



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA - UESB
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Laisa Neves Pereira

Análise de Propriedades Qualitativas de Sistemas
Dinâmicos Contínuos

VITÓRIA DA CONQUISTA

2026



Laisa Neves Pereira

ANÁLISE DE PROPRIEDADES QUALITATIVAS DE SISTEMAS DINÂMICOS CONTÍNUOS

Monografia apresentada à Banca Examinadora da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciatura em Matemática sob orientação do Prof. Me. Lucas Venâncio Da Silva Santos

VITÓRIA DA CONQUISTA

2026

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA - UESB
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

COORDENAÇÃO DO CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

A monografia “Análise de Propriedades Qualitativas de Sistemas Dinâmicos Contínuos”, apresentada e defendida por LAISA NEVES PEREIRA, matrícula 202210861, foi aprovada pela Banca Examinadora com nota “”.

Vitória da Conquista, 5 de fevereiro de 2026

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Me. Lucas Venâncio da Silva Santos
Orientador

Prof. Dr. Genilson Soares De Santana
Membro da banca

Prof. Dr. Leandro Correia Araújo
Membro da banca

Agradecimentos

Agradeço a Deus, primeiramente, pela força, por iluminar minhas escolhas, pela oportunidade de estudar, crescer e chegar até aqui.

Agradeço aos meus pais, Zelita e José Carlos, por confiarem em mim e me darem todo o suporte, pelo carinho que sempre recebi e por serem minha base em todos os momentos. Sou grata pela dedicação, pelos conselhos, pela força nos dias difíceis e por nunca medirem esforços para que eu pudesse alcançar meus sonhos. Cada conquista minha carrega um pouco de tudo aquilo que vocês são e representam na minha vida.

Agradeço aos meus irmãos, Zanny e Murilo, pelo apoio e por estarem sempre ao meu lado. Obrigada pelas conversas, pelo incentivo nos dias mais difíceis e por tornarem tudo mais leve com a presença de vocês.

Agradeço a toda a minha família, pelo carinho, pela torcida constante e por cada gesto de apoio, mesmo nos detalhes mais simples, fez diferença ao longo desta etapa.

Agradeço ao meu namorado, Gustavo, por cada palavra de incentivo, por compreender minhas ausências e por estar ao meu lado em todas as fases desta caminhada.

Agradeço aos meus amigos, em especial, Alison, David, Flávia e Laiza, por deixarem essa trajetória mais leve, pelas risadas compartilhadas e pela companhia nos momentos em que eu mais precisava desligar um pouco da rotina.

Agradeço ao meu orientador, professor Me. Lucas Venâncio da Silva Santos, por todo o seu esforço, pela disponibilidade em me acompanhar durante cada etapa e pelas orientações que contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho. Sou grata pela paciência, pelas sugestões e pelo comprometimento que tornou esse processo muito mais seguro e produtivo.

Por fim, agradeço à banca examinadora, composta pelos professores doutores Genilson Soares de Santana e Leandro Correia Araújo, pela disposição em participar da

avaliação deste trabalho e por contribuírem com este momento tão significativo da minha formação.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo estudar as propriedades qualitativas de sistemas dinâmicos contínuos por meio da análise de soluções de equações diferenciais ordinárias. A abordagem utilizada permite caracterizar qualitativamente tais sistemas, facilitando a compreensão de seu comportamento global. Foram explorados conceitos fundamentais da teoria, tais como conjuntos invariantes, pontos críticos e a seção de Poincaré. Para ilustrar e consolidar os conceitos teóricos, são analisados exemplos relevantes, incluindo soluções de equações diferenciais ordinárias, verificando-se em que condições estas definem um sistema dinâmico contínuo. A metodologia adotada foi de caráter qualitativo, baseada em pesquisa bibliográfica com livros e materiais acadêmicos especializados sobre o tema.

Palavras-chave: Conjuntos Invariantes. Equações diferenciais ordinárias. Seção de Poincaré. Sistemas Dinâmicos Contínuos.

Abstract

This work aims to study the qualitative properties of continuous dynamical systems through the analysis of solutions to ordinary differential equations. The approach used allows for the qualitative characterization of such systems, facilitating the understanding of their global behavior. Fundamental concepts of the theory were explored, such as invariant sets, critical points, and the Poincaré section. To illustrate and consolidate the theoretical concepts, relevant examples are analyzed, including solutions to ordinary differential equations, verifying under what conditions these define a continuous dynamical system. The methodology adopted was qualitative, based on bibliographic research with books and specialized academic materials on the subject.

Keywords: Continuous Dynamical Systems. Invariant Sets. Minimal Sets. Ordinary differential equations. Poincaré Section.

Sumário

Lista de Figuras	i
Introdução	ii
1 Equações Diferenciais Ordinárias	1
1.1 Equações Diferenciais Ordinárias	1
1.2 Equações Diferenciais Autônomas	6
1.3 Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias	7
1.4 Sistemas de Equações Diferenciais Bidimensionais	10
1.5 O Teorema de Existência e Unicidade	16
2 Sistemas Dinâmicos Contínuos	21
2.1 Sistema Dinâmico Contínuo	21
2.2 Fluxos gerados por soluções de EDOs	27
3 Conceitos qualitativos de Sistemas Dinâmicos Contínuos	51
3.1 Conjuntos e Trajetórias Invariantes	51
3.2 Pontos críticos	60
3.3 Seção de Poincaré	62
Considerações Finais	67
A Primeiro Apêndice	69
A.1 Espaços Normados	69
A.2 Espaços Métricos	70
A.3 Conjuntos abertos	72

A.4 Conjuntos fechados	72
A.5 Conjuntos compactos	73
A.6 Conjunto Conexo	74
Referências Bibliográficas	75

Lista de Figuras

3.1	Seção de Poincaré	62
-----	-----------------------------	----

Introdução

A Teoria dos Sistemas Dinâmicos surgiu como uma área importante dentro do estudo das Equações Diferenciais Ordinárias, a partir dos trabalhos do matemático Henri Poincaré, no final do século XIX. Poincaré foi um dos primeiros a trazer ideias que mudaram a forma de compreender o comportamento de certos sistemas, especialmente com a criação do conceito de trajetória.

A introdução desse conceito permitiu a formulação e resolução de importantes problemas topológicos no contexto da teoria das equações diferenciais. Com isso, Poincaré estabeleceu as bases para o desenvolvimento da noção abstrata de Sistemas Dinâmicos, promovendo uma nova maneira de interpretar o comportamento de soluções ao longo do tempo.

Posteriormente, a teoria recebeu um impulso significativo com os trabalhos de G. D. Birkhoff. Este avanço foi consolidado em 1927 com a publicação de sua monografia fundamental, intitulada "Dynamical Systems", que se tornou a base para grande parte da pesquisa desenvolvida nas décadas seguintes. Para saber mais sobre o contexto histórico das Equações Diferenciais e Sistemas Dinâmicos, recomendamos a leitura do livro [2].

O estudo de sistemas dinâmicos contínuos tem se mostrado fundamental para compreender como diversos fenômenos evoluem ao longo do tempo. O objetivo geral deste trabalho é analisar propriedades qualitativas de sistemas dinâmicos contínuos, investigando quando e como soluções de equações diferenciais ordinárias definem um sistema dinâmico, bem como compreender elementos fundamentais associados ao comportamento das trajetórias. Para alcançar essa meta, estabelecemos como objetivos específicos apresentar definições básicas e a classificação das equações diferenciais ordinárias, com ênfase nas equações autônomas, estudar a construção de sistemas dinâmicos gerados por soluções de EDOs e verificar suas propriedades essenciais,

introduzir e analisar a versão modificada de sistema dinâmico, e discutir conceitos elementares de sistemas dinâmicos contínuos.

A relevância deste estudo reside no fato de que o tema de sistemas dinâmicos, embora seja amplamente desenvolvido em cursos avançados de matemática, muitas vezes é apresentado de forma abstrata e pouco acessível aos estudantes de graduação. Assim, este trabalho se justifica por oferecer uma abordagem mais clara e introdutória, que conecta EDOs com ideias fundamentais de sistemas dinâmicos. Entende-se como sistema dinâmico contínuo um modelo matemático que descreve a trajetória de um ponto x no espaço de fase X ao longo do tempo t .

A metodologia adotada consiste em uma pesquisa de caráter teórico e bibliográfica, fundamentada principalmente em obras clássicas e contemporâneas sobre EDOs e sistemas dinâmicos. Entre os autores utilizados destacam-se Boyce e DiPrima, com o clássico "Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems" [4]; Barreira e Valls, com a obra "Dynamical systems: An introduction" [1]; e Bhatia e Szegő, com "Stability theory of dynamical systems" [2], cujas contribuições servem como base para a apresentação dos conceitos e para o desenvolvimento das análises realizadas.

Por fim, a estrutura deste trabalho está organizada em três capítulos. No primeiro capítulo, apresentamos uma revisão das equações diferenciais ordinárias, incluindo conceitos básicos, classificação, equações autônomas, sistemas de EDOs e o caso bidimensional, que será utilizado posteriormente na análise qualitativa, e o teorema de existência e unicidade de soluções. No segundo capítulo, introduzimos formalmente a noção de sistema dinâmico contínuo, bem como os fluxos gerados por soluções de EDOs, e também a apresentação da versão modificada de sistema dinâmico para situações em que o fluxo não está definido para todo tempo. O terceiro capítulo discutimos os conceitos elementares de sistemas dinâmicos contínuos, como conjuntos e trajetórias invariantes, pontos críticos, além da análise da seção de Poincaré, que permite uma visão mais profunda do comportamento qualitativo das trajetórias. Ao final deste trabalho, nas considerações finais, são apresentadas as conclusões alcançadas e as dificuldades vivenciadas. Também são sugeridos possíveis temas para pesquisas futuras, com base nas oportunidades identificadas ao longo do estudo.

Capítulo 1

Equações Diferenciais Ordinárias

Neste capítulo será apresentado o conceito de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Iniciamos com definições introdutórias, classificações e exemplos. Também serão analisadas formas específicas de EDOs, como as equações lineares, separáveis e autônomas. Em seguida, abordamos o Teorema de Existência e Unicidade, que estabelece as condições suficientes sob as quais uma EDO possui solução e se essa solução é única. Os conteúdos apresentados neste capítulo foram fundamentados nas referências [4], [5], [7], [9], [11]. Recomendamos a leitura dessas obras, uma vez que constituem as principais fontes teóricas que orientaram a elaboração e o desenvolvimento dos temas aqui tratados.

1.1 Equações Diferenciais Ordinárias

Uma **equação diferencial ordinária (EDO)** é uma equação que relaciona uma função f a uma ou mais de suas derivadas. Como, por exemplo,

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) + 2x \frac{df}{dx}(x) + f^2(x) = \text{sen}(x).$$

Observe que a equação apresentada envolve a função f juntamente com suas primeira e segunda derivadas. Uma equação diferencial pode conter a própria função f , suas derivadas, ou ambas, dependendo de sua natureza. No entanto, para que uma equação seja caracterizada como diferencial, é indispensável que nela apareça ao menos uma derivada da função desconhecida, podendo conter a própria função f ou não.

O propósito fundamental ao resolver uma equação desse tipo é determinar qual é a função f que satisfaz a relação estabelecida. Assim, introduz-se um novo paradigma essencial: enquanto na resolução de uma equação algébrica buscamos encontrar valores numéricos específicos que satisfaçam determinada igualdade, na resolução de uma equação diferencial procuramos encontrar uma ou mais funções que satisfaçam à equação apresentada.

A seguir, apresentamos a definição formal de uma equação diferencial ordinária (EDO).

Definição 1.1.1. Uma equação diferencial que inclui somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma única variável independente é chamada de Equação Diferencial Ordinária (EDO). Uma EDO é da forma:

$$F(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$$

onde

- t é a variável independente;
- $x(t)$ é a função desconhecida (também chamada de solução);
- $x'(t) = \frac{dx}{dt}$, $x''(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$, entre outras, são as derivadas da função $x(t)$;
- n é a maior ordem de derivação presente na equação.

Em vez de lidar com “equações que envolvem funções e suas derivadas”, vamos definir uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, como (que é mais coerente para este trabalho)

$$x' = f(t, x).$$

Na equação abaixo formulamos o problema de Cauchy para a equação acima. Isto significa que dados t_0 , x_0 fixos queremos saber se existe alguma solução da equação

que no ponto t_0 assume o valor x_0 e se essa solução é única. O problema de Cauchy com condição inicial (t_0, x_0) é denotado por

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

A definição de uma equação diferencial estabelece a base para o estudo de sua solução, permitindo compreender como as derivadas de uma função se relacionam entre si e com a própria função. Assim, é fundamental apresentar o conceito de solução de uma EDO.

Definição 1.1.2. Uma solução de uma equação diferencial ordinária (EDO) é uma função $f(x)$, definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, que possui derivadas até a ordem necessária e que, ao ser substituída na equação diferencial, transforma-a em uma identidade. Em outras palavras, $f(x)$ é solução da E.D.O.

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

se, e somente se,

$$F(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0,$$

para todo x pertencente ao intervalo I .

As equações diferenciais ordinárias podem ser classificadas de diversas maneiras. Podemos classificar a equação diferencial ordinária pela **ordem**, ou seja, a ordem de uma EDO é determinada pela maior derivada da função desconhecida que aparece na equação.

Exemplo 1.1.1. Na EDO

$$x' + x = 0,$$

podemos perceber que a maior derivada da função desconhecida é de ordem 1, logo dizemos que é uma EDO de primeira ordem. Da mesma forma podemos definir, por exemplo,

$$x'' + 2x' + x = 0$$

é uma EDO de segunda ordem.

Definição 1.1.3 (EDO LINEAR). Uma equação diferencial ordinária é denominada linear quando pode ser escrita da seguinte forma

$$a_n(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_0(t)x = g(t).$$

Uma equação diferencial é chamada de linear se satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) A variável dependente x e todas as suas derivadas são do primeiro grau; isto é, o expoente de cada termo envolvendo x é 1.
- (ii) Cada coeficiente depende apenas da variável independente t .

Em outras palavras, uma EDO é chamada **linear** se a função desconhecida $x(t)$ e suas derivadas aparecem de maneira linear, ou seja, não estão elevadas a expoentes diferentes de 1 e nem multiplicadas entre si. Caso contrário, a EDO é **não linear**.

Exemplo 1.1.2. Na EDO

$$x'' + 3x' - 4x = 0$$

podemos perceber que a função incógnita x e suas derivadas aparecem de forma linear, isto é, não estão elevadas a potências diferentes de 1 e nem são multiplicadas entre si. Já a EDO

$$x'' + x^2 = 0$$

é uma EDO não linear, pois o termo x^2 introduz uma não linearidade na equação.

Existe um tipo de equação diferencial que é importante citar, as equações separáveis. Essas equações podem ser reorganizadas de forma que todas as variáveis de uma mesma natureza fiquem de um lado da equação. Em outras palavras, as variáveis dependentes estejam de um lado da equação e as variáveis independentes, do outro.

Definição 1.1.4. Uma equação diferencial de primeira ordem é dita separável, ou de variáveis separadas, se puder ser posta na forma:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{g(t)}{f(x)},$$

ou na forma diferencial,

$$f(x) dx = g(t) dt,$$

onde, as funções f e g são contínuas em algum intervalo de $\mathbb{R}$.

Essa característica permite que resolvamos a equação integrando ambos os membros em relação às suas respectivas variáveis. No exemplo a seguir, aplicaremos essa técnica para encontrar a solução da equação diferencial $x' = 2tx$ ilustrando como a separação de variáveis simplifica o processo de resolução.

Exemplo 1.1.3. Considere a seguinte equação separável

$$x' = 2tx$$

No método da separação das variáveis (que é um método apenas para equações de primeira ordem) é útil escrever a derivada usando a notação de Leibniz. Portanto, temos

$$\frac{dx}{dt} = 2tx.$$

Dividindo ambos os lados por x (assumindo $x \neq 0$, pois se $x = 0$ a divisão não se aplica, mas nesse caso a análise da equação original deve ser feita separadamente) para que as variáveis de uma mesma natureza fiquem de um lado da equação

$$\frac{1}{x} dx = 2t dt.$$

Integrando ambos os lados

$$\int \frac{1}{x} dx = \int 2t dt$$

$$\ln |x| = \frac{2t^2}{2} + C$$

$$\ln |x| = t^2 + C.$$

onde C é a constante de integração. Agora, isolando o x

$$e^{\ln |x|} = e^{t^2+C}$$

$$|x| = e^{t^2+C} = e^C e^{t^2},$$

Fazendo $e^C = D$, obtemos

$$x = D e^{t^2}.$$

Agora verifiquemos que $x(t)$, de fato, satisfaz a equação. Note que,

$$\frac{dx}{dt} = 2t D e^{t^2} = 2tx(t)$$

1.2 Equações Diferenciais Autônomas

Nesta seção abordamos as equações diferenciais autônomas, que são aquelas em que a variável independente não aparece explicitamente, de modo que a taxa de variação depende apenas da variável dependente. Além disso, consideraremos o Problema de Valor Inicial (PVI) associado a essas equações, garantindo a existência e unicidade das soluções sob condições adequadas, como a condição de Lipschitz, veremos mais sobre o teorema de existência e unicidade de soluções em 1.5.

Analisando as equações diferenciais na forma $x' = F(t, x)$, com ênfase no caso em que a função F não depende explicitamente do tempo t , temos que essas equações são conhecidas como equações diferenciais autônomas.

Definição 1.2.1. Uma equação diferencial autônoma é da forma:

$$x' = F(x).$$

Em outras palavras, uma EDO é autônoma se, a variável independente t não aparece explicitamente na equação. Se a variável aparece, a EDO é não autônoma.

Uma propriedade fundamental dessas equações é que, se $x(t)$ é uma solução de $x' = F(x)$, então $y(t) = x(t + c)$, com c constante, também será uma solução. Assim,

supondo que a existência e a unicidade da solução estejam garantidas, consideramos o Problema de Valor Inicial (PVI):

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

onde t_0 representa o instante inicial. Podemos afirmar que $x(t)$ é solução desse PVI se, e somente se, $y(t) = x(t + c)$ também for solução do problema equivalente com $t_0 = 0$:

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Dessa forma, ao tratar equações diferenciais autônomas, podemos considerar apenas condições iniciais onde $t_0 = 0$.

Um caso particularmente importante no estudo de equações autônomas é o das soluções constantes, que correspondem aos pontos onde a função f se anula. Isso nos leva ao conceito fundamental de ponto de equilíbrio.

Definição 1.2.2. Considere a EDO autônoma

$$x'(t) = f(x(t)). \tag{1.1}$$

Note que, se $\bar{x} \in \mathbb{R}$ é tal que $f(\bar{x}) = 0$, então $x(t) = \bar{x}, \forall t$, é uma solução de 1.1.

Em outras palavras, um ponto de equilíbrio representa um estado do sistema que permanece inalterado ao longo do tempo. Para mais detalhes sobre soluções de equilíbrio e pontos de equilíbrio, sugerimos a leitura de [9].

1.3 Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias

Um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem é um conjunto de equações que envolvem as variáveis dependentes, suas derivadas de primeira ordem, e a variável independente. A principal característica desses sistemas é que eles descrevem

a taxa de variação das variáveis dependentes em função do tempo ou de outra variável independente, permitindo analisar como essas variáveis evoluem dinamicamente ao longo do tempo.

Observe que a equação de segunda ordem

$$y'' + 2ty' - y = e^t$$

pode ser convertida em um sistema de duas equações de primeira ordem, bastando realizar a transformação

$$y_1 = y, \quad y_2 = y'$$

Logo, temos que $y'_2 = y''$, e assim podemos reescrever $y'' + 2ty' - y = e^t$ da seguinte maneira:

$$y'_1 = y_2$$

$$y'_2 = y_1 - 2ty_2 + e^t$$

Analisaremos sistemas compostos por n equações diferenciais lineares de primeira ordem com n incógnitas $y_1, \dots, y_n$. Ou seja, investigaremos sistemas da forma

$$y'_1 = p_{11}(t)y_1 + p_{12}(t)y_2 + \dots + p_{1n}(t)y_n + q_1(t)$$

$$y'_n = p_{n1}(t)y_1 + p_{n2}(t)y_2 + \dots + p_{nn}(t)y_n + q_n(t)$$

As funções p_{ik} e q_i que aparecem acima são funções definidas em certo intervalo I . As variáveis $y_1, \dots, y_n$ são as funções a serem determinadas. Sistemas desse tipo são denominados sistemas lineares de primeira ordem. Uma equação diferencial de ordem n pode sempre ser convertida em um sistema. Suponhamos que temos

$$y_{(n)} + a_1 y_{(n-1)} + \dots + a_n y = R(t)$$

onde a_i são funções definidas. Vamos definir:

$$y_1 = y, \quad y_2 = y'_1, \quad y_3 = y''_2, \dots, \quad y_n = y_{(n-1)}$$

E escrevemos:

$$y'_1 = y_2, y'_2 = y_3, \dots, y'_{n-1} = y_n$$

$$y'_n = -a_n y_1 - a_{n-1} y_2 - \dots - a_1 y_n + R(t).$$

Considere o sistema

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_1 - 2ty_2 + e^t \end{cases}$$

e introduza a notação vetorial $Y = (y_1, \dots, y_n)$, $Q = (q_1, \dots, q_n)$, e uma função matricial $P = [p_{ij}]$. Consideremos os vetores como matrizes coluna $n \times 1$ e escrevamos o sistema na forma

$$Y' = P(t)Y + Q(t).$$

Por exemplo, no sistema acima temos

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad P(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2t \end{bmatrix}, \quad Q(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.3.1. Vamos converter a equação diferencial de segunda ordem abaixo

$$x'' + tx' - x = \ln t$$

em um sistema de duas equações de primeira ordem, realizando a transformação

$$x_1 = x, \quad x_2 = x'$$

Então, temos que $x'_2 = x''$, logo

$$x'_1 = x_2$$

$$x'_2 = x_1 - tx_2 + \ln t$$

Agora, considere o sistema

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_1 - tx_2 + \ln t \end{cases}$$

Colocando o sistema acima em formato de matrizes (escrevendo na forma $X' = P(t)Y + Q(t)$), temos

$$X' = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad P(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -t \end{bmatrix}, \quad Q(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \ln t \end{bmatrix}.$$

Esse processo de transformação é essencial na teoria dos sistemas dinâmicos e na análise qualitativa de equações diferenciais, pois permite reescrever uma equação diferencial de segunda ordem como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem.

1.4 Sistemas de Equações Diferenciais Bidimensionais

Os sistemas de equações diferenciais ordinárias bidimensionais constituem uma ferramenta matemática fundamental para a modelagem de fenômenos dinâmicos que envolvem duas variáveis interdependentes evoluindo no tempo. Estes sistemas são geralmente expressos na forma:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

onde $x' = \frac{dx}{dt}$ e $y' = \frac{dy}{dt}$ representam as taxas de variação temporal das variáveis de estado $x(t)$ e $y(t)$, e $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções que definem a dinâmica do sistema.

A importância do estudo desses sistemas reside precisamente em sua capacidade de servir como base para a definição formal de sistemas dinâmicos contínuos. Um caso particularmente relevante, e que será extensivamente utilizado neste trabalho, é o dos sistemas lineares autônomos bidimensionais, por se tratarem de situações mais simples de serem verificadas e interpretadas, que podem ser representados na forma matricial:

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

onde $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estado e $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é uma matriz constante 2×2 cujos elementos são números reais. Esta formulação compacta não apenas unifica a análise de diversos sistemas físicos, mas também permite a caracterização completa do comportamento dinâmico através dos autovalores e autovetores da matriz A .

Para resolver sistemas lineares homogêneos da forma $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, onde A é uma matriz constante 2×2 , utilizamos o método de autovalores e autovetores. Este método permite encontrar soluções linearmente independentes que formam uma base para o espaço de soluções. Sobre autovalores, autovetores e tópicos de álgebra linear usamos amplamente o que está muito bem apresentado em [3]. A abordagem varia de acordo com a natureza dos autovalores de A , podendo ser classificada em três casos principais:

Caso 1: Autovalores Reais e Distintos

Se a matriz A possui dois autovalores reais e distintos, λ_1 e λ_2 , com autovetores correspondentes $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, então as soluções gerais do sistema são combinações lineares das soluções fundamentais associadas a cada autovalor.

A solução geral é dada por:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

onde c_1 e c_2 são constantes determinadas pelas condições iniciais.

Este caso é o mais direto, pois cada autovalor fornece uma solução exponencialmente crescente ou decrescente, dependendo do sinal de λ .

Exemplo 1.4.1. Considere o sistema:

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} X.$$

Para determinar os autovalores de A , calculamos o polinômio característico resolvendo

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 4 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 4 = 0,$$

$$(1 - \lambda)^2 = 4 \implies 1 - \lambda = \pm 2,$$

$$\implies \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3.$$

Autovetor para $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da primeira equação $2b_1 + b_2 = 0$, logo $b_2 = -2b_1$. Tomando $b_1 = 1$ obtemos

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Autovetor para $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da primeira equação $-2d_1 + d_2 = 0$, logo $d_2 = 2d_1$. Tomando $d_1 = 1$ obtemos

$$v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Solução geral:

$$X(t) = C_1 v^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 v^{(2)} e^{\lambda_2 t}$$

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Caso 2: Autovalores Reais Repetidos

Quando a matriz A possui um único autovalor real λ com multiplicidade algébrica 2, a construção da solução depende da existência de um ou dois autovetores linearmente

independentes.

Se existirem dois autovetores linearmente independentes $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, a solução geral é:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda t}$$

Se houver apenas um autovetor $\mathbf{v}$, é necessário buscar um vetor generalizado $\mathbf{w}$, tal que $(A - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{v}$. A solução geral torna-se:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v} e^{\lambda t} + c_2 (\mathbf{v}t + \mathbf{w}) e^{\lambda t}$$

Neste segundo cenário, a solução inclui um termo polinomial em t , refletindo a deficiência na diagonalização da matriz.

Exemplo 1.4.2. Considere o sistema

$$X' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X.$$

Para determinar os autovalores de A , calculamos o polinômio característico resolvendo

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (3 - \lambda)(1 - \lambda) + 1 = 0,$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0,$$

$$(\lambda - 2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2.$$

Autovetor para $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da primeira equação $b_1 - b_2 = 0$, logo $b_2 = b_1$. Tomando $b_1 = 1$ obtemos

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vetor generalizado para $\lambda = 2$: Resolvemos $(A - 2I)w = u^{(1)}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da primeira equação $w_1 - w_2 = 1$. Tomando $w_2 = 0$ obtemos $w_1 = 1$, logo

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Solução geral:

$$\begin{aligned} X(t) &= C_1 u^{(1)} e^{\lambda t} + C_2 (tu^{(1)} + w) e^{\lambda t} \\ X(t) &= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) e^{2t} \end{aligned}$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Caso 3: Autovalores Complexos

Se os autovalores de A são complexos, eles aparecem como pares conjugados da forma $\lambda = \alpha \pm \beta i$, onde α é a parte real e β a parte imaginária. As soluções reais são obtidas utilizando a fórmula de Euler para combinar as soluções complexas.

Se $\mathbf{v} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ é um autovetor associado a $\lambda = \alpha + \beta i$, a solução geral real é:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\alpha t} [\mathbf{a} \cos(\beta t) - \mathbf{b} \sin(\beta t)] + c_2 e^{\alpha t} [\mathbf{a} \sin(\beta t) + \mathbf{b} \cos(\beta t)]$$

Exemplo 1.4.3. Considere o sistema

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} X.$$

Para determinar os autovalores de A , calculamos o polinômio característico resolvendo

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -5 \\ 1 & -3 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(-3 - \lambda) + 5 = 0,$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0,$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i.$$

Autovetor para $\lambda_1 = -1 + i$:

$$\begin{pmatrix} 2 - i & -5 \\ 1 & -2 - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da primeira equação $(2 - i)b_1 - 5b_2 = 0$, logo $b_2 = \frac{2 - i}{5}b_1$. Tomando $b_1 = 5$ obtemos

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 - i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Solução geral complexa:

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 - i \end{pmatrix} e^{(-1+i)t} + C_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 + i \end{pmatrix} e^{(-1-i)t}$$

Solução geral real:

$$X(t) = e^{-t} \left[C_1 \begin{pmatrix} 5 \cos t \\ 2 \cos t + \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 5 \sin t \\ 2 \sin t - \cos t \end{pmatrix} \right]$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

A classificação dos autovalores em três casos distintos permite uma abordagem sistemática para resolver sistemas lineares bidimensionais. Cada caso produz soluções com comportamentos qualitativamente diferentes, os quais são fundamentais para a compreensão da dinâmica de sistemas modelados por tais equações. Para mais detalhes sobre sistemas bidimensionais, sugerimos a leitura de [4].

1.5 O Teorema de Existência e Unicidade

O Teorema de existência e unicidade da solução de uma EDO é um resultado fundamental no estudo das Equações Diferenciais Ordinárias, garantindo que, sob condições adequadas, uma solução não apenas existe, mas também é única em um determinado intervalo. O resultado a seguir, conhecido como Teorema de Picard, estabelece condições que asseguram a existência e a unicidade da solução de um Problema de Valor Inicial (PVI) da forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Teorema 1.5.1. *Seja R uma região retangular do plano tx , delimitada por $a \leq t \leq b$ e $c \leq x \leq d$, que contenha o ponto (t_0, x_0) em seu interior. Se as funções $f(t, x)$ e sua derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ são contínuas em R , então existe um intervalo I , centrado em t_0 , no qual há uma única função $x = x(t)$ definida e que satisfaz o PVI 1.2.*

Esse teorema é um dos principais resultados da teoria das equações diferenciais ordinárias, pois garante que, sob hipóteses adequadas de continuidade, a solução do problema não apenas existe, mas também é única em torno do ponto inicial considerado.

Exemplo 1.5.1. Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x^{2/3} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Sabe-se que esse P.V.I. não possui solução única. Nosso objetivo é determinar para quais pontos do plano tx o problema correspondente apresenta unicidade de solução. Para isso, aplicaremos o Teorema de Existência e Unicidade.

Nesse caso, tem-se $f(t, x) = 3x^{2/3}$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = 2x^{-1/3}.$$

Para verificar onde o teorema pode ser aplicado, analisamos as regiões do plano tx nas quais as funções f e $\frac{\partial f}{\partial x}$ são contínuas.

Observa-se que ambas as funções são contínuas sempre que $x \neq 0$. Portanto, podemos escolher qualquer região do plano que não contenha a reta $x = 0$ para garantir a validade das hipóteses do teorema. Em tais regiões, o problema de valor inicial possui solução única.

Assim, para o P.V.I.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x^{2/3} \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

existe uma única solução segundo o Teorema de Picard.

Entretanto, o ponto $(0, 0)$ pertence à reta $x = 0$, exatamente onde as condições de continuidade deixaram de ser satisfeitas. Quando isso ocorre, o teorema não assegura mais unicidade, podendo existir mais de uma solução ou nenhuma. No caso particular em estudo, o problema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x^{2/3} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

não possui solução única.

O Teorema de Picard, também denominado **Teorema de Existência e Unicidade**, estabelece condições suficientes para garantir que um Problema de Valor Inicial (P.V.I.) possua uma solução e que essa solução seja única. No entanto, o teorema não fornece um método direto para determinar tal solução, limitando-se a assegurar a sua existência e unicidade sob determinadas hipóteses de continuidade e diferenciabilidade.

Existe ainda um resultado importante, devido a Peano, conhecido como **Teorema de Existência de Peano**, que apresenta condições menos restritivas que as de Picard. Nesse caso, requer-se apenas que a função $f(t, x)$ seja contínua em uma vizinhança do ponto inicial (t_0, x_0) . Nessas condições, o teorema garante que o PVI

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

possui ao menos uma solução local, embora não haja a certeza de que essa solução seja única.

Quando as hipóteses do Teorema de Picard não são satisfeitas, pode ocorrer a perda da unicidade ou até mesmo da existência da solução.

No caso específico das equações diferenciais lineares, as condições impostas por Picard costumam ser automaticamente atendidas. Por exemplo, uma equação linear de primeira ordem da forma

$$a_1(t)x' + a_0(t)x = g(t)$$

pode ser reescrita como

$$x' = -\frac{a_0(t)}{a_1(t)}x + \frac{g(t)}{a_1(t)} = f(t, x).$$

Nesse caso, as condições do teorema são satisfeitas sempre que as funções $a_0(t)$, $a_1(t)$ e $g(t)$ forem contínuas em um intervalo I , com $a_1(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

De forma mais geral, para uma equação diferencial linear de ordem n ,

$$a_n(t)x^{(n)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = g(t),$$

as condições de Picard continuam válidas quando $a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t)$ e $g(t)$ são funções contínuas em um intervalo I , com $a_n(t) \neq 0$ para todo t pertencente a I .

Em resumo, o Teorema de Peano garante apenas a existência de uma solução, enquanto o Teorema de Picard assegura, além da existência, a unicidade, desde que sejam verificadas as condições adicionais de continuidade da derivada parcial de f em relação a x .

Definição 1.5.1. Uma aplicação $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ chama-se Lipschitziana em Ω relativamente à segunda variável ou, simplesmente, Lipschitziana se existe uma constante K tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y|$$

para todos $(t, x), (t, y) \in \Omega$. Uma K nestas condições chama-se de constante de Lipschitz de f .

A condição de Lipschitz estabelecida na Definição 1.5.1 é fundamental para garantir a existência e unicidade de soluções, conforme formalizado pelo clássico Teorema de Picard.

Teorema 1.5.2 (Teorema de Picard). *Seja f contínua e Lipschitziana em x em $\Omega = I_a \times B_b$, onde $I_a = \{t \mid |t - t_0| \leq a\}$ e $B_b = \{x \mid |x - x_0| \leq b\}$. Se $|f| \leq M$ em Ω (isto é, $|f(t, x)| \leq M$ para todo $(t, x) \in \Omega$), então o PVI*

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

tem uma única solução definida em I_α , com $\alpha = \min\{a, b/M\}$.

Este resultado assegura que, sob as condições de continuidade e localmente lipschitz, a solução do problema de valor inicial não apenas existe em um intervalo adequado, mas é também única. A limitação do intervalo a $\alpha = \min\{a, b/M\}$ reflete a dependência entre o domínio da solução.

Em casos onde a função f possui maior regularidade, pode-se obter uma versão refinada do Teorema de Picard. O seguinte corolário explora essa situação, semelhante ao Teorema 1.5.1.

Corolário 1.5.1. *Seja Ω aberto em $\mathbb{R} \times E$ e seja $f: \Omega \rightarrow E$ contínua com D_2f também contínua. Para todo ponto (t_0, x_0) em Ω existe uma vizinhança $V = I(t_0) \times B(x_0)$ tal que $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, tem uma única solução em $I(t_0)$. Além disso, o gráfico desta solução está contido em V .*

Demonstração. Seja U uma vizinhança de (t_0, x_0) tal que $f|_U$ é Lipschitziana e $|f| \leq M$ em U . Seja $\alpha > 0$ suficientemente pequeno para que $V = I_\alpha(t_0) \times B_b(x_0) \subset U$, onde $b = \alpha M$. Conclui-se o argumento aplicando o Teorema 1.5.2. $\square$

Este corolário mostra que se a função f possui derivada contínua, o problema tem uma única solução perto do ponto inicial. Além disso, a solução permanece dentro da vizinhança V que definimos, ou seja, ela não se afasta do ponto onde começou durante todo o intervalo considerado.

Ressalta-se que todas as EDOs abordadas nos capítulos 2 e 3 deste trabalho satisfazem as hipóteses do Teorema de existência e unicidade. Garantindo, portanto, a existência e a unicidade das soluções para os problemas de valor inicial considerados.

Capítulo 2

Sistemas Dinâmicos Contínuos

Neste capítulo, abordamos o conceito de Sistema Dinâmico Contínuo e Sistema Semidinâmico. Além disso, são apresentados alguns exemplos que ilustram e definem um sistema dinâmico contínuo. Os tópicos desenvolvidos ao longo deste capítulo têm fundamento nas referências [1] e [2]. Sugerimos a leitura dessas obras, pois elas representam fontes fundamentais para a compreensão e o desenvolvimento mais aprofundado dos tópicos abordados neste capítulo.

2.1 Sistema Dinâmico Contínuo

Para iniciar o estudo de sistemas dinâmicos contínuos, uma definição precisa do conceito pode ser encontrada em [2] e é apresentada a seguir. Para mais detalhes a respeito de espaços métricos e tópicos de topologia, sugere-se consultar o apêndice.

Definição 2.1.1. Um sistema dinâmico contínuo sobre um espaço métrico X , é a tripla $(X, \mathbb{R}, \pi)$, onde a aplicação $\pi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$, no espaço X , satisfazendo os seguintes axiomas:

- (i) $\pi(x, 0) = x$, para todo $x \in X$ (axioma de identidade),
- (ii) $\pi(\pi(x, t_1), t_2) = \pi(x, t_1 + t_2)$, para todo $x \in X$ e $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ (axioma de grupo),
- (iii) π é contínua (axioma de continuidade).

Dado um sistema dinâmico em X , o espaço X e a aplicação π são chamados, respectivamente, de **espaço de fase** e **aplicação de fase** (ou simplesmente sistema dinâmico). Esse sistema também é frequentemente referido como **fluxo**, termo utilizado para destacar o comportamento evolutivo das trajetórias ao longo do tempo.

De maneira intuitiva, podemos entender um sistema dinâmico contínuo como um modelo matemático que descreve a trajetória de um ponto x no espaço de fase X ao longo do tempo t . O axioma de identidade assegura que, no tempo zero, o sistema permanece no estado inicial. O axioma de grupo estabelece que evoluir por um tempo t_1 e depois por t_2 produz o mesmo resultado que evoluir diretamente por $t_1 + t_2$, o que reflete uma evolução consistente e simétrica no tempo. A continuidade, por sua vez, assegura que pequenas alterações no estado inicial ou no tempo de evolução acarretam em pequenas variações no estado final, prevenindo comportamentos descontínuos.

Podemos classificar os sistemas dinâmicos em dois casos: quando o grupo utilizado na aplicação for dos números reais positivos ($\mathbb{R}_+$), isto é, $\pi : X \times \mathbb{R}_+ \rightarrow X$, diremos que um sistema dinâmico π é um **semifluxo** ou **sistema semidinâmico** e se for o grupo dos números inteiros ($\mathbb{Z}$), isto é, $\pi : X \times \mathbb{Z} \rightarrow X$, diremos que é um **fluxo discreto** ou **sistema dinâmico discreto**.

Para ilustrar de forma concreta a definição de sistema dinâmico apresentada, consideremos um exemplo no qual é possível verificar diretamente as propriedades que caracterizam um fluxo.

Exemplo 2.1.1. Seja $y \in \mathbb{R}^n$ um vetor fixo. Definimos a família de aplicações $\pi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por:

$$\pi_t(x) = x + ty, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n.$$

Verificação dos axiomas:

1. Identidade: $\pi_0(x) = x + 0 \cdot y = x$.

2. Grupo: Para todo $t, s \in \mathbb{R}$:

$$\pi_{t+s}(x) = x + (t + s)y = (x + sy) + ty = \pi_t(\pi_s(x)).$$

3. Continuidade: A aplicação $(x, t) \mapsto x + ty$ é contínua.

Este fluxo descreve um movimento de translação uniforme no espaço $\mathbb{R}^n$. Cada ponto x desloca-se ao longo da reta definida pelos pontos x e y .

A seguir, apresentamos outro exemplo que generaliza o caso anterior, construindo um novo fluxo a partir de dois fluxos previamente definidos.

Exemplo 2.1.2. Sejam X e Y espaços topológicos e

$$\pi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X, \quad \psi: \mathbb{R} \times Y \rightarrow Y$$

dois fluxos contínuos, que denotamos por $\pi_t(x) = \pi(t, x)$ e $\psi_t(y) = \psi(t, y)$. Definimos o fluxo produto

$$\alpha: \mathbb{R} \times (X \times Y) \rightarrow X \times Y$$

por

$$\alpha_t(x, y) = (\pi_t(x), \psi_t(y)), \quad t \in \mathbb{R}, (x, y) \in X \times Y.$$

Verificação dos axiomas:

1. Identidade: $\alpha_0(x, y) = (\pi_0(x), \psi_0(y)) = (x, y)$.
2. Grupo: Para todo $t, s \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \alpha_{t+s}(x, y) &= (\pi_{t+s}(x), \psi_{t+s}(y)) \\ &= (\pi_t(\pi_s(x)), \psi_t(\psi_s(y))) \\ &= \alpha_t(\pi_s(x), \psi_s(y)) = \alpha_t(\alpha_s(x, y)). \end{aligned}$$

3. Continuidade: Segue da continuidade de π_t e ψ_t .

Dado um sistema dinâmico $\pi: X \times \mathbb{R} \rightarrow X$, podemos estudar a evolução do sistema de duas perspectivas complementares. A primeira consiste em fixar um instante de tempo e observar como todos os pontos do espaço de fase evoluem até aquele momento. Isto nos leva ao conceito de aplicação de transição.

Definição 2.1.2. Para $t \in \mathbb{R}$ fixo, chamaremos de aplicação de transição à aplicação definida como

$$\pi^t: X \rightarrow X, \quad \pi^t(x) = \pi(x, t).$$

Essa aplicação é denominada aplicação de transição porque expressa como cada ponto $x \in X$ é transformado pelo sistema após transcorrer um tempo t . Em outras palavras, ela descreve a posição do sistema em um instante determinado.

Teorema 2.1.1. *Para cada $t \in \mathbb{R}$, π^t é um homeomorfismo de X .*

Demonstração. Para qualquer $t \in \mathbb{R}$, a transição π^t é contínua, já que π também o é. Queremos mostrar que π^t é injetora e sobrejetora, observe que, se $\pi(y, t) = \pi(z, t)$, então $y = z$, o que segue de

$$y = \pi(y, 0) = \pi(y, t - t) = \pi(\pi(y, t), -t) = \pi(\pi(z, t), -t) = \pi(z, t - t) = \pi(z, 0) = z.$$

Mostramos que π^t é uma transição é injetiva. De modo análogo, para mostrar a sobrejetividade, seja $y \in X$, note que

$$y = \pi(y, 0) = \pi(y, t - t) = \pi(\pi(y, -t), t) = \pi(x, t),$$

existe $x = \pi(y, -t)$, mostramos que π^t é uma transição é sobrejetiva. Portanto, a transição é bijetora. Finalmente, para verificar que π^t possui inversa contínua, basta mostrar que a transição π^{-t} é a inversa de π^t . Para tanto, note que, para quaisquer duas transições π^t e π^s , a composição $\pi^t \circ \pi^s$ é a transição π^{t+s} , pois, para qualquer $x \in X$,

$$\pi^t \circ \pi^s = \pi(\pi(x, s), t) = \pi(x, s + t) = \pi(x, t + s) = \pi^{t+s}(x).$$

Note também que a transição π^0 é a identidade, já que para qualquer $x \in X$,

$$\pi^0(x) = \pi(x, 0) = x.$$

Para provar que π^{-t} é a inversa de π^t

$$\pi^{-t} \circ \pi^t = \pi(\pi(x, t), -t) = \pi(x, t - t) = \pi(x, 0) = x$$

Portanto, como $\pi^{-t} \circ \pi^t = \pi^{t-t} = \pi^0$, a transição π^{-t} é contínua e é a inversa de π^t . $\square$

Esse resultado mostra que a evolução do sistema ao longo do tempo não altera a estrutura topológica do espaço de fase, mas apenas realiza transformações contínuas dentro dele.

Proposição 2.1.1. *As transições π^t , onde $t \in \mathbb{R}$, formam um grupo comutativo, sendo a operação de grupo a composição de transições.*

Demonstração. Para demonstrar que se trata de um grupo comutativo, ou seja, um grupo abeliano, é necessário verificar o atendimento aos axiomas fundamentais: fechamento da operação, associatividade, existência de elemento neutro, existência de elementos inversos e, por fim, a propriedade da comutatividade.

1) Fechamento. Sejam $s, t \in \mathbb{R}$. Para todo $x \in X$,

$$(\pi^s \circ \pi^t)(x) = \pi^s(\pi^t(x)) = \pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t + s) = \pi^{t+s}(x).$$

Logo, $\pi^s \circ \pi^t = \pi^{t+s}$. Como $t + s \in \mathbb{R}$, temos que π^{t+s} é por definição uma transição do sistema, o que estabelece a propriedade de fechamento.

2) Associatividade. Para quaisquer $r, s, t \in \mathbb{R}$ e para todo $x \in X$, temos

$$\begin{aligned} (\pi^r \circ (\pi^s \circ \pi^t))(x) &= \pi^r((\pi^s \circ \pi^t)(x)) = \pi^r(\pi^s(\pi^t(x))) = \pi(\pi(\pi(x, t), s), r) \\ &= \pi(\pi(x, t + s), r) = \pi(x, (t + s) + r) = \pi(x, r + s + t) = \pi^{r+s+t}(x). \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} ((\pi^r \circ \pi^s) \circ \pi^t)(x) &= (\pi^r \circ \pi^s)(\pi^t(x)) = \pi^{r+s}(\pi^t(x)) \\ &= \pi(\pi(x, t), r + s) = \pi(x, t + (r + s)) = \pi(x, r + s + t) = \pi^{r+s+t}(x) \end{aligned}$$

Logo,

$$\pi^r \circ (\pi^s \circ \pi^t) = \pi^{r+s+t} = (\pi^r \circ \pi^s) \circ \pi^t,$$

o que estabelece a associatividade.

3) Elemento identidade. Para $t = 0$, temos

$$\pi^0(x) = \pi(x, 0) = x, \quad \forall x \in X.$$

Portanto, π^0 é o elemento neutro do grupo.

4) Inverso. Para todo $t \in \mathbb{R}$ e para todo $x \in X$, temos:

$$(\pi^t \circ \pi^{-t})(x) = \pi^t(\pi^{-t}(x)) = \pi(\pi(x, -t), t) = \pi(x, -t + t) = \pi(x, 0) = \pi^0(x)$$

$$(\pi^{-t} \circ \pi^t)(x) = \pi^{-t}(\pi^t(x)) = \pi(\pi(x, t), -t) = \pi(x, t + (-t)) = \pi(x, 0) = \pi^0(x)$$

Logo, $\pi^t \circ \pi^{-t} = \pi^0$ e $\pi^{-t} \circ \pi^t = \pi^0$, portanto

$$(\pi^t)^{-1} = \pi^{-t}.$$

é o elemento inverso de π^t no grupo.

5) Comutatividade. Para quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (\pi^s \circ \pi^t)(x) &= \pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, s + t) = \pi^{s+t}(x) = \pi^{t+s}(x) = \pi(x, t + s) \\ &= \pi(\pi(x, s), t) = (\pi^t \circ \pi^s)(x). \end{aligned}$$

Portanto, $\pi^s \circ \pi^t = \pi^t \circ \pi^s$. □

A proposição mostra que o conjunto das transições $\{\pi^t : t \in \mathbb{R}\}$ possui uma estrutura algébrica bem definida, satisfazendo as propriedades de um grupo. Para mais detalhes sobre grupos, sugerimos a leitura de [6]. Além disso, como a composição é comutativa, ou seja, é um grupo abeliano, tal estrutura reflete a ideia de que as transições no tempo podem ser realizadas em qualquer ordem sem alterar o resultado final. Essa propriedade é fundamental em sistemas dinâmicos contínuos, pois garante consistência na evolução temporal das trajetórias.

A segunda perspectiva para analisar um sistema dinâmico consiste em fixar um ponto inicial x no espaço de fase e estudar sua trajetória completa ao longo do tempo. Esta abordagem nos leva ao conceito de movimento.

Definição 2.1.3. Para um $x \in X$ fixo, define-se o movimento através de x como

$$\pi_x : \mathbb{R} \rightarrow X, \quad \pi_x(t) = \pi(x, t).$$

Sobre movimentos segue a proposição abaixo.

Proposição 2.1.2. Para qualquer $x \in X$ e $[a, b] \subset \mathbb{R}$, o conjunto $\pi(x, [a, b])$ é compacto.

Demonstração. Ou seja, para qualquer $x \in X$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e $t \in [a, b]$, o conjunto $\pi(x, [a, b])$ é compacto. Sejam $\pi_x : \mathbb{R} \rightarrow X$ contínua e $[a, b] \subset \mathbb{R}$ compacto. Dada uma cobertura aberta $\pi(x, [a, b]) \subset \bigcup A_\lambda$, obtemos a cobertura aberta

$$[a, b] \subset \bigcup \pi^{-1}(A_\lambda),$$

pois π_x contínua implica $\pi_x^{-1}(A_\lambda)$ aberto, e se $t \in [a, b]$, então $\pi_x(t) \in A_\lambda$ para algum λ , logo $t \in \pi_x^{-1}(A_\lambda)$. Da qual extraímos uma subcobertura finita

$$[a, b] \subset \pi^{-1}(A_{\lambda_1}) \cup \dots \cup \pi^{-1}(A_{\lambda_n}).$$

(Toda cobertura aberta de um conjunto compacto admite uma subcobertura finita).

Assim,

$$\pi(x, [a, b]) \subset \pi(\pi^{-1}(A_{\lambda_1})) \cup \dots \cup \pi(\pi^{-1}(A_{\lambda_n})) \subset A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}.$$

Logo, $\pi(x, [a, b])$ é compacto. □

Essa proposição assegura que a imagem de um intervalo de tempo finito sob a aplicação de transição mantém a propriedade de compacidade.

Após estabelecer as propriedades fundamentais dos fluxos e das aplicações de transição, passamos agora a analisar como tais conceitos se manifestam em sistemas dinâmicos contínuos gerados por soluções de equações diferenciais.

2.2 Fluxos gerados por soluções de EDOs

Alguns sistemas dinâmicos contínuos surgem como soluções de equações diferenciais. Neste tópico, apresentamos exemplos fundamentais que ilustram esta

conexão, incluindo: as soluções de equações diferenciais ordinárias autônomas e a análise de sistemas dinâmicos autônomos lineares.

Neste contexto, o teorema de existência e unicidade para EDOs garante a existência de um fluxo, estabelecendo uma ponte essencial entre a teoria de sistemas dinâmicos e equações diferenciais.

Por praticidade de notação, em diversas passagens deste trabalho adotaremos a escrita $\pi(x, t) = \pi_t(x)$, que se mostra mais conveniente para simplificar a resolução e apresentação dos cálculos.

Exemplo 2.2.1 (Equações diferenciais autônomas). Seja $v : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores de classe C^1 em um conjunto aberto $W \subset \mathbb{R}^n$. Para cada $x \in W$, considere o problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} x' = v(x) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Seja $\phi(x, t)$ a única solução do PVI (2.1) (sendo assim, $\phi(x, 0) = x$) e considere $I_x = (\alpha_x, \beta_x)$ o intervalo de definição dessa solução, de acordo ao teorema 1.5.1. Cabe mencionar que a unicidade de solução local para qualquer problema de valor inicial envolvendo a equação $x' = v(x)$ é garantida pela condição $v \in C^1$.

Defina $D = \{(x, t) \in W \times \mathbb{R} : t \in I_x\}$ e $\pi : D \rightarrow W$ pondo $\pi(x, t) = \phi(x, t)$.

Afirmção: π é um fluxo em W .

Com efeito,

- (i) $\pi(x, 0) = \phi(x, 0) = x$, para todo $x \in W$.
- (ii) Vejamos que $\pi(\pi(x, \tau), t) = \pi(x, t + \tau)$, $\tau \in I_x$ e $t \in I_{\pi(x, \tau)}$.

Sejam $\tau \in I_x$ e $t \in I_{\pi(x, \tau)}$. Note que

$$\pi(\pi(x, \tau), t) = \phi(\phi(x, \tau), t) \quad \text{e} \quad \pi(x, t + \tau) = \phi(x, t + \tau).$$

Sejam

$$\psi_1(t) = \phi(\phi(x, \tau), t) \quad \text{e} \quad \psi_2(t) = \phi(x, t + \tau).$$

Veja que ψ_1 e ψ_2 são soluções do PVI

$$\begin{cases} x' = v(x) \\ x(0) = \phi(x, \tau). \end{cases}$$

Portanto, segue da unicidade de solução que, $\psi_1(t) = \psi_2(t)$, ou seja,

$$\phi(\phi(x, \tau), t) = \phi(x, t + \tau).$$

Logo,

$$\pi(\pi(x, \tau), t) = \pi(x, t + \tau).$$

(iii) Como $v \in C^1$, $\pi(x, t)$ é contínua.

Para ilustrar concretamente essa construção, considere o caso elementar, o campo linear $v(x) = x$, cujo fluxo pode ser calculado explicitamente.

Exemplo 2.2.2. Seja a equação autônoma

$$x' = x$$

Temos que a solução dessa equação é

$$\frac{dx}{dt} = x$$

$$\frac{dx}{x} = dt$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int dt$$

$$\ln |x| = t + c$$

$$e^{\ln |x|} = e^{t+c}$$

$$x = e^t e^c$$

$$x = e^t C$$

$$x(t) = Ce^t$$

Dada a condição inicial $x(0) = x_0$, temos:

$$x(0) = Ce^0$$

$$x(0) = C = x_0$$

Logo,

$$x(t) = x_0 e^t$$

Seja π o fluxo da equação $x(t) = x_0 e^t$, então:

- (i) $\pi(x_0, 0) = x_0 e^0 = x_0 e^0 = x_0$;
- (ii) $\pi(\pi(x_0, t), s) = \pi(x_0 e^t, s) = x_0 e^t e^s = x_0 e^{t+s} = \pi(x_0, t+s)$;
- (iii) $\pi(x_0, t)$ é contínua em x_0 e t ;

Portanto, temos que a equação diferencial autônoma dada, define um sistema dinâmico (fluxo). A seguir, apresentamos alguns exemplos de soluções de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Esses exemplos ilustram como o comportamento das soluções pode ser interpretado a partir das propriedades do sistema.

Exemplo 2.2.3. Encontraremos o fluxo associado à $x'' + 4x = 0$.

A equação característica associada é

$$r^2 + 4 = 0,$$

cujas raízes são:

$$r = \pm 2i.$$

A solução geral para uma equação com raízes complexas $r = \alpha \pm \beta i$ é dada por:

$$x(t) = e^{\alpha t} [c_1 \cos(\beta t) + ic_2 \sin(\beta t)].$$

No nosso caso, $\alpha = 0$ e $\beta = 2$, logo:

$$x(t) = c_1 \cos(2t) + ic_2 \sin(2t).$$

Dada a condição inicial:

$$x(0) = x_0,$$

temos:

$$x(0) = c_1 \cos(0) + ic_2 \sin(0) = c_1 = x_0.$$

Para determinar c_2 , derivamos $x(t)$:

$$x'(t) = -2c_1 \sin(2t) + 2ic_2 \cos(2t).$$

Assumindo $x'(0) = x'_0$, obtemos:

$$x'(0) = 2ic_2 = v_0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{x'_0}{2i}.$$

Logo

$$x(t) = x_0 \cos(2t) + i \frac{x'_0}{2i} \sin(2t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 \cos(2t) + \frac{x'_0}{2} \sin(2t)$$

$$x'(t) = -2x_0 \sin(2t) + 2i \frac{x'_0}{2i} \cos(2t) \quad \Rightarrow \quad x'(t) = -2x_0 \sin(2t) + x'_0 \cos(2t).$$

Fluxo: Seja $\pi_t(x_0, x'_0) = (x(t), x'(t))$, então:

$$\pi_t(x_0, x'_0) = \left(x_0 \cos(2t) + \frac{x'_0}{2} \sin(2t), -2x_0 \sin(2t) + x'_0 \cos(2t) \right).$$

Verificando os axiomas:

1. Axioma de Identidade:

Queremos provar que: $\pi_0(x_0, x'_0) = (x_0, x'_0)$

$$\pi_0(x_0, x'_0) = \left(x_0 \cos(0) + \frac{x'_0}{2} \sin(0), -2x_0 \sin(0) + x'_0 \cos(0) \right) = (x_0, x'_0).$$

2. Axioma de Grupo:

Queremos provar que: $\pi_s(\pi_t(x_0, x'_0)) = \pi_{s+t}(x_0, x'_0)$

Seja $(y_0, y'_0) = \pi_t(x_0, x'_0)$:

$$y_0 = x_0 \cos(2t) + \frac{x'_0}{2} \sin(2t)$$

$$y'_0 = -2x_0 \sin(2t) + x'_0 \cos(2t).$$

Aplicando π_s :

$$\pi_s(y_0, y'_0) = \left(y_0 \cos(2s) + \frac{y'_0}{2} \sin(2s), -2y_0 \sin(2s) + y'_0 \cos(2s) \right).$$

Primeira Componente: $y_0 \cos(2s) + \frac{y'_0}{2} \sin(2s)$

$$\begin{aligned} &= \left[x_0 \cos(2t) + \frac{x'_0}{2} \sin(2t) \right] \cos(2s) + \frac{1}{2} [-2x_0 \sin(2t) + x'_0 \cos(2t)] \sin(2s) \\ &= x_0 \cos(2t) \cos(2s) + \frac{x'_0}{2} \sin(2t) \cos(2s) - x_0 \sin(2t) \sin(2s) + \frac{x'_0}{2} \cos(2t) \sin(2s) \\ &= x_0 [\cos(2t) \cos(2s) - \sin(2t) \sin(2s)] + \frac{x'_0}{2} [\sin(2t) \cos(2s) + \cos(2t) \sin(2s)]. \end{aligned}$$

Usando as identidades trigonométricas:

$$\cos(2t) \cos(2s) - \sin(2t) \sin(2s) = \cos(2t + 2s) = \cos(2(t + s))$$

$$\sin(2t) \cos(2s) + \cos(2t) \sin(2s) = \sin(2t + 2s) = \sin(2(t + s)).$$

Obtemos:

$$y_0 \cos(2s) + \frac{y'_0}{2} \sin(2s) = x_0 \cos(2(t + s)) + \frac{x'_0}{2} \sin(2(t + s)).$$

Segunda Componente: $-2y_0 \sin(2s) + y'_0 \cos(2s)$

$$\begin{aligned} &= -2 \left[x_0 \cos(2t) + \frac{x'_0}{2} \sin(2t) \right] \sin(2s) + [-2x_0 \sin(2t) + x'_0 \cos(2t)] \cos(2s) \\ &= -2x_0 \cos(2t) \sin(2s) - x'_0 \sin(2t) \sin(2s) - 2x_0 \sin(2t) \cos(2s) + x'_0 \cos(2t) \cos(2s) \\ &= -2x_0 [\cos(2t) \sin(2s) + \sin(2t) \cos(2s)] + x'_0 [\cos(2t) \cos(2s) - \sin(2t) \sin(2s)]. \end{aligned}$$

Usando novamente as identidades trigonométricas, obtemos:

$$-2y_0 \sin(2s) + y'_0 \cos(2s) = -2x_0 \sin(2(t+s)) + x'_0 \cos(2(t+s)).$$

Portanto

$$\begin{aligned} \pi_s(\pi_t(x_0, x'_0)) &= \left(x_0 \cos(2(t+s)) + \frac{x'_0}{2} \sin(2(t+s)), -2x_0 \sin(2(t+s)) + x'_0 \cos(2(t+s)) \right) \\ &= \pi_{s+t}(x_0, x'_0). \end{aligned}$$

3. Axioma de Continuidade:

A função $\pi_t(x_0, x'_0)$ é contínua em t , x_0 e x'_0 , pois é composta por funções trigonométricas (seno e cosseno) que são contínuas em toda a reta real.

Exemplo 2.2.4. Encontraremos o fluxo associado à $x'' - 5x' + 6x = 0$.

A equação característica associada é

$$r^2 - 5r + 6 = 0,$$

cujas raízes são: $r_1 = 3$, $r_2 = 2$. A solução geral para uma equação com raízes reais distintas é

$$x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t}.$$

Dadas as condições iniciais:

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0,$$

temos

$$x(0) = c_1 + c_2 = x_0,$$

$$x'(t) = 3c_1 e^{3t} + 2c_2 e^{2t} \Rightarrow x'(0) = 3c_1 + 2c_2 = x'_0.$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = x_0 \\ 3c_1 + 2c_2 = x'_0 \end{cases}$$

Temos que

$$c_1 = x'_0 - 2x_0.$$

$$c_2 = 3x_0 - x'_0.$$

Substituindo em $x(t)$ e $x'(t)$

$$x(t) = (3x_0 - x'_0)e^{2t} + (x'_0 - 2x_0)e^{3t}.$$

$$x'(t) = 2(3x_0 - x'_0)e^{2t} + 3(x'_0 - 2x_0)e^{3t} \Rightarrow x'(t) = (6x_0 - 2x'_0)e^{2t} + (3x'_0 - 6x_0)e^{3t}.$$

Logo, o fluxo é dado por

$$\pi_t(x_0, x'_0) = ((3x_0 - x'_0)e^{2t} + (x'_0 - 2x_0)e^{3t}, (6x_0 - 2x'_0)e^{2t} + (3x'_0 - 6x_0)e^{3t}).$$

Verificação dos axiomas:

1. Axioma de Identidade:

$$\pi_0(x_0, x'_0) = ((3x_0 - x'_0)e^0 + (x'_0 - 2x_0)e^0, (6x_0 - 2x'_0)e^0 + (3x'_0 - 6x_0)e^0).$$

$$(3x_0 - x'_0) + (x'_0 - 2x_0) = x_0, \quad (6x_0 - 2x'_0) + (3x'_0 - 6x_0) = x'_0,$$

Logo,

$$\pi_0(x_0, x'_0) = (x_0, x'_0).$$

2. Axioma de Grupo:

$$\pi_s(\pi_t(x_0, x'_0)) = \pi_{s+t}(x_0, x'_0).$$

De fato, seja $(y_0, y'_0) = \pi_t(x_0, x'_0)$, isto é:

$$y_0 = (3x_0 - x'_0)e^{2t} + (x'_0 - 2x_0)e^{3t},$$

$$y'_0 = (6x_0 - 2x'_0)e^{2t} + (3x'_0 - 6x_0)e^{3t}.$$

Aplicando π_s :

$$\pi_s(y_0, y'_0) = ((3y_0 - y'_0)e^{2s} + (y'_0 - 2y_0)e^{3s}, (6y_0 - 2y'_0)e^{2s} + (3y'_0 - 6y_0)e^{3s}).$$

Substituindo y_0 e y'_0 , e usando as propriedades das exponenciais $e^{2t}e^{2s} = e^{2(t+s)}$ e $e^{3t}e^{3s} = e^{3(t+s)}$, obtemos:

$$\pi_s(\pi_t(x_0, x'_0)) = ((3x_0 - x'_0)e^{2(t+s)} + (x'_0 - 2x_0)e^{3(t+s)}, (6x_0 - 2x'_0)e^{2(t+s)} + (3x'_0 - 6x_0)e^{3(t+s)}),$$

Ou seja,

$$\pi_s(\pi_t(x_0, x'_0)) = \pi_{s+t}(x_0, x'_0).$$

3. Axioma de Continuidade:

As componentes de $\pi_t(x_0, x'_0)$ são combinações lineares de funções exponenciais (e^{2t} e e^{3t}), que são contínuas em toda a reta real. Logo, $\pi_t(x_0, x'_0)$ é contínua em t , x_0 e x'_0 .

Agora, apresentamos exemplos de soluções de sistemas de equações diferenciais. Estes exemplos ilustram como o comportamento dinâmico do sistema pode ser analisado a partir da interação entre suas variáveis. Serão contemplados os três casos fundamentais para sistemas lineares: autovalores reais e distintos, autovalores repetidos e autovalores complexos.

Exemplo 2.2.5. Seja o sistema linear autônomo:

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x},$$

onde A é uma matriz 2×2 com autovalores reais distintos λ_1, λ_2 e autovetores correspondentes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ linearmente independentes.

A solução geral é:

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2e^{\lambda_2 t}.$$

Dada uma condição inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, os coeficientes c_1, c_2 são determinados de forma única por:

$$\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2.$$

1. Axioma da identidade:

$$\pi(\mathbf{x}_0, 0) = \mathbf{x}_0 \quad \text{para todo } \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2.$$

De fato,

$$\pi(\mathbf{x}_0, 0) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 \cdot 0} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 \cdot 0} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2.$$

Pela definição de c_1, c_2 , temos

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_0.$$

Portanto,

$$\pi(\mathbf{x}_0, 0) = \mathbf{x}_0.$$

2. Axioma de grupo:

$$\pi(\pi(\mathbf{x}_0, t), s) = \pi(\mathbf{x}_0, t + s) \quad \text{para todo } \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2 \text{ e } t, s \in \mathbb{R}.$$

Seja:

$$\mathbf{y} = \pi(\mathbf{x}_0, t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Para calcular $\pi(\mathbf{y}, s)$, expressamos $\mathbf{y}$ na base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$:

$$\mathbf{y} = \tilde{c}_1 \mathbf{v}_1 + \tilde{c}_2 \mathbf{v}_2.$$

Os coeficientes de $\mathbf{y}$ na base de autovetores são:

$$\tilde{c}_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \tilde{c}_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Evoluímos $\mathbf{y}$ por um tempo s :

$$\pi(\mathbf{y}, s) = \tilde{c}_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 s} + \tilde{c}_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 s}.$$

Substituindo $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$:

$$\pi(\mathbf{y}, s) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 s} + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 s}.$$

Simplificando:

$$\pi(\mathbf{y}, s) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1(t+s)} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2(t+s)}.$$

Esta é exatamente a definição de $\pi(\mathbf{x}_0, t + s)$. Portanto:

$$\pi(\pi(\mathbf{x}_0, t), s) = \pi(\mathbf{x}_0, t + s).$$

3. Axioma de continuidade:

A função $\pi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é contínua em $(\mathbf{x}_0, t)$. Logo, π é contínua em $(\mathbf{x}_0, t)$.

Os três axiomas de sistema dinâmico contínuo estão verificados para o fluxo gerado pela solução geral de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ com autovalores reais distintos. Portanto, a solução desse sistema define um sistema dinâmico.

Exemplo 2.2.6. Seja o sistema linear autônomo:

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x},$$

onde A é uma matriz 2×2 com autovalores reais repetidos $\lambda_1 = \lambda_2$. A solução geral é dada por:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v} e^{\lambda t} + c_2 (\mathbf{v}t + \mathbf{w}) e^{\lambda t},$$

onde $\mathbf{v}$ é o autovetor e $\mathbf{w}$ é um autovetor generalizado satisfazendo $(A - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{v}$.

Dada a condição inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, os coeficientes c_1, c_2 são determinados por:

$$\mathbf{x}_0 = c_1 \mathbf{v} + c_2 \mathbf{w}.$$

Portanto, o fluxo é definido por:

$$\pi(\mathbf{x}_0, t) = c_1 \mathbf{v} e^{\lambda t} + c_2 (\mathbf{v}t + \mathbf{w}) e^{\lambda t}.$$

1. Axioma da Identidade:

Para $t = 0$:

$$\pi(\mathbf{x}_0, 0) = c_1 \mathbf{v} e^0 + c_2 (\mathbf{v} \cdot 0 + \mathbf{w}) e^0 = c_1 \mathbf{v} + c_2 \mathbf{w}.$$

Mas, por definição de c_1, c_2 , temos $\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v} + c_2\mathbf{w}$. Logo:

$$\pi(\mathbf{x}_0, 0) = \mathbf{x}_0.$$

2. Axioma de Grupo:

Seja:

$$\mathbf{y} = \pi(\mathbf{x}_0, t) = c_1\mathbf{v}e^{\lambda t} + c_2(\mathbf{v}t + \mathbf{w})e^{\lambda t}.$$

Reescrevendo $\mathbf{y}$ na base $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$:

$$\mathbf{y} = \mathbf{v}[c_1e^{\lambda t} + c_2te^{\lambda t}] + \mathbf{w}[c_2e^{\lambda t}].$$

Portanto, as coordenadas de $\mathbf{y}$ são:

$$\tilde{c}_1 = c_1e^{\lambda t} + c_2te^{\lambda t}, \quad \tilde{c}_2 = c_2e^{\lambda t}.$$

Agora calculamos $\pi(\mathbf{y}, s)$:

$$\pi(\mathbf{y}, s) = \tilde{c}_1\mathbf{v}e^{\lambda s} + \tilde{c}_2(\mathbf{v}s + \mathbf{w})e^{\lambda s}.$$

Substituindo $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$:

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{y}, s) &= [c_1e^{\lambda t} + c_2te^{\lambda t}]\mathbf{v}e^{\lambda s} + c_2e^{\lambda t}(\mathbf{v}s + \mathbf{w})e^{\lambda s} \\ &= c_1\mathbf{v}e^{\lambda(t+s)} + c_2t\mathbf{v}e^{\lambda(t+s)} + c_2s\mathbf{v}e^{\lambda(t+s)} + c_2\mathbf{w}e^{\lambda(t+s)} \\ &= c_1\mathbf{v}e^{\lambda(t+s)} + c_2\mathbf{v}(t+s)e^{\lambda(t+s)} + c_2\mathbf{w}e^{\lambda(t+s)} \\ &= c_1\mathbf{v}e^{\lambda(t+s)} + c_2[\mathbf{v}(t+s) + \mathbf{w}]e^{\lambda(t+s)}. \end{aligned}$$

Esta última expressão é exatamente $\pi(\mathbf{x}_0, t+s)$. Portanto:

$$\pi(\pi(\mathbf{x}_0, t), s) = \pi(\mathbf{x}_0, t+s).$$

3. Axioma de Continuidade:

A função $\pi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é contínua em $(\mathbf{x}_0, t)$. Logo, π é contínua em $(\mathbf{x}_0, t)$.

Os três axiomas de sistema dinâmico contínuo estão verificados para o fluxo gerado pela solução geral de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ com autovalores reais repetidos. Portanto, a solução desse sistema define um sistema dinâmico.

Exemplo 2.2.7. Seja o sistema linear autônomo:

$$x' = Ax,$$

onde A é uma matriz 2×2 com autovalores complexos $\lambda = \alpha \pm i\beta$ ($\beta \neq 0$) e autovetores complexos correspondentes $u \pm iv$. A solução geral real é dada por:

$$x(t) = e^{\alpha t} [c_1(\cos(\beta t)u - \sin(\beta t)v) + c_2(\sin(\beta t)u + \cos(\beta t)v)],$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ são determinados unicamente pela condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^2$.

$$x_0 = c_1u + c_2v.$$

Verificando os axiomas:

1. Axioma da identidade:

$$\pi(x_0, 0) = x_0 \quad \text{para todo } x_0 \in \mathbb{R}^2.$$

De fato,

$$\pi(x_0, 0) = e^{\alpha \cdot 0} [c_1(\cos(0)u - \sin(0)v) + c_2(\sin(0)u + \cos(0)v)] = c_1u + c_2v.$$

Pela definição de c_1, c_2 , temos:

$$c_1u + c_2v = x_0.$$

Portanto:

$$\pi(x_0, 0) = x_0.$$

2. Axioma de grupo:

$$\pi(\pi(x_0, t), s) = \pi(x_0, t + s) \quad \text{para todo } x_0 \in \mathbb{R}^2 \text{ e } t, s \in \mathbb{R}.$$

Seja:

$$y = \pi(x_0, t) = e^{\alpha t} [c_1(\cos(\beta t)u - \sin(\beta t)v) + c_2(\sin(\beta t)u + \cos(\beta t)v)].$$

Reescrevemos y na mesma forma da solução geral:

$$y = e^{\alpha t} [\tilde{c}_1 u + \tilde{c}_2 v],$$

onde

$$\tilde{c}_1 = c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t), \quad \tilde{c}_2 = -c_1 \sin(\beta t) + c_2 \cos(\beta t).$$

Agora evoluímos y por um tempo s :

$$\pi(y, s) = e^{\alpha s} [\tilde{c}_1(\cos(\beta s)u - \sin(\beta s)v) + \tilde{c}_2(\sin(\beta s)u + \cos(\beta s)v)].$$

Substituindo $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$:

$$\begin{aligned} \pi(y, s) = e^{\alpha s} [(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t))(\cos(\beta s)u - \sin(\beta s)v) \\ + (-c_1 \sin(\beta t) + c_2 \cos(\beta t))(\sin(\beta s)u + \cos(\beta s)v)]. \end{aligned}$$

Agrupando os termos em u e v :

Coeficiente de u :

$$\begin{aligned} (c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)) \cos(\beta s) + (-c_1 \sin(\beta t) + c_2 \cos(\beta t)) \sin(\beta s) \\ = c_1 \cos(\beta(t + s)) + c_2 \sin(\beta(t + s)). \end{aligned}$$

Coeficiente de v :

$$\begin{aligned} -(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)) \sin(\beta s) + (-c_1 \sin(\beta t) + c_2 \cos(\beta t)) \cos(\beta s) \\ = -c_1 \sin(\beta(t + s)) + c_2 \cos(\beta(t + s)). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\pi(y, s) &= e^{\alpha(t+s)}[c_1(\cos(\beta(t+s))u - \sin(\beta(t+s))v) + c_2(\sin(\beta(t+s))u + \cos(\beta(t+s))v)] \\ &= \pi(x_0, t + s).\end{aligned}$$

3. Axioma de continuidade:

A função $\pi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é contínua em (x_0, t) , pois é composta por funções exponenciais, trigonométricas e lineares, que são contínuas. Logo, π é contínua.

A solução do sistema com autovalores complexos satisfaz todos os axiomas de um sistema dinâmico contínuo.

Exemplo 2.2.8. Considere o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x, \end{cases}$$

o qual pode ser escrito de forma matricial como

$$X' = AX, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para determinar a solução geral, iniciamos encontrando os autovalores e autovetores da matriz A :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda = \pm i.$$

Para $\lambda = i$ resolvemos

$$(A - iI)v = 0 \implies \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da primeira equação temos $-ia - b = 0$, logo $b = -ia$. Assim, um autovetor associado a $\lambda = i$ é

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda = -i$, resolvemos

$$(A + iI)v = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A primeira equação fornece $ic - d = 0$, ou seja, $d = ic$. Um autovetor associado a $\lambda = -i$ é

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

A solução geral pode ser escrita como

$$X(t) = a v_1 e^{it} + c v_2 e^{-it}.$$

Usando as relações

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t), \quad e^{-it} = \cos(t) - i \sin(t),$$

obtemos

$$X(t) = a \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ -i(\cos t + i \sin t) \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} \cos t - i \sin t \\ i(\cos t - i \sin t) \end{pmatrix}.$$

Efetuando as operações:

$$X(t) = \begin{pmatrix} a \cos t + ia \sin t + c \cos t - ic \sin t \\ -ai \cos t + a \sin t + ci \cos t + c \sin t \end{pmatrix}.$$

Agrupando termos reais e imaginários, define-se

$$C_1 = a + c, \quad C_2 = a - c,$$

e a solução real assume a forma conhecida:

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}.$$

Utilizando o problema de valor inicial $X(0) = (x_0, y_0)$, temos

$$X(0) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ -C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = -y_0.$$

Assim, a solução particular é

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{pmatrix}$$

Definindo o fluxo:

$$\pi_t(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{pmatrix}.$$

1. Axioma da identidade:

$$\pi_0(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} x_0 \cos 0 - y_0 \sin 0 \\ x_0 \sin 0 + y_0 \cos 0 \end{pmatrix} = (x_0, y_0).$$

2. Axioma de Grupo:

Queremos verificar que, para todo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e para todos $t, s \in \mathbb{R}$, vale

$$\pi_s(\pi_t(x_0, y_0)) = \pi_{t+s}(x_0, y_0).$$

Recordemos que

$$\pi_t(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{pmatrix}.$$

Seja

$$(X, Y) = \pi_t(x_0, y_0) = (x_0 \cos t - y_0 \sin t, x_0 \sin t + y_0 \cos t).$$

Aplicando π_s ao ponto (X, Y)

$$\pi_s(X, Y) = \begin{pmatrix} X \cos s - Y \sin s \\ X \sin s + Y \cos s \end{pmatrix}.$$

Substituindo X e Y explicitamente:

$$\pi_s(\pi_t(x_0, y_0)) = \begin{pmatrix} (x_0 \cos t - y_0 \sin t) \cos s - (x_0 \sin t + y_0 \cos t) \sin s \\ (x_0 \cos t - y_0 \sin t) \sin s + (x_0 \sin t + y_0 \cos t) \cos s \end{pmatrix}.$$

Agora vamos expandir e organizar cada coordenada separadamente.

Primeira coordenada:

$$\begin{aligned} & (x_0 \cos t - y_0 \sin t) \cos s - (x_0 \sin t + y_0 \cos t) \sin s \\ &= x_0 \cos t \cos s - y_0 \sin t \cos s - x_0 \sin t \sin s - y_0 \cos t \sin s \\ &= x_0(\cos t \cos s - \sin t \sin s) + y_0(-\sin t \cos s - \cos t \sin s). \end{aligned}$$

Usamos agora as identidades trigonométricas:

$$\cos(t + s) = \cos t \cos s - \sin t \sin s,$$

$$\sin(t + s) = \sin t \cos s + \cos t \sin s.$$

Logo,

$$-\sin(t + s) = -\sin t \cos s - \cos t \sin s.$$

Assim, a primeira coordenada torna-se:

$$x_0 \cos(t + s) - y_0 \sin(t + s).$$

Segunda coordenada:

$$\begin{aligned} & (x_0 \cos t - y_0 \sin t) \sin s + (x_0 \sin t + y_0 \cos t) \cos s \\ &= x_0 \cos t \sin s - y_0 \sin t \sin s + x_0 \sin t \cos s + y_0 \cos t \cos s \\ &= x_0(\cos t \sin s + \sin t \cos s) + y_0(-\sin t \sin s + \cos t \cos s). \end{aligned}$$

Fazendo uso das mesmas identidades, obtém-se que a segunda coordenada assume a forma:

$$x_0 \sin(t + s) + y_0 \cos(t + s).$$

Assim obtivemos:

$$\pi_s(\pi_t(x_0, y_0)) = \begin{pmatrix} x_0 \cos(t + s) - y_0 \sin(t + s) \\ x_0 \sin(t + s) + y_0 \cos(t + s) \end{pmatrix}.$$

Mas esta é exatamente a definição de $\pi_{t+s}(x_0, y_0)$:

$$\pi_{t+s}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} x_0 \cos(t + s) - y_0 \sin(t + s) \\ x_0 \sin(t + s) + y_0 \cos(t + s) \end{pmatrix}.$$

$$\pi_s(\pi_t(x_0, y_0)) = \pi_{t+s}(x_0, y_0)$$

3. Axioma de continuidade:

O fluxo $\pi_t(x_0, y_0)$ é dado por funções que são combinações lineares em x_0, y_0 com coeficientes $\cos t$ e $\sin t$, que são funções C^∞ em t . Logo, π é contínuo (e até C^∞) em $(t, x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

Portanto, o sistema definido por

$$x' = -y, \quad y' = x$$

constitui um sistema dinâmico contínuo.

Exemplo 2.2.9. Considere o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x, \end{cases}$$

o qual pode ser escrito de forma matricial como

$$X' = AX, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Encontrando os autovalores e autovetores da matriz A , temos:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \implies \lambda = \pm 1.$$

Para $\lambda = 1$ resolvemos

$$(A - I)v = 0 \implies \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da primeira equação temos $-a + b = 0$, logo $b = a$. Assim, um autovetor associado a $\lambda = 1$ é

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda = -1$, resolvemos

$$(A + I)v = 0 \implies \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A primeira equação fornece $c + d = 0$, ou seja, $d = -c$. Um autovetor associado a $\lambda = -1$ é

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

A solução geral pode ser escrita como

$$X(t) = av_1e^t + cv_2e^{-t} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Efetuando as operações:

$$X(t) = \begin{pmatrix} ae^t + ce^{-t} \\ ae^t - ce^{-t} \end{pmatrix}.$$

Renomeando as constantes $a = C_1$, $c = C_2$, temos a forma

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Utilizando o problema de valor inicial $X(0) = (x_0, y_0)$, temos

$$X(0) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 \\ C_1 - C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = x_0, \\ C_1 - C_2 = y_0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$$2C_1 = x_0 + y_0 \Rightarrow C_1 = \frac{x_0 + y_0}{2}, \quad 2C_2 = x_0 - y_0 \Rightarrow C_2 = \frac{x_0 - y_0}{2}.$$

Assim, a solução particular é

$$X(t) = \frac{x_0 + y_0}{2} \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \frac{x_0 - y_0}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$X(t) = \begin{pmatrix} \frac{x_0 + y_0}{2} e^t + \frac{x_0 - y_0}{2} e^{-t} \\ \frac{x_0 + y_0}{2} e^t - \frac{x_0 - y_0}{2} e^{-t} \end{pmatrix}$$

Definindo o fluxo

$$\pi_t(x_0, y_0) = \left(\frac{x_0 + y_0}{2} e^t + \frac{x_0 - y_0}{2} e^{-t}, \frac{x_0 + y_0}{2} e^t - \frac{x_0 - y_0}{2} e^{-t} \right).$$

1. Axioma da identidade:

$$\pi_0(x_0, y_0) = \left(\frac{x_0 + y_0}{2} + \frac{x_0 - y_0}{2}, \frac{x_0 + y_0}{2} - \frac{x_0 - y_0}{2} \right) = (x_0, y_0).$$

2. Axioma de grupo: Queremos mostrar que

$$\pi_s(\pi_t(x_0, y_0)) = \pi_{t+s}(x_0, y_0).$$

Seja

$$\pi_t(x_0, y_0) = \left(\frac{x_0 + y_0}{2}e^t + \frac{x_0 - y_0}{2}e^{-t}, \frac{x_0 + y_0}{2}e^t - \frac{x_0 - y_0}{2}e^{-t} \right) = (X, Y)$$

Então

$$\pi_s(X, Y) = \left(\frac{X + Y}{2}e^s + \frac{X - Y}{2}e^{-s}, \frac{X + Y}{2}e^s - \frac{X - Y}{2}e^{-s} \right).$$

Substituindo X e Y explicitamente, temos:

$$X + Y = (x_0 + y_0)e^t, \quad X - Y = (x_0 - y_0)e^{-t}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \pi_s(\pi_t(x_0, y_0)) &= \left(\frac{(x_0 + y_0)e^t}{2}e^s + \frac{(x_0 - y_0)e^{-t}}{2}e^{-s}, \frac{(x_0 + y_0)e^t}{2}e^s - \frac{(x_0 - y_0)e^{-t}}{2}e^{-s} \right) \\ &= \left(\frac{x_0 + y_0}{2}e^{t+s} + \frac{x_0 - y_0}{2}e^{-(t+s)}, \frac{x_0 + y_0}{2}e^{t+s} - \frac{x_0 - y_0}{2}e^{-(t+s)} \right) = \pi_{t+s}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

3. Axioma de continuidade:

O fluxo $\pi_t(x_0, y_0)$ é dado por funções que são combinações lineares em x_0, y_0 com coeficientes e^t e e^{-t} , que são funções C^∞ em t . Logo, π é contínuo (e até C^∞) em $(t, x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

Portanto, o sistema definido por

$$x' = y, \quad y' = x$$

constitui um sistema dinâmico contínuo.

Em alguns casos, as soluções de equações diferenciais podem apresentar comportamentos que impedem sua definição para todos os valores de t . O exemplo a seguir ilustra essa situação, motivando a necessidade de adaptar a definição de sistema dinâmico.

Exemplo 2.2.10. Seja a equação autônoma

$$x' = x^2$$

Resolvendo essa equação, temos que:

$$\frac{dx}{dt} = x^2$$

$$\frac{dx}{x^2} = dt$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int dt$$

$$\int x^{-2} dx = \int dt$$

$$\frac{x^{-1}}{-1} = t + C$$

$$-\frac{1}{x} = t + C$$

$$\frac{1}{x} = -t + C$$

$$x = \frac{1}{-t + C}$$

$$x(t) = \frac{1}{-t + C}$$

Dada a condição inicial $x(0) = x_0$, temos:

$$x(0) = \frac{1}{0 + C}$$

$$x(0) = \frac{1}{C}$$

$$x(0) = x_0 = \frac{1}{C}$$

$$C = \frac{1}{x_0}$$

Logo,

$$x(t) = \frac{1}{-t + \frac{1}{x_0}}$$

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$$

Considere $x_0 = x$ (apenas para simplificar a notação) e defina $\pi(x, t) = \frac{x}{1 - xt}$.

Verifiquemos os axiomas:

$$(i) \quad \pi(x, 0) = \frac{x}{1 - x \cdot 0} = \frac{x}{1} = x;$$

$$(ii) \quad \pi(\pi(x, t), s) = \pi\left(\frac{x}{1 - xt}, s\right) = \frac{\frac{x}{1 - xt}}{1 - \frac{x}{1 - xt}s} = \frac{x}{1 - xt} \frac{1}{1 - \frac{x}{1 - xt}s} = \frac{x}{1 - xt \frac{1 - xt - xs}{1 - xt}} = \frac{x}{1 - xt - xs} = \frac{x}{1 - (xt + xs)} = \frac{x}{1 - x(t + s)} = \pi(x, t + s);$$

$$(iii) \quad \pi(x, t) \text{ é contínua para todo } t \neq \frac{1}{x}.$$

Analisando os itens i e ii, verificamos que os axiomas de identidade e de grupo são satisfeitos. No entanto, em relação ao axioma de continuidade, a solução não é contínua para todo t , uma vez que apresenta uma descontinuidade em $t = \frac{1}{x}$. Portanto, nesses casos, considera-se uma definição modificada de sistema dinâmico, a qual pode ser encontrada de forma detalhada no trabalho de George R. Sell, [10].

Capítulo 3

Conceitos qualitativos de Sistemas Dinâmicos Contínuos

Neste capítulo, são apresentados os fundamentos teóricos que sustentam a análise qualitativa de sistemas dinâmicos contínuos. O estudo concentra-se na compreensão das principais estruturas que caracterizam o comportamento assintótico desses sistemas, os conjuntos e trajetórias invariantes, pontos críticos e o método de seções de Poincaré. A exposição desses tópicos tem como base as referências [1] e [2], que fornecem o suporte teórico necessário para o desenvolvimento deste trabalho, sugere-se então a leitura dessas obras.

3.1 Conjuntos e Trajetórias Invariantes

Para um estudo qualitativo de sistemas dinâmicos contínuos, o conceito de conjuntos invariantes é fundamental. Seguindo [2], sua definição é apresentada a seguir.

Definição 3.1.1. Um conjunto $M \subset X$ é chamado invariante sempre que

$$\pi(x, t) \in M \quad \text{para todo } x \in M \text{ e todo } t \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Ele é chamado **positivamente invariante** sempre que (3.1) vale com $\mathbb{R}$ substituído por $\mathbb{R}^+$, e é chamado **negativamente invariante** se o mesmo vale com $\mathbb{R}$

substituído por $\mathbb{R}^-$. Um conjunto $M \subset X$ é invariante se, e somente se, ele é ao mesmo tempo positivamente e negativamente invariante.

Para ilustrar essa definição, considere o seguinte sistema dinâmico definido pela solução de uma equação diferencial ordinária autônoma.

Exemplo 3.1.1. Considere o sistema dinâmico definido pela solução da seguinte equação diferencial ordinária autônoma:

$$x' = -x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Este sistema possui um único ponto de equilíbrio (1.2.2) em $x = 0$, pois $x' = 0$ quando $x = 0$. A solução geral do sistema para uma condição inicial $x(0) = x_0$ é dada por:

$$x(t) = x_0 e^{-t}.$$

Seja $M = \{0\} \subset \mathbb{R}$. Para qualquer $x \in M$, tem-se $x = 0$. Logo, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$x(t) = 0 \cdot e^{-t} = 0 \in M.$$

Portanto, a trajetória que inicia em $x = 0$ permanece em M para todo $t \in \mathbb{R}$, satisfazendo a condição (3.1). Assim, M é um conjunto invariante.

Além disso, note que:

- M é também positivamente invariante, pois $x(t) = 0 \in M$ para todo $t \geq 0$.
- M é negativamente invariante, pois $x(t) = 0 \in M$ para todo $t \leq 0$.

A seguir, os teoremas exibem algumas propriedades de tais conjuntos.

Teorema 3.1.1. *Seja $\{M_{i \in I}\}$ uma coleção de subconjuntos de X que são positivamente invariantes, negativamente invariantes ou invariantes. Então, sua interseção e sua união têm a mesma propriedade.*

Demonstração. Para fixar nossas ideias, suponha que os conjuntos M_i sejam positivamente invariantes. Seja $M' = \bigcup_{i \in I} M_i$ e $M'' = \bigcap_{i \in I} M_i$. Para qualquer $x \in M'$, temos $x \in M_i$ para algum i . Assim, $\pi(x, t) \in M_i$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$, uma vez que M_i é positivamente

invariante. Portanto, de fato $\pi(x, t) \in M'$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$, já que $M' \supseteq M_i$; M' é, pois, positivamente invariante. Agora, seja $x \in M''$. Então $x \in M_i$ para todo i e, pela invariância positiva de cada M_i , $\pi(x, t) \in M_i$ para cada i e cada $t \in \mathbb{R}^+$. Logo, $\pi(x, t) \in \bigcap_{i \in I} M_i = M''$ para cada $t \in \mathbb{R}^+$ e M'' é positivamente invariante. A demonstração para o caso em que os conjuntos M_i são negativamente invariantes é análoga, bastando substituir $t \in \mathbb{R}^+$ por $t \in \mathbb{R}^-$ em todo o argumento. Finalmente, se os conjuntos M_i são invariantes, isso significa que são simultaneamente positivamente e negativamente invariantes. Pela aplicação sequencial dos dois casos anteriores, conclui-se que tanto a união M' quanto a interseção M'' serão também conjuntos invariantes. $\square$

O Teorema 3.1.1 garante que, dada uma coleção de conjuntos todos com o mesmo tipo de invariância (positiva, negativa ou total), tanto sua união quanto sua interseção mantêm essa mesma propriedade de invariância. Esse fato é fundamental para o estudo qualitativo de sistemas dinâmicos, pois permite construir novos conjuntos invariantes a partir de outros já conhecidos. Um resultado complementar importante, que veremos a seguir, mostra que a propriedade de invariância também é preservada quando se considera o fecho topológico de um conjunto.

Teorema 3.1.2. *Seja $M \subset X$ positivamente invariante, negativamente invariante ou invariante. Então o fecho $\overline{M}$ tem a mesma propriedade.*

Demonstração. Considere o caso de invariância. Seja $x \in \overline{M}$ e $t \in \mathbb{R}$. Então existe uma sequência $\{x_n\}$ em M tal que $x_n \rightarrow x$. Pela invariância de M , temos $\pi(x_n, t) \in M$ para cada n . Como π é contínua (em particular, contínua na primeira variável), temos $\pi(x_n, t) \rightarrow \pi(x, t)$ e $\pi(x, t) \in \overline{M}$. Assim, $\overline{M}$ é invariante. A demonstração para os casos de invariância positiva e negativa é inteiramente análoga àquela apresentada para a invariância completa. A única modificação necessária reside no parâmetro t : para invariância positiva, toma-se $t \in \mathbb{R}^+$, e para invariância negativa, $t \in \mathbb{R}^-$. $\square$

O teorema demonstrado estabelece que a propriedade de invariância se preserva ao tomarmos o fecho de um conjunto. Este resultado é fundamental, pois nos permite estender conclusões sobre conjuntos invariantes para seus respectivos fechados. O resultado a seguir mostra que existe uma relação direta entre um conjunto e seu complemento no

que diz respeito à invariância. Veremos que a invariância positiva de um conjunto equivale à invariância negativa do seu complemento.

Teorema 3.1.3. *Um conjunto $M \subset X$ é positivamente invariante se, e somente se, o conjunto $X - M$ é negativamente invariante. M é invariante se, e somente se, $X - M$ é invariante.*

Demonstração. Seja M positivamente invariante. Se $x \in X - M$ e $t \in \mathbb{R}^-$, então devemos mostrar que $\pi(x, t) \in X - M$. Suponha que não. Então $\pi(x, t) \in M$ e, como $-t \in \mathbb{R}^+$, temos

$$\pi(\pi(x, t), -t) = \pi(x, t - t) = \pi(x, 0) = x \in M,$$

pela invariância positiva de M . Esta contradição mostra que $X - M$ é negativamente invariante. A prova da recíproca é inteiramente análoga. A prova do segundo resultado decorre do primeiro: se M é invariante, então é positivamente e negativamente invariante. Pelo primeiro resultado, $X - M$ é negativamente invariante (devido à invariância positiva de M) e positivamente invariante (devido à invariância negativa de M). Portanto, $X - M$ é invariante. A recíproca é análoga, trocando M por $X - M$. $\square$

Este resultado nos permite transferir propriedades entre um conjunto e seu complemento. O próximo teorema aborda especificamente o comportamento da invariância na fronteira e no interior de conjuntos.

Teorema 3.1.4. *Seja $M \subset X$ invariante. Então, também são invariantes sua fronteira $Front(M)$ e seu interior $Int(M)$. O recíproco é válido sempre que M for aberto ou fechado.*

Demonstração. Se M é invariante, então $X - M$ também é invariante pelo Teorema 3.1.3. Consequentemente, tanto $\overline{M}$ quanto $X - \overline{M}$ são invariantes pelo Teorema 3.1.2. Assim,

$$Front(M) = \overline{M} \cap \overline{X - M}$$

é invariante pelo Teorema 3.1.1, e

$$Int(M) = X - \overline{X - M}$$

é novamente invariante pelo Teorema 3.1.3.

Para o recíproco, afirmamos que se $Front(M)$ é invariante, então $Int(M)$ também o é. De outro modo, existiriam $x \in Int(M)$ e $t \in \mathbb{R}$ tais que $\pi(x, t) \notin Int(M)$. Como o conjunto (assuma, por conveniência, $t > 0$)

$$\pi(x, [0, t])$$

é conexo (como $\pi_x: \mathbb{R} \rightarrow X$ é contínua e $[0, t]$ é conexo, sua imagem $\pi(x, [0, t])$ é conexa), segue que $\pi(x, [0, t]) \cap Front(M) \neq \emptyset$.

Portanto, existe um τ , com $0 < \tau \leq t$, tal que $\pi(x, \tau) \in Front(M)$. Mas então

$$x = \pi(x, 0) = \pi(x, \tau - \tau) = \pi(\pi(x, \tau), -\tau) \in Front(M)$$

pela invariância de $Front(M)$, o que é uma contradição, pois $x \in Int(M)$.

Assim, provamos que, se $Front(M)$ é invariante, então $Int(M)$ também é. Consequentemente, se M é fechado, então

$$M = Front(M) \cup Int(M)$$

é invariante. E se M é aberto, então

$$M = Int(M)$$

é invariante.

A demonstração de que, quando $Int(M)$ é invariante, então M também é (para M fechado ou aberto), está apresentada em [2], na qual a demonstração utiliza argumentos análogos aos da demonstração acima. $\square$

A seguir, apresentamos uma notação simplificada para trabalhar com trajetórias invariantes, o que facilitará nossa exposição nos próximos tópicos.

Definição 3.1.2. Introduzimos as aplicações γ , γ^+ e γ^- de X em 2^X , definindo, para qualquer $x \in X$:

- $\gamma(x) = \{\pi(x, t) : t \in \mathbb{R}\};$

- $\gamma^+(x) = \{\pi(x, t) : t \in \mathbb{R}^+\};$
- $\gamma^-(x) = \{\pi(x, t) : t \in \mathbb{R}^-\}.$

Para qualquer $x \in X$, os conjuntos $\gamma(x)$, $\gamma^+(x)$ e $\gamma^-(x)$ são chamados, respectivamente, de **trajetória**, **semitrajetória positiva** e **semitrajetória negativa** que passam por x (ou a partir de x).

Para qualquer $x \in X$, os conjuntos $\gamma(x)$, $\gamma^+(x)$ e $\gamma^-(x)$ são, respectivamente, invariante, positivamente invariante e negativamente invariante.

Pela Definição 3.1.2 um conjunto $M \subset X$ é invariante, positivamente invariante ou negativamente invariante se, e somente se, para cada $x \in M$, tem-se, respectivamente,

$$\gamma(x) \subset M, \quad \gamma^+(x) \subset M, \quad \text{ou} \quad \gamma^-(x) \subset M.$$

Os exemplos a seguir ilustram a aplicação prática dos conceitos de invariância apresentados.

Exemplo 3.1.2. Os conjuntos X e $\{0\}$ são positivamente e negativamente invariantes.

Este exemplo mostra os casos triviais de invariância: o espaço de fase X , que é trivialmente invariante por conter todas as trajetórias possíveis do sistema, e o ponto de equilíbrio na origem $\{0\}$, que é invariante por constituir uma solução estacionária do sistema.

A seguir, analisamos um sistema dinâmico linear. Nele, identificamos um conjunto que preserva suas trajetórias e demonstramos sua propriedade de invariância.

Exemplo 3.1.3. Considere o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = 2y, \end{cases}$$

Cujas soluções podem ser encontradas a partir do método do Exemplo 2.2.9. Sendo assim, as soluções são:

$$x(t) = x_0 e^{-t} \text{ e } y(t) = y_0 e^{2t}$$

Defina $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \text{ e } y = 0\}$, mostramos a seguir que M é invariante sob o fluxo

$$\pi((x, y), t) = (xe^{-t}, ye^{2t}).$$

Seja $(x_0, 0) \in M$ um ponto qualquer no eixo x . A evolução deste ponto pelo fluxo é dada por

$$\pi((x_0, 0), t) = (x_0e^{-t}, 0 \cdot e^{2t}) = (x_0e^{-t}, 0).$$

Para qualquer $t \in \mathbb{R}$, a segunda coordenada é nula, portanto $\pi((x_0, 0), t) \in M$. Logo M é invariante.

Exemplo 3.1.4. Considere o sistema dinâmico definido por

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x. \end{cases}$$

Conforme resolvido no Exemplo 2.2.8, a solução geral desse sistema com condição inicial (x_0, y_0) é dada por

$$(x(t), y(t)) = (x_0 \cos t - y_0 \sin t, x_0 \sin t + y_0 \cos t).$$

Cujo o fluxo $\pi_t(x_0, y_0)$ do sistema é dado por

$$\pi_t(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{pmatrix}.$$

Considere agora o conjunto

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}, \quad r > 0.$$

Para demonstrar que M é um conjunto invariante, tome $(x_0, y_0) \in M$, isto é,

$$x_0^2 + y_0^2 = r^2.$$

Seja $(x(t), y(t)) = \pi_t(x_0, y_0)$. Então:

$$\begin{aligned}
 x(t)^2 + y(t)^2 &= (x_0 \cos t - y_0 \sin t)^2 + (x_0 \sin t + y_0 \cos t)^2 \\
 &= x_0^2 \cos^2 t - 2x_0 y_0 \cos t \sin t + y_0^2 \sin^2 t \\
 &\quad + x_0^2 \sin^2 t + 2x_0 y_0 \sin t \cos t + y_0^2 \cos^2 t \\
 &= x_0^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) + y_0^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) \\
 &= x_0^2 + y_0^2 = r^2.
 \end{aligned}$$

Portanto, $\pi_t(x_0, y_0) \in M$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o que mostra que M é um conjunto invariante para o sistema.

Além de analisar o comportamento instantâneo das trajetórias, é fundamental estudar seu comportamento assintótico, ou seja, o que ocorre com as trajetórias à medida que o tempo cresce. Isso nos leva ao conceito de conjuntos limite.

Definição 3.1.3. Definimos as aplicações Λ^+ e Λ^- de X em 2^X , estabelecendo, para cada $x \in X$:

- $\Lambda^+(x) = \{y \in X : \text{existe uma sequência } \{t_n\} \subset \mathbb{R} \text{ tal que } t_n \rightarrow +\infty \text{ e } \pi(x, t_n) \rightarrow y\};$
- $\Lambda^-(x) = \{y \in X : \text{existe uma sequência } \{t_n\} \subset \mathbb{R} \text{ tal que } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \pi(x, t_n) \rightarrow y\}.$

Para qualquer $x \in X$, o conjunto $\Lambda^+(x)$ é chamado de **conjunto limite positivo** (ou **conjunto limite ômega**), e o conjunto $\Lambda^-(x)$ é chamado de **conjunto limite negativo** (ou **conjunto limite alfa**).

Após introduzir os conjuntos limite, investigaremos suas propriedades de invariância. O teorema a seguir demonstra que tanto o conjunto limite positivo quanto o limite negativo são invariantes.

Teorema 3.1.5. *Para qualquer $x \in X$, temos que $\Lambda^+(x)$ e $\Lambda^-(x)$ são conjuntos invariantes.*

Demonstração. Seja $y \in \Lambda^+(x)$ e tome $t \in \mathbb{R}$ arbitrário. Pela Definição 3.1.3, existe uma sequência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ com $t_n \rightarrow +\infty$ tal que $\pi(x, t_n) \rightarrow y$. Fixe agora $t \in \mathbb{R}$. Pela propriedade de grupo do fluxo e pela continuidade de π , temos

$$\pi(\pi(x, t_n), t) = \pi(x, t_n + t) \longrightarrow \pi(y, t).$$

Como $t_n \rightarrow +\infty$ e t é fixo, segue que $t_n + t \rightarrow +\infty$. Portanto, a sequência $\{t_n + t\}$ é uma sequência que tende a $+\infty$ e satisfaz $\pi(x, t_n + t) \rightarrow \pi(y, t)$. Assim, pela definição de $\Lambda^+(x)$, concluímos que $\pi(y, t) \in \Lambda^+(x)$. Como o argumento vale para todo $t \in \mathbb{R}$, segue que $\Lambda^+(x)$ é invariante.

O argumento é inteiramente análogo para $\Lambda^-(x)$. Basta substituir em toda a prova: a condição $t_n \rightarrow +\infty$ por $t_n \rightarrow -\infty$ e observar que, para t fixo, $t_n + t \rightarrow -\infty$ sempre que $t_n \rightarrow -\infty$. $\square$

Sabemos que os dois conjuntos citados na Definição 3.1.3 são fechados e além disso $\overline{\gamma^+(x)} = \gamma^+(x) \cup \Lambda^+(x)$ e $\overline{\gamma^-(x)} = \gamma^-(x) \cup \Lambda^-(x)$, porém omitiremos aqui as demonstrações, que podem ser encontrados em [2].

Outra importante definição para a análise qualitativa dos sistemas dinâmicos contínuos é a dos conjuntos minimais, que será descrita a seguir. Estes conjuntos são fundamentais para o estudo da estabilidade e de conceitos recursivos na dinâmica. Para mais informações sobre este conceito, sugere-se a leitura de [2].

Definição 3.1.4. Um conjunto $M \subset X$ é chamado minimal se satisfaz as seguintes propriedades:

- M é não vazio;
- M é fechado;
- M é invariante;
- Nenhum subconjunto próprio de M satisfaz simultaneamente as propriedades acima.

3.2 Pontos críticos

A análise dos pontos críticos é fundamental para a compreensão dos sistemas dinâmicos, pois estes pontos representam os estados estacionários do sistema. Após a definição formal, são apresentados teoremas sobre algumas das suas propriedades.

Definição 3.2.1. Um ponto $x \in X$ é dito ser um ponto crítico (ou um ponto de repouso, ou um ponto de equilíbrio) se $\pi(x, t) = x$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Um ponto crítico pode ser caracterizado de várias formas equivalentes. O próximo teorema apresenta diferentes perspectivas para identificar tais pontos no sistema.

Teorema 3.2.1. *Seja $x \in X$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) x é crítico;
- (ii) $\{x\} = \gamma(x)$;
- (iii) $\{x\} = \gamma^+(x)$;
- (iv) $\{x\} = \gamma^-(x)$;
- (v) $\{x\} = \pi(x, [a, b])$ para algum $a < b$;
- (vi) Existe uma sequência $\{t_n\}$, com $t_n > 0$ e $t_n \rightarrow 0$, tal que $x = \pi(x, t_n)$ para cada n .

As demonstrações da equivalência entre (i) e (ii) - (v) são quase triviais, uma vez que a equivalência entre (i) e (vi) é estabelecida.

O seguinte resultado será fundamental para demonstrar os próximos dois teoremas sobre pontos críticos. Ele estabelece que, para pontos não críticos, é possível separar topologicamente um ponto de sua imagem sob o fluxo em um instante fixo.

Lema 3.2.1. *Se $x \neq \pi(x, t)$ para algum $x \in X$ e $t \in \mathbb{R}$ (isto é, x não é crítico), então existem vizinhanças abertas U de x e V de $\pi(x, t)$ tais que $V = \pi(U, t)$ e $U \cap V = \emptyset$.*

Demonstração. Note que, se $W \subset X$ é aberto, então $W_t = \pi^t(W)$ é aberto, pois π^t é um homeomorfismo (Teorema 2.1.1). Agora, sejam W_1 e W_2 abertos disjuntos contendo, respectivamente, x e $\pi(x, t)$. Por exemplo, como $x \neq \pi(x, t)$, $d(x, \pi(x, t)) = \varepsilon > 0$,

então tome $W_1 = B(x, \varepsilon/2)$ e $W_2 = B(\pi(x, t), \varepsilon/2)$. Então $\pi(W_1, t)$ é aberto e contém $\pi(x, t)$. Defina $V = \pi(W_1, t) \cap W_2$ e $U = \pi(V, -t)$. Como W_1 e W_2 são disjuntos e $\pi(W_1, t) \subset \pi(W_1, t)$, temos $V \subset W_2$. Além disso, $U = \pi(V, -t) \subset \pi(W_2, -t)$. Mas, pela escolha de W_1 e W_2 , sabemos que $\pi(W_2, -t) \subset W_1$. Portanto, $U \subset W_1$. Desse modo, U e V são disjuntos, pois estão contidos em W_1 e W_2 , respectivamente, e $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Finalmente, note que $x \in U$, pois $\pi(x, t) \in V$ e $U = \pi(V, -t)$, e claramente $\pi(x, t) \in V$ por construção. Logo, U e V são vizinhanças abertas de x e $\pi(x, t)$, respectivamente. $\square$

A partir do lema anterior, apresentamos um teorema que caracteriza pontos críticos usando o conceito de vizinhanças e semi-trajetórias.

Teorema 3.2.2. *Um ponto $x \in X$ é crítico se, e somente se, toda vizinhança de x contém uma semi-trajetória.*

Demonstração. A ida é imediata, pois $\gamma(x) = \{x\}$ quando x é crítico, pelo Teorema 3.2.1, de modo que $\gamma(x)$ está contida em toda vizinhança de x . Reciprocamente, suponha que x não seja crítico. Então existe $t \in \mathbb{R}^+$ tal que $x \neq \pi(x, t)$, e, conseqüentemente, pelo Lema anterior 3.2.1, existem vizinhanças abertas disjuntas U de x e V de $\pi(x, t)$, com $V = \pi(U, t)$. Como, para cada $y \in U$, temos $\pi(y, t) \in V$, U não pode conter uma semi-trajetória positiva. Analogamente, U não pode conter uma semi-trajetória negativa. Essa contradição mostra que $x = \pi(x, t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, e, portanto, x é crítico. $\square$

Outro resultado importante sobre pontos críticos é que eles formam um conjunto fechado no espaço de fase.

Teorema 3.2.3. *O conjunto de todos os pontos críticos em X é fechado.*

Demonstração. Se o conjunto dos pontos críticos não for fechado, então existe uma sequência $\{x_n\}$ de pontos críticos tal que $x_n \rightarrow x$ e x não é crítico. Assim, existe $t \in \mathbb{R}$ com $x \neq \pi(x, t)$ e, portanto, pelo Lema anterior 3.2.1, existem conjuntos abertos U contendo x e V contendo $\pi(x, t)$, tais que $\pi(U, t) = V$ e $U \cap V = \emptyset$. Como $x_n \rightarrow x$, temos $x_n \in U$ para todo n suficientemente grande. Então, para o valor de t acima, temos $\pi(x_n, t) \in V$ para n suficientemente grande, e, em particular, $\pi(x_n, t) \notin U$. Mas os x'_n s são críticos, e portanto $x_n = \pi(x_n, t) \in U$. Essa contradição prova o teorema. $\square$

3.3 Seção de Poincaré

Um conceito importante no estudo de sistemas dinâmicos é o de seção de Poincaré. Essa construção transforma um fluxo contínuo em um sistema discreto, facilitando a análise do comportamento das trajetórias.

Definição 3.3.1. Um conjunto $X \subset Y$ (onde Y é o espaço onde o semifluxo π_t está definido e X é um subconjunto de Y) é dito ser uma seção de Poincaré para um semifluxo π_t se

$$\tau(x) := \inf\{t > 0 : \pi_t(x) \in X\} \in \mathbb{R}^+ \quad (3.2)$$

para cada $x \in X$ (observe figura abaixo), com a convenção de que $\inf \emptyset = +\infty$. O ínfimo existe pois o conjunto $\{t > 0 : \pi_t(x) \in X\}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^+$, logo tem ínfimo em $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. O número $\tau(x)$ é chamado de tempo de primeiro retorno de x ao conjunto X .

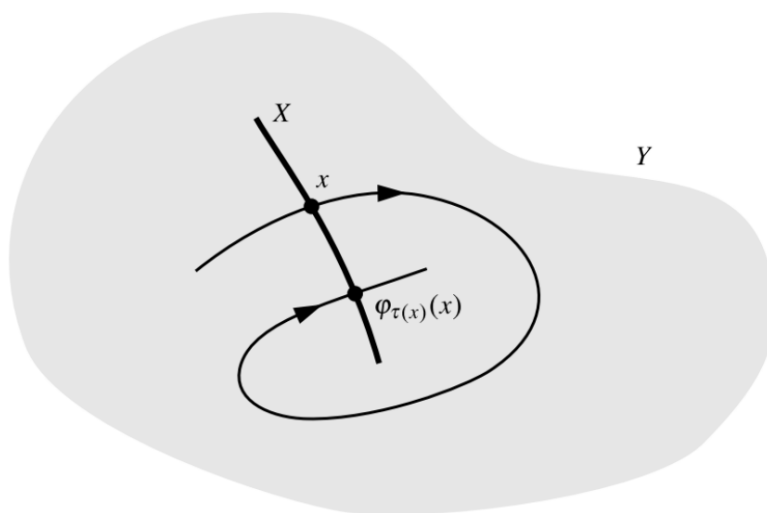


Figura 3.1: Seção de Poincaré

Barreira e Valls (2012, p. 19) [1]

Considere $\varphi_{\tau(x)}(x) = \pi_{\tau(x)}(x)$.

Assim, o tempo de primeiro retorno a X é uma função $\tau : X \rightarrow \mathbb{R}^+$. Observamos que 3.2 inclui a hipótese de que cada ponto de X retorna a X . De fato, cada ponto de X retorna infinitas vezes a X .

Essa definição nos permite identificar trajetórias que atravessam a seção várias vezes, mostrando padrões que se repetem no sistema. Assim, conseguimos transformar o estudo do fluxo contínuo em um processo discreto, sem perder as principais características dinâmicas envolvidas.

Uma propriedade fundamental das seções de Poincaré é que elas não podem conter pontos críticos do sistema. Este resultado será demonstrado a seguir.

Teorema 3.3.1. *Se X é uma seção de Poincaré para um semifluxo π_t , então π_t não possui pontos críticos em X .*

Demonstração. Suponha, por contradição, que existe um ponto crítico $p \in X$. Pela definição de ponto crítico, temos

$$\pi_t(p) = p, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Pela definição de seção de Poincaré, para cada $x \in X$, existe um menor tempo $\tau(x) > 0$ tal que

$$\pi_{\tau(x)}(x) \in X.$$

Aplicando esta definição ao ponto p , deveríamos ter

$$\tau(p) > 0 \quad \text{e} \quad \pi_{\tau(p)}(p) \in X.$$

No entanto, como p é ponto crítico, para qualquer $t > 0$, temos $\pi_t(p) = p \in X$. Em particular, para todo $\varepsilon > 0$, tomando $t = \varepsilon$, temos $\pi_\varepsilon(p) = p \in X$.

Isso significa que não existe um menor tempo positivo $\tau(p) > 0$ de retorno a X , pois para qualquer candidato $\tau > 0$ que se proponha, sempre existirá um tempo menor $\frac{\tau(p)}{2} < \tau(p)$ tal que $\pi_\varepsilon(p) \in X$.

Portanto, não existe $\tau(p) > 0$ satisfazendo a definição de seção de Poincaré, o que contradiz a hipótese de que X é uma seção de Poincaré. Concluimos que não pode haver pontos críticos em X . $\square$

A seguir veremos um exemplo concreto de seção de Poincaré em um sistema dinâmico.

Exemplo 3.3.1. Vamos mostrar que $X = \{(1, y) \in \mathbb{R}^2\}$ é uma seção de Poincaré para o sistema

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x, \end{cases}$$

analisando em particular o ponto $p = (1, 0) \in X$. Novamente voltando na resolução desse sistema no Exemplo 2.2.8, o fluxo do sistema é dado por:

$$\pi_t(x_0, y_0) = (x_0 \cos t - y_0 \sin t, x_0 \sin t + y_0 \cos t).$$

Para $p = (1, 0)$, temos:

$$\pi_t(1, 0) = (\cos t, \sin t).$$

Queremos encontrar o menor $t > 0$ tal que $\pi_t(1, 0) \in X$, ou seja, a primeira coordenada deve ser igual a 1:

$$\cos t = 1.$$

As soluções desta equação são $t = 2\pi k$, com $k \in \mathbb{Z}^+$. O menor $t > 0$ é:

$$\tau(1, 0) = 2\pi \in \mathbb{R}^+.$$

Para um ponto genérico $(1, y_0) \in X$, a trajetória é:

$$\pi_t(1, y_0) = (\cos t - y_0 \sin t, \sin t + y_0 \cos t).$$

A condição para retornar a X é:

$$\cos t - y_0 \sin t = 1.$$

Esta equação possui solução $t > 0$ para todo $y_0 \in \mathbb{R}$. Por exemplo:

- Se $y_0 = 0$, $\cos t = 1 \Rightarrow t = 2\pi$.
- Se $y_0 \neq 0$, existe $t \in (0, 2\pi)$ satisfazendo a equação.

Em todos os casos, $\tau(1, y_0) \in \mathbb{R}^+$, portanto X é uma seção de Poincaré.

O conjunto $X = \{(1, y) \in \mathbb{R}^2\}$ é uma seção de Poincaré para o sistema, e para $p = (1, 0)$ temos $\tau(1, 0) = 2\pi$.

Definimos agora o mapa de Poincaré, que associa a cada ponto na seção sua posição no primeiro retorno, convertendo assim o fluxo contínuo em um sistema discreto.

Definição 3.3.2. Dada uma seção de Poincaré X para um semifluxo π_t , definimos o mapa de Poincaré $f : X \rightarrow X$ por

$$f(x) = \pi_{\tau(x)}(x).$$

Uma propriedade fundamental do mapa de Poincaré é que ele é uma transformação inversível quando definido a partir de um fluxo. Este resultado será demonstrado a seguir.

Teorema 3.3.2. *Se X é uma seção de Poincaré para um fluxo π_t , O mapa de Poincaré $f : X \rightarrow X$ é inversível.*

Demonstração. Seja $f(x) = \pi(x, \tau(x))$, com $\tau(x) > 0$ o tempo de primeiro retorno.

Como π_t é um fluxo, defina $\sigma(x) = \sup\{t < 0 : \pi(x, t) \in X\}$ (pela definição de seção de Poincaré, o conjunto $\{t < 0 : \pi(x, t) \in X\}$ é não vazio e limitado superiormente, portanto seu supremo é finito). Tem-se $\sigma(x) = -\tau(x)$.

Defina $f^{-1}(x) = \pi(x, \sigma(x)) = \pi(x, -\tau(x))$.

$$1. f^{-1}(f(x)) = x:$$

$$f^{-1}(f(x)) = \pi(\pi(x, \tau(x)), -\tau(x)) = \pi(x, \tau(x) - \tau(x)) = x.$$

$$2. f(f^{-1}(x)) = x:$$

$$f(f^{-1}(x)) = \pi(\pi(x, -\tau(x)), \tau(x)) = \pi(x, -\tau(x) + \tau(x)) = x.$$

Logo, f é inversível. □

Este resultado mostra que o mapa de Poincaré mantém a característica de reversibilidade do fluxo, permitindo analisar a dinâmica tanto para tempos futuros quanto passados por meio de iterações discretas.

Considerações Finais

Este trabalho teve como objetivo principal, analisar as propriedades qualitativas dos sistemas dinâmicos contínuos, estabelecendo as condições sob as quais as soluções de uma equação diferencial ordinária as definem.

A principal contribuição desta pesquisa para a comunidade acadêmica, em particular para os estudantes de graduação, é a apresentação de uma ponte acessível entre o estudo das equações diferenciais e a teoria geral dos sistemas dinâmicos.

No desenvolvimento do trabalho, partimos de uma revisão das EDOs e dos teoremas de existência e unicidade, essenciais para garantir que as soluções gerem um fluxo bem definido. Em seguida, formalizamos a noção de sistema dinâmico contínuo, demonstrando como as soluções de algumas EDOs satisfazem os axiomas de um fluxo e, inclusive, adaptando essa definição para os casos em que as trajetórias não estão definidas para todo o tempo. Por fim, exploramos os conceitos elementares que permitem uma análise qualitativa do sistema. Conclui-se que a análise qualitativa é fundamental por possibilitar a compreensão do comportamento global das soluções sem a necessidade de calcular explicitamente cada trajetória, oferecendo uma visão ampla e estruturada da dinâmica em estudo.

Através dessa estrutura, foi possível cumprir integralmente o objetivo geral e os objetivos específicos traçados, que iam desde a apresentação das definições básicas até a discussão dos conceitos centrais dos sistemas dinâmicos contínuos.

As obras que foram mais utilizadas para a elaboração deste trabalho foram, principalmente, os livros clássicos da área de equações diferenciais ordinárias e sistemas dinâmicos. Entre eles, destacam-se a obra de Boyce e DiPrima, “Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems” [4]; o livro de Barreira e Valls, “Dynamical systems: An introduction” [1]; e livro de Bhatia e Szegö, “Stability theory of dynamical

systems” [2]. Outras referências também foram consultadas ao longo da pesquisa, porém, dado que o foco central do trabalho reside na teoria qualitativa dos sistemas dinâmicos, as obras mencionadas anteriormente constituíram a base principal para a fundamentação teórica e desenvolvimento das análises apresentadas.

É importante reconhecer, no entanto, as limitações enfrentadas durante a pesquisa. A principal dificuldade foi na compreensão e na aplicação de teoremas que demandam um domínio mais sólido de tópicos de análise no $\mathbb{R}^n$, como compacidade, continuidade uniforme e propriedades topológicas dos conjuntos. Esses conceitos, embora essenciais para as demonstrações, representaram uma dificuldade de compreensão que, em alguns momentos, restringiu uma análise mais aprofundada de certos resultados.

Apesar dessas dificuldades, este trabalho conseguiu consolidar uma base teórica relevante e apontar direções para pesquisas futuras. Como continuação deste estudo, sugerimos a investigação de sistemas não lineares mais complexos, analisando sua estabilidade local por meio de linearização. Desse modo, esta pesquisa não se encerra como uma conclusão definitiva, mas como uma etapa inicial para a exploração contínua do vasto campo dos sistemas dinâmicos.

Apêndice A

Primeiro Apêndice

Este apêndice contém informações adicionais sobre Espaços métricos.

A.1 Espaços Normados

Os espaços normados possuem uma estrutura algébrica que permite realizar operações de adição e multiplicação por um escalar. Com isso, sabemos que os espaços normados são espaços métricos, como veremos mais a frente. Nesta seção, abordamos importantes conceitos e definições dos espaços normados.

Definição A.1.1. Seja E um espaço vetorial. Uma função $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$, que cada $x \in E$ associa o número real $\|x\|$, é dita uma norma em E , se, para qualquer $x, y \in E$ e um $\lambda \in \mathbb{K}$, onde valem as condições:

1. $\|x\| = 0$ implica $\|x\| \geq 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (desigualdade triangular)

Dessa forma, um espaço normado é um par $(E, \|\cdot\|)$, onde E é um espaço vetorial e $\|\cdot\|$ uma norma em E .

Exemplo A.1.1. Considere as seguintes normas definidas, para cada vetor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

1. $\|x\|_0 = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$
2. $\|x\|_1 = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$
3. $\|x\|_2 = \sum_{k=1}^n |x_k|$

Portanto, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_0)$ é um espaço vetorial normado. Na verdade para qualquer uma das normas acima espaço é normado, na verdade pode ser mostrado que em dimensão finita quais duas normas são sempre equivalentes. Sobre espaços normados e normas equivalentes sugerimos a leitura de [8].

A.2 Espaços Métricos

Em espaços métricos, se calcula a distância entre dois de seus elementos. Nesta seção, mostramos as propriedades e particularidades dos espaços métricos. Dizemos que um conjunto onde a distância entre quaisquer dois de seus elementos é definida por uma função chamada métrica.

Definição A.2.1. Seja M um conjunto não vazio. Uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$, que a cada par $(a, b) \in M \times M$ associa o número real $d(a, b)$, é dita uma *métrica* em M se, para quaisquer $a, b, c \in M$, são válidas as seguintes condições:

- $d(a, b) \geq 0$;
- $d(a, b) = 0$ se, e somente se, $a = b$;
- $d(a, b) = d(b, a)$;
- $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$.

Vale observar que toda norma induz uma métrica, ou seja, todo espaço normado é um espaço métrico. A recíproca não é verdadeira, nem todo espaço métrico é um espaço normado. Esse comentário pode ser verificado na proposição abaixo.

Proposição A.2.1. *Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço normado. A função $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $d(x, y) = \|x - y\|$, $(x, y \in E)$, é uma métrica em E . A métrica d é chamada de métrica proveniente da norma $\|\cdot\|$.*

Exemplo A.2.1. Seja $\mathbb{R}^n$ o espaço n -euclidiano. A função $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por

$$d(a, b) = \|a - b\|$$

em que $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, e $\|\cdot\|$ é qualquer uma das normas definidas em A.1.1 uma métrica em M .

Ao definir a distância entre dois vetores como a norma da sua diferença ($d(x, y) = \|x - y\|$), garantimos que todas as propriedades exigidas para uma métrica são satisfeitas. O exemplo a seguir estabelece esse elo:

Exemplo A.2.2. Se $E = (E, \|\cdot\|)$ é um espaço vetorial normado real e $d(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in E$, mostraremos a partir das propriedades de A.2.1 que d é uma métrica em E e, portanto, que (E, d) é um espaço métrico.

- Não-Negatividade e Identidade: $d(x, x) = 0$ e $d(x, y) > 0$, se $x \neq y$. De fato,

$$d(x, x) = \|x - x\| = \|0\| = 0$$

onde a última igualdade segue da propriedade da norma.

- Segue da propriedade da norma que

$$d(x, y) = \|x - y\| > 0 \quad \text{pois } x - y \neq 0.$$

- Simetria: $d(x, y) = d(y, x)$.

$$d(x, y) = \|x - y\| = \| -1(y - x) \| = | -1 | \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x).$$

- Desigualdade triangular da norma: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z).$$

Portanto, (E, d) é um espaço métrico. Aqui estão mais detalhes sobre conjuntos abertos, conjuntos fechados e conjuntos compactos em espaços métricos.

A.3 Conjuntos abertos

Precisamos apresentar antes os conceitos de bolas e o que é o interior de um conjunto. Conjuntos abertos e fechados. E alguns teoremas e resultados importantes, para mais informações deixo sugestão a leitura de [8].

Definição A.3.1. Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Para cada $a \in E$ e cada número real $r > 0$, definimos

- $B(a; r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$,
- $B[a; r] = \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}$,
- $S(a; r) = \{x \in E \mid \|x - a\| = r\}$.

Os conjuntos $B(a; r)$, $B[a; r]$ e $S(a; r)$ são chamados, respectivamente, de *bola aberta*, *bola fechada* e *esfera* de centro a e raio r . Notemos que $B[a; r] = B(a; r) \cup S(a; r)$.

Um ponto $a \in X$ chama-se um *ponto interior* a X , escrevemos $a \in \text{Int}(X)$, quando é centro de alguma bola aberta $B(a; \delta) \subset X$, ou seja, quando existe $\delta > 0$ arbitrário tal que $\|x - a\| < \delta \Rightarrow x \in B(a; \delta) \subset X$.

Definição A.3.2. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ chama-se *aberto* quando todos os seus pontos são interiores, isto é, quando para cada $x \in X$ existe $\delta > 0$ tal que $B(x; \delta) \subset X$. Assim, X é aberto $\Leftrightarrow \text{int } X = X$.

A.4 Conjuntos fechados

Definição A.4.1. Sejam E um espaço normado e $X \subset E$. Dizemos que um ponto $a \in E$ é *aderente* a X quando, para todo $\varepsilon > 0$, tem-se $B(a; \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$.

Chamamos de *fecho* ou *aderência* de um conjunto $X \subset E$, ao conjunto $\overline{X}$ formado pelos pontos de E que são aderentes a X .

Definição A.4.2. Dizemos que um conjunto $F \subset E$ é um *conjunto fechado* num espaço normado E quando $F = \overline{F}$, isto é, se todo ponto aderente a F pertencer a F .

A.5 Conjuntos compactos

Definição A.5.1. Seja X um espaço topológico. Uma **cobertura** de um conjunto $K \subset X$ é uma família de conjuntos abertos $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tal que:

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

Uma **subcobertura** é uma subfamília $\{A_\beta\}_{\beta \in J}$, com $J \subset I$, que ainda é uma cobertura de K .

Definição A.5.2. Um conjunto $K \subset X$ é dito **compacto** se toda cobertura aberta de K admite uma subcobertura finita. Ou seja, para qualquer família de abertos $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ cobrindo K , existe um subconjunto finito $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subset I$ tal que:

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n A_{\alpha_i}$$

Sobre a caracterização em Espaços de Dimensão Finita em espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$ (ou mais geralmente, em espaços vetoriais de dimensão finita), temos a seguinte caracterização fundamental:

Teorema A.5.1. *Um subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, é **fechado** e **limitado**.*

Esta caracterização é extremamente útil na prática, pois permite verificar a compacidade através de propriedades mais simples de verificar. No entanto, é importante notar que este resultado **não vale** em espaços de dimensão infinita.

A.6 Conjunto Conexo

Definição A.6.1. Um espaço métrico M diz-se **conexo** quando não admite **cisão** não-trivial. Ou seja, quando não é possível escrever $M = A \cup B$, com A e B abertos disjuntos, não-vazios.

Equivalentemente, M é **desconexo** quando existem abertos $A, B \subset M$ tais que:

- $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$
- $A \cap B = \emptyset$
- $M = A \cup B$

Exemplo A.6.1. Considere o espaço métrico $\mathbb{R} - \{0\}$. Este conjunto é **desconexo**, pois admite a cisão:

$$\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

onde:

- $A = (-\infty, 0)$ e $B = (0, +\infty)$ são ambos abertos em $\mathbb{R} - \{0\}$
- $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$
- $A \cap B = \emptyset$
- $\mathbb{R} - \{0\} = A \cup B$

Portanto, $\mathbb{R} - \{0\}$ é desconexo. Já o intervalo $[0, 1]$ é conexo, conforme demonstrado no livro.

Referências Bibliográficas

- [1] BARREIRA, L., VALLS, C., 2012, *Dynamical systems: An introduction*. Springer Science & Business Media. Citado nas páginas [iii](#), [21](#), [51](#), [62](#) e [67](#).
- [2] BHATIA, N. P., SZEGÖ, G. P., 2002, *Stability theory of dynamical systems*. Springer Science & Business Media. Citado nas páginas [ii](#), [iii](#), [21](#), [51](#), [55](#), [59](#) e [68](#).
- [3] BOLDRINI, J. L., COSTA, S. I., FIGUEREDO, V., et al., 1980, *Álgebra linear*. Harper & Row. Citado na página [11](#).
- [4] BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C., MEADE, D. B., 2017, *Elementary differential equations and boundary value problems*. John Wiley & Sons. Citado nas páginas [iii](#), [1](#), [15](#) e [67](#).
- [5] CASTRO, H. M. A. D., 2008, “Equações diferenciais: teoria, técnica e prática”, . Citado na página [1](#).
- [6] GONÇALVES, A., 1979, “Introdução à álgebra”, . Citado na página [26](#).
- [7] HALE, J. K., 2009, *Ordinary differential equations*. Courier Corporation. Citado na página [1](#).
- [8] LAGES, E. L., 1977, *Espaços métricos*. Citado nas páginas [70](#) e [72](#).
- [9] MEDEIROS, A. A., OLIVEIRA, M. D. L. “Equações Diferenciais Ordinárias”. . Citado nas páginas [1](#) e [7](#).
- [10] SELL, G. R., 1967, “Nonautonomous differential equations and topological dynamics I. The basic theory”, *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 127, n. 2, pp. 241–262. Citado na página [50](#).
- [11] SOTOMAYOR, J., 2011, “Equações diferenciais ordinárias”, . Citado na página [1](#).