



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA - UESB
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Estevão Serafim Costa Dias

**Quando a Música se move Algebricamente: Estrutura
de Grupos na Transposição de Elementos Musicais.**

VITÓRIA DA CONQUISTA-BA

2026



Estevão Serafim Costa Dias

QUANDO A MÚSICA SE MOVE ALGEBRICAMENTE: ESTRUTURA DE GRUPOS
NA TRANSPOSIÇÃO DE ELEMENTOS MUSICAIS.

Monografia apresentada à Banca Examinadora
da Universidade Estadual do Sudoeste da
Bahia, como parte dos requisitos para obtenção
do título de Licenciatura em Matemática sob
orientação do Prof. Me. Lucas Venâncio Da
Silva Santos

VITÓRIA DA CONQUISTA-BA

2026

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA - UESB
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

A monografia “Quando a Música se move Algebricamente: Estrutura de Grupos na Transposição de Elementos Musicais.”, apresentada e defendida por ESTEVÃO SERAFIM COSTA DIAS, matrícula 202111305, foi aprovada pela Banca Examinadora

Vitória da Conquista-Ba, 1 de fevereiro de 2026

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Me. Lucas Venâncio Da Silva Santos
Orientador.

Prof. Dr. Júlio Cesar dos Reis
Convidado 1

Prof. Dr. Leandro Correia Araújo
Convidado 2

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, porque Dele vem a maior força que tenho para lutar todos os dias. Ele sempre proveu as minhas necessidades para que eu permanecesse na universidade, usando pessoas para me abençoar nesta jornada. "Porque dele, e por ele, e para ele são todas as coisas; glória, pois, a ele, eternamente. Amém." (Romanos 11:36).

A toda a minha família, por todo o apoio com orações, ajuda de custo e por me transmitirem força para que eu seguisse nesta caminhada, a minha avó e minha tia, pelo seu amparo, tanto financeiro quanto de acomodações, em alguns períodos. E em especial à minha mãe e ao meu pai, porque sem eles eu não estaria aqui. Eles sempre me instigaram aos estudos, acreditaram e nunca duvidaram da minha capacidade, começando no ensino médio, incentivando-me a seguir esta carreira, e estiveram por perto sempre que precisei. Em momentos de dúvida, eles me deram a certeza de continuar e nunca desistir.

Expresso minha profunda gratidão ao Professor Me. Lucas Venâncio da Silva Santos, cujo seu conhecimento e experiências, foram pilares na construção deste trabalho. Sua paciência, disponibilidade e direcionamentos valiosos não apenas guiaram esta pesquisa desde a concepção inicial até a sua forma final, mas também foram cruciais para o meu desenvolvimento acadêmico e crítico. A confiança e o incentivo demonstrados em cada etapa foram determinantes para a conclusão deste trabalho.

Estendo meus sinceros agradecimentos a todo o corpo docente do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia. Agradeço a todos os professores(as) cuja dedicação ao longo da minha jornada acadêmica foi de imenso valor, fornecendo a base teórica e metodologias necessárias para o meu desenvolvimento como professor. O ambiente de aprendizado e o conhecimento transmitido em sala de aula foram a fundação do que alcanço e sigo alcançando hoje.

Não poderia deixar de agradecer ao Professor Gerson dos Santos Farias, por seus conselhos, didática e diferentes visões para com a profissão e futuros alunos, mostrando como podemos transformar a arte da docência, com metodologias e encherando a todos.

Agradeço imensamente aos ilustres membros da Banca Examinadora, Professor Dr. Júlio César dos Reis e Professor Dr. Leandro Correia Araujo, por aceitarem o convite para avaliar este trabalho. Suas valiosas contribuições, observações e o tempo dedicado à leitura crítica desta pesquisa são reconhecidos como aprimoramento. As sugestões apresentadas serão essenciais para o aperfeiçoamento e da continuidade deste estudo no futuro.

Por fim, mas não menos importante, expresso minha gratidão aos amigos que ganhei nesta jornada acadêmica e a cada colega. O apoio mútuo de todos, foi vital para que chegasse até, aqui. Agradeço por cada conselho, incentivo e abraço nos momentos de maior desafio, servindo como uma rede de suporte. A colaboração e a amizade de vocês foram pilares que tornaram a conclusão deste curso não apenas possível, mas memorável.

Resumo

Neste trabalho, investigamos algumas relações entre Matemática e Música. Analisamos como alguns tópicos da teoria de grupos se manifestam através das notas musicais e acordes. Para este trabalho adotamos uma abordagem de pesquisa teórico-qualitativa, investigando artigos sobre a teoria musical, e consultando livros de álgebra necessários para compreensão e referências da teoria de Grupos. Foi usado para representar cada nota musical um elemento do $\mathbb{Z}_{12}$, representando uma posição, já para os acordes, usaremos matrizes-coluna e mostraremos como essas matrizes podem ajudar a entender algumas propriedades musicais. Associamos também a operação de adição entre as classes residuais com a transposição de notas e acordes e mostramos como esta transposição com acordes pode ser enxergada como uma soma de matrizes. Este trabalho mostrou como a transposição de elementos musicais podem ser enxergados por meio da álgebra e que a teoria de musical, quando vista dessa forma, possui uma simetria de grupos. Pode se concluir que a teoria de grupos fornece uma linguagem poderosa para compreensão para analisar a teoria musical, servindo como uma ferramenta analítica de como a transposição ocorre, além de que a música também se torna um recurso didático facilitador de visualização de grupos.

Palavras-chave: Teoria Musical; Grupos; Transposição; Notas; Acordes; Grupo $\mathbb{Z}_{12}$.

Abstract

In this work, we investigate several relations between Mathematics and Music. We analyze how certain topics of group theory are manifested through musical notes and chords. For this study, we adopted a theoretical-qualitative research approach, investigating articles on musical theory and consulting algebra textbooks necessary for understanding Group Theory concepts and references. To represent each musical note, an element of the $\mathbb{Z}_{12}$ was used, representing a position. For chords, we employ column matrices and demonstrate how these matrices can help in understanding specific musical properties. We also associate the addition operation between the residue classes with the transposition of notes and chords, showing how this transposition of chords can be viewed as a sum of matrices. This work showed how the transposition of musical elements can be viewed through the lens of algebra, and that musical theory, when seen in this manner, possesses a group symmetry. It can be concluded that group theory provides a powerful language for analyzing and understanding musical theory, serving as an analytical tool for how transposition occurs. Furthermore, music itself becomes a facilitating didactic resource for visualizing groups.

Keywords: Musical Theory; Group Theory; Transposition; Notes; Chords; Group $\mathbb{Z}_{12}$.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas i

Introdução ii

1 Teoria Musical 1

1.1 Notas 1

1.2 Acorde 3

1.3 Violão 4

2 Teoria de Grupos 10

2.1 Grupos 10

2.2 Grupos Cíclicos 15

2.3 A Estrutura do Grupo Abeliano de $(\mathbb{Z}_n, +)$ 17

3 Associação do Grupo à Teoria Musical 20

3.1 Aplicação da Definição de Grupos 20

3.2 Tabelas de Cayley do $\mathbb{Z}_{12}$ e das Notas Musicais 24

3.3 Visualização Matricial dos Acordes 27

3.4 O Grupo Cíclico das Razões de Frequência 32

Considerações Finais 34

Referências Bibliográficas 36

Lista de Figuras

1.1	Violão	4
1.2	Braço do Violão	5
1.3	Cálculo da Casa 1	6
1.4	Exemplo 1	8
3.1	$C + D = \bar{0} + \bar{2} = \bar{2}$	23
3.2	$E + E = \bar{4} + \bar{4} = \bar{8} = G\#$	23
3.3	Nota $G\#$ em diferentes posições.	24
3.4	Acorde de D	30
3.5	Acorde de D transposto para $F\#$	31

Lista de Tabelas

1.1	Tabela de referência das notas musicais	1
1.2	Tabela de notas musicais (bemol)	2
1.3	Notação matemática para a progressão de notas musicais.	7
2.1	Exemplo de Tabela de Cayley para um grupo genérico de ordem n	14
3.1	Correspondência entre notas musicais e classes de resíduais módulo 12. . .	21
3.2	Tabela de operação das posições das notas do violão.	25
3.3	Tabela de operação das classes de resíduos módulo 12.	26
3.4	Tabela de operação das frequências das notas (baseado em potências). . . .	32

Introdução

A música é uma forma de expressão amplamente reconhecida no mundo e exerce um papel relevante na sociedade (Caetano, 2012)[3], Seeguer (2008)[8] ainda diz que uma definição geral da música deve incluir tanto sons quanto seres humanos dizendo ser um sistema de comunicação envolvendo sons estruturados produzidos por membros de uma comunidade que se comunicam com outros. Isso nos mostra que a música não possui apenas uma definição formal, mas além de não haver definição, será que não podemos também visualizá-la e estudá-la de outra forma? Visto que, desde os primórdios, ela já se manifestava por meio de instrumentos percussivos e de sopro, os instrumentos de cordas como violão que usamos, neste trabalho foram desenvolvidos posteriormente. Com o tempo, estudiosos passaram a investigar e sistematizar seus elementos, como ritmo, melodia e harmonia, tornando-a mais técnica e estruturada. Músicos e teóricos contribuíram significativamente para esse processo ao desenvolver métodos de notação e regras composicionais, o que permitiu maior complexidade e sofisticação nas obras musicais, principalmente, Guido de Arezzo (século XI), de acordo (Van Waesberghe, 1951) [10], sendo Guido de Arezzo considerado o pai da notação musical moderna. A música passou a ser compreendida não apenas como expressão espontânea, mas também como uma linguagem dotada de lógica, capaz de ser analisada, ensinada e recriada. A evolução trouxe consigo as notas musicais e suas teorias, o que a enriqueceu e desempenhou um papel significativo na humanidade, se fazendo relevantemente presente em todas as partes do mundo.

Dentre as diversas manifestações da música, um instrumento que se destaca como um dos mais conhecidos e, possivelmente, um dos mais tocados no mundo o violão. O violão de 6 cordas, o mais comum no meio social, conhecido também como violão moderno, teve sua origem na Europa por volta do século XVIII, apresentando um formato com

algumas diferenças em relação aos modelos atuais, com uma cintura mais acentuada, surgindo desejo de pesquisar mais a fundo sugiro investigar a Revista Brasileira de Ensino de Física em seu Volume 40 [4]. Sua estrutura compõe o braço, as cordas, a mão que é onde segura as cordas do final do braço e a caixa acústica, responsável por ampliar o som. Usaremos um violão para mostrar, de maneira simples e visual, como a teoria musical se conecta com os conceitos matemáticos.

A teoria de grupos está presente e é utilizada no meio social em operações de números inteiros, racionais e reais. Mesmo nos anos iniciais, esse conteúdo aparece, apesar de não ser citado diretamente. Em matemática, a álgebra é um campo abstrato e também possui um papel fundamental, possuindo sua aplicação em ciências como física, como também veremos na teoria musical.

Neste estudo, focamos na Teoria dos Grupos, um dos campos da Álgebra Abstrata que investiga as propriedades e os comportamentos dessas estruturas. O conceito moderno de grupo nasceu do estudo das equações polinomiais e evoluiu para descrever simetrias e estruturas em diferentes áreas da matemática. Embora desenvolvida no contexto da álgebra abstrata, a teoria dos grupos também pode ser vista em objetos do cotidiano, como no Cubo Mágico, onde cada movimento corresponde a uma operação de grupo dentre outros exemplos.

Na presente abordagem, investigaremos essa estrutura no campo da teoria musical no qual usamos como base o artigo: [9]. Considerando grupos como conjuntos de elementos sobre os quais se define uma operação específica, podemos ver na teoria musical o ato de transladar como uma operação que obedece aos axiomas de grupos, como a existência de um elemento neutro e de inversos. Duas áreas aparentemente distantes, mas que quando juntas nos mostram um outro olhar para os mesmos.

A música, juntamente com suas 12 notas e instrumentos como o violão, ao ser ouvida, transmite sentimentos e emoções. Já a teoria de grupos, por sua vez, é um campo teórico, necessário e influente na comunidade científica. Sendo assim, este trabalho busca investigar como o conceito de grupos, mais especificamente o grupo de classe residuais $\mathbb{Z}_{12}$ e suas propriedades, pode ser aplicado na teoria musical. Cada elemento desse conjunto será usado para representar uma posição de uma nota musical, nomeando de $\bar{0}$ ao $\bar{11}$, representando as notas Dó à Si, respectivamente. A operação de soma,

por sua vez, é definida como o deslocamento entre essas notas (a transposição), onde a quantidade de posições deslocadas também corresponde a uma nota musical (o intervalo de transposição). Investigamos também os acordes, estruturas musicais compostas por três notas, e percebemos que podemos organizá-las em forma de matrizes, utilizando a mesma operação de translação.

Mesmo os estudantes que estudam a teoria dos grupos, depois de serem apresentados à área, parecem não acreditar o quanto esse assunto pode e tem algumas aplicações práticas na vida real, talvez por se tratar de um campo abstrato. O problema leva os pesquisadores a estudar as diferentes maneiras pelas quais o grupo pode ser expresso concretamente e por se tratar de uma área pura e teórica, temos a intenção de trazer a sua aplicação em notas musicais. A proposta é explorar como essa abordagem algébrica pode modelar a organização das notas, bem como oferecer uma nova perspectiva didática que conecta matemática e música, facilitando a compreensão de ambos os campos, utilizando-se o violão para facilitar a visualização concreta das transformações que ocorrem com as notas durante as operações.

As imagens presentes no texto são majoritariamente de autoria própria, usando como base apenas uma imagem adquirida no site Pinterest [1]. As demais imagens foram elaboradas por meio de recursos de edição, com o intuito de fazer cortes, nomeclaturas e exemplificar as visualizações concretas propostas no trabalho.

O presente texto está estruturado da seguinte forma: No capítulo 1, abordamos definições e conceitos importantes da teoria musical, como por exemplo notas, acordes, tons e transposição, estas noções são fundamentais, pois através delas os objetivos são alcançados. No capítulo 2, por sua vez, abordamos parte das definições da teoria de grupos, apresentando a definição de grupos, Grupo cíclico $\mathbb{Z}_{12}$, tabela de Cayley dentre outras definições primordiais para nosso trabalho. Estas definições abordadas no capítulo são de relevância, pois são elas que buscamos visualizar na teoria musical.

No capítulo 3, mostramos como a teoria musical e a teoria de grupos se relacionam, primeiramente mostrando a aplicação da definição de grupos nas notas musicais, explicando a transposição como a operação deste grupo, e trazendo de forma concreta no braço do violão. Dentre outras demonstrações de aplicações, neste capítulo é onde se concentra a resposta para nosso objetivo.

Capítulo 1

Teoria Musical

Neste capítulo, definimos e exemplificamos todos os conceitos da Teoria Musical que se fazem necessários para o nosso trabalho, tais como notas, acordes e transposição. Essas definições musicais juntamente com alguns conceitos fundamentais sobre o violão serão importantes para observarmos o comportamento da álgebra. É neste capítulo que apresentamos a área de investigação na qual observaremos matematicamente no último capítulo. Usamos as referências sobre a teoria musical os artigos:[6], além de [12] que menciona toda um pouco de sua história e aborda sua estrutura, juntamente com vídeo:[11].

1.1 Notas

A música é uma das belas artes que se dedica à combinação de sons com o objetivo de alcançar beleza formal e expressar pensamentos ou sentimentos. A própria música não está completa sem as **notas musicais**.

As notas musicais são as seguintes:

Tabela 1.1: Tabela de referência das notas musicais

C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B
Dó	Dó sus	Ré	Ré sus	Mi	Fá	Fá sus	Sol	Sol sus	Lá	Lá sus	Si

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Dentre as notas apresentadas na tabela acima, as notas principais destacam-se como as mais conhecidas entre a comunidade em geral as notas: C, D, E, F, G, A, B. No entanto, entre o intervalo de uma nota à outra, surgem as notas alteradas, denotadas neste quadro acompanhadas de $\sharp$ e na forma escrita "sus" que representa sustenido. Isso pode ser considerado como o movimento do som de uma nota para uma nota ligeiramente mais aguda (meio tom acima).

Exemplo 1.1.1. Tome a nota F, existe uma nota à direita de F antes de G, e ela é denotada como $F\sharp$ (Fá sustenido).

Não representada na tabela, mas além de sustenido temos também o bemol, essa definição é próxima à do sustenido. As notas bemóis podem ser definidas analogamente como uma nota entre duas principais. Contudo, o que as diferencia é a forma de encontrá-las: ao invés de seguir para a direita deixando a nota mais aguda, o movimento será para a esquerda deixando mais grave, ou seja, partindo de uma nota mais aguda para a mais grave, e é denotado como b (bemol).

Exemplo 1.1.2. Uma nota entre G e F é o Gb (Sol Bemol).

Uma relação de igual frequência é $F\sharp \equiv Gb$ e isso vale para as demais notas. Segue tabela com notas musicais denotadas com bemol:

Tabela 1.2: Tabela de notas musicais (bemol)

C	Db	D	Eb	E	F	Gb	G	Ab	A	Bb	B
Dó	Ré bemol	Ré	Mi bemol	Mi	Fá	Sol bemol	Sol	Lá bemol	Lá	Sí bemol	Sí

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Definição 1.1.1. (Semitom). É definido como o menor intervalo entre duas notas da música ocidental, é a distância entre duas notas adjacentes da escala de 12 notas.

Exemplo 1.1.3. Movimento de F para $F\sharp$ ou de F para E é feito transladando um semitom para a próxima nota mais aguda ou para o mais grave respectivamente.

Definição 1.1.2. (Tom).

Significa simplesmente um intervalo entre duas notas musicais, separadas por dois semitons, um tom equivale a dois semitons. Para além disso, Tom pode referir também a uma tonalidade de uma melodia ou música.

Exemplo 1.1.4. De F para G ou de E para F# temos um tom.

1.2 Acorde

Um acorde é produzido quando três ou mais notas são tocadas juntas, ou seja, o acorde é a combinação de três ou mais notas, o acorde de Dó maior, por exemplo, é composto por: (C, E, G), sendo C (Dó) a fundamental, E(Mi) a terça e G(Sol) a quinta do campo harmônico de C. Quando logicamente combinadas, elas são consonantes, ou seja, emitem um som agradável ao ouvido. As notas que não produzem um som agradável juntas são denominadas notas dissonantes, e não costumam ser utilizadas como acordes na música tonal tradicional.

Detalhe a ser ressaltado, embora esteja escrito que as notas de um acorde são a fundamental, a terça e a quinta, elas não são a primeira, terceira e quinta quando se observa a tabela de notas, na verdade se tratam da principal nota escolhida para o acorde, a próxima nota 4 semitons acima e a seguinte mais 3 semitons acima desta, ou 7 semitons da principal. Isso ocorre pois, para cada nota existe um campo harmônico em relação a ela, que você encontra aplicando a seguinte sequência na tabela de acordes: A sequência de notas é construída a partir da Nota Principal (Tônica) seguindo os seguintes intervalos ascendentes: Tom, Tom, semitom, Tom, Tom, Tom, semitom. Em termos matemáticos seria como assumir um n para a tônica e as próximas notas do campo harmônico seguisse a sequência: $n; (n + 1)tom; (n + 1) + 1tom; (n + 2) + 0,5tom; (n + 2, 5) + 1tom; (n + 3, 5) + 1tom; (n + 4, 5) + 1tom; (n + 5, 5) + 0,5tom$. A estrutura da Escala Diatônica Maior, a partir da tônica Ré (D), é representada pela sequência de Tons (T) e Semitons (S):

$$D \xrightarrow{T} E \xrightarrow{T} F\# \xrightarrow{S} G \xrightarrow{T} A \xrightarrow{T} B \xrightarrow{T} C\# \xrightarrow{S} D$$

Existem diversas variações do mesmo acorde, como maior, menor, com sétima maior e menor, com nona, diminuto, dentre diversos outros. Neste trabalho, focamos apenas nos acordes maiores, com o objetivo de simplificar a aplicação e visualização dos mesmos, mas há a possibilidades de testes com os demais acordes.

1.3 Violão

Baseado no que está escrito em [12] o violão é um instrumento criado por volta do século XVIII, sendo um instrumento musical da família dos cordófonos compostos dedilhados. Por possuir mais de uma corda, as quais são colocadas em movimento usando dedos, unhas, plectros ou palhetas. O instrumento possui seis ordens de cordas simples com comprimento acústico de 65,0 cm entre a pestana e o rastilho podendo variar levemente de acordo com o modelo, afinadas geralmente nas notas mi_2 , $lá_2$, $ré_3$, sol_3 , si_3 e mi_4 com frequências $f = 82$ Hz, 110 Hz, 147 Hz, 196 Hz, 247 Hz e 330 Hz, respectivamente, usando como referência o diapasão de 440 Hz (instrumento usado como referência para afinar outros instrumentos musicais, emitindo uma frequência de som única quando vibrado). Trata-se de um instrumento versátil, pois, pela quantidade de cordas, suas notas e disposições, permite tanto a execução da melodia, da harmonia ou de ambas em peças mais elaboradas. Além disso, há a quantidade de trastes que varia de violão para violão.

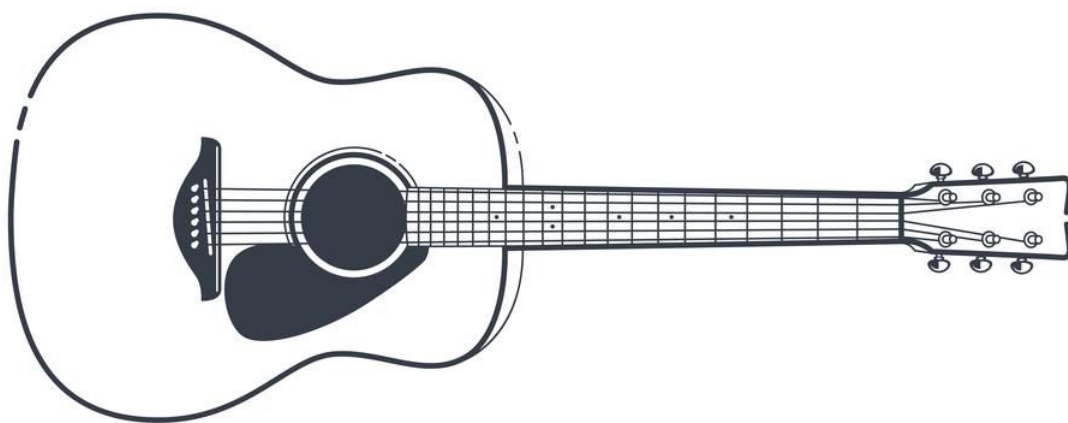


Figura 1.1: Violão

Fonte: Extraído de [1](2025).

Na estrutura do violão, mais especificamente em seu braço, há divisórias denominadas **trastes**. Quando uma corda é pressionada, ela encosta no traste à sua frente, produzindo uma nota referente à posição pressionada. Essa nota pode variar de uma corda para outra ou de um traste para outro. Os espaços entre um traste e outro denominam-se **casas**, e é neste espaço que o dedo será pressionado.

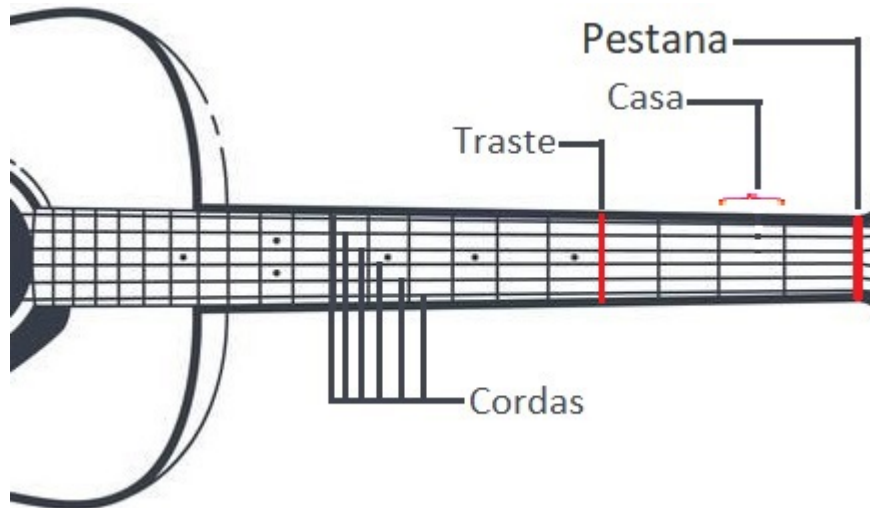


Figura 1.2: Braço do Violão

Fonte: Pinterest editada pelo autor (2025).

Observando o braço do violão, buscamos analisar o comprimento das cordas e relacioná-lo com as notas e frequências, analisando a variação da posição dos trastes a fim de chegar na equação que demonstra a distância dos próximos trastes.

A corda do violão possui comprimento L_0 . Os trastes, por sua vez, funcionam como deslocamento da pestana, variando o seu comprimento efetivo.

No primeiro traste, a corda passará a possuir comprimento L_1 , e as casas atrás do traste pressionado são desconsideradas.

Pode-se calcular o comprimento da primeira casa sendo $\Delta L_1 = L_0 - L_1$.

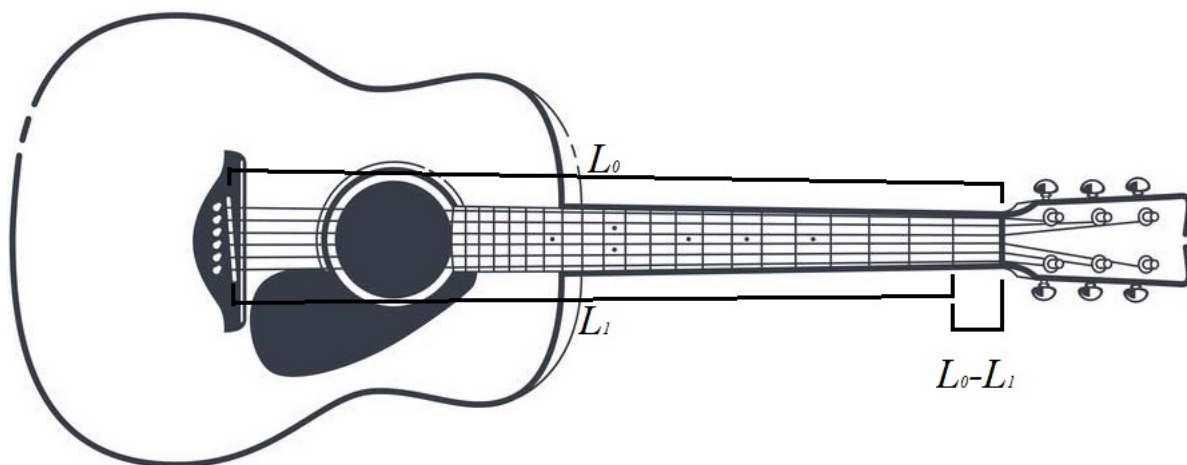


Figura 1.3: Cálculo da Casa 1

Fonte: Pinterest editada pelo autor (2025).

Os demais trastes podem ser calculados de forma semelhante, usando o comprimento do traste antecessor e obtendo a diferença com o comprimento do traste à frente da casa. Logo, para a casa k , onde $k \in \mathbb{N}$, temos: $\Delta L_k = L_{k-1} - L_k$.

Quando uma corda é tocada, ela vibra em uma determinada frequência, e essa frequência gera uma nota musical.

A primeira corda tocada vibra e gera a nota Mi. Ao pressionar a primeira casa dessa corda, a nota referente à nova vibração será a nota Fá, e assim por diante, seguindo a escala cromática (As 12 notas musicais)

Tomamos agora a frequência f que é a quantidade de vezes que uma corda, se tratando do instrumento que estamos utilizando neste trabalho, vibra, assumiremos uma nota C que vibra 130,81Hz, ao ser multiplicada por uma constante a , gera a frequência da próxima nota (o semitom acima).

A nota C tem uma frequência f que, ao ser multiplicada pela constante a , gera a frequência da nota C#. Da mesma forma, se multiplicarmos pela constante novamente, ou seja, $a \cdot (a \cdot f) = a^2 f$, teremos a frequência da nota D, e assim por diante.

Sendo assim, temos:

Tabela 1.3: Notação matemática para a progressão de notas musicais.

C	C#	D	...	B	C'
f	af	a^2f	...	$a^{11}f$	$a^{12}f$

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

As frequências de C' é exatamente o dobro da frequência de C, sendo C' uma oitava acima da nota C que tomamos como ponto de partida, ou seja, $2f = a^{12}f$. Simplificando a equação, temos:

$$\frac{2f}{f} = \frac{a^{12}f}{f} \implies 2 = a^{12} \implies a = \sqrt[12]{2}.$$

Logo, a constante multiplicativa é:

$$a = 2^{\frac{1}{12}}.$$

Sendo assim, a frequência da nota gerada ao pressionar uma corda em uma casa específica é igual à frequência da corda solta multiplicada pela constante a elevada a k (o número da casa/semitons), ou seja:

$$\text{Frequência}(k) = a^k \cdot f$$

Substituindo o valor de a :

$$\text{Frequência}(k) = \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^k \cdot f = 2^{\frac{k}{12}} \cdot f$$

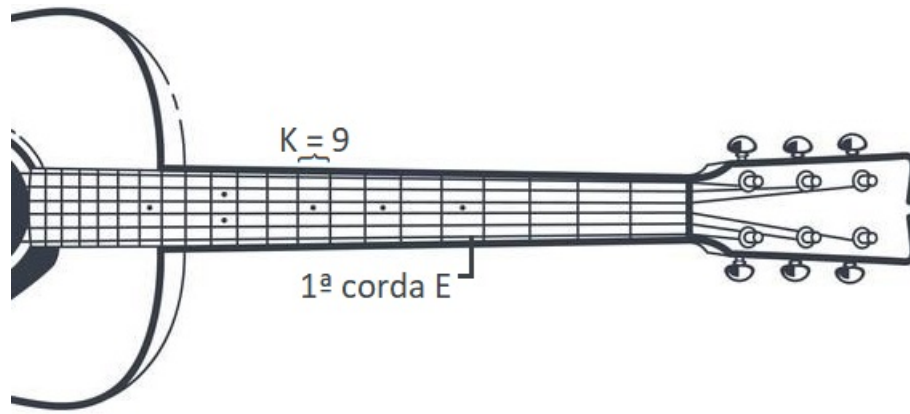


Figura 1.4: Exemplo 1

Fonte: Pinterest editada pelo autor (2025).

A frequência da nota da 1ª corda na casa 9 será:

$$\text{Frequência}(9) = 2^{\frac{9}{12}} \cdot f_E = f_{C\#'} = C\#',$$

Ou, de forma a considerar a transposição de uma nota já alterada (onde f é a frequência de partida e k é o deslocamento):

$$f \cdot a^k \cdot a^9 = f \cdot a^{k+9}.$$

A oitava de uma nota representa um conceito fundamental que se manifesta de duas maneiras interligadas. Primeiramente, do ponto de vista do intervalo musical, a oitava descreve a distância sonora entre uma nota e outra cuja frequência é precisamente o dobro ou a metade da original. Essa relação de frequência de 2 : 1 confere à oitava uma sonoridade extremamente consonante e uma curiosa sensação de similaridade entre as notas, apesar de sua diferença de altura.

Já na estrutura do violão, a oitava seria nada mais que deslocar o dedo da casa inicialmente pressionada para a 12ª casa adiante. Isso funciona também para oitavar acordes com pestana (acorde que possui o dedo indicador pressionando mais de uma corda, além dos demais 3 dedos já posicionados adiante). Neste trabalho, a oitava foi denotada acompanhada de um apóstrofo (').

C é a nota principal; a nota C' é sua oitava aguda mais próxima, e 'C é sua oitava grave mais próxima.

Algumas notas do violão possuem a mesma frequência em cordas diferentes. A nota **Lá** pode ser encontrada na 5ª casa na 6ª corda do violão, e essa mesma nota é referente à 5ª corda solta. Da mesma forma, a 5ª casa da 5ª corda é referente à 4ª corda solta, e assim sucessivamente, exceto na corda 3 (Sol), que, quando pressionada na sua 4ª casa (Si), a nota obtida é equivalente à nota da 2ª corda solta (Si). A 2ª corda em relação à 1ª funciona da mesma maneira inicial: a 5ª casa (Mi) se refere à nota da 1ª corda solta (Mi). Isso facilita a visualização das oitavas.

Capítulo 2

Teoria de Grupos

A seguir apresentamos as definições de grupos, subgrupos, propriedades e alguns dos teoremas relacionados, essenciais para compreensão do próximo capítulo. Inicialmente abordamos as definições de grupos, definição esta primordial para a pesquisa, pois ela é nosso alicerce. Toda definição abordada é seguida de exemplos, buscando facilitar a compreensão. Logo mais, a tabela de Cayley e uma seção sobre o $\mathbb{Z}_n$ possui grande notabilidade neste trabalho. São tais conceitos que investigaremos dentro da teoria musical. Utilizamos como referência principal os livros [7] e [5].

2.1 Grupos

Definição 2.1.1 (Grupos). Seja G um conjunto não vazio e $*$: $G \times G$ uma operação binária. Dizemos que $(G, *)$ é um grupo se as seguintes condições são satisfeitas:

1. A operação $*$ definida em G é associativa, ou seja,

$$(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in G$$

2. Existe um elemento neutro em G , ou seja,

$$\exists e \in G \text{ tal que } a * e = e * a = a, \forall a \in G;$$

3. Existe elemento inverso para todo elemento de G , ou seja,

$$\forall a \in G, \exists b \in G \text{ tal que } a * b = b * a = e$$

Dentre as classificações dos grupos se encontra o **Grupo Aditivo**, grupo esse que se fará presente no próximo capítulo, pois é o tipo de grupo base da aplicação. Tal grupo tem sua operação de adição (soma) denotada por $+$, seu elemento neutro consiste no número 0 e seu simétrico denotado por $-a$, caso a pertença ao grupo.

O **Grupo Multiplicativo** por sua vez é ligeiramente diferente. Sua operação que se denota por $*$ ou $\times$ multiplica seus elementos entre si, e seu elemento neutro é o 1 e o simétrico de um elemento desse grupo (b), é denotado por b^{-1} . Segue abaixo alguns exemplos de grupos.

Exemplo 2.1.1. Conjunto dos números inteiros com a operação de adição. $(\mathbb{Z}, +)$.

Note que, com a operação de adição, dados os elementos α, β e $\gamma \in \mathbb{Z}$ temos:

$$\text{i) } (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

$$\text{ii) } \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha.$$

$$\text{iii) } \alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0.$$

Perceba que não importa qual número de $\mathbb{Z}$ for usado, i), ii), iii) sempre funcionam. Da mesma forma ocorre com matrizes com seus elementos pertencendo ao conjunto dos números inteiros, segue mais esse exemplo abaixo.

Exemplo 2.1.2. Conjunto das matrizes de ordem 3×1 : $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$, com a

operação de adição. $(M_{3 \times 1}, +)$.

$$\text{i) } \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{ii) } \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{iii) } \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} + \left(- \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ -\beta_1 \\ -\gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Neste exemplo, apesar de abordar uma estrutura ligeiramente diferente do primeiro exemplo, não deixa de ser um grupo, uma vez que as propriedades valem para o

mesmo. Note que apesar de associativos, os grupos dados nos exemplos também comutam. Há uma definição própria para grupos comutativos, que é chamado também de **grupo abeliano**, segue sua definição abaixo.

Exemplo 2.1.3. Conjunto dos números reais não-nulos com a multiplicação $(\mathbb{R}^*, \cdot)$. Os axiomas funcionam analogamente ao exemplo 2.1.1 com a distinção da operação. Note que é preciso que os reais não contenha o 0, pois o axioma do elemento inverso falha se o 0 se fazer presente.

Definição 2.1.2 (Grupo Abeliano). Um grupo G é chamado de grupo abeliano (ou grupo comutativo) se a operação $\cdot$ for comutativa, ou seja,

$$a * b = b * a, \text{ para todo } a, b \in G.$$

É fundamental notar que a comutatividade é o axioma extra que define esta estrutura. Em contraste, os grupos não abelianos (onde $a \cdot b \neq b \cdot a$ é permitido) são geralmente mais complexos

Exemplo 2.1.4. Conjunto dos números racionais com a operação de multiplicação $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$.

Note que, com a operação de multiplicação, dados os elementos $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}^*$:

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha, \forall \alpha \text{ e } \beta \in \mathbb{Q}^*$$

Não importa a ordem que se opere os elementos de $\mathbb{Q}$, o resultado é sempre o mesmo, logo dado conjunto munido de uma operação que vale os 3 primeiros axiomas, sendo ele um grupo, e também vale a comutatividade, essa estrutura é um grupo abeliano.

Definição 2.1.3 (Grupo Finito). Um grupo G é chamado de grupo **finito**, quando G tem um número finito de elementos. Neste caso, definimos a **ordem** de G , denotada por $|G|$, sendo o número de elementos de G .

Quando G não é um grupo finito, dizemos que G é um grupo de **ordem infinita**, ou seja, isso ocorre quando o grupo G contém infinitos elementos.

Exemplo 2.1.5. Dado um conjunto $G = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. A ordem desse grupo ($|G|$) é 11.

Observando alguns Grupos como $(\mathbb{Q}, +)$ se nota que em seu conjunto possui todos os elementos também de $\mathbb{Z}$, e que $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo, então de alguma forma deve haver uma relação entre esses dois grupos, e há, olhando isso, podemos perceber que existem subconjuntos de G , que ainda são grupos. Por esse motivo segue a definição abaixo.

Definição 2.1.4 (Subgrupos). Sejam $(G, *)$ um grupo e H um subconjunto não vazio de G . Dizemos que $(H, *)$ é um subgrupo de $(G, *)$ se $H \subset G$, munido da operação $*$ do grupo G e for um grupo, ou seja se $(H, *)$ for um grupo, obedecendo os seguintes axiomas.

- **Associatividade:** Para todo $a, b, c \in G$, $(a * b) * c = a * (b * c)$.
- **Elemento Neutro:** Existe $e \in G$ tal que para todo $a \in G$, $a * e = e * a = a$.
- **Elemento Inverso:** Para cada $a \in G$, existe um $a' \in G$ tal que $a * a' = a' * a = e$.

Com a possibilidade de também ser Comutativo.

Exemplo 2.1.6. $(\mathbb{Q}, +)$ é subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$ pois todos os elementos de $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e ambos são munidos da mesma operação $+$, além disso, $(\mathbb{Q}, +)$ obedece os três axiomas, Portanto $(\mathbb{Q}, +)$ é subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$

Abaixo segue uma proposição que serve critério útil para determinar se um subconjunto é ou não um subgrupo.

Proposição 2.1.1. [Critério de Subgrupo] Seja G um grupo. Um subconjunto não vazio $H \subseteq G$ é um subgrupo se, e somente se, para quaisquer $a, b \in H$, tem-se $ab^{-1} \in H$.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ A ida é imediata: se H é subgrupo, então é fechado para produtos e inversos, logo $ab^{-1} \in H$.

$(\Leftarrow)$ Para a volta, suponha que $H \neq \emptyset$ e que $ab^{-1} \in H$ para todos $a, b \in H$.

- H contém o elemento neutro. Tome $a = b$ na hipótese: Então,

$$ab^{-1} = aa^{-1} = e \in H.$$

- H contém inversos: Seja $a \in H$. Como $e \in H$, aplicando a hipótese com $a = e$ e $b = a$, obtemos:

$$ea^{-1} = a^{-1} \in H.$$

- H é fechado para a operação: Sejam $x, y \in H$. Como já sabemos que $y^{-1} \in H$, pela hipótese segue:

$$x(y^{-1})^{-1} = xy \in H.$$

Assim, H contém o neutro, os inversos e é fechado para a operação. Logo, H é um subgrupo de G .

□

Dados diversos grupos finitos, é necessário simplificar a visualização de como ocorre cada operação de uma forma mais rápida e de fácil interpretação. Para nos ajudar com isso, exploraremos mais a seguir o conceito de Tabela de Cayley.

A Tabela de Cayley é uma ferramenta de grande importância na introdução à teoria de grupos, principalmente para pequenos grupos finitos. Sua importância está na sua disponibilidade de visualizar a estrutura de um grupo de forma completa e direta. Imagine um grupo como um conjunto de elementos que podem ser combinados por uma operação (como adição ou multiplicação) seguindo certas regras. A Tabela de Cayley nada mais é do que uma representação tabular dessa operação, listando todos os possíveis resultados da combinação de cada par de elementos do grupo. Veja na tabela abaixo como é o processo de operar a tabela de Cayley.

Tabela 2.1: Exemplo de Tabela de Cayley para um grupo genérico de ordem n .

*	e	a_1	a_2	...	a_{n-1}
e	e	e	e	e	e
a_1	e	$a_1 * a_1$	$a_1 * a_2$	...	$a_1 * a_{n-1}$
a_2	e	$a_2 * a_1$	$a_2 * a_2$	...	$a_2 * a_{n-1}$
...	e	...	...	...	...
a_{n-1}	e	$a_{n-1} * a_1$	$a_{n-1} * a_2$	...	$a_{n-1} * a_{n-1}$

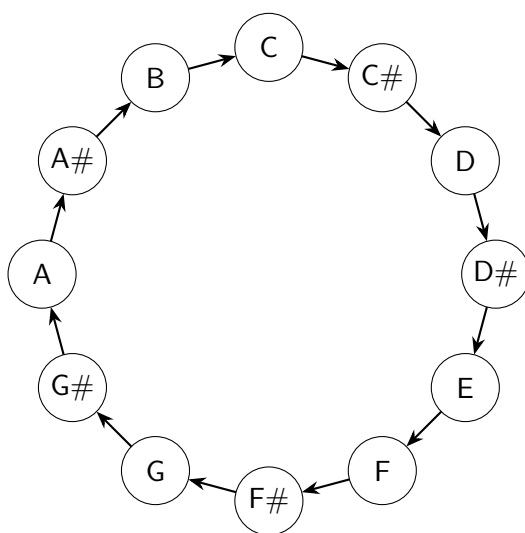
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Além de facilitar a visualização, a tabela também possui algumas propriedades, tais como:

- **Propriedade Comutativa:** Quando a tabela é simétrica em relação à sua diagonal principal, isso significa que a operação de dois elementos tem o mesmo resultado, não importando sua ordem, como $2 + 3 = 5$ e $3 + 2 = 5$, ou seja, o grupo é abeliano.
- **Permutação:** Em um grupo, cada linha e coluna da tabela de Cayley contém todos os elementos do grupo, pois cada elemento do grupo é operado com todos os outros elementos. Propriedade essa essencial da tabela de Cayley, o que garante que o grupo esteja corretamente representado.

2.2 Grupos Cíclicos

Dentre as definições da teoria de grupos, vamos apresentar os **grupos cíclicos**, eles se fazem importantes nesse estudo visando tratar de modelos matemáticos perfeitos para sistemas que exibem repetição periódica e simetria de rotação, característica essa observada na teoria musical, principalmente nas notas musicais, nas quais após suas primeiras doze notas elas se repetem uma oitava acima. A operação de adição em um grupo cíclico é matematicamente equivalente a uma rotação em um polígono regular de n lados, para nossa representação seria como um dodecágono que ao findar a o circuito no último vértice as notas passariam a se repetir, algo como:



Fonte: Criado pelo autor com auxílio do ChatGPT.

Definição 2.2.1. Um grupo G é dito **cíclico** se existe um elemento $a \in G$ tal que todo elemento de G pode ser obtido como uma potência de a . Formalmente,

$$G = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Nesse caso, o elemento a é chamado de **gerador** do grupo. Quando o grupo é finito e possui n elementos, temos que $a^n = e$, onde e é o elemento neutro da operação. O menor número natural n para o qual isso ocorre é chamado de **ordem** do elemento a .

Exemplo 2.2.1. Este exemplo ilustra um grupo cíclico finito que surge como um subgrupo do Grupo Linear Geral $GL_2(\mathbb{R})$, o grupo das matrizes 2×2 invertíveis.

Definimos o elemento gerador g como a matriz de rotação A :

$$g = A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

O grupo cíclico $\langle A \rangle$ é gerado por A sob a operação de multiplicação de matrizes. Sua ordem é 4, pois A^4 é a matriz identidade I (o elemento neutro do grupo):

◦ **Potência 1 (A^1):**

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

◦ **Potência 2 (A^2):**

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

◦ **Potência 3 (A^3):**

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

◦ **Potência 4 (A^4):** (Elemento Neutro)

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

O grupo cíclico $\langle A \rangle$ é, portanto:

$$\langle A \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Este grupo cíclico de ordem 4 demonstra a característica de ser gerado por um único elemento (A). Sua estrutura é cíclica e finita. Este exemplo evidencia como grupos cíclicos podem surgir como subestruturas dentro de grupos maiores e complexos, como o $GL_2(\mathbb{R})$, ilustrando um caso de isomorfismo com o grupo $\mathbb{Z}_4$.

Outra estrutura também fundamental para nosso trabalho segue adiante.

2.3 A Estrutura do Grupo Abeliano de $(\mathbb{Z}_n, +)$

Para ilustrar as propriedades estruturais dos grupos abelianos, apresentaremos um exemplo fundamental de grupo finito. O grupo aditivo dos inteiros módulo n , denotado por $(\mathbb{Z}_n, +)$, é um modelo primário que condensa a teoria de grupos cíclicos e comutativos de forma acessível, sendo crucial para o estudo de estruturas algébricas finitas como estamos propondo com as 12 notas musicais.

Definição 2.3.1. Seja n um inteiro positivo. Definimos $\mathbb{Z}_n$ como o conjunto das classes de equivalência dos inteiros módulo n . Um inteiro a pertence à classe de equivalência $\bar{a}$ se e somente se $a \equiv b \pmod{n}$, para algum b na classe. Equivalentemente, $\bar{a} = \{a + kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$. O conjunto $\mathbb{Z}_n$ pode ser representado pelos seus representantes canônicos:

$$\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}$$

Para simplificar a notação, frequentemente escrevemos $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}$, onde cada elemento representa sua respectiva classe de equivalência módulo n .

Definição 2.3.2. A operação de adição módulo n ($+$) em $\mathbb{Z}_n$ é definida como:

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b} = (a + b) \pmod{n}$$

onde $(a + b) \pmod n$ é o único inteiro r tal que $a + b = qn + r$ para algum inteiro q , e $0 \leq r < n$.

O conjunto $\mathbb{Z}_n$ munido da operação de adição módulo n forma um grupo abeliano:

- **Fechamento:** Para quaisquer $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$, $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b} \in \mathbb{Z}_n$.
- **Associatividade:** Para quaisquer $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_n$, $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \overline{a + b + c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$.
- **Elemento Neutro:** O elemento neutro é $\bar{0}$, pois para todo $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$, $\bar{a} + \bar{0} = \overline{a + 0} = \bar{a}$.
- **Elemento Inverso:** Para cada $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$, o elemento inverso é $\overline{-a} = \overline{n - a}$ (se $a \neq 0$), já que $\bar{a} + \overline{n - a} = \bar{n} = \bar{0} \pmod n$.
- **Comutatividade:** Para quaisquer $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$, $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b} = \overline{b + a} = \bar{b} + \bar{a}$.

O grupo dos restos da divisão inteira por n , denotado por $\mathbb{Z}_n$, com a operação de adição módulo n é um grupo cíclico, como no exemplo abaixo:

Exemplo 2.3.1. Seja

$$\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}$$

e a operação é definida por

$$a + b \equiv (a + b) \pmod n.$$

Esse grupo é cíclico porque o elemento 1 gera todos os outros por meio de adições sucessivas:

$$1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, \dots$$

até retornar a 0 novamente, como veremos no texto abaixo.

Exemplo 2.3.2. O Grupo $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ é um caso específico

Considerando $n = 12$, obtemos o grupo $(\mathbb{Z}_{12}, +)$. O conjunto $\mathbb{Z}_{12}$ é dado por:

$$\mathbb{Z}_{12} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

A operação de adição módulo 12 é definida como $a + b = (a + b) \pmod{12}$.

Adição em $\mathbb{Z}_{12}$:

- $5 +_{12} 7 = (5 + 7) \pmod{12} = 12 \pmod{12} = 0$
- $3 +_{12} 9 = (3 + 9) \pmod{12} = 12 \pmod{12} = 0$
- $8 +_{12} 6 = (8 + 6) \pmod{12} = 14 \pmod{12} = 2$
- O inverso de 5 em $\mathbb{Z}_{12}$ é $12 - 5 = 7$, pois $5 +_{12} 7 = 0$.
- O inverso de 0 em $\mathbb{Z}_{12}$ é 0, pois $0 +_{12} 0 = 0$.

Um subgrupo de $(\mathbb{Z}_n, +)$ é um subconjunto não vazio $H \subseteq \mathbb{Z}_n$ tal que se $a, b \in H$, então $a + (-b) \in H$. Os subgrupos de $(\mathbb{Z}_n, +)$ são cíclicos e são da forma $\langle d \rangle = \{0, d, 2d, \dots, (\frac{n}{d} - 1)d\}$, onde d é um divisor positivo de n , e $\langle d \rangle$ denota o subgrupo gerado por d sob a adição módulo n .

Exemplo 2.3.3. Subgrupos de $(\mathbb{Z}_{12}, +)$:

Os divisores positivos de 12 são 1, 2, 3, 4, 6, e 12. Os subgrupos correspondentes são:

- $\langle 1 \rangle = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\} = \mathbb{Z}_{12}$
- $\langle 2 \rangle = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$
- $\langle 3 \rangle = \{0, 3, 6, 9\}$
- $\langle 4 \rangle = \{0, 4, 8\}$
- $\langle 6 \rangle = \{0, 6\}$
- $\langle 12 \rangle = \langle 0 \rangle = \{0\}$

Cada um desses subgrupos também é um grupo abeliano sob a adição módulo 12.

Capítulo 3

Associação do Grupo à Teoria Musical

De acordo com Boldrini 1980[2] “A teoria musical é um vasto campo dentro da matemática e muitas pessoas a exploraram de diversas maneiras”. Dentre essas diversas maneiras da exploração teoria musical, cabe neste momento a exploração com a teoria de grupos. O presente capítulo é onde tudo que definimos e exemplificamos nos dois capítulos anteriores se relacionam. Por meio da teoria de grupos, abrimos investigação de seus conceitos e definições na teoria musical, desde a transposição de notas a acordes, e visualização concreta por meio do braço do violão. Veremos a teoria de grupos aplicada.

3.1 Aplicação da Definição de Grupos

O comportamento das notas musicais pode oferecer uma perspectiva interessante e tem o potencial de auxiliar no estudo de alguns conceitos da teoria dos grupos, tornando-os talvez mais acessíveis para algumas pessoas que encontram dificuldades em sua compreensão.

Para que consigamos visualizar melhor como as notas musicais se relacionam com a teoria, antes é necessário assimilá-las a algo relacionado aos números. Sendo assim, considerem-nas como posições, partindo da posição $\bar{0}$ à posição $\bar{11}$ do grupo de classes residuais $\mathbb{Z}_{12}$, sendo 12 notas musicais partindo de C à B.

Tome as notas musicais e suas respectivas posições:

Tabela 3.1: Correspondência entre notas musicais e classes de resíduos módulo 12.

C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Agora as nossas notas musicais estão associadas cada uma a seu elemento do grupo. A transposição, que usaremos como operação, envolve tocar ou escrever uma determinada melodia, nota ou até mesmo acordes em um tom diferente, mais agudo ou mais grave, partindo do original.

Exemplo 3.1.1. Posso transpor uma nota, acorde, ou música que está em G para dois tons acima, resultando na nota B, ou o acorde de B, ou até mesmo todo o tom da respectiva música em B, mudando todos os acordes e notas nela presente.

No violão seria como "escorregar" os dedos de uma casa para outra, ou até mesmo um conjunto de posições dos dedos que formam um acorde, para uma casa mais à frente ou atrás da pressionada no início, ou simplesmente fazer um formato de um acorde que está tons acima ou abaixo do tom inicial. Para transpor uma música, por sua vez, no violão é um pouco mais complicado, pois seria necessário transpor antes todos os acordes presentes nela.

Essa translação denotamos por $+$, uma vez que o que fizemos é somar as posições das notas.

Como já associamos as notas às posições, a soma de duas delas resultará em outra posição que relacionamos de volta a uma nota musical, podendo assim operá-las indiretamente e verificarmos a existência de grupo dadas as posições das notas e a operação de transposição proposta.

A1) Associatividade:

$$1. (D\# + E) + G = D = D\# + (E + G).$$

Com elementos do $\mathbb{Z}_{12}$ seria: $(\bar{3} + \bar{4}) + \bar{7} = \bar{2} = \bar{3} + (\bar{4} + \bar{7})$.

$$2. (C + D) + F = G = C + (D + F).$$

É análogo para as demais notas e posições.

A2) Elemento neutro: Nesta abordagem, o elemento neutro é a nota C, representado como $\bar{0}$.

$$1. C + D\# = D\#.$$

$$\text{Com elementos do } \mathbb{Z}_{12}: \bar{0} + \bar{3} = \bar{3}.$$

$$2. C + F\# = F\#.$$

$$\text{Com elementos do } \mathbb{Z}_{12}: \bar{0} + \bar{6} = \bar{6}.$$

Analogamente para as demais notas.

A3) Inverso:

$$1. E + G\# = C.$$

$$\text{Com elementos do } \mathbb{Z}_{12}: \bar{4} + \bar{8} = \bar{0}.$$

$$2. G + F = C.$$

$$\text{Com elementos do } \mathbb{Z}_{12}: \bar{7} + \bar{5} = \bar{0}.$$

Análogo para todos os elementos do conjunto.

Note que são 12 elementos no conjunto munido de uma operação e válidas os três axiomas apresentados na definição 2.1.1, logo as notas musicais juntamente com a operação de translação formam uma estrutura que de fato pode ser entendida como uma estrutura de um grupo, mais especificamente o grupo $\mathbb{Z}_{12}$.

Grupo: $\mathbb{Z}_{12}; (\mathbb{Z}_{12}, +)$.

Perceba que ao operar as notas pode-se notar também que:

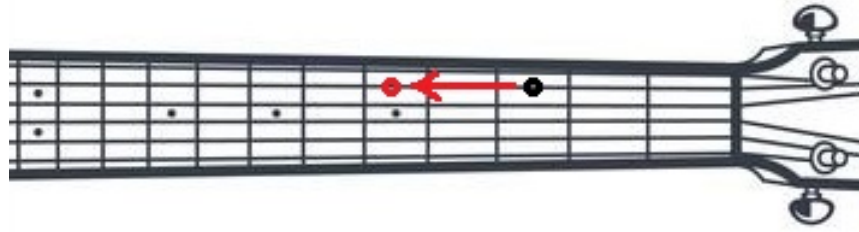
$$1. \bar{2} + \bar{9} = \bar{11} = \bar{9} + \bar{2}.$$

Da mesma forma:

$$2. \bar{7} + \bar{5} = \bar{0} = \bar{5} + \bar{7}.$$

Então, além de um grupo, vale a definição 2.1.2, sendo ele também um **grupo abeliano**.

Abaixo apresentaremos como a operação de translação se comporta no violão. Temos a 5ª corda pressionada na terceira casa. A 5ª corda é a corda A. Pressionada na terceira casa, temos a nota C. Que, ao operar com a nota D, temos:

Figura 3.1: $C + D = \bar{0} + \bar{2} = \bar{2}$

Fonte: Pinterest editada pelo autor (2025).

Perceba que a operação resulta em $\bar{2}$, que é a nota D, exatamente a nota correspondente à 5ª casa da 5ª corda do violão.

Repare em mais este exemplo abaixo, em que operamos a nota $E = \bar{4}$ com $E = \bar{4}$, resultando em $G\# = \bar{8}$. Lembrando agora que estamos marcando essa nota na 4ª corda que é a corda D, e que quando pressionada na 2ª casa é a nota E.

Figura 3.2: $E + E = \bar{4} + \bar{4} = \bar{8} = G\#$

Fonte: Pinterest editada pelo autor (2025).

O que está acontecendo no violão nada mais é do que deslizar o dedo sobre a corda o número de casas referente à segunda nota da operação. Nesse caso, a segunda nota também foi a nota $E = \bar{4}$, e observando a figura, é deslocado da nota inicialmente pressionada exatamente 4 casas. Além disso, como mencionado na seção 1.3 do capítulo 1, essa mesma nota pode-se encontrar na 1ª casa da 3ª corda, pois repare que ela está inicialmente posicionada na 6ª casa. Como sabemos que a relação entre essa corda e a próxima é a 5ª casa, podemos encontrar a nota nesta outra posição, que no violão seria:



Figura 3.3: Nota G# em diferentes posições.

Fonte: Pinterest editada pelo autor (2025).

Esta relação facilita a visualização quando as notas operadas se tornam muito distantes no braço do violão.

3.2 Tabelas de Cayley do $\mathbb{Z}_{12}$ e das Notas Musicais

Na tabela a seguir, há a aplicação da Tabela de Cayley em que denotamos a operação entre as posições de notas musicais uma com as outras, verificando o resultado de cada operação. Nesta seção é importante perceber a importância da tabela de Cayley para visualização de operações entre grupos finitos. O uso da tabela nesta situação, ajuda a visualizar a operação entre todas as notas e seus resultados, facilitando também a correlação com a tabela de posições, além de que, observando a estrutura da tabela, é possível tirar algumas conclusões, como a possibilidade deste grupo ser ou não abeliano, dada a forma de dispersão dos resultados das operações.

Tabela 3.2: Tabela de operação das posições das notas do violão.

Operação das posições das notas do violão												
+	C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B
C	C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B
C#	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B	C
D	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B	C	C#
D#	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B	C	C#	D
E	E	F	F#	G	G#	A	A#	B	C	C#	D	D#
F	F	F#	G	G#	A	A#	B	C	C#	D	D#	E
F#	F#	G	G#	A	A#	B	C	C#	D	D#	E	F
G	G	G#	A	A#	B	C	C#	D	D#	E	F	F#
G#	G#	A	A#	B	C	C#	D	D#	E	F	F#	G
A	A	A#	B	C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#
A#	A#	B	C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A
B	B	C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Na próxima tabela é denotada a mesma operação, porém, dessa vez, com a posição das notas no $\mathbb{Z}_{12}$, o uso dela nos ajudará a compreender como as notas foram operadas facilitando a visualização, tomamos novamente como partida a nota C (Dó), que é a posição $\bar{0}$. Relação essa feita na seção: [3.1](#)

Tabela 3.3: Tabela de operação das classes de resíduos módulo 12.

Operação das posições das notas do violão												
+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{9}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$
$\bar{10}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{11}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Perceba que a tabela é simétrica em relação à sua diagonal principal, verificando e validando mais uma vez a comutatividade desse grupo. Além disso, suas diagonal secundária e suas paralelas possuem sempre a mesma nota. Na diagonal secundária é a nota B , última nota dentre as 12 notas musicais. Esse tipo de diagonal se faz presente normalmente em grupos cuja sua operação é a soma, um dos motivos para usarmos a representação da transposição como $+$.

Subgrupos do Conjunto de Notas Musicais

Denotaremos por A_n os subgrupos presentes no grupo $\mathbb{Z}_{12}$ das notas musicais, são eles:

1. $A_1 = [C, C\#, D, D\#, E, F, F\#, G, G\#, A, A\#, B]$, suas posições são $[\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}]$, subgrupo de ordem 12, que é o próprio $\mathbb{Z}_{12}$.
2. $A_2 = [C, D, E, F\#, G\#, A\#]$, suas posições são $[\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}]$, subgrupo de ordem 6.
3. $A_3 = [C, D\#, F\#, A]$, suas posições são $[\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}]$, subgrupo de ordem 4.
4. $A_4 = [C, E, G\#]$, suas posições são $[\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}]$, subgrupo de ordem 3.
5. $A_5 = [C, F\#]$, suas posições são $[\overline{0}, \overline{6}]$, subgrupo de ordem 2.
6. $A_6 = [C]$, sua posição é $[\overline{0}]$, subgrupo de ordem 1.

Os grupos cíclicos aparecem de maneira natural na música, principalmente quando se consideram as *relações periódicas entre notas*. O conjunto das doze notas da escala cromática, por exemplo, pode ser representado como o grupo cíclico $\mathbb{Z}_{12}$, onde cada nota corresponde a um número inteiro de 0 a 11, e as operações de *transposição* equivalem à *adição módulo 12*.

Assim, ao somar +5 (cinco semitons) a cada nota, obtemos uma *transposição de quarta justa*; ao somar +7, temos uma *transposição de quinta justa*. Essas relações mostram como a estrutura cíclica fornece uma base matemática para compreender **simetrias e padrões harmônicos** na teoria musical.

3.3 Visualização Matricial dos Acordes

Na teoria musical, os acordes são compostos por três ou mais notas, tendo como fundamental, terça e quinta, de acordo com o campo harmônico de cada uma, como vimos na seção 1.2. No entanto, essa definição funciona apenas quando seguimos o campo harmônico de cada nota.

Para adotarmos o formato da tabela de notas e posições, é necessário adaptar essa definição: a nota fundamental passa a ser a nota **dominante** do acorde desejado, a terça

corresponde à quarta nota posterior à dominante seguindo a tabela de notas, enquanto a quinta corresponde à sétima nota posterior à dominante.

Exemplo 3.3.1. Acorde de C:

A terça corresponde à E, enquanto a quinta corresponde G. Observe que, podemos obter uma relação para com essa formação de acordes. Note que a relação é exatamente:

$$\text{Acorde de Dominante} = \text{Dominante}, \text{Dominante} + \bar{4}, \text{Dominante} + \bar{7}.$$

Exemplo 3.3.2. Acorde de $D(\bar{2}) = \bar{2}, \bar{2} + \bar{4}, \bar{2} + \bar{7}$, sendo assim, acorde de $D(\bar{2}) = \bar{2}, \bar{6}, \bar{9}$.

Qualquer acorde maior pode ser obtido através dessa relação, lembrando também que analisaremos apenas os acordes maiores compostos por 3 notas, mas a operação é análoga para as demais formações de acordes, sejam eles menores, com sétima, dentre outras formações.

Nas operações com matrizes, os acordes foram analisados e operados como matriz coluna, a operação entre outros dois acordes pode gerar um acorde dissonante (que não produz um som agradável), uma vez que esses acordes não são comumente usado na música, não iremos abordá-los, para que sempre obtenhamos acordes consonantes(agradoável), só é possível se um entre os dois acordes operados for constituído de apenas uma nota, para que se consiga fazer a mudança de tonalidade corretamente. O uso de matrizes é importante pois aparece como uma ferramenta didática de compreensão do assunto de matrizes com entradas em conjuntos finitos, tópico esse que em geral é pouco abordado em cursos de graduação.

A seguir, veremos as representações de cada acorde como sua matriz. Para melhor visualização, a nota fundamental de cada acorde estará no topo da matriz, ou seja, na posição a_{11} a terça do acorde na posição a_{21} e a quinta em a_{31} .

Exemplo 3.3.3. Acorde de $C = (C, E, G) = \begin{pmatrix} C \\ E \\ G \end{pmatrix}$.

O acorde acima é um exemplo perfeito de acorde consonante como apontado em 1.2, já organizado matricialmente. Em contra partida um exemplo de acorde dissonante é o seguinte:

Exemplo 3.3.4. $\begin{pmatrix} B \\ C \\ D \end{pmatrix}$

Observe que ele não tem a estrutura sugerida, e caso as notas sejam tocadas juntas produzirão um som estranho ligeiramente desagradável.

Visto isto, segue abaixo lista de matrizes dos acordes maiores e sua matriz equivalente de posições:

1.

$$\begin{pmatrix} C \\ E \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{4} \\ \bar{7} \end{pmatrix}$$

6.

$$\begin{pmatrix} F \\ A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{5} \\ \bar{9} \\ \bar{0} \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} C\# \\ F \\ G\# \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{5} \\ \bar{8} \end{pmatrix}$$

7.

$$\begin{pmatrix} F\# \\ A\# \\ C\# \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{6} \\ \bar{10} \\ \bar{1} \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} D \\ F\# \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{6} \\ \bar{9} \end{pmatrix}$$

8.

$$\begin{pmatrix} G \\ B \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{7} \\ \bar{11} \\ \bar{2} \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{pmatrix} D\# \\ G \\ A\# \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{3} \\ \bar{7} \\ \bar{10} \end{pmatrix}$$

9.

$$\begin{pmatrix} G\# \\ C \\ D\# \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{8} \\ \bar{0} \\ \bar{3} \end{pmatrix}$$

5.

$$\begin{pmatrix} E \\ G\# \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{4} \\ \bar{8} \\ \bar{11} \end{pmatrix}$$

10.

$$\begin{pmatrix} A \\ C\# \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{9} \\ \bar{1} \\ \bar{4} \end{pmatrix}$$

11.

$$\begin{pmatrix} A\# \\ D \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{10} \\ \overline{2} \\ \overline{5} \end{pmatrix}$$

12.

$$\begin{pmatrix} B \\ D\# \\ F\# \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{11} \\ \overline{3} \\ \overline{6} \end{pmatrix}$$

Além dessas, usaremos também as matrizes compostas por uma nota só, são elas:

$$\begin{pmatrix} C \\ C \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} C\# \\ C\# \\ C\# \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{1} \\ \overline{1} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} D \\ D \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{2} \\ \overline{2} \\ \overline{2} \end{pmatrix}; \quad \dots; \quad \begin{pmatrix} B \\ B \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{11} \\ \overline{11} \\ \overline{11} \end{pmatrix}$$

Para visualizarmos agora um exemplo da transposição de um acorde usando outro, vamos pegar como exemplo o acorde de D , que é pressionado no violão nas 3ª e 1ª cordas na 2ª casa e na 2ª corda na 3ª casa, e se toca a partir da 4ª corda para baixo.

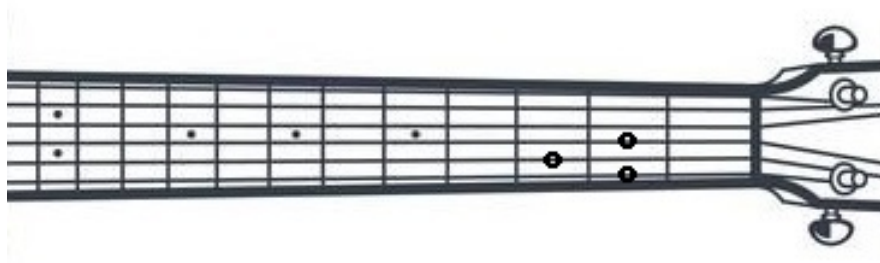


Figura 3.4: Acorde de D

Fonte: Pinterest editada pelo autor (2025).

Vamos operar esse acorde com o acorde que possui somente as notas E :

$$\begin{pmatrix} E \\ E \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{4} \\ \overline{4} \\ \overline{4} \end{pmatrix}$$

Sendo assim, temos a operação de adição matricial com o acorde de D :

$$\begin{pmatrix} D \\ F\# \\ A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E \\ E \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F\# \\ A\# \\ C\# \end{pmatrix}$$

E sua representação em classes de congruência módulo 12:

$$\begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{6} \\ \bar{9} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{4} \\ \bar{4} \\ \bar{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{6} \\ \bar{10} \\ \bar{1} \end{pmatrix}$$

Resultando no acorde de $F\#$. No violão, seria como deslocar todos os dedos pressionados para quatro casas à frente. Mas como existe o traste que, ao tocar a quarta corda solta, produz a nota D fundamental, é necessário transpor também esse traste. No violão, isso é feito com uma **pestana**, onde o dedo indicador pressiona todas as cordas que serão tocadas (no caso desse acorde, da 4ª corda abaixo), ficando da seguinte maneira:

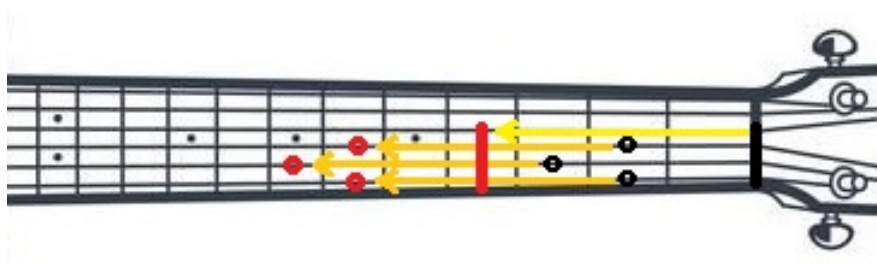


Figura 3.5: Acorde de D transposto para $F\#$.

Fonte: Pinterest editada pelo autor (2025).

Essa representação de matrizes em acordes serve para visualização de operações de matrizes finitas, pois normalmente é difícil encontrar bases para fazer esse papel, além de existir uma representação concreta da mesma. Isso vale para qualquer acorde na estrutura do violão, como de outros instrumentos. Dessa maneira, é possível até mesmo transpor músicas inteiras usando um acorde composto de apenas uma nota, operando com os acordes presentes naquela música.

3.4 O Grupo Cíclico das Razões de Frequência

Como curiosidade, cabe mostrar a tabela de operação entre as constantes que multiplicam a frequência. Lembre-se que as notas musicais são obtidas a partir de $Nota = a^k f$, onde k é exatamente as posições das notas denotadas acima. Lembre-se que estamos tomando sempre a nota C como ponto de partida (as cordas do violão tocadas soltas não correspondem à nota C, cada uma possui uma nota distinta, exceto a 1ª e a 6ª, que compartilham a nota E, porém diatântes duas oitavas).

Tabela 3.4: Tabela de operação das frequências das notas (baseado em potências).

Operação das frequências das notas												
*	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	a^{10}	a^{11}
a^0	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	a^{10}	a^{11}
a^1	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	a^{10}	a^{11}	a^0
a^2	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	a^{10}	a^{11}	a^0	a^1
a^3	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	a^{10}	a^{11}	a^0	a^1	a^2
a^4	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	a^{10}	a^{11}	a^0	a^1	a^2	a^3
a^5	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	a^{10}	a^{11}	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4
a^6	a^6	a^7	a^8	a^9	a^{10}	a^{11}	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5
a^7	a^7	a^8	a^9	a^{10}	a^{11}	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6
a^8	a^8	a^9	a^{10}	a^{11}	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7
a^9	a^9	a^{10}	a^{11}	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8
a^{10}	a^{10}	a^{11}	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
a^{11}	a^{11}	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	a^{10}

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Esta tabela por sua vez se relaciona com as constantes que multiplicam a frequência da nota C, para encontrar as demais notas, relação essa observada lá no capítulo 1. E, se perceber, o algoritmo da potência é o mesmo, comparando com a tabela anterior.

Considerações Finais

Este estudo buscou investigar como a teoria de grupos se aplica na transposição de notas e acordes, buscando essa relação entre álgebra e teoria musical. A proposta central deste trabalho foi explorar de que forma esta abordagem algébrica pode modelar a organização das notas e suas transformações, bem como oferecer uma nova abordagem didática que conecta a matemática e a música, facilitando a compreensão de ambos os campos. Para a visualização concreta das transformações que ocorrem com as notas durante as operações, o trabalho teve como propósito a utilização do violão para facilitar a visualização concreta dessas mudanças. Esta investigação se posicionou no sentido de estabelecer uma ponte robusta entre a formalidade da Álgebra e a expressividade da Teoria Musical, reforçando a ideia de que a estrutura lógica é um pilar comum e compartilhado entre estas duas áreas.

Os resultados e as conclusões deste estudo foram estabelecidos a partir das aplicações e exemplificações feitas, que confere à hipótese teórica levantada. Todo este trabalho nos mostrou por meio das aplicações e exemplificações feitas que, considerando as notas musicais como posições no grupo cíclico $\mathbb{Z}_{12}$, munido com a operação de transposição, que se comporta de maneira idêntica à adição modular. Esta é a conclusão fundamental que valida o modelo matemático aqui proposto, pois estabelece o isomorfismo estrutural entre os 12 semitons e as 12 classes de resíduos. Essa abordagem se mostrou altamente eficaz e precisa, não somente para a transposição de notas isoladas, mas também porque nos permitiu observar a teoria de grupos de forma mais concreta, visando facilitar a compreensão da mesma, bem como utilizando-se dos recursos que a teoria musical disponibiliza, como a visualização de propriedades usando instrumentos, dentre tais utilizamos o violão. Além do mais, a pesquisa aprofundou-se na modelagem das estruturas harmônicas complexas, os acordes, formalizando-os através do uso de matrizes-

coluna, o que permitiu demonstrar que a transposição de acordes se manifesta como uma soma de matrizes. Esta extensão é uma aplicação significativa da Álgebra, que facilita a visualização das mesmas propriedades com grupos de matrizes e confira que o sistema de notas e acordes é regido por leis de simetria e transformações matemáticas. Assim sendo, todo este trabalho cumpriu de maneira satisfatória o objetivo de estabelecer uma ponte didática e teórica entre duas áreas do saber que, embora pareçam distantes no senso comum, compartilham estruturas fundamentais de simetria e transformação.

Apesar de ter atingido os objetivos propostos em sua plenitude, este trabalho reconhece alcance limitado, que se concentrou predominantemente na transposição aditiva em $\mathbb{Z}_{12}$. Contudo, o modelo desenvolvido serve como um ponto de partida, e a sua aplicação prática e teórica abre um campo para investigações futuras. Além disso, a metodologia desenvolvida possibilita a investigação da mesma teoria em outros instrumentos musicais, como o piano, que possui uma disposição linear das notas, bem como em instrumentos com estruturas cíclicas diferentes, como o baixo ou instrumentos de cordas com afinações variadas. No aspecto teórico, as conclusões deste estudo, que estabelecem o isomorfismo com $\mathbb{Z}_{12}$, abrem possibilidades de investigação da mesma teoria em transformações mais complexas. Sugere-se, o aprofundamento na aplicação dos Grupos de Transformação para modelar outras operações essenciais da composição, como a inversão e de acordes, o que pode levar a um entendimento ainda mais completo das simetrias que regem a estrutura musical e estender a validação da Teoria de Grupos para além do contexto aditivo, explorando a multiplicação e as relações não-comutativas na música. Assim, este estudo finaliza não como um ponto de chegada, mas como um alicerce para que futuras pesquisas explorem a Teoria de Grupos para além do contexto aditivo, estendendo a análise a estruturas não-comutativas na música.

Referências Bibliográficas

- [1] 2024. “Imagem 1”. Disponível em: <https://br.pinterest.com/pin/872642865268065451/>. Citado nas páginas iv e 4.
- [2] BOLDRINI, J. L., COSTA, S. I., FIGUEREDO, V., et al., 1980, *Álgebra linear*. Harper & Row. Citado na página 20.
- [3] CAETANO, M. C., GOMES, R. K., 2012, “A importância da música na formação do ser humano em período escolar”, *Educação em revista*, v. 13, n. 2, pp. 71–80. Citado na página ii.
- [4] DE ESTUDOS DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA, R. A., 2018, “Revista Africana de Estudos de Matemática e Estatística”, v. 1, n. 1, pp. 10–20. Citado na página iii.
- [5] GONÇALVES, A., 1979, “Introdução à álgebra”, . Citado na página 10.
- [6] GUSMÃO, P., 2012, “Teoria elementar da música”, *Centro de Artes e Letras. Universidade Federal de Santa Maria*. Citado na página 1.
- [7] HERSTEIN, I., 1970. “Tópicos de Algebra, Ed”. . Citado na página 10.
- [8] SEEGER, A., 2008, “Etnografia da música”, *Cadernos de campo*, v. 17, n. 17, pp. 237–260. Citado na página ii.
- [9] TSOK, S. H., JELTEN, N. B., GAMSON, D. G., 2018, “Application of group theory to musical notes”, *African Journal of Mathematics and Statistics Studies*, v. 1, n. 1, pp. 10–20. Citado na página iii.
- [10] VAN WAESBERGHE, J. S., 1951, “The musical notation of Guido of Arezzo”, *Musica Disciplina*, v. 5, pp. 15–53. Citado na página ii.
- [11] YOUTUBE, 2025. “Matemática do violão”. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=B17NF8q_c7U&t. Acesso em: 18 nov. 2025. Citado na página 1.

- [12] ZACZÉSKI, M. E., OTHERS, 2018, “Violão: aspectos acústicos, estruturais e históricos”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 40, n. 1, pp. e1309. Citado nas páginas [1](#) e [4](#).