha(0))y'(0) + F_z(\alpha(0))z'(0) \\ &= F_x(p)x'(0) + F_y(p)y'(0) + F_z(p)z'(0). \end{aligned}$$

Então o vetor $(F_x(p), F_y(p), F_z(p))$ é perpendicular a v . Daí, considere $Q = (x, y, z) \in \Pi$ onde Π é um plano tangente à superfície em P , assim $\vec{PQ} \in T_p S$, desta forma pela identidade que acabamos de verificar

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Exemplo 3.4.7. Considere a esfera

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

A aplicação $F : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ é diferenciável, e ainda, 0 é um valor regular de S^2 , pois $dF_x = 2x, dF_y = 2y, dF_z = 2z$ só se anulam simultaneamente no ponto $(0, 0, 0)$, que não pertence a imagem inversa $F^{-1}(0) = S^2$. Dessa forma, S^2 é uma superfície regular. Pelo Exemplo 3.4.6, a expressão do plano tangente $T_p S^2$ a S^2 no ponto $p = (x_0, y_0, z_0)$ é

$$2x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + 2y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + 2z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Munidos da noção de plano tangente, podemos falar na diferencial de uma aplicação (diferencial) entre superfícies.

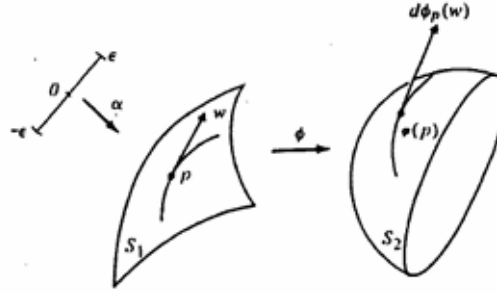
Sejam S_1 e S_2 duas superfícies regulares e seja $\varphi : V \subset S_1 \rightarrow S_2$ uma aplicação diferenciável de um conjunto aberto V de S_1 em S_2 . Se $p \in V$, sabemos que todo vetor tangente $w \in T_p S_1$ é o vetor velocidade $\alpha'(0)$ de uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V$ com $\alpha(0) = p$. A curva $\beta = \varphi \circ \alpha$ é tal que $\beta(0) = \varphi(p)$, e portanto $\beta'(0)$ é um vetor de $T_{\varphi(p)} S_2$ (veja a Figura 3.14).

Proposição 3.4.8. [2, p. 100] Dado w , o vetor $\beta'(0)$ não depende da escolha de β . A aplicação $d\varphi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} S_2$ definida por $d\varphi_p(w) = \beta'(0)$ é linear.

Demonstração: Veja a demonstração da Proposição 2 de [2, p. 100].

A aplicação linear $d\varphi_p$ definida pela Proposição 3.4.8 é chamada de **diferencial** de φ em $p \in S_1$. De modo análogo, definimos a diferencial de uma função (diferenciável) $f : U \subset S \rightarrow \mathbb{R}$ em $p \in U$ como a aplicação linear $df_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$.

Figura 3.14: Construção da diferencial $d\varphi_p(w)$.



Fonte: Figura 2.24 de [2, p. 100].

Exemplo 3.4.9. Considere a aplicação $\varphi : S^2 \rightarrow S^2$ dada por $\varphi(x, y, z) = (-x, -y, -z)$. Seja $p \in S^2$, vamos calcular $d\varphi_p$. Seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S^2$ com $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tal que $\alpha(0), \alpha'(0) = v \in T_p S^2$. Assim, $\beta(t) = \varphi(\alpha(t)) = (-x(t), -y(t), -z(t))$, então $\beta'(t) = (-x'(t), -y'(t), -z'(t)) = -\alpha'(t)$. Portanto, $d\varphi_p(v) = -v$.

Os resultados obtidos até agora nos mostram que as superfícies são ambientes apropriados para o desenvolvimento do cálculo diferencial. De fato, o que fizemos foi estender noções do cálculo diferencial em $\mathbb{R}^2$ para as superfícies, isso se deve ao fato do cálculo ser uma teoria local, e como vimos, o plano e uma superfície parametrizada são difeomorfos, implicando que localmente eles se comportam como o mesmo ambiente. Poderíamos então conjecturar que outras noções do cálculo podem ser estendidas as superfícies.

Definição 3.4.10. Diremos que uma aplicação $\varphi : U \subset S_1 \rightarrow S_2$ é um **difeomorfismo local** em $p \in U$ se existe uma vizinhança $V \subset U$ de p tal que φ restrita a V seja um difeomorfismo sobre um conjunto aberto $\varphi(V) \subset S_2$.

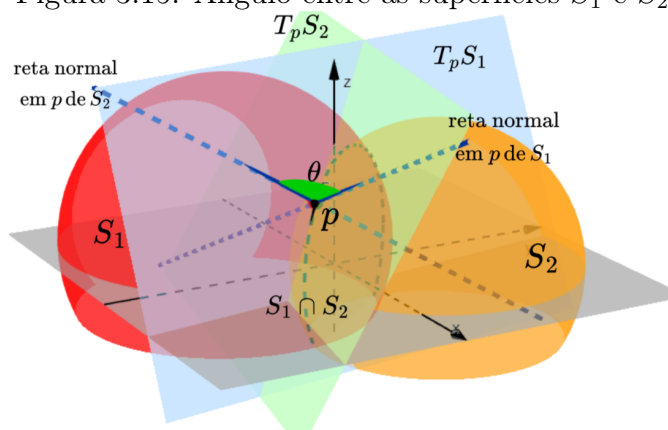
O plano tangente permite definir um ângulo entre duas superfícies que se intersectam, o ângulo é contruído sobre um ponto da interseção da seguinte forma: Dado um ponto p em uma superfície regular S , existem dois vetores unitários em $\mathbb{R}^3$ que são normais ao plano tangente $T_p S$. Cada um deles é chamado de vetor normal unitário em p . Construimos assim uma reta que passa por p e tem a mesma direção do vetor normal unitário em p , ela é chamada de reta normal em p . Dessa forma, o **ângulo** entre duas superfícies que se intersectam no ponto p é o ângulo entre os respectivos planos tangentes (ou entre as retas normais) em p (veja a Figura 3.15).

Uma vez fixada uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ em $p \in S$, podemos definir a escolha de um vetor normal unitário em cada ponto $q \in \mathbf{x}(U)$ pela seguinte regra:

$$N(p) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}(q).$$

Assim, obtemos uma aplicação diferenciável $N : \mathbf{x}(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ que associa cada ponto p da

Figura 3.15: Ângulo entre as superfícies S_1 e S_2 .



Fonte: Elaborada pelo autor (2026) e disponível em <https://www.geogebra.org/m/esmerzuq>.

superfície S à um vetor unitário $N(p)$ normal a superfície naquele ponto.

3.5 Primeira Forma Fundamental

Veremos a seguir uma forma quadrática que possibilita encontrar medidas sobre uma superfície (como o comprimento de arco de uma curva, o ângulo entre vetores tangentes e a área de uma região limitada da superfície) sem fazer menção ao espaço ambiente $\mathbb{R}^3$, no qual ela está inserida. A geometria desenvolvida sobre as superfícies regulares sob essa perspectiva é chamada de **Geometria Intrínseca**.

O produto interno natural do $\mathbb{R}^3$, induz em cada plano tangente $T_p S$ de uma superfície regular S um produto interno (já que $S \subset \mathbb{R}^3$), que indicaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. Assim, se $w_1, w_2 \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$, então $\langle w_1, w_2 \rangle_p$ é igual ao produto interno de w_1 e w_2 , como vetores em $\mathbb{R}^3$. Esse produto interno, corresponde uma forma quadrática $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \|w\|^2 \geq 0. \quad (3.1)$$

Definição 3.5.1. [2, p. 109] A forma quadrática I_p em $T_p S$ definida pela Equação 3.1 é chamada de **primeira forma fundamental** da superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ em $p \in S$.

Iremos expressar a primeira forma fundamental na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ associada a parametrização $\mathbf{x}(u, v)$ em p . Como um vetor tangente $w \in T_p S$ é o vetor tangente a uma curva

parametrizada $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, com $p = \alpha(0) = \mathbf{x}(u_0, v_0)$, obtemos

$$\begin{aligned}
I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\
&= \langle \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle_p \\
&= \langle \mathbf{x}_u u', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle_p + \langle \mathbf{x}_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle_p \\
&= \langle \mathbf{x}_u u', \mathbf{x}_u u' \rangle_p + \langle \mathbf{x}_u u', \mathbf{x}_v v' \rangle_p + \langle \mathbf{x}_v v', \mathbf{x}_u u' \rangle_p + \langle \mathbf{x}_v v', \mathbf{x}_v v' \rangle_p \\
&= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p (u')^2 + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p u' v' + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle_p v' u' + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p (v')^2 \\
&= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p (u')^2 + 2 \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p u' v' + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p (v')^2 \\
&= E(u')^2 + 2F u' v' + G(v')^2,
\end{aligned}$$

onde os valores das funções envolvidas são calculados em $t = 0$, e

$$E(u_0, v_0) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p,$$

$$F(u_0, v_0) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p,$$

$$G(u_0, v_0) = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p$$

são os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ de $T_p S$. Fazendo p variar na vizinhança coordenada correspondente a $\mathbf{x}(u, v)$, chegamos que $E(u, v)$, $F(u, v)$ e $G(u, v)$, são funções diferenciáveis nessa vizinhança.

Exemplo 3.5.2. Um plano $P \subset \mathbb{R}^3$ passando por $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e contendo os vetores ortonormais $w_1 = (a_1, a_2, a_3)$, $w_2 = (b_1, b_2, b_3)$ pode ser descrito como:

$$\mathbf{x}(u, v) = p_0 + u w_1 + v w_2, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Para calcular a primeira forma fundamental para um ponto arbitrário de P , observamos que as derivadas parciais da aplicação $\mathbf{x}$ com respeito a u e a v são $\mathbf{x}_u = w_1$ e $\mathbf{x}_v = w_2$, respectivamente. Como w_1 e w_2 são vetores unitários ortogonais, E, F, G são funções constantes, e dadas por

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p = 1,$$

$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p = 0,$$

$$G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p = 1.$$

Portanto, para algum vetor w , $I_p(w) = \|w\|^2 E(u')^2 + 2F u' v' + G(v')^2 = (u')^2 + (v')^2$. Isso significa que a primeira forma fundamental no plano é o teorema de pitágoras.

Exemplo 3.5.3. Um cilindro reto possui uma parametrização $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v),$$

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty\}.$$

Para calcular a primeira forma fundamental, notamos que

$$\mathbf{x}_u = (-\sin(u), \cos(u), 0), \quad \mathbf{x}_v = (0, 0, 1),$$

e portanto,

$$E = \sin^2(u) + \cos^2(u) = 1, \quad F = 0, \quad G = 1.$$

Note que tanto o plano quanto o cilindro possuem os mesmos coeficientes da primeira forma fundamental.

Se conhecemos os coeficientes da primeira forma fundamental I_p , podemos tratar de questões métricas sobre uma superfície regular, expressando-as através desses coeficientes. Note que, ao calcular o comprimento de arco s de uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$, podemos obter

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^t \sqrt{I(\alpha'(t))} dt.$$

Em particular, se $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ está contida em uma vizinhança coordenada correspondente à parametrização $x(u, v)$, podemos calcular o comprimento de arco de α entre, digamos, 0 e t , por

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} dt.$$

O ângulo θ de duas curvas parametrizadas regulares $\alpha : I \rightarrow S$, $\beta : I \rightarrow S$ que se intersectam em $t = t_0$ é dado por

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \|\beta'(t_0)\|}.$$

Em particular, o ângulo φ das curvas coordenadas de uma parametrização $\mathbf{x}(u, v)$ é

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle}{\|\mathbf{x}_u\| \|\mathbf{x}_v\|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Dessa forma, podemos identificar que duas curvas coordenadas de uma parametrização são ortogonais se, e somente se $F(u, v) = 0$, para todo (u, v) . Uma tal parametrização é chamada uma **parametrização ortogonal**.

Uma outra questão métrica que pode ser tratada com a primeira forma fundamental é o cálculo da área de uma região limitada de uma superfície regular S .

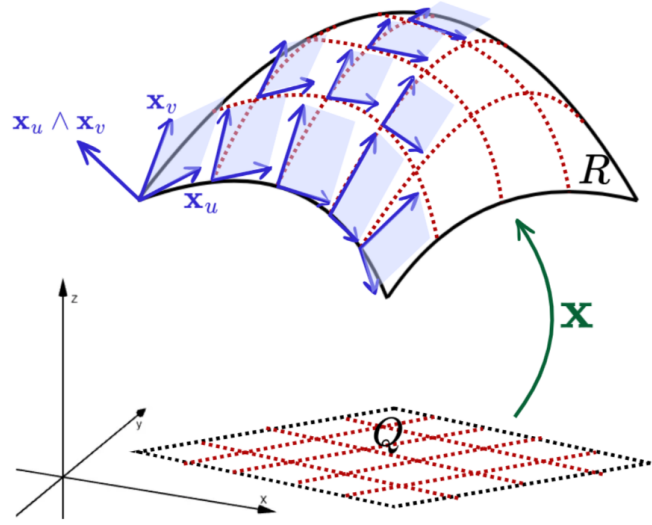
Definição 3.5.4. [2, p. 115] Um **domínio** (regular) de S é um subconjunto aberto e conexo (veja a Definição em [5]) de S , cuja fronteira é a imagem de um círculo por um homeomorfismo diferenciável que é regular (isto é, a sua diferencial não se anula) exceto em um número finito de pontos.

Definição 3.5.5. [2, p. 115] Uma **região** de S é a união de um domínio com a sua fronteira.

Definição 3.5.6. [2, p. 115] Uma região de $S \subset \mathbb{R}^3$ é **limitada** se está contida em alguma bola de $\mathbb{R}^3$.

Vamos considerar regiões limitadas R que estão contidas em uma vizinhança coordenada $\mathbf{x}(U)$ de uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. Em outras palavras, R é a imagem por $\mathbf{x}$ de uma região limitada $Q \subset U$. A função $\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|$, definida em U , representa a área do paralelogramo gerado pelos vetores $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$ (veja a Figura 3.16).

Figura 3.16: Representação da área gerada pelos vetores $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Definição 3.5.7. [2, p. 116] Seja $R \subset S$ uma região limitada de uma superfície regular, contida em uma vizinhança coordenada de uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. O número positivo

$$\iint_Q \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| du dv = A(R), \quad Q = \mathbf{x}^{-1}(R),$$

é chamado **área** de R .

Novamente, se conhecemos os coeficientes da primeira forma fundamental I_p , logo

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| &= \|\mathbf{x}_u\| \|\mathbf{x}_v\| \sin(\theta) \implies \\
\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|^2 &= \|\mathbf{x}_u\|^2 \|\mathbf{x}_v\|^2 \sin^2(\theta) \\
&= \|\mathbf{x}_u\|^2 \|\mathbf{x}_v\|^2 (1 - \cos^2(\theta)) \\
&= \|\mathbf{x}_u\|^2 \|\mathbf{x}_v\|^2 - \cos^2(\theta) \|\mathbf{x}_u\|^2 \|\mathbf{x}_v\|^2 \\
&= \|\mathbf{x}_u\|^2 \|\mathbf{x}_v\|^2 - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle^2 \\
&= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle^2 \\
&= EG - F^2 \implies \\
\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| &= \sqrt{EG - F^2},
\end{aligned}$$

o que mostra que o integrando de $A(R)$ pode ser escrito como $\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| = \sqrt{EG - F^2}$.

Exemplo 3.5.8. [7, p. 143] *Seja a superfície de rotação (toróide) dada por:*

$$\mathbf{x}(u, v) = ((a + r \cos(u)) \cos(v), (a + r \cos(u)) \sin(v), r \sin(u)),$$

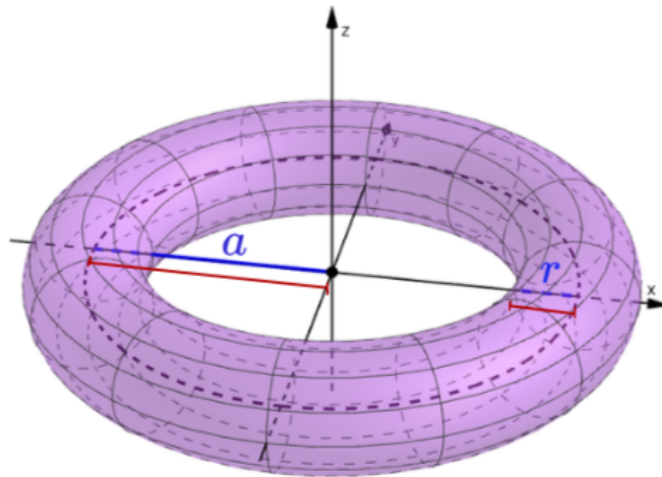
com $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $0 < r < a$ (veja a Figura 3.17). As suas derivadas parciais são:

$$\mathbf{x}_u = (-r \sin(u) \cos(v), -r \sin(u) \sin(v), r \cos(u))$$

e

$$\mathbf{x}_v = (-(a + r \cos(u)) \sin(v), (a + r \cos(u)) \cos(v), 0).$$

Figura 3.17: Toróide.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Calculando o produto vetorial:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -r \sin(u) \cos(v) & -r \sin(u) \sin(v) & r \cos(u) \\ -(a + r \cos(u)) \sin(v) & (a + r \cos(u)) \cos(v) & 0 \end{vmatrix} \\ &= -r(a + r \cos(u))(\cos(u) \cos(v), \cos(u) \sin(v), \sin(u)).\end{aligned}$$

Assim, a norma do produto vetorial é:

$$\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| = r(a + r \cos(u)),$$

pois $0 < r < a$. A aplicação $\mathbf{x}(u, v)$ é periódica em u e v , pois $\mathbf{x}(u + 2\pi, v + 2\pi) = \mathbf{x}(u, v)$. Portanto, se considerarmos a região $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi\}$, temos que $\mathbf{x}(D)$ é o toro e $\mathbf{x}$ restrita ao interior de D é injetiva. Daí concluímos que a área do toro é igual a

$$A = \iint_D \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| \, du \, dv,$$

onde $D = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Portanto,

$$\begin{aligned}A &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(a + r \cos(u)) \, du \, dv \\ &= \int_0^{2\pi} [rau + r^2 \sin(u)]_0^{2\pi} \, dv \\ &= \int_0^{2\pi} 2\pi ar \, dv \\ &= [2\pi arv]_0^{2\pi} \\ &= 2\pi ar(2\pi) \\ &= 4\pi^2 ar.\end{aligned}$$

Conclusão

O presente trabalho teve como objetivo apresentar uma introdução à Geometria Diferencial, com ênfase na teoria local de curvas e superfícies regulares em $\mathbb{R}^3$, combinando o conhecimento matemático desenvolvido a uma abordagem visual e interativa por meio do software GeoGebra.

Ao longo do texto, foram desenvolvidos os principais conceitos necessários à compreensão da geometria diferencial clássica. No primeiro capítulo, estabelecemos os fundamentos de Álgebra Linear e Análise em $\mathbb{R}^n$ que serviram de base para os capítulos subsequentes. No segundo capítulo, abordamos a teoria local das curvas, com destaque para as noções de curvatura, torção e na construção do triedro de Frenet. No terceiro capítulo, introduzimos as superfícies regulares, explorando suas definições, o processo de mudança de coordenadas, funções diferenciáveis, plano tangente e a primeira forma fundamental. Como recurso complementar, utilizamos o GeoGebra para produzir visualizações tridimensionais interativas, disponibilizadas ao longo do texto por meio de links nas legendas das figuras, com a finalidade de facilitar a compreensão do conhecimento construído.

O trabalho oferece ao leitor uma base para um estudo introdutório da Geometria Diferencial de curvas e superfícies. A utilização das construções feitas no GeoGebra e as figuras elaboradas mostrou-se particularmente útil para a visualização de conceitos abstratos pelo autor, e esperamos que seja útil para o possível leitor, promovendo uma aprendizagem mais significativa para conteúdos do ensino superior.

Por fim, esperamos que este material possa auxiliar os leitores interessados na área, e que sirva de incentivo para o desenvolvimento de novas abordagens didáticas que integrem recursos computacionais de visualização gráfica ao ensino de disciplinas da matemática do ensino superior.

Bibliografia

- [1] J. L. Boldrini et al. *Álgebra Linear*. 3^a ed. São Paulo: Harbra, 1986.
- [2] M. P. do Carmo. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.
- [3] J. R. V. Coimbra. “Uma Introdução à Geometria Diferencial”. Dissertação de Mestrado. Campinas-SP: Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), 2008.
- [4] E. L. Lima. *Álgebra Linear*. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [5] E. L. Lima. *Curso de Análise. Funções de n Variáveis*. 1^a ed. Vol. 2. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2014.
- [6] R. F. de Lima. *Introdução à geometria diferencial*. Coleção Textos Universitários. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.
- [7] K. Tenenblat. *Introdução à geometria diferencial*. São Paulo: Editora Blucher, 2008.