UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO
REDE NORDESTE DE ENSINO – RENOEN

MATEUS SOUZA DE OLIVEIRA

TECFORMAÇÃO DIGITAL PARA A EXPANSÃO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO: uma intervenção híbrida na formação inicial de professores de Matemática à luz da Teoria da Atividade

VITÓRIA DA CONQUISTA – BAHIA
2024

MATEUS SOUZA DE OLIVEIRA

TECFORMAÇÃO DIGITAL PARA A EXPANSÃO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO: uma intervenção híbrida na formação inicial de professores de Matemática à luz da Teoria da Atividade

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ensino.

Orientadora:
Prof.ª Dr.ª Maria Deusa Ferreira da Silva

VITÓRIA DA CONQUISTA – BAHIA
2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO
REDE NORDESTE DE ENSINO – RENOEN

TESE DE DOUTORADO

TECFORMAÇÃO DIGITAL PARA A EXPANSÃO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO: uma intervenção híbrida na formação inicial de professores de Matemática à luz da Teoria da Atividade

Autor: Mateus Souza de Oliveira

BANCA EXAMINADORA

Assinatura conforme Ata de Defesa

Documento assinado digitalmente
gov.br
MARIA DEUSA FERREIRA DA SILVA
Data: 13/12/2024 07:48:28-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.ª Drª. Maria Deusa Ferreira da Silva
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – Uesb
(Presidente da Banca - Orietadora)

Documento assinado digitalmente
gov.br
ALEX ANDRADE ALVES
Data: 13/12/2024 08:34:31-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Alex Andrade Alves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia – IFBA
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Benedito G. Eugenio
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – Uesb
(Examinador Interno)

Documento assinado digitalmente
gov.br
FERDINAND MARTINS DA SILVA
Data: 13/12/2024 19:16:53-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Ferdinad Martins da Silva
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – Uesb
(Examinador Externo)

Documento assinado digitalmente
gov.br
LILIANE XAVIER NEVES
Data: 13/12/2024 10:02:01-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.ª Dr.ª Liliane Xavier Neves
Universidade Estadual de Santa Cruz – Uesc
(Examinadora Externa)

VITÓRIA DA CONQUISTA - BAHIA
2024

O48t

Oliveira, Mateus Souza de.
Tecformação digital para expansão do pensamento geométrico: uma intervenção híbrida na formação inicial de professores de matemática à luz da Teoria da Atividade. / Mateus Souza de Oliveira, 2024.
458 f.
Orientador (a): Dr.ª Maria Deusa Ferreira da Silva.
Tese (Doutorado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Programa de Pós-Graduação em Ensino – PPGEn, Vitória da Conquista, 2024.
Inclui referências F. 451 – 458
1. GeoGebra Classroom. 2. Ensino híbrido. 3. Aprendizagem Expansiva. 4. Tecnologias Digitais Interativas. 5. Educação Matemática. I. Silva, Maria Deusa Ferreira da. II. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Doutorado Acadêmico em Ensino – PPGEn. III. T.

CDD: 510.07

Catalogação na fonte: ***Karolyne Alcântara Profeta – CRB 5/2134***

UESB – Campus Vitória da Conquista – BA

DEDICATÓRIA

Dedico esta tese aos meus três filhos: Clara Leal, Elise Ellen e Mateus Júnior. Vocês são a minha maior inspiração e motivação que tenho. Que esta conquista sirva de exemplo para que sempre busquem o conhecimento e a realização de seus sonhos. Estou imensamente grato por cada momento que compartilhamos e pelo amor que nos une. Que vocês sigam sempre seus sonhos com coragem, determinação e alegria.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, meu Senhor, a quem devo tudo o que sou e tudo o que tenho. Minha gratidão é infinita ao meu Salvador, Jesus Cristo, que tem sido minha luz e fortaleza em todos os momentos.

Aos meus pais, José e Ivonete, que foram minha base inabalável. O amor, o apoio e a dedicação deles tornaram possível cada etapa desta conquista. Sem eles, o caminho teria sido muito mais difícil.

Aos meus filhos, Clara Leal, Elise Ellen e Mateus Júnior, por serem minha maior motivação e inspiração. Vocês são a força que me impulsiona a buscar o melhor e a seguir em frente a cada dia.

À minha amada companheira, Suzane Pires, pelo apoio incondicional. Sua presença ao meu lado foi fundamental em cada etapa desta jornada.

Aos meus familiares, que sempre confiaram em mim e apoiaram minhas decisões. A confiança e o carinho de vocês são pilares fundamentais na minha vida e me proporcionaram a força necessária para persistir.

Aos meus amigos, desde aqueles que conheci na infância até os que chegaram recentemente, cada um de vocês desempenhou um papel valioso nesta jornada. O apoio, às palavras de encorajamento e a companhia de vocês tornaram tudo mais leve.

À minha orientadora, Profa. Dra. Maria Deusa, expresso minha gratidão pela confiança, orientação e parceria ao longo deste percurso. Este trabalho é também resultado de suas reflexões e da sua experiência docente, que enriqueceram cada etapa desta pesquisa.

Aos meus professores, que me acompanharam ao longo de toda a minha vida acadêmica, desde a Educação Básica até o presente momento, agradeço pela dedicação e pelo conhecimento compartilhado. Cada ensinamento de vocês contribuiu para moldar a pessoa que sou hoje.

Aos professores da banca avaliadora e da qualificação desta tese, agradeço pelas valiosas contribuições, ideias e observações que acrescentaram ainda mais qualidade e profundidade a este trabalho. Suas considerações são parte indispensável deste processo.

Aos meus colegas que, de forma direta ou indireta, colaboraram para este processo.

A cada um de vocês, meu mais sincero agradecimento. Não há palavras que possam expressar plenamente a minha gratidão por terem contribuído para essa jornada, tornando-a possível e significativa.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ambientes físicos de implantação da proposta formativa..... 141
Figura 2 – Distribuição Regional dos Trabalhos Analisados 151
Figura 3 – Formação de uma curva qualquer 181
Figura 4 – Efeito de *zoom* nos pontos médios e o postulado da determinação na reta..... 193
Figura 5 – Postulado do transporte de segmento..... 194
Figura 6 – Postulado do transporte de ângulo 195
Figura 7 – Identificação dos ângulos internos e externos de um triângulo 208
Figura 8 – A Congruência lado-lado-lado (LLL) 208
Figura 9 – Demonstração dos ângulos congruentes em um triângulo isósceles..... 209
Figura 10 – Explorando a desigualdade triangular..... 210
Figura 11 – Ângulos formados por feixes de retas paralelas cortados por uma transversal... 223
Figura 12 – Demonstração dos ângulos internos e externos de um triângulo 224
Figura 13 – Reta perpendicular e mediatriz..... 225
Figura 14 – Demonstração dos ângulos internos do quadrilátero 239
Figura 15 – Demonstração dos ângulos internos do quadrilátero 240
Figura 16 – Formação de paralelogramos especiais..... 241
Figura 17 – Base média de um triângulo qualquer..... 242
Figura 18 – Demonstração da circunferência definida por três pontos 256
Figura 19 – Os pontos notáveis do triângulo e a reta de Euler..... 257
Figura 20 – Construção de polígonos..... 270
Figura 21 – Demonstração intuitiva da área do retângulo..... 271
Figura 22 – Triângulos que geram trapézios 273
Figura 23 – Translações de triângulos..... 287
Figura 24 – Rotações de triângulos 288
Figura 25 – Reflexão de triângulos..... 289
Figura 26 – Aplicando a homotetia para encontrar a semelhança de triângulos 290
Figura 27 – Posição das circunferências em relação a outros elementos 304
Figura 28 – Comprimento da circunferência..... 305
Figura 29 – A diferença entre as áreas do polígono de n lados e dos círculos 306
Figura 30 – Área do círculo..... 307
Figura 31 – Triângulos que geram trapézios 321
Figura 32 – Demonstração interativa do Teorema de Pitágoras..... 322

Figura 33 – Triângulos que geram trapézios 323
Figura 34 – Demonstração intuitiva do Teorema de Tales 323
Figura 35 – Áreas dos quadriláteros notáveis 325
Figura 36 – Lugares Geométricos 339
Figura 37 – Potência de ponto externo com segmentos secantes 340
Figura 38 – Espiral de Teodoro 341
Figura 39 – Planos concorrentes 357
Figura 40 – Planos perpendiculares, paralelos e retas reversas 358
Figura 41 – Diedros e triedros 359
Figura 42 – Conceito de volume 375
Figura 43 – Pirâmide pentagonal 376
Figura 44 – Demonstração intuitiva do volume da pirâmide. 376
Figura 45 – Planificação do cubo e demonstração da diagonal principal 392
Figura 46 – Relação de Euler nas pirâmides 393
Figura 47 – Princípio de Cavalieri nos Prismas 395
Figura 48 – Princípio de Cavalieri 409
Figura 49 – Construindo sólidos de revolução 411
Figura 50 – Construção de sólidos de revolução 412

LISTA DE ESQUEMAS

Esquema 1 – A conexão da estrutura formativa 59
Esquema 2 – Transição para educação digital 60
Esquema 3 – Estrutura da exploração do pensamento geométrico 60
Esquema 4 – As triangulações da TA e alguns conceitos inter-relacionados 61
Esquema 5 – Integração teórica 61
Esquema 6 – Esquema da necessidade formativa digital 70
Esquema 7 – Esquema da transição entre a educação presencial e a EaD 72
Esquema 8 – Esquema dos procedimentos para a cibercultura 92
Esquema 9 – Esquema da relação mediada de Vygotsky: modelo I 110
Esquema 10 – Esquema da relação mediada de Vygotsky: modelo II 111
Esquema 11 – Atividade orientada de ensino 117
Esquema 12 – A estrutura da Atividade Humana 121
Esquema 13 – Quatro níveis de contradições dentro do sistema de Atividade Humana 125
Esquema 14 – Sequência de ações e aprendizado em um ciclo de aprendizagem expansiva 129
Esquema 15 – Mapa da trilha metodológica: procedimentos iniciais 131
Esquema 16 – Mapa da trilha metodológica: efetivação 132
Esquema 17 – Mapa da trilha metodológica: análise da observação direta 132
Esquema 18 – Mapa da trilha metodológica: análise da observação *online* 133
Esquema 19 – Mapa da trilha metodológica: análise das entrevistas 133
Esquema 20 – Mapa da trilha metodológica: gráficos automáticos 133
Esquema 21 – Atividade orientada de ensino aberta (AOEA) 163
Esquema 22 – As fases da Tecformação Digital 166
Esquema 23 – A concepção da Tecformação Digital 169
Esquema 24 – Triangulação unificada das AOEA 170
Esquema 25 – Sistema de atividade dinâmico e multifacetado 175
Esquema 26 – Postulados Euclidianos – Dinâmica Interativa 204
Esquema 27 – Triângulos – Dinâmica Interativa 219
Esquema 28 – Paralelismo e a Perpendicularidade – Dinâmica Interativa 234
Esquema 29 – Quadriláteros Notáveis – Dinâmica Interativa 251
Esquema 30 – Pontos Notáveis do Triângulo – Dinâmica Interativa 266
Esquema 31 – Polígonos – Dinâmica Interativa 282
Esquema 32 – Transformações Geométricas – Dinâmica Interativa 299

Esquema 33 – Circunferências e Círculos – Dinâmica Interativa 317
Esquema 34 – Relações Métricas e Superfícies – Dinâmica Interativa 335
Esquema 35 – Diferentes Objetos Coplanares – Dinâmica Interativa..... 352
Esquema 36 – Figuras Espaciais de Posição – Dinâmica Interativa 369
Esquema 37 – Poliedros – Dinâmica Interativa..... 387
Esquema 38 – Sólidos Geométricos – Dinâmica Interativa 404
Esquema 39 – Corpos Redondos – Dinâmica Interativa 423
Esquema 40 – Sistema de atividade dinâmico e multifacetado aplicado 439
Esquema 41 – Sistema de atividades sequenciais e interconectado 441

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Teses 32
Quadro 2 - Dissertações 38
Quadro 3 – Inovação 48
Quadro 4 – Concepções 64
Quadro 5 – Competências digitais da BNCC e BNC-Formação 69
Quadro 6 – Modelos híbridos 78
Quadro 7 – Uma Concepção do Modelo de Van Hiele (1986) 104
Quadro 8 – Estrutura da Atividade Humana segundo Leontiev 114
Quadro 9 – Conteúdos curriculares do curso em LM investigado 138
Quadro 10 - Etapa da Análise Temática 145
Quadro 11 – Modelo de análise das entrevistas 146
Quadro 12 – Estrutura de aplicação da Tecformação Digital 164
Quadro 13 – Planejamento da primeira semana de aula 179
Quadro 14 – Planejamento da segunda semana de aula 191
Quadro 15 – Tarefa 2.1 (Determinação do Número de Retas) 198
Quadro 16 – Tarefa 2.2 (Posição dos Segmentos em uma Reta) 199
Quadro 17 – Tarefa 2.3 (Medição de Ângulos) 200
Quadro 18 – Tarefa 2.4 (Segmento Áureo) 202
Quadro 19 – Planejamento da terceira semana de aula 207
Quadro 20 – Tarefa 3.1 (Triângulo) 213
Quadro 21 – Tarefa 3.2 (Triângulo Isósceles) 214
Quadro 22 – Tarefa 3.3 (Prova da Bissetriz do Triângulo Isósceles) 216
Quadro 23 – Tarefa 3.4 (Prova da Desigualdade Triangular) 217
Quadro 24 – Planejamento da quarta semana de aula 222
Quadro 25 – Tarefa 4.1 (Repartindo um Segmento) 228
Quadro 26 – Tarefa 4.2 (Ângulos em Retas Paralelas Cortadas por uma Transversal) 229
Quadro 27 – Tarefa 4.3 (Prova da Soma dos Ângulos Internos do Triângulo) 231
Quadro 28 – Tarefa 4.4 (Projeção Ortogonal) 232
Quadro 29 – Planejamento da quarta semana de aula 237
Quadro 30 – Tarefa 5.1 (Trapézio) 245
Quadro 31 – Tarefa 5.2 (Prova da Soma dos Ângulos Externos do Quadrilátero) 247
Quadro 32 – Tarefa 5.3 (Paralelogramo) 248

Quadro 33 – Tarefa 5.4 (Propriedades dos Paralelogramos) 250
Quadro 34 – Planejamento da sexta semana de aula 254
Quadro 35 – Tarefa 6.1 (Baricentro) 260
Quadro 36 – Tarefa 6.2 (Circuncentro) 261
Quadro 37 – Tarefa 6.3 (Incentro) 263
Quadro 38 – Tarefa 6.4 (Circunferência de Euler) 264
Quadro 39 – Planejamento da sétima semana de aula 268
Quadro 40 – Tarefa 7.1 (Área e Perímetro do Triângulo) 276
Quadro 41 – Tarefa 7.2 (Prova da Área do Retângulo) 277
Quadro 42 – Tarefa 7.3 (Prova da Soma dos Ângulos Internos de um Polígono) 279
Quadro 43 – Tarefa 7.4 (Prova da Soma dos Ângulos de um Polígono Regular) 280
Quadro 44 – Planejamento da oitava semana de aula 285
Quadro 45 – Tarefa 8.1 (Prova Intuitiva da Soma dos Ângulos Internos do Triângulo) 292
Quadro 46 – Tarefa 8.2 (Ladrilhamento Triangular) 294
Quadro 47 – Tarefa 8.3 (Semelhança de Triângulos) 295
Quadro 48 – Tarefa 8.4 (Quadrados Infinitos) 297
Quadro 49 – Planejamento da nona semana de aula 302
Quadro 50 – Tarefa 9.1 (Prova da Reta Tangente ao Círculo) 310
Quadro 51 – Tarefa 9.2 (Prova da Reta Perpendicular ao Raio do Círculo) 312
Quadro 52 – Tarefa 9.3 (Provas: Segmentos Tangentes ao Círculo e Teorema de Pitot) 313
Quadro 53 – Tarefa 9.4 (Prova da Área do Triângulo: Retângulo e Circunscrito) 315
Quadro 54 – Planejamento da nona semana de aula 320
Quadro 55 – Tarefa 10.1 (Prova do Triângulo Retângulo Inscrito no Semicírculo) 328
Quadro 56 – Tarefa 10.2 (Prova do Teorema de Pitágoras) 330
Quadro 57 – Tarefa 10.3 (Prova do Teorema de Euclides – Lei dos Cossenos) 332
Quadro 58 – Tarefa 10.4 (Prova do Teorema da Bissetriz Interna) 333
Quadro 59 – Planejamento da décima primeira semana de aula 338
Quadro 60 – Tarefa 11.1 (Par de Arco Capaz e Prova do Teorema do Ângulo Inscrito) 345
Quadro 61 – Tarefa 11.2 (Prova do Ponto de Potência) 346
Quadro 62 – Tarefa 11.3 (Provas: Área do Triângulo, Setor e Segmento Circular) 348
Quadro 63 – Tarefa 11.4 (Espiral de Fibonacci) 350
Quadro 64 – Planejamento da décima segunda semana de aula 355
Quadro 65 – Tarefa 12.1 (Planos) 362
Quadro 66 – Tarefa 12.2 (Prova da Interseção Paralela dos Planos) 364

Quadro 67 – Tarefa 12.3 (Prova da Reta Perpendicular ao Plano)..... 366
Quadro 68 – Tarefa 12.4 (Prova do Teorema das Faces do Triedro)..... 367
Quadro 69 – Planejamento da décima terceira semana de aula..... 372
Quadro 70 – Tarefa 13.1 (Prisma Triangular)..... 380
Quadro 71 – Tarefa 13.2 (Prismas – Quadrangular e Triangular)..... 382
Quadro 72 – Tarefa 13.3 (Pirâmide Verso Prisma)..... 384
Quadro 73 – Tarefa 13.4 (Tronco de Pirâmide)..... 385
Quadro 74 – Planejamento da décima quarta semana de aula..... 390
Quadro 75 – Tarefa 14.1 (Empilhando Cubos)..... 397
Quadro 76 – Tarefa 14.2 (Sólidos Platônicos)..... 399
Quadro 77 – Tarefa 14.3 (Prisma)..... 400
Quadro 78 – Tarefa 14.4 (Tetraedro Inserido no Cubo)..... 402
Quadro 79 – Planejamento da décima primeira semana de aula..... 407
Quadro 80 – Tarefa 15.1 (Planificação do Cilindro)..... 416
Quadro 81 – Tarefa 15.2 (Cone)..... 417
Quadro 82 – Tarefa 15.3 (As Oito Esferas no Cilindro)..... 419
Quadro 83 – Tarefa 15.4 (Tronco de Cone)..... 421
Quadro 84 – Ilustração da criatividade geométrica realizada pelos participantes..... 433

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Faixa etária 184
Gráfico 2 – Gênero 185
Gráfico 3 – Localização 186
Gráfico 4 – Rede de ensino 186
Gráfico 5 – Recursos tecnológicos disponíveis 187
Gráfico 6 – Conectividade residencial 187
Gráfico 7 – Familiaridade com o *software* GeoGebra 188
Gráfico 8 – Experiência docente 188
Gráfico 9 – Nível de conhecimento geométrico 189
Gráfico 10 – Metodologia de ensino 434
Gráfico 11 – Sequência de conteúdos 435
Gráfico 12 – Obstáculos iniciais à adaptação da formação híbrida 435
Gráfico 13 – Mediação entre professor e estudantes 436
Gráfico 14 – Ação proativa 436
Gráfico 15 – Qualidade do material didático disponibilizado no ggb-CB 437
Gráfico 16 – Mediação tecnológica 437
Gráfico 17 – *Feedback Online* 438

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Produções Acadêmicas Selecionadas: identificação 149
Tabela 2 – Produções Acadêmicas Selecionadas: estratégias 151
Tabela 3 – Confluências 155

LISTA DE SIGLAS

ALA	Ângulo-Lado-Ângulo
AOE	Atividade Orientada de Ensino
AOEA	Atividade Orientada de Ensino e Aberta
ATD	Análise Textual Discursiva
AVA	Ambiente Virtual de Aprendizagem
BCN-Formação	Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Prof. da Educação Básica
BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CES	Câmara de Educação Superior
Ciade	Construir, Investigar, Aplicar, Desenvolver, Estimular (Metas planejadas)
Capes	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CEP	Comitê de Ética em Pesquisa
CluMat	Clube de Matemática
CNE	Conselho Nacional de Educação
Covid-19	*Coronavírus Disease* 2019
CP	Conselho Pleno
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais
DM	Didática da Matemática
DSC	Discurso do Sujeito Coletivo
EaD	Educação a Distância
ECFG	Ensino Curricular Formal de Geometria
ECGD	Exploração Construtiva da Geometria Dinâmica
ERE	Ensino Remoto Emergencial
FME III	Fundamentos de Matemática Elementar III
FPM	Formação de Professores de Matemática
GD	Geometria Dinâmica
ggb-CB	GeoGebra *Classroom* Beta
ICMI	*International Commission on Mathematical Instruction*
IES	Instituições de Ensino Superior
IFBA	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia
IFES	Instituições Federais de Ensino Superior
IFG	Instituto Federal de Goiás

IFMT	Instituto Federal de Mato Grosso
IFS	Instituto Federal de Sergipe
IFSP	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
LAL	Lado-Ângulo-Lado
LLL	Lado-Lado-Lado
LM	Licenciatura em Matemática
MMM	Movimento da Matemática Moderna
Mooc	*Massive Open Online Courses*
NEE	Necessidades Educacionais Especiais
OA	Objeto de Aprendizagem
OMS	Organização Mundial da Saúde
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
Pibid	Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência
Pisa	Programme for International Student Assessment
PPC	Projetos Pedagógicos de Curso
PPGEn	Programa de Pós-graduação em Ensino
Profmat	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
RBS	Revisão Bibliográfica Sistemática
RE	Robótica Educacional
REI	Robótica Educacional Inclusiva
Renoen	Programa de Pós-Graduação em Ensino da Rede Nordeste de Ensino
RTD	Recursos de Tecnologias Digitais
Siem	Seminário Internacional de Educação Matemática
Sbem	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
SDA	Situação Desencadeadora da Aprendizagem
TA	Teoria da Atividade
TAE	Teoria da Aprendizagem Expansiva
TAHC	Teoria da Atividade Histórico-Cultural
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
TD	Tecnologias Digitais
TDI	Tecnologia Digital Interativa
TDIC	Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação
THC	Teoria Histórico-Cultural
TIC	Tecnologias da Informação e Comunicação

TSD	Teoria das Situações Didáticas
TSD	Teoria das Situações Didáticas
UAB	Universidade Aberta do Brasil
UEG	Universidade Estadual de Goiás
Uesb	Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Uesc	Universidade Estadual de Santa Cruz
UFGD	Universidade Federal da Grande Dourados
UFMT	Universidade Federal do Mato Grosso
UFRN	Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Unemat	Universidade do Estado de Mato Grosso
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
ZDP	Zona de Desenvolvimento Proximal

RESUMO

Esta tese visa investigar como o uso do GeoGebra *Classroom Beta* (ggb-CB), integrado à abordagem de Tecformação Digital, pode potencializar o processo de aprendizagem na formação inicial de professores de Matemática, visando à expansão do pensamento geométrico em um contexto de ensino híbrido, sob a perspectiva da Teoria da Atividade (TA). Para fundamentar essa investigação, o embasamento teórico abrange diversos aspectos interconectados, como os níveis de aprendizagem propostos por Van Hiele, os avanços tecnológicos que moldam a sociedade, conforme discute Pierre Lévy, e as propostas formativas, com ênfase no ensino híbrido sugerido por Michael Horn e Heather Staker. Além disso, integra a articulação das gerações da TA, com as contribuições de Lev Vygotsky, Alexei Leontiev e Yrjö Engeström. Esse cenário investigativo adota predominantemente uma metodologia qualitativa do tipo pesquisa-intervenção, realizada em uma disciplina do curso de Licenciatura em Matemática (LM), envolvendo tanto observações presenciais quanto *online*, além de questionários e entrevistas semiestruturadas. A análise dos dados, composta pelas interações nas aulas presenciais e pela proatividade nas tarefas executadas, foi investigada à luz das contradições da Teoria da Aprendizagem Expansiva, sendo complementada pela aplicação da Análise Temática nas entrevistas realizadas com sete participantes voluntários. Isso possibilitou a identificação de seis temas: adaptação tecnológica, visibilidade geométrica, dinamização das aulas, expansão das práticas tecnológicas, domínio digital e desafios motivadores. Além disso, foi possível diagnosticar graficamente o perfil inicial dos estudantes e o impacto formativo. Os resultados indicam que a Tecformação Digital, ao ser aplicada como um sistema sequencial e interconectado de atividades, promoveu um ensino de Geometria dinâmica interativa, ampliando as habilidades tecnológicas e pedagógicas dos futuros professores. Dessa forma, o uso do ggb-CB foi essencial para a criação de um ambiente híbrido de aprendizagem, promovendo uma aprendizagem-sociotecnológica e um aprender-com-tecnologias-digitais-interativas. Essa proposta também contribuiu para a formação heteroformativa e autoformativa dos estudantes, que, além de dominarem os conteúdos geométricos, vivenciaram novas abordagens pedagógicas, integrando teoria e prática em um contexto digital. Conclui-se que a formação implementada representa um caminho para a construção coletiva do conhecimento, promovendo a qualificação dos futuros professores, tanto para atender às demandas contemporâneas da Educação Matemática quanto para expandir seu pensamento geométrico.

Palavras-chave: GeoGebra Classroom; Ensino Híbrido; Aprendizagem Expansiva; Tecnologias Digitais Interativas; Educação Matemática.

ABSTRACT

This thesis aims to investigate how the use of GeoGebra Classroom Beta (ggb-CB), integrated with the Digital Tecformação approach, can enhance the learning process in the initial training of Mathematics teachers, aiming at the expansion of geometric thinking in a hybrid teaching context, from the perspective of Activity Theory (AT). To support this investigation, the theoretical basis covers several interconnected aspects, such as the learning levels proposed by Van Hiele, the technological advances that shape society, as discussed by Pierre Lévy, and the training proposals, with an emphasis on hybrid teaching suggested by Michael Horn and Heather Staker. In addition, it integrates the articulation of AT generations, with the contributions of Lev Vygotsky, Alexei Leontiev and Yrjö Engeström. This investigative scenario predominantly adopts a qualitative methodology of the intervention research type, carried out in a discipline of the Mathematics Licentiate (LM) course, involving both face-to-face and online observations, in addition to questionnaires and semi-structured interviews. The data analysis, consisting of interactions in face-to-face classes and proactivity in tasks performed, was investigated in light of the contradictions of the Expansive Learning Theory, and was complemented by the application of Thematic Analysis in interviews conducted with seven volunteer participants. This made it possible to identify six themes: technological adaptation, geometric visibility, dynamization of classes, expansion of technological practices, digital mastery and motivating challenges. In addition, it was possible to graphically diagnose the initial profile of students and the formative impact. The results indicate that Digital Tecformação, when applied as a sequential and interconnected system of activities, promoted interactive dynamic geometry teaching, expanding the technological and pedagogical skills of future teachers. Thus, the use of ggb-CB was essential for the creation of a hybrid learning environment, promoting sociotechnological learning and learning-with-interactive-digital-technologies. This proposal also contributed to the heteroformative and self-formative training of students, who, in addition to mastering geometric content, experienced new pedagogical approaches, integrating theory and practice in a digital context. It is concluded that the implemented training represents a path for the collective construction of knowledge, promoting the qualification of future teachers, both to meet the contemporary demands of Mathematics Education and to expand their geometric thinking.

Keywords: GeoGebra Classroom; Hybrid Teaching; Expansive Learning; Interactive Digital Technologies; Mathematics Education.

SUMÁRIO

CONSIDERAÇÕES INICIAIS 23
0.1 Trajetórias e Interesses 24
0.2 Originalidade 29
0.2.1 Principais implicações digitais na formação de professores de Matemática 45
0.2.2 Integração de tecnologias na formação de professores de Matemática 47
0.2.3 Perspectivas digitais na formação de professores de Matemática 49
0.2.4 Ziguezagueando: explorando os caminhos das singularidades 50
0.3 Justificativas: caminhos relevante 52
1 APONTAMENTOS TEÓRICOS 59
1.1 Formação de Professores 62
1.1.1 Formação híbrida: as características da educação contemporânea 71
1.1.2 Aspectos formativos 83
1.2 Tecnologias Digitais 88
1.3 O Pensamento Geométrico no Contexto da Educação Matemática 94
1.4 Teoria da Atividade 107
2 TRILHA METODOLÓGICA 131
2.1 Caminhos Metodológicos 134
2.1.1 Caracterização do local de pesquisa 137
2.1.2 Caracterização dos participantes 142
2.1.3 Técnicas e instrumentos para a produção de dados 143
2.2 Técnica para Análise dos Dados 144
3 A IDEALIZAÇÃO DA TECFORMAÇÃO DIGITAL 147
3.1 Efeito Zoom: a TA nos contextos formativos da Educação Matemática 148
3.1.1 Estratégias e confluências nas produções acadêmicas analisadas 149
3.1.2 Caminhos para a inovação 159
3.2 Tecformação Digital 160
3.3 Modelando novas práticas de ensino 169
4 ANÁLISE E RESULTADOS DOS DADOS 177
4.1 Introdução ao GeoGebra 178
4.1.2 Caracterização dos participantes e adaptação para a aplicação das AOEA: 184
4.2 Explorando os Postulados Euclidianos 191

4.2.1 Análise das contradições heteroformativas no sistema de atividades II 195
4.2.2 Análise das contradições autoformativas no sistema de atividades II 197
4.3 Explorando os Triângulos 206
4.3.1 Análise das contradições heteroformativas no sistema de atividades III 210
4.3.2 Análise das contradições autoformativas no sistema de atividades III 213
4.4 Explorando o Paralelismo e a Perpendicularidade 221
4.4.1 Análise das contradições heteroformativas no sistema de atividades IV 225
4.4.2 Análise das contradições autoformativas no sistema de atividades IV 228
4.5 Explorando os Quadriláteros Notáveis 237
4.5.1 Análise das contradições heteroformativas no sistema de atividades V 242
4.5.2 Análise das contradições autoformativas no sistema de atividades V 245
4.6 Explorando os Pontos Notáveis do Triângulo 254
4.6.1 Análise das contradições heteroformativas no sistema de atividades VI 257
4.6.2 Análise das contradições autoformativas no sistema de atividades VI 259
4.7 Explorando os Polígonos 268
4.7.1 Análise das contradições heteroformativas no sistema de atividades VII 273
4.7.2 Análise das contradições autoformativas no sistema de atividades VII 276
4.8 Explorando as Transformações Geométricas 285
4.8.1 Análise das contradições heteroformativas no sistema de atividades VIII 290
4.8.2 Análise das contradições autoformativas no sistema de atividades VIII 292
4.9 Explorando as Circunferências e Círculos 301
4.9.1 Análise das contradições heteroformativas no sistema de atividades IX 308
4.9.2 Análise das contradições autoformativas no sistema de atividades IX 310
4.10 Explorando as Relações Métricas e Superfícies 319
4.10.1 Análise das contradições heteroformativas no sistema de atividades X 325
4.10.2 Análise das contradições autoformativas no sistema de atividades X 328
4.11 Explorando Diferentes Objetos Coplanares 337
4.11.1 Análise das contradições heteroformativas no sistema de atividades XI 342
4.11.2 Análise das contradições autoformativas no sistema de atividades XI 344
4.12 Explorando as Figuras Espaciais de Posição 354
4.12.1 Análise das contradições heteroformativas no sistema de atividades XII 360
4.12.2 Análise das contradições autoformativas no sistema de atividades XII 362
4.13 Explorando os Poliedros 372

4.13.1 Análise das contradições heteroformativas no sistema de atividades XIII 377
4.13.2 Análise das contradições autoformativas no sistema de atividades XIII..... 379
4.14 Explorando os Sólidos Geométricos..... 390
4.14.1 Análise das contradições heteroformativas no sistema de atividades XIV 395
4.14.2 Análise das contradições autoformativas no sistema de atividades XIV 397
4.15 Explorando os Corpos Redondos..... 407
4.15.1 Análise das contradições heteroformativas no sistema de atividades XV..... 413
4.15.2 Análise das contradições autoformativas no sistema de atividades XV..... 415
4.16 Discussões Temáticas..... 426
4.16.1 Reflexão..... 426
4.16.2 Consolidação 429
4.17 Tecendo saberes para a consolidação de um novo modelo híbrido de ensino 433
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS..... 443
REFERÊNCIAS 451

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Investigar a formação inicial de professores de Matemática no uso de Tecnologias Digitais (TD) integradas ao ensino, com foco na expansão do pensamento geométrico para modelar uma proposta híbrida de ensino inovador, envolve uma série de complexidades que desafiam as práticas pedagógicas convencionais e exigem um aprofundamento nas dinâmicas entre tecnologia e educação. Diante dessas dificuldades, esta tese busca superar tais barreiras, explorando ideias que promovem novas abordagens para o processo de ensino e aprendizagem.

Para facilitar a compreensão e garantir a clareza das argumentações, as considerações iniciais estão divididas em três tópicos, cada um abordando aspectos específicos que sustentam a construção preliminar desta investigação. O primeiro tópico, de forma particular, é inspirado na experiência prática e na trajetória acadêmica deste autor. Assim, as descrições reflexivas enfocam o uso de recursos digitais na Educação Matemática, inserindo-se nas discussões sobre a formação de professores e destacando a integração dessas tecnologias no processo pedagógico. Consequentemente, essa parte também explora as inquietações que orientaram a idealização dos objetos de pesquisa desta tese.

O segundo tópico apresenta uma revisão detalhada das pesquisas educacionais no Brasil sobre a incorporação das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) no ensino e na formação de professores de Matemática (FPM), tanto no contexto da formação inicial quanto na formação continuada. Desse modo, os procedimentos investigativos descrevem as principais implicações digitais, as integrações tecnológicas e as perspectivas digitais nesses processos formativos. Esta investigação revela os caminhos e as singularidades que evidenciam a originalidade desta tese.

O terceiro tópico desta parte preliminar concentra-se na justificativa e relevância desta tese, evidenciando a necessidade de uma formação inicial de professores de Matemática que integre de forma eficaz as TD no desenvolvimento de habilidades pedagógicas e geométricas, dentro do contexto de um modelo híbrido de ensino. Considerando os desafios da sociedade contemporânea, as contribuições desta pesquisa propõem o modelo de Tecformação Digital como uma abordagem inovadora, alinhada às demandas educacionais atuais. Nesse sentido, essa proposta se insere em um cenário acadêmico e sociocultural em transformação, no qual a integração de recursos digitais e metodologias híbridas tem se mostrado essencial para preparar os futuros professores para práticas pedagógicas mais dinâmicas e conectadas às necessidades dos estudantes do século XXI.

0.1 Trajetórias e Interesses

A formação de professores com o uso de TD tem se tornado uma questão cada vez mais relevante no contexto educacional atual. Esse crescente interesse por parte da comunidade acadêmica e educacional reflete-se também na minha própria trajetória como estudante e professor de Matemática. Desde jovem, sempre fui atraído por desafios e por disciplinas consideradas complexas, como a Matemática. No entanto, sempre tive facilidade em compreender os conceitos dessa área, o que me permitiu obter bons resultados nas avaliações e, ao mesmo tempo, colaborar com meus colegas de classe. Durante esses momentos, percebi que a aprendizagem não é linear nem individual, mas sim reflexiva e colaborativa.

Ainda jovem, tive a oportunidade de participar de um curso de informática, no qual obtive um bom desempenho e aprendi alguns conceitos básicos da área. Posteriormente, passei a utilizar computadores com acesso à *Internet* em projetos tecnológicos na minha cidade natal, experiência que foi fundamental para o meu desenvolvimento acadêmico e profissional. Foi por meio desse artefato conectado em rede que pude acessar materiais educacionais, estudar para concursos públicos e vestibulares e, principalmente, expandir meus conhecimentos como professor de Matemática.

Durante a minha graduação, no curso de Licenciatura em Matemática (LM) com Enfoque em Informática na Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (Uesb) – campus Jequié, tive a oportunidade de me familiarizar com diversos *softwares* que possibilitam a manipulação e criação de objetos matemáticos. Entre esses recursos, destaco o GeoGebra, uma TD essencial para a expansão do meu pensamento matemático. Essa tecnologia tem desempenhado um papel importante no aprimoramento do processo de ensino e aprendizagem, facilitando a compreensão de abordagens coerentes tanto na resolução de problemas quanto na elaboração de atividades educativas.

A utilização de artefatos computacionais na minha formação e prática docente funcionou como uma chave que abriu novas possibilidades para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. A partir da minha experiência pessoal, percebi a importância de investir na formação de professores, para que possam utilizar as TD de forma eficaz em suas aulas, tornando o ensino mais atrativo e engajador para os estudantes. Diante disso, decidi, juntamente com meu orientador de mestrado, que meu tema de pesquisa para a elaboração da dissertação seria a formação continuada de professores de Matemática com o uso de recursos digitais.

Para a efetivação desta proposta, um curso de extensão foi elaborado e implementado em colaboração entre a Universidade Aberta do Brasil (UAB) e a Universidade Estadual de Santa Cruz (Uesc), com o objetivo de elevar a qualidade do ensino oferecido pelos professores de Matemática. Especificamente, o foco recaiu sobre a qualificação do conteúdo curricular da Educação Básica por meio da integração de recursos digitais no âmbito da educação *online*. Os resultados revelaram uma transformação nas práticas pedagógicas dos professores-cursistas, que, ao explorarem o conteúdo proposto, foram catalisados pelas reflexões promovidas e pela aplicação das TD. Em virtude disso, um leque diversificado de abordagens foi explorado pelos participantes, solidificando a noção de que as interações virtuais se desdobram em processos intrínsecos tanto de autoformação quanto de interformação entre eles (Oliveira, 2022).

Consequentemente, essa experiência destacou-se como um exemplo notável de como a integração das TD pode promover uma transformação no modelo tradicional de formação de professores, proporcionando uma abordagem mais flexível e interativa. Além disso, o estudo ressalta a perspectiva de explorar novos campos de pesquisa, como a ampliação da proposta formativa *online* para estudantes de graduação em Matemática, bem como a investigação de outras abordagens metodológicas de ensino (Oliveira, 2022).

Inspirado pelos resultados desta pesquisa, senti-me motivado a explorar outros cursos formativos que pudessem enriquecer minhas habilidades tanto em contextos tecnológicos quanto metodológicos. Meu objetivo era me preparar de maneira mais abrangente para desempenhar uma função significativa na formação de professores. Essa busca intensificou ainda mais meu entendimento sobre como aplicar diferentes recursos digitais no contexto educacional.

Durante esse período, adquiri experiência, especialmente no ensino superior, ministrando aulas em cursos de licenciatura e pós-graduação *lato sensu* na modalidade de Educação a Distância (EaD) no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia (IFBA). Nessa vivência, ficou evidente que a organização do ensino nesse modelo educacional era eficaz; no entanto, os estudantes ocasionalmente manifestavam a necessidade de interações presenciais com um professor formador. Essas experiências suscitaram reflexões e questionamentos que, por sua vez, me impulsionaram a conceber um projeto de pesquisa para o meu doutorado. Minha proposta de pesquisa foi prontamente acolhida pela minha orientadora atual, que também contribuiu com novas ideias para o desenvolvimento de um projeto intervencionista.

Essa colaboração enriqueceu minha perspectiva, permitindo-me discernir como os ambientes híbridos, que combinam o presencial e o virtual, podem ser otimizados por meio das TD e de abordagens abertas, favorecendo a troca de conhecimento e a inclusão de diversos atores no processo educativo. Esse enfoque não apenas ampliou meu campo de estudo, mas também intensificou meu comprometimento em explorar como a educação pode evoluir para atender às necessidades de uma sociedade cada vez mais digital.

Com base nessa breve trajetória, surgiu a necessidade de criar ambientes híbridos de aprendizagem, nos quais recursos educacionais digitais e abertos são integrados de forma estratégica nas disciplinas dos cursos de Matemática, com a meta de desenvolver o saber matemático em articulação com a cultura digital. A partir dessa reflexão inicial, gerou-se a expectativa de um modelo de ensino inovador, capaz de promover maior interatividade, expandir os horizontes da aprendizagem, estimular a participação ativa dos estudantes e aprofundar a compreensão dos conceitos teóricos abordados nos conteúdos curriculares.

Convém destacar que o acesso às TD e sua crescente utilização na educação têm gerado um impacto significativo na formação de professores, tornando cada vez mais relevante a qualificação desses profissionais no uso desses recursos. Em relação a essa temática, é possível observar que as pesquisas nas áreas educacionais têm revelado uma tendência acentuada para o questionamento das concepções de ensino e aprendizagem com/para uso das TDIC (Oliveira, 2022; Borba, Scucuglia, Gadanidis, 2020). Essas discussões têm retomado, com nítida insistência, os processos de formação docente, tanto nos modelos de formação inicial quanto na formação continuada.

Nessa perspectiva, é importante ressaltar a necessidade de que as Instituições de Ensino estejam adequadamente preparadas para enfrentar os desafios impostos pela era digital. Como sublinha Kenski (2018), as práticas, comportamentos e níveis de informação evoluem rapidamente em decorrência do avanço tecnológico. A autora enfatiza a importância de que a sociedade como um todo assuma o compromisso de garantir que os ambientes educacionais estejam prontos para se adaptar às novas formas de educação, que emergem de mudanças estruturais no processo de ensinar e aprender, possibilitadas pelo cenário tecnológico atual. Nesse sentido, os contextos educativos demandam inovações formativas.

Diante desse contexto, a presente pesquisa propôs um modelo de ensino para os conteúdos curriculares, denominado Tecformação Digital, que adota um modelo híbrido de ensino. Essa proposta representa uma nova abordagem para o contexto educacional, na qual são mobilizadas as relações e interações humanas por meio das TD. Os fatores fundamentais dessa

abordagem incluem: a mediação tecnológica, a ecoformação (ambiente formativo digital), a heteroformação (interação com o outro) e a autoformação (relação consigo mesmo).

Em outros termos, a Tecformação Digital é concebida como a interação entre o ser humano e a TD, estando intrinsecamente ligada aos aspectos formativos da ecoformação, heteroformação e autoformação. Sob essa perspectiva, essa abordagem educativa, à luz da TA, é considerada aqui como um sistema de atividades dinâmico e interativo, que demanda diferentes tipos de análises no ambiente educacional, com ênfase no desenvolvimento tecnológico e nas potencialidades formativas dos ambientes híbridos. Esses conceitos serão detalhados ao longo deste trabalho (Seção 3), evidenciando como se inter-relacionam com esta tese.

Dessa forma, esta tese apresenta um modelo formativo inovador, desenvolvido por meio da criação de um planejamento educacional alinhado às premissas pedagógicas contemporâneas. Nesse contexto, o cenário investigativo é estruturado a partir da Atividade Orientada de Ensino e Aberta (AOEA), que organiza um conjunto de atividades realizadas tanto em momentos presenciais quanto virtuais, permitindo a integração entre teoria e prática, além de promover o uso de TD no processo de aprendizagem.

Com base nos elementos apresentados até aqui, emergiu a seguinte pergunta norteadora para esta tese: **Como o uso dos recursos do GeoGebra Classroom Beta (ggb-CB), integrado à abordagem de Tecformação Digital, potencializa as aprendizagens no processo formativo inicial de professores de Matemática em um contexto de ensino híbrido, visando à expansão do pensamento geométrico sob a perspectiva da Teoria da Atividade (TA)?**

Para responder a essa pergunta, define-se como objetivo central investigar de que maneira o uso dos recursos do GGB-CB, integrado à abordagem de Tecformação Digital, potencializa as aprendizagens no processo formativo inicial de professores em um contexto de ensino híbrido, visando à expansão do pensamento geométrico sob a perspectiva da TA. Nesse sentido, para o presente trabalho, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos: analisar as percepções dos estudantes na formação inicial de professores de Matemática, com base nas observações geradas no ambiente formativo; investigar as contribuições dos recursos do ggb-CB para a expansão do pensamento geométrico dos estudantes do curso de LM no ambiente híbrido; e discutir as ações educativas realizadas na proposta intervencionista, considerando o contexto da formação inicial do professor de Matemática.

Com esses objetivos específicos delineados, buscou-se enriquecer o processo de ensino e aprendizagem ao investigar minuciosamente as potencialidades do ggb-CB[1] como uma ferramenta educacional digital na formação inicial de professores de Matemática, com especial atenção à expansão do pensamento geométrico. Adicionalmente, procurou-se consolidar a Tecformação Digital como um modelo inovador de ensino híbrido.

Com base no exposto, a hipótese central desta tese é que a integração do ggb-CB ao contexto educacional proporciona oportunidades para a qualificação das habilidades conceituais e tecnológicas dos estudantes dos cursos de LM, com um foco particular na expansão do pensamento geométrico. Para verificar essa possibilidade, foi essencial compreender como a Tecnologia Digital Interativa (TDI) influencia não apenas a maturação do raciocínio dos estudantes, mas também as práticas digitais no contexto da formação inicial de professores de Matemática. Nesse sentido, a adoção da perspectiva da TA permitiu analisar as interações entre os diferentes elementos envolvidos no processo educacional, desde as ferramentas digitais até as atividades pedagógicas propostas.

De forma complementar, esta tese apresenta a Tecformação Digital como um modelo inovador de ensino híbrido, que integra de maneira prática as TDI ao processo formativo, com a intencionalidade de preparar os indivíduos em formação para os desafios da educação contemporânea. Vale ressaltar que esse modelo explora não apenas a aquisição de conhecimentos técnicos, mas também o desenvolvimento de competências reflexivas, críticas e criativas, essenciais para a adaptação a um mundo digitalizado e em constante transformação.

Diante do exposto, a tese central desta pesquisa é que os recursos do ggb-CB, ao mesclar atividades pedagógicas com um conjunto de artefatos digitais interativos, têm o potencial de expandir o pensamento geométrico em um modelo híbrido de ensino, à luz da TA, contribuindo para a consolidação da Tecformação Digital. Em vista disso, ao longo deste estudo, serão exploradas as diversas dimensões dessa relação, fornecendo percepções relevantes para a prática educacional e para o avanço do conhecimento na subárea da Educação Matemática. Nesta perspectiva, o próximo tópico aborda a originalidade deste estudo, evidenciando os aspectos que o distinguem das demais pesquisas brasileiras sobre o tema.

[1] Durante a implementação da proposta formativa, foi utilizado o GeoGebra *Classroom Beta*, uma versão preliminar do GeoGebra *Classroom*, disponibilizada para que os usuários pudessem testar novas funcionalidades e recursos antes do lançamento oficial. Essa versão beta apresentou recursos interativos mais avançados em comparação à versão atual, destacando-se principalmente por se assemelhar a um ambiente virtual de aprendizagem, com diversas ferramentas construtivas que favorecem uma maior interação e engajamento dos usuários.

0.2 Originalidade

A originalidade é um componente essencial da qualidade da pesquisa científica, conforme destacado por Martensson *et al*. (2016), especialmente no contexto da aceitação de teses de doutoramento. Diante desse fato, Vagarinho (2019) realizou uma análise de artigos relacionados a esses temas que mencionam o termo em questão. O objetivo de seu estudo foi identificar e apresentar um conjunto de características associadas à originalidade, que possam servir como guia em diversas áreas científicas, incluindo a identificação da originalidade em artigos científicos e teses de doutoramento.

Vagarinho (2019) não buscou definir a originalidade de forma precisa e generalizada, mas sim oferecer uma orientação para professores, estudantes e membros de periódicos científicos na identificação da originalidade de maneira acessível, rigorosa e abrangente em seus trabalhos. Nesse estudo, foi utilizada a questão "Quais são as características que identificam originalidade numa tese de doutoramento?" como um guia para compreender a originalidade em teses de doutorado. Esse método permitiu identificar doze características que sinalizam a presença de originalidade em uma pesquisa, quando comparada a trabalhos científicos anteriores. Essas características incluem nova interpretação, metodologia, método, hipótese, tema, resultado, dados, testes, objetivos, pesquisa empírica, autoria e contribuição para o conhecimento científico.

Vale ressaltar que o estudo de Vagarinho (2019) concluiu que as definições de originalidade encontradas em trabalhos anteriores eram frequentemente complexas, incompletas ou restritas a trabalhos específicos, o que as tornava pouco abrangentes e generalizáveis. Essa falta de clareza dificultava a identificação da originalidade em um trabalho científico. Assim, uma solução proposta para superar essas limitações foi utilizar as características identificadas no estudo do autor mencionado, a fim de criar uma abordagem única e mais abrangente para a identificação da originalidade.

Para evidenciar a originalidade desta tese, articulada com os achados de Vagarinho (2019), esta pesquisa apresenta uma Revisão Bibliográfica Sistemática (RBS), uma metodologia amplamente utilizada em investigações científicas. Nesse tipo de estudo, a literatura disponível sobre um tema específico é minuciosamente examinada, reunindo e analisando informações de maneira organizada e criteriosa. Por meio de métodos transparentes de busca, avaliação crítica e síntese dos dados selecionados, essa revisão proporciona uma visão abrangente das evidências relacionadas a uma estratégia de intervenção ou área de estudo em

questão. Além disso, permite a integração e comparação dos resultados de estudos individuais, identificando lacunas ou inconsistências na literatura existente e oferecendo inspirações valiosas para orientar pesquisas futuras.

Com o intuito de contextualizar a pesquisa proposta com a originalidade desta tese, foi necessário, inicialmente, delinear o cenário de investigação, concentrando-se em estudos que abordam o uso das TD na FPM, em ambientes presenciais ou virtuais, com especial atenção ao contexto brasileiro. Embora as pesquisas internacionais também sejam relevantes, optou-se pelo recorte brasileiro devido à sua especificidade e às nuances únicas presentes nesse contexto, como usabilidade, aplicações e apropriações dos recursos digitais.

Inicialmente, buscou-se formular uma pergunta norteadora que orientasse a revisão sistemática realizada e evidenciasse o panorama único que esta tese propõe explorar. Desse jeito, partiu-se do seguinte questionamento: Como as pesquisas brasileiras (teses e dissertações) abordam a integração das TD na FPM, destacando sua contribuição para a promoção de práticas pedagógicas inovadoras?

O primeiro passo para encontrar essa resposta foi realizar uma busca detalhada nos principais bancos de dados de teses e dissertações brasileiras, explorando as plataformas *online* disponíveis, como o catálogo de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) e a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD). Essas fontes constituem um rico repositório de conhecimento acadêmico, proporcionando acesso a uma ampla variedade de trabalhos de pesquisa elaborados por estudantes de pós-graduação em todo o país.

A escolha dos descritores para essa RBS está diretamente relacionada aos elementos essenciais desta tese, refletindo os conceitos e áreas de interesse a serem explorados. Para atingir essa finalidade, os descritores foram selecionados com cuidado, buscando refletir a interseção entre as ideias centrais deste trabalho e assegurar a inclusão de uma quantidade significativa de estudos relevantes para essa análise.

É importante ressaltar que, durante o desenvolvimento da pergunta central desta revisão, foram identificados três pilares fundamentais. No entanto, ao utilizar apenas um desses pilares, a investigação deparou-se com uma quantidade expressiva de dados. Por outro lado, ao combiná-los utilizando o operador booleano ‘AND’ e limitando os termos de cada descritor entre aspas duplas, não foi possível obter um número expressivo de pesquisas. Isso destaca, respectivamente, a relevância de cada tema e a escassez de dados quando considerados em

conjunto. Em decorrência disso, optou-se por utilizar apenas dois descritores para garantir uma abrangência adequada dos trabalhos em consonância com o escopo da pesquisa.

Nessa linha de pensamento, utilizou-se a combinação de descritores com o operador booleano. Desse modo, foi aplicada a seguinte sequência no campo de busca: “Tecnologias Digitais” AND “Formação de Professores de Matemática” nos bancos de dados da Capes e do BTDB. Em decorrência disso, foram encontrados, respectivamente, 32 e 37 trabalhos acadêmicos nos referidos bancos, totalizando 69 publicações. No entanto, para identificar os estudos relevantes que contribuam para a fundamentação teórica e empírica desta pesquisa, adotaram-se os seguintes critérios:

Critérios de exclusão: a) Atualidade: preferência por trabalhos que reflitam as tendências e avanços mais recentes na área de estudo dos últimos cinco anos; b) Redundância: eliminação de todos os trabalhos duplicados.

Critérios de escolha: a) Relevância: seleção de teses e dissertações que concentra se no contexto da formação inicial ou continuada de professores; b) Acessibilidade: inclusão de teses e dissertações que estivessem disponíveis na íntegra; c) Abordagem Primária: escolha de trabalhos que envolvessem a coleta de dados diretamente da população pesquisada.

Durante a etapa de refinamento da pesquisa, foram utilizadas ferramentas de bancos de dados que permitem a seleção de trabalhos publicados em um período específico, com foco naqueles publicados entre 2018 e 2024. Dessa forma, o total de documentos encontrados foi reduzido para 45. Em seguida, foram identificados e removidos 12 trabalhos duplicados, resultando em uma amostra inicial de 34 trabalhos acadêmicos.

Ao aplicar o processo de seleção, buscou-se especificamente trabalhos que incluíssem os termos ‘formação’, ‘egressos’ ou ‘licenciandos’ em seus títulos, visando assegurar sua relevância para o escopo desta pesquisa. Como resultado direto, identificou-se 19 trabalhos que atendiam a esses critérios. Para garantir a acessibilidade e a disponibilidade dos documentos, foi necessário selecionar apenas aqueles que estavam disponíveis na íntegra. Isso resultou em 15 trabalhos. Por fim, selecionaram-se apenas aqueles que apresentavam dados coletados diretamente da população pesquisada, gerando uma amostra final de 14 trabalhos, dos quais seis são teses e oito são dissertações. Esta amostra está sendo apresentada em dois quadros elaborados com a finalidade de auxiliar na análise e na extração de dados das pesquisas incluídas neste estudo.

Para facilitar a compreensão e análise dos elementos-chave de cada pesquisa selecionada, descreve-se, a seguir, a organização do texto nos quadros mencionados: o campo

‘Autor. (Ano). Título’ sinaliza a identificação do trabalho. Logo abaixo, o campo ‘Objetivo’ indica o objetivo geral da pesquisa. Na próxima coluna, os campos ‘Formação’ e ‘Modalidade’ buscam destacar o contexto formativo. Essas duas colunas iniciais ratificam o tema como seu contexto e ponto de partida. Nas colunas subsequentes, encontram-se os campos ‘Abordagem’, ‘Procedimento’ e ‘Participante’, que estão relacionados à metodologia, pois pretendem descrever os caminhos metodológicos adotados.

Os campos ‘Instrumento’ e ‘Técnica’ estão relacionados aos dados e buscam sinalizar, respectivamente, quais foram os instrumentos utilizados para a coleta de dados e qual foi a técnica empregada para a análise desses dados. Por fim, os campos ‘Resultados’ descrevem três concentrações fundamentais evidenciadas nos achados da pesquisa, e a ‘Contribuição’ busca realçar a ideia que permite a evolução e o desenvolvimento de novas propostas.

O **Quadro 1** apresenta as seis teses selecionadas nesta RBS, conforme delineado no parágrafo anterior.

Quadro 1 - Teses

Autor. (Ano). Título --- **Objetivo**	**Formação**	**Modalidade**	**Abordagem**	**Procedimentos**	**Participantes**	**Instrumentos**	**Técnica**	**Resultados**	**Contribuição**
MILANI, Samanta M. (2024). Espaço formativo *online*: aspectos da prática pedagógica dialogados por uma comunidade de professores de matemática de Rondônia durante a pandemia da Covid-19. --- Elucidar aspectos da prática pedagógica dialogados por uma comunidade de professores de Matemática, constituída como comunidade de prática, durante o compartilhamento e o planejamento de atividades para o ensino remoto em um espaço formativo *online*.	Continuada	EaD	Qualitativa	Pesquisa Participante	Professores	Questionário e Observação	Análise de Conteúdo	Desafios do ensino remoto Oportunidades impulsionadas pelo uso das TD Importância das ações formativas	Elucidação dos desafios e oportunidades do ensino remoto
OLIVEIRA, Gisele P. (2023). Articulação Entre História da Matemática e Tecnologias Digitais Via Objeto de Aprendizagem para Mobilização e Ressignificação de Conhecimentos na Formação de Professores. --- Identificar os conhecimentos mobilizados e ressignificados por professores de Matemática por meio de um Objeto de Aprendizagem que articula História e Tecnologia Digitais.	Inicial e Continuada	EaD	Qualitativa	Característica de Pesquisa-ação	Licenciandos e Professores	Questionário, Entrevista e Observação	Engenharia Didática/TSD	Fluência tecnológica mobilização de conhecimentos Reflexão e construção de conhecimento.	Articulação entre História da Matemática e TD

BATISTA JR., Ricardo I. (2023). Tecnologias Digitais na Formação de Professores de Matemática das Licenciaturas do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP). --- Analisar os usos das TD nos cursos de LM dos campi do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP).	Inicial	Presencial/Remoto	Quali-quantitativa	Estudo de Caso	Licenciandos e Formadores	Análise Documental, Questionário e Entrevista	Triangulação	Divergências quanto ao uso das TD Distância entre discurso teórico e prática; Espaço limitado das TD	Análise das TD nos cursos de Licenciatura em
ARAUJO, Wellington A. de. (2020). Tecnologias da Informação e Comunicação no Ensino de Matemática a partir dos Egressos do Curso de Licenciatura – IFS/Aracaju. --- Analisar as contribuições da formação inicial do Curso de LM do Instituto Federal de Sergipe (IFS)/Aracaju, para efetivação do uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) da prática dos seus licenciados em atuação na Educação Básica.	Inicial	Presencial	Qualitativa	Estudo de Caso	Licenciandos e Professores	Análise Documental, Questionário e Entrevista	Análise de Conteúdo	Necessidade de introdução aos TD Relevância da prática docente com uso das TIC Insegurança no uso das TIC	Contribuições das TIC na prática dos egressos do curso
FIGUEIREDO, Tiago D. (2019). Professores Formadores e Licenciandos em Matemática: o Enatuar sobre o uso pedagógico das tecnologias digitais em uma rede fechada de conversações. --- Compreender como as tecnologias digitais são pensadas e utilizadas de forma pedagógica no enatuar da prática docente no curso de LM da UFGD.	Inicial	Presencial	Qualitativa	Estudo de Caso	Licenciandos e Formadores	Questionário	DSC	Integração das TD Adaptação das práticas pedagógicas com as TD Necessidade de uma cultura de formação docente	Uso pedagógico das TD no curso de licenciatura
FONSECA, Douglas S. (2018). Formação de Professores de Matemática e as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação no Contexto do Pibid. --- Investigar contribuições do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (Pibid) para a formação inicial de professores de Matemática, com a utilização de Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) nas ações realizadas pelos subprojetos de Matemática das Universidades federais brasileiras.	Inicial	Presencial	Qualitativa	Estudo de Caso	Coordenadores	Estudo Documental e Entrevista	Análise de Conteúdo	Falta de formação adequada Reconhecimento da relevância das TD Obstáculos na infraestrutura, apoio técnico e gestão do tempo	Investigação das contribuições do Pibid com TDIC

Fonte: Pesquisador (2024).

A tese de Milani (2024) analisou a integração das TD na FPM, especialmente durante a pandemia da Covid-19 (*Coronavírus Disease* 2019, na sigla em inglês). Para atingir o objetivo geral descrito no **Quadro 1**, a autora enfatizou a importância de um espaço formativo *online* para discutir aspectos pedagógicos durante o ensino remoto. Dessa forma, concentra-se na formação continuada na modalidade EaD.

Milani (2024) enfatizou uma abordagem participativa e interpretativa, promovendo interações dialógicas entre os participantes do espaço formativo *online*. Isso sugere que a mediação tecnológica foi essencial para facilitar a troca de experiências e conhecimentos entre os professores envolvidos. Além disso, destaca que os professores participantes da pesquisa foram convidados a compartilhar suas vivências e reflexões durante os encontros virtuais, promovendo uma interação dialógica e uma relação horizontal com a pesquisadora. Os participantes eram professores que ministraram aulas durante a pandemia, na modalidade de ensino remoto, e foram convidados a integrar o espaço formativo *online*. A comunicação com eles ocorreu de forma síncrona, durante os encontros virtuais, e assíncrona, por meio de *WhatsApp*, *e-mail*, telefone e *Google Classroom*.

Esse estudo adotou uma metodologia com características de abordagem qualitativa e procedimentos de pesquisa participantes, baseada nas análises das mensagens geradas durante os encontros virtuais. Para isso, foram utilizados questionários, diários de campo e comunicação síncrona e assíncrona, a fim de coletar dados e facilitar a interação entre os participantes, características da observação *online*. A técnica de Análise de Conteúdo foi aplicada para examinar os dados.

Os resultados destacaram os desafios enfrentados pelos professores durante o ensino remoto, as reflexões e adaptações realizadas, bem como as oportunidades surgidas com o uso das TD. De forma complementar, enfatizaram a importância das comunidades de prática na educação, especialmente na Educação Matemática, para compartilhar experiências e apoiar os professores em seu desenvolvimento profissional. Em vista disso, o trabalho de Milani (2024) evidencia uma nova interpretação voltada para a elucidação dos desafios e oportunidades do ensino remoto durante a pandemia.

O estudo de Oliveira (2023) concentra-se na FPM, explorando a integração entre História da Matemátoca e TDIC por meio de um Objeto de Aprendizagem (OA). Para alcançar o objetivo geral descrito no **Quadro 1**, a autora focou-se na formação continuada na modalidade EaD e selecionou um objeto histórico, a balhestilha, como instrumento matemático para sua transposição ao meio digital.

Vale ressaltar que a pesquisa adotou uma abordagem qualitativa, utilizando procedimentos de pesquisa-ação. Metodologicamente, a investigação fundamenta-se na Engenharia Didática, seguindo as fases de análises preliminares, concepção e análise a priori das situações didáticas, experimentação e análise a posteriori. Como consequência, a análise

dos dados foi realizada com base na Engenharia Didática, apoiando-se teoricamente na Teoria das Situações Didáticas (TSD), e passando por diversas etapas de análise e experimentação.

Os participantes do estudo foram licenciandos e professores de Matemática que participaram de um curso de extensão universitária de 40 horas/aula, no qual foi utilizado o OA denominado Navemática. Este recurso promoveu o diálogo entre a navegação e a Matemática, buscando validar a afirmação de que a formação de professores por meio de um OA que articula a História da Matemática e as TD pode proporcionar fluência tecnológica e possibilitar o acesso e a ressignificação de conhecimentos históricos, pedagógicos e matemáticos.

Os resultados da pesquisa demonstraram que a utilização do Objeto de Aprendizagem Navemática proporcionou aos participantes fluência tecnológica, permitindo o manuseio e a familiarização com o recurso. De forma adicional, observou-se a mobilização e a ressignificação de conhecimentos matemáticos, pedagógicos e históricos por meio de situações didáticas e não didáticas vivenciadas no contexto do curso de extensão universitária. Ao longo do curso, os participantes foram expostos ao OA Navemática, que promoveu o diálogo entre a história da navegação e conceitos matemáticos. Isso resultou em uma maior compreensão e apropriação dos conteúdos abordados, evidenciando a eficácia do recurso na formação de professores. Portanto, a pesquisa de Oliveira (2023) enfatiza uma nova interpretação voltada para a articulação entre a História da Matemática e a TD.

A tese de Batista Jr. (2023) analisou a integração das TD na FPM, com ênfase nos cursos de LM do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP). Para atingir o objetivo geral apresentado no **Quadro 1**, o autor concentrou-se na formação inicial de professores na modalidade presencial.

A pesquisa adotou uma abordagem de caráter quali-quantitativo, combinando elementos qualitativos e quantitativos em sua análise. Os procedimentos seguem uma estrutura de estudo de caso, utilizando análise documental, questionários autoaplicáveis e entrevistas semiestruturadas como métodos de coleta de dados. Os participantes foram licenciandos e professores formadores dos cursos de LM do IFSP. Para garantir a confiabilidade e a validade dos resultados, utilizou-se a técnica de triangulação na análise dos dados, o que possibilitou uma compreensão mais abrangente e aprofundada do fenômeno investigado.

Os resultados destacam a falta de fluência tecnológica entre formadores e estudantes, bem como as diferentes perspectivas em relação ao uso das TD como mediadoras do ensino. O autor identifica a necessidade de compreender os usos das TD nesse contexto e questiona sua presença nos Projetos Pedagógicos de Curso (PPC), especialmente na formação inicial de

professores. Assim, sugere que as TD têm a capacidade de protagonizar o ensino e a aprendizagem, mas enfrentam desafios em sua efetiva utilização pelos docentes brasileiros. Isso indica uma lacuna entre as potencialidades das TD e sua integração real na FPM. Diante disso, o trabalho de Batista Jr. (2023) ressalta uma nova interpretação voltada para a análise das TD nos cursos de LM.

A pesquisa de Araujo (2020) concentrou-se nas contribuições da formação inicial do curso de LM do Instituto Federal de Sergipe (IFS), em Aracaju, para o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) na prática dos licenciados que atuam na Educação Básica. Para alcançar seu objetivo geral, conforme destacado no **Quadro 1**, o autor buscou contribuir não apenas para a formação inicial, mas também para a formação continuada, dentro de um contexto presencial.

A pesquisa adotou uma abordagem qualitativa, organizando a coleta e a análise de dados em quatro etapas: análise do PPC, aplicação de questionários semiestruturados a egressos do curso, realização de entrevistas semiestruturadas com egressos atuantes na Educação Básica e Análise de Conteúdo dos dados coletados. Dessa forma, a pesquisa caracterizou-se como um estudo de caso. Em acréscimo, contou com a participação de licenciandos e licenciados em Matemática pelo IFS, formados entre 2010 e 2014, que estavão em exercício. A técnica utilizada para a análise dos dados foi a Análise de Conteúdo.

Os resultados revelam que o curso proporcionou aos licenciados contatos com recursos tecnológicos em apenas uma das três disciplinas que abordam as TIC em suas ementas. A maioria dos egressos expressou insegurança no uso das TIC devido à falta de experiência prática durante a formação. Por conseguinte, ficou evidente que a disponibilidade de laboratórios equipados não garante seu uso pedagógico, caso os professores não possuam o conhecimento necessário. Isso ressalta a necessidade de uma abordagem mais abrangente na formação de professores, que vá além das disciplinas especificamente voltadas para essas tecnologias. Em virtude disso, a pesquisa de Araujo (2020) aviva uma nova interpretação direcionada para as contribuições das TIC na prática dos egressos do curso de LM.

A tese de Figueiredo (2019) investigou as concepções pedagógicas de professores formadores e licenciandos em Matemática sobre o uso das TD nos espaços educativos. Para alcançar o objetivo geral descrito no **Quadro 1**, o autor concentrou-se na formação inicial na modalidade presencial, com ênfase na utilização das TD.

A pesquisa mencionada adotou uma abordagem qualitativa, caracterizada como um estudo de caso. Nesse contexto, os professores formadores do curso de LM da Universidade

Federal da Grande Dourados (UFGD) e os licenciandos desse curso são os participantes da investigação. Para a coleta de dados, foram utilizados questionários compostos por questões abertas, que foram enviados aos professores formadores por meio do *Google Drive* e aplicados em formato físico aos estudantes. A análise dos dados fundamentou-se na técnica do Discurso do Sujeito Coletivo (DSC), com a finalidade de compreender as concepções pedagógicas a partir da análise dos discursos coletivos dos participantes.

Os resultados do estudo de Figueiredo (2019) indicaram que tanto os professores formadores quanto os licenciandos em Matemática possuem perspectivas formativas relacionadas ao uso das TD na educação. A análise dos discursos coletivos revelou que esses educadores e estudantes estão engajados em adaptar suas práticas pedagógicas atuais e futuras para integrar as tecnologias, embora enfrentam desafios como a percepção, compreensão, negação e integração dessas ferramentas em seu contexto educativo. Além disso, os participantes expressaram a necessidade de criar uma cultura de formação docente que promova uma abordagem mais ampla e reflexiva sobre o uso dos recursos digitais na educação. Eles enfatizaram a importância de uma formação que capacite os professores a compreender as necessidades dos estudantes em um contexto digital em constante evolução. Portanto, a tese de Figueiredo (2019) propõe uma nova interpretação voltada para o uso pedagógico das TD no curso de LM.

O estudo de Fonseca (2018) investigou as contribuições do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (Pibid) para a formação inicial de professores de Matemática, com ênfase no uso de TDIC em treze universidades federais brasileiras. Para atingir o objetivo de pesquisa apresentado no **Quadro 1**, o autor concentrou-se na formação inicial na modalidade presencial.

Nesse cenário, os coordenadores de área e, indiretamente, os licenciandos-bolsistas do Pibid das treze universidades participantes foram os sujeitos da pesquisa, que adotou uma abordagem qualitativa com características de estudo de caso. Os instrumentos de coleta de dados incluem os subprojetos das universidades envolvidas, além de entrevistas semiestruturadas com os coordenadores de área. A técnica utilizada para a análise dos dados foi a Análise de Conteúdo, organizada em três eixos.

Os resultados mostraram que muitos coordenadores de área não receberam formação adequada para o uso pedagógico das TD, o que reflete desafios na preparação dos formadores. De forma complementar, evidenciam a carência de formação específica dos coordenadores de área em relação ao uso pedagógico das TDIC, bem como as dificuldades enfrentadas pelos

licenciandos-bolsistas em termos de infraestrutura e apoio técnico. No entanto, os coordenadores reconheceram a importância do Pibid para a formação inicial de professores, destacando a vivência ampla e sistemática na realidade da escola básica como um facilitador para o aprendizado da prática docente. Assim, a tese de Fonseca (2018) propõe uma nova interpretação voltada para a investigação das contribuições do Pibid com as TDIC.

O **Quadro 2** destaca as oito dissertações selecionadas, seguindo a mesma estrutura utilizada no quadro anterior.

Quadro 2 - Dissertações

Autor. (Ano). Título --- **Objetivo**	**Formação**	**Modalidade**	**Abordagem**	**Procedimentos**	**Participantes**	**Instrumentos**	**Técnica**	**Resultados**	**Interpretação**
SILVA, Gabriela A. da. (2024). O Uso de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação na Formação de Professores de Matemática: diálogos entre teoria e prática. --- Verificar como as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação são utilizadas na FPM nos cursos ofertados por Instituições de Ensino Superior presenciais na região Oeste do Estado do Paraná.	Inicial e Continuada	Presencial	Qualitativa	Estudo de Caso	Coordenadores e Formadores	Análise Documental, Questionário e Entrevista	Análise do Conteúdo	Inclusão de TD Incentivo ao uso de TD Resistência ao uso de TD	Utilização das TDIC na formação de professores
SILVA, Jonas E. (2023). A Formação Continuada de Professores de Matemática no Sul da Bahia: metodologias ativas com uso das tecnologias digitais. --- Analisar o processo de formação de professores da Educação Básica para integrar as TDIC no ensino de Matemática por meio das Metodologias Ativas em um curso de extensão em uma Instituição de Ensino Superior no sul da Bahia.	Continuada	EaD	Qualitativa	Característica de Pesquisa-ação	Professores	Análise Documental, Observação e Entrevista	Análise Textual Discursiva	Formação compartilhada e participativa Integração das TDIC Compreensão dos saberes	Metodologias ativas com TDIC na formação de professores
SOUZA, Francisco N. L. de. (2022). Um Estudo das Relações entre os Lados e os Ângulos de um Triângulo, Inseridas em uma Carta Escrita por Al-Biruni, com Direcionamentos à Formação do Professor de Matemática --- Desenvolver uma articulação entre História da Matemática e ensino direcionada à FPM.	Inicial	Presencial	Quali-quantitativa	Pesquisa-ação	Licenciandos	Questionários e Observação	Não é Informada	Construção do guia didático digital Articulação entre História e ensino Potenciais didáticos	Articulação entre história da matemática e ensino

SILVA, Idelma I. de C. (2021). Concepção de Mediação com Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação na Formação de Professores de Matemática. --- Identificar e compreender os aspectos conceituais e instrumentais atrelados à prática docente em um curso de FPM do Instituto Federal de Goiás (IFG), campus Goiânia.	Continuada	Presencial	Quali-quantitativa	Estudo de Caso	Formadores	Questionários Estruturados	Não é Informada	Potencial das TDIC Condições para uso eficaz das TDIC Necessidade de capacitação	Aspectos conceituais e instrumentais com TDIC
PEREIRA, Sergio R. (2021). A Utilização da Plataforma Google for Education em uma Experiência de Formação Continuada de Professores de Matemática: olhares para a formação e para o formador. --- Identificar e analisar as possíveis contribuições da utilização da plataforma Google For Education em uma experiência de formação continuada de professores de Matemática, sob os olhares dos participantes e do formador.	Continuada	Presencial	Qualitativa	Pesquisa-formação	Professores	Questionários e Observação	Não é Informada	Fortalecimento da prática docente Inseguranças e necessidade de investimento Interesse em formações contínuas	Utilização da plataforma *Google for Education*
MEREDYK, Fernanda. (2019). A Formação de Professores de Matemática no Contexto das Tecnologias Digitais: desenvolvendo aplicativos educacionais móveis utilizando o *software* de programação app inventor 2. --- Analisar as contribuições que o desenvolvimento de aplicativos educacionais móveis, utilizando o *software* de programação App Inventor 2, pode trazer para a FPM.	Inicial e Continuada	Presencial	Qualitativa	Pesquisa Participante	Licenciandos	Questionários e Observação	Não é Informada	Possibilidades de construção de aplicativos educacionais Reconfiguração dos saberes docentes Interesse em formação contínuas	Desenvolvimento de aplicativos educacionais
PEREIRA, June R. (2018). Os usos das Tecnologias Digitais nas Licenciaturas em Matemática a Distância em Minas Gerais. --- Investigar a compreensão das Instituições Federais de Ensino Superior (IFES) mineiras sobre o papel das Tecnologias Digitais (TD) nos cursos de LM a distância.	Inicial	EaD	Qualitativa	Característica de Estudo de Caso	Coordenadores	Análise Documental, Observação e Entrevista	Teoria das Tecnologias da Inteligência	Múltiplos Papéis das TD Dinâmicas de uso de recursos digitais Influência dos avanços tecnológicos nas práticas pedagógicas	Papel das TD nos cursos de Matemática - EaD
ABREU, Vandineia A. de. (2018). Inserção Curricular de Recursos de Tecnologias Digitais na Formação de Professores de Matemática nas Universidades Públicas em Mato Grosso --- Analisar os currículos dos cursos de LM dessas três instituições de ensino público [no Estado de Mato Grosso (UFMT, UNEMAT e IFMT)], identificando a inserção curricular do uso de recursos de tecnologias digitais na FPM.	Inicial	Presencial	Qualitativa	Estudo de Caso	Formadores	Análise Documental e Entrevista	Análise de Conteúdo	Presença de disciplinas de RTD nos currículos Ausência de professores específicos no ensino de TD Necessidade de integração de RTD nas práticas docentes	Inserção curricular de RTD

Fonte: Pesquisador (2024).

A dissertação de Silva (2024) analisou a integração das TDIC na FPM, destacando sua relevância para a qualificação dos processos de ensino e aprendizagem. Para atingir o objetivo geral apresentado no **Quadro 2**, a autora concentrou-se na formação inicial e continuada dos professores de Matemática na modalidade presencial.

A abordagem metodológica adotada foi qualitativa, utilizando a triangulação com pesquisa bibliográfica, documental e de campo. Desse modo, destaca-se como característica o procedimento de estudo de caso. Os participantes da pesquisa são coordenadores e professores dos cursos de FPM em instituições de ensino superior na região Oeste do Estado do Paraná. Os instrumentos metodológicos incluíram a análise de PPC e matrizes curriculares dos cursos, além de questionários e entrevistas para a coleta de dados de campo. A análise dos dados coletados foi realizada por meio da técnica de Análise de Conteúdo.

Os resultados da pesquisa revelaram que os PPC de FPM indicam o uso das TDIC. No entanto, a análise das percepções dos coordenadores e professores demonstrou que a formação tecnológica é mais evidente em algumas disciplinas específicas, como aquelas didático-específicas e nas que demandam o uso do computador, como Cálculo Numérico e Computacional. Entretanto, destaca que alguns professores de disciplinas específicas de Matemática ainda adotam uma abordagem tradicional de ensino, utilizando apenas a lousa e o giz. A pesquisa ressalta a importância de integrar as TDIC na formação de professores, argumentando que essa integração pode proporcionar benefícios adicionais aos estudantes, permitindo-lhes construir conhecimento de forma mais interativa e visualizar e manipular conceitos matemáticos de maneira mais dinâmica. Portanto, o trabalho de Silva (2024) evidencia uma interpretação voltada para a utilização das TDIC na formação de professores.

O trabalho de Silva (2023) discutiu a integração das TDIC na FPM por meio das Metodologias Ativas, em um curso de extensão oferecido por uma Instituição de Ensino Superior no sul da Bahia. Para alcançar o objetivo geral de sua pesquisa, conforme indicado no **Quadro 2**, o autor desenvolveu um curso voltado para a formação continuada de professores de Matemática na modalidade de EaD.

A escolha por uma abordagem qualitativa possibilitou uma análise das percepções, experiências e práticas dos participantes do estudo, destacando o procedimento da pesquisa-ação. Os professores-cursistas do curso mencionado eram os participantes da pesquisa. Nesse contexto, foram utilizadas entrevistas, observações e análise documental como instrumentos

para a coleta de dados. Para a análise dos dados, empregou-se o método da Análise Textual Discursiva (ATD).

Os resultados revelam que a formação compartilhada, reflexiva e participativa proporcionou aos professores participantes a construção de conhecimento sobre as Metodologias Ativas e a integração das TDIC no contexto educacional. Essa constatação sugere que o curso de extensão foi eficaz na capacitação dos docentes, levando-os a compreender a importância de seus saberes para a implementação de práticas pedagógicas ativas e seu papel como agentes de mudança durante o exercício da docência. A utilização do método da ATD reforça a consistência e a profundidade da análise qualitativa realizada. Nesse sentido, o trabalho de Silva (2023) enfatiza uma interpretação voltada para as metodologias ativas com TDIC na formação de professores.

O trabalho de Souza (2022) enfatizou a integração das TDIC na FPM por meio da articulação entre a História da Matemática, o ensino e as TD. Para alcançar o objetivo de pesquisa descrito no **Quadro 2**, o autor propõe uma interface entre a História da Matemática e o ensino, utilizando a carta de Al-Biruni como objeto de estudo. A aplicação dessa abordagem ocorre no contexto do componente curricular “Didática da Matemática I” de um curso de LM, na modalidade presencial.

Alguns estudantes do curso mencionado da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) participaram da pesquisa. O estudo combina elementos qualitativos e quantitativos, apresentando, portanto, uma abordagem quali-quantitativa com o procedimento de pesquisa-ação, que inclui, nesse contexto, a pesquisa bibliográfica e a pesquisa documental. Entretanto, o estudo demonstra uma abordagem metodológica abrangente e diversificada, incorporando diversos procedimentos e instrumentos de coleta de dados para atingir os objetivos propostos, como questionários semiestruturados, diários de campo, fotografias, filmagens, gravações e registros dos participantes nas atividades propostas com o Produto Educacional. Esses últimos recursos sinalizam a característica de observação direta e indireta. O autor não especifica qual técnica foi utilizada para analisar os dados.

Os resultados apresentam um Produto Educacional aprimorado a partir da aplicação da abordagem proposta no contexto do curso de LM. A conclusão ressalta a importância da articulação entre a História da Matemática e o FPM, especialmente por meio do uso de TD. A pesquisa sugere que essa abordagem pode enriquecer o ensino de Matemática ao promover uma compreensão mais profunda dos conteúdos e estimular uma prática pedagógica mais reflexiva

e contextualizada. Em virtude disso, a dissertação de Souza (2022) enfatiza uma interpretação voltada para a articulação entre a História da Matemática e o ensino.

O estudo de Silva (2021) buscou compreender a concepção de educação tecnológica adotada pelos docentes que atuam nos cursos de FPM. Para atingir esse objetivo, conforme descrito no **Quadro 2**, a autora concentrou-se na formação continuada dos professores, em um contexto que abrange exclusivamente aqueles que lecionam no curso de FPM do Instituto Federal de Goiás (IFG), na modalidade presencial.

A pesquisa é delineada como um estudo de caso com uma abordagem quali-quantitativa, permitindo a análise tanto quantitativa quanto qualitativa dos dados coletados. Nesse contexto, os professores formadores do IFG, campus Goiânia, que atuam no ensino superior e ministram a disciplina de Matemática, foram os participantes da pesquisa. Além disso, a abordagem interpretativista é adotada para conferir profundidade às análises, considerando a interação entre os dados numéricos e os conceitos teóricos discutidos. A coleta de dados é realizada por meio de questionários estruturados. O estudo informa que a análise dos dados foi executada à luz do referencial teórico, mas não esclarece qual técnica será utilizada.

Os resultados indicam que o uso das TDIC pode dinamizar o processo de ensino-aprendizagem, desde que utilizado de maneira adequada. Isso ressalta a importância do planejamento, do estudo e de reflexões contínuas por parte dos professores. As conclusões sugerem que os educadores precisam se capacitar constantemente para integrar efetivamente essas tecnologias em sua prática pedagógica. Diante desses aspectos, o trabalho de Silva (2021) enfatiza uma interpretação voltada para os aspectos conceituais e instrumentais da prática docente com TDIC.

A dissertação de Pereira (2021) analisou a utilização da plataforma *Google for Education* em uma experiência de formação continuada de professores de Matemática. Para atingir o objetivo de pesquisa destacado no **Quadro 2**, o autor focou-se na formação continuada na modalidade presencial, realizada em um Centro de Formação de Professores. Os encontros de formação foram elaborados para explorar diversas ferramentas dessa plataforma e ressaltar suas potencialidades no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

A pesquisa adotou uma abordagem qualitativa e utiliza um procedimento de pesquisa-formação, no qual os participantes são envolvidos em atividades de formação e, ao mesmo tempo, são objetos de estudo. Os professores de Matemática do Ensino Fundamental da Rede Municipal de Ipatinga – MG foram os participantes desta investigação. Os principais instrumentos de coleta de dados são o uso de questionários e a realização de encontros de

formação continuada, além da observação direta. No entanto, a pesquisa não especifica qual técnica foi adotada para a análise dos dados.

Os resultados indicam que os encontros de formação contribuíram para o desenvolvimento profissional dos professores, ampliando seu repertório de práticas pedagógicas e destacando as possibilidades de uso das TD na Educação Matemática. No entanto, também evidenciam desafios, como a insegurança de alguns docentes em relação à utilização dessas tecnologias. As conclusões ressaltam a importância de investimentos em infraestrutura de *Internet* nas escolas e da continuidade nas formações que abordam o processo de transformação digital. De forma conclusiva, a pesquisa de Pereira (2021) destaca uma interpretação voltada para a utilização da plataforma *Google for Education*.

A dissertação de Meredyk (2019) explorou a integração das TD na FPM, especialmente por meio da criação de aplicativos educacionais móveis utilizando o *software App Inventor 2*. Para atingir o objetivo de pesquisa descrito no **Quadro 2**, a autora desenvolveu um curso básico de programação de aplicativos educacionais móveis, na modalidade presencial, realizado nas instalações da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), campus Curitiba.

O estudo adotou uma abordagem qualitativa, caracterizada por um procedimento de pesquisa participante, envolvendo licenciandos em Matemática, pós-graduandos em Educação Matemática e graduados de áreas afins como participantes. Os participantes foram ativamente engajados no desenvolvimento de aplicativos educacionais móveis utilizando o *App Inventor 2*. Os dados foram coletados por meio de questionários, observações, anotações e gravações das apresentações realizadas durante o curso. Como resultado direto, evidencia-se o uso da observação direta e indireta como instrumentos de pesquisa. No entanto, a pesquisa não especifica qual técnica foi utilizada para a análise dos dados e resultados.

A pesquisa identificou uma remodelação dos saberes docentes por meio das TD. Nesse sentido, os participantes relataram que o curso contribuiu para a qualificação do saber tecnológico, especialmente no que diz respeito ao uso do *software App Inventor 2*. Eles destacaram diversas possibilidades de construção de aplicativos educacionais móveis e reconheceram a capacidade dessas ferramentas de tornar o ensino da Matemática mais dinâmico e atrativo. Além disso, os participantes demonstraram interesse em continuar participando de formações que abordassem o uso dessas tecnologias na Educação Matemática, reconhecendo a importância de refletir sobre a prática educativa para contribuir na formação de cidadãos críticos e autônomos. Assim, o trabalho de Meredyk (2019) enfatiza uma interpretação direcionada para o desenvolvimento de aplicativos educacionais móveis.

A dissertação de Pereira (2018) investigou o papel das TD na FPM, especialmente em cursos de licenciatura a distância oferecidos pelas Instituições Federais de Ensino Superior (IFES) mineiras. Dessa forma, para alcançar o objetivo de pesquisa descrito no **Quadro 2**, o autor concentrou-se na formação inicial na modalidade de EaD.

O trabalho de Pereira (2018) apresenta uma metodologia consistente, fundamentada em princípios da abordagem qualitativa, com características de um estudo de caso. Nesse contexto, os coordenadores dos cursos de LM a distância das IFES de Minas Gerais são os participantes da pesquisa. A utilização de diferentes fontes de dados, incluindo PPC (análise documental), questionários e entrevistas, enriqueceu a análise e possibilitou uma compreensão mais abrangente do tema. A técnica de análise dos dados foi orientada pelas Tecnologias da Inteligência: oralidade, escrita e informática, além do construto humanos-com-mídias

Os resultados apresentados pelo estudo indicam uma compreensão multifacetada do papel das TD nos cursos de LM a distância, conforme percebido pelos coordenadores desses cursos. A análise revelou que as TDIC desempenham diferentes funções, incluindo a mediação do processo de ensino e aprendizagem, a facilitação da interação entre os participantes do curso, o apoio pedagógico e a assistência na estruturação e gerenciamento do curso. De forma complementar, evidenciou-se a influência dos avanços tecnológicos nas práticas pedagógicas e no processo de produção do conhecimento. No entanto, também foram identificados desafios, como a qualidade do serviço de *Internet*, que interfere diretamente nas atividades dos cursos. Essas conclusões são sustentadas por uma análise detalhada dos dados coletados, tornando as evidências apresentadas pelo estudo confiáveis e relevantes para o campo da EaD e da tecnologia educacional. Em tal contexto, a pesquisa de Pereira (2018) destaca uma interpretação voltada para o papel das TD nas LM a distância.

O trabalho de Abreu (2018) discutiu a integração das TD na formação inicial de professores de Matemática, por meio da avaliação dos currículos dos cursos de LM das instituições de ensino superior investigadas. Assim, para atingir o objetivo de pesquisa descrito no **Quadro 2**, o autor focou-se na formação inicial no contexto da modalidade presencial.

O estudo adotou uma abordagem qualitativa, caracterizada por um procedimento de estudo de caso, que combina pesquisa documental com análise dos PPC e entrevistas semiestruturadas. Os participantes deste estudo foram os professores formadores que lecionam disciplinas que incorporam recursos de TD no currículo. A técnica de análise de dados foi centrada na Análise de Conteúdo, com as categorias sendo elaboradas ao longo do processo de análise.

Os resultados do estudo indicam que as disciplinas que abordam Recursos de Tecnologias Digitais (RTD) estão integradas nos currículos dos cursos de LM nas instituições analisadas, com foco na prática de ensino de conteúdos matemáticos para a Educação Básica. No entanto, existem variações na forma como esses recursos são incorporados e na disponibilidade de professores especializados para ministrar essas disciplinas. Em decorrência disso, as conclusões ressaltam a necessidade de estudos adicionais para investigar como os RTD são efetivamente utilizados nas práticas pedagógicas dos docentes formados por essas instituições. Portanto, a dissertação de Abreu (2018) oferece uma interpretação voltada para a inserção curricular de recursos de TD.

0.2.1 Principais implicações digitais na formação de professores de Matemática

Os objetivos das pesquisas apresentadas nos dois quadros visam compreender e qualificar a FPM no contexto do uso de TD. As teses concentram-se, majoritariamente, em investigar a aplicação prática dos recursos digitais no processo de formação, enquanto as dissertações exploram tanto o desenvolvimento quanto a aplicação dessas tecnologias em ambientes educacionais específicos.

Como consequência, os objetivos das teses e dissertações convergem na intenção de integrar e compreender o papel das TD na FPM. Ambas as amostras de pesquisa se dedicam a investigar como essas tecnologias podem ser utilizadas para aprimorar as práticas pedagógicas e promover um ensino mais eficaz e inovador. Há um foco comum em explorar tanto a formação inicial quanto a formação continuada dos professores, ressaltando a importância da atualização constante e da qualificação prática em contextos diversos.

Em relação exclusivamente às teses, observa-se que quatro delas concentram-se apenas na formação inicial, uma na formação continuada e uma abrange tanto a formação inicial quanto a continuada. Quatro estudos estão voltados para a modalidade presencial, sendo que um combina presencial e remoto, enquanto os outros dois são da modalidade de EaD. No que diz respeito à abordagem metodológica, cinco adotam uma abordagem qualitativa, enquanto apenas uma utiliza uma abordagem quali-quantitativa.

Quanto aos procedimentos de pesquisa, quatro estudos empregam o método de estudo de caso, um utiliza pesquisa participante e outro recorre à pesquisa-ação. Em tal contexto, os participantes da pesquisa incluem quatro estudos que envolvem licenciandos, três que envolvem formadores, três que envolvem professores de Matemática e um que envolve coordenadores.

Em relação aos instrumentos de coleta de dados, cinco estudos utilizaram questionários, cinco realizaram entrevistas, quatro fizeram análise documental e dois aplicaram observação. No que tange à técnica de análise de dados, três estudos empregam Análise de Conteúdo, um utiliza Triangulação, um recorre à Engenharia Didática/TSD e um utiliza o DSC.

Por outro lado, no segundo conjunto de dados, observa-se que três estudos focam exclusivamente na formação inicial, três apenas na formação continuada e dois abrangem tanto a formação inicial quanto a continuada. Seis deles estão direcionados à modalidade presencial, enquanto duas se concentram na modalidade de EaD. Em relação à abordagem metodológica, seis adotam a abordagem qualitativa e duas utilizam a abordagem quali-quantitativa. No que diz respeito aos procedimentos de pesquisa, quatro estudos empregam o método de estudo de caso, duas utilizam pesquisa-ação, uma adota pesquisa participante e uma pesquisa-formação.

Nesse contexto, quanto aos participantes da pesquisa, três estudos envolvem professores de Matemática, três envolvem formadores, dois incluem licenciandos e dois envolvem coordenadores. Em relação aos instrumentos, cinco estudos aplicaram questionários, cinco realizaram entrevistas, cinco também utilizaram observação e quatro usaram análise documental. Quanto à técnica de análise de dados, dois estudos empregam Análise de Conteúdo, um utiliza Análise Textual Discursiva, um aplica a Teoria das Tecnologias da Inteligência, e quatro não especificam qual técnica foi adotada.

Comparando as informações, a diferença nas ênfases de formação ressalta a variabilidade nos focos das pesquisas. A formação inicial é predominantemente investigada, sugerindo uma preocupação em preparar novos professores para o uso de TD. A escassez de pesquisas sobre modalidades híbridas ou semipresenciais indica uma lacuna significativa, especialmente considerando o contexto educacional pós-pandemia, em que o ensino híbrido se tornou mais comum. Diante desse cenário, pesquisas futuras devem explorar essa modalidade para compreender melhor seus desafios e benefícios específicos.

A predominância de abordagens qualitativas revela uma tendência em explorar percepções e experiências detalhadas; no entanto, a escassez de abordagens quantitativas limita a generalização dos resultados. Outro ponto observado é que o estudo de caso é o procedimento predominante, sugerindo uma ênfase em contextos específicos. Diversificar os procedimentos, incluindo contextos intervencionistas, pode enriquecer a compreensão das práticas pedagógicas com TD em diferentes contextos educacionais.

A inclusão de diversos participantes (licenciandos, formadores, professores e coordenadores) é relevante para uma visão holística. Contudo, o foco nos licenciandos pode

contribuir para a melhoria das futuras práticas digitais docentes. A diversidade nos instrumentos de coleta de dados é benéfica, e a articulação entre observações, questionários e entrevistas pode proporcionar percepções mais profundas sobre as interações em sala de aula e o uso real dos recursos digitais. A falta de especificação das técnicas de análise de dados em algumas dissertações indica uma necessidade de maior clareza metodológica.

Os resultados das pesquisas indicam a relevância das TD no ensino de Matemática, embora identifiquem desafios significativos, como a necessidade de uma formação mais abrangente e contínua para os professores, além das barreiras relacionadas à infraestrutura e ao suporte técnico. As investigações também ressaltam a importância da integração desses recursos no currículo e a necessidade de uma cultura formativa que valorize e incentive o uso dessas tecnologias. Portanto, as teses e dissertações sugerem que, quando bem implementadas, as TD têm o potencial de enriquecer o ensino e facilitar a construção do conhecimento.

0.2.2 Integração de tecnologias na formação de professores de Matemática

Compreender adequadamente a relação entre a FPM e o uso de TD requer uma análise aprofundada das diferentes abordagens e técnicas envolvidas. Isso ressalta a complexidade do tema e a necessidade de uma abordagem abrangente que considere tanto os aspectos pedagógicos quanto os tecnológicos envolvidos.

Ao realizar a análise desses trabalhos acadêmicos, identificaram-se duas categorias distintas que emergiram da semelhança de ideias: a) Compreensão das Concepções sobre Formação e Prática Digital, com pesquisas de Silva (2024), Batista Júnior (2023), Silva (2021), Araújo (2020), Figueiredo (2019), Fonseca (2018) e Abreu (2018); b) Aplicação Formativa e suas Contribuições Digitais, com estudos de Milani (2024), Oliveira (2023), Silva (2023), Souza (2022), Pereira (2021) e Meredyk (2019).

Identificou-se à categoria da “Compreensão das Concepções sobre a Formação e Prática Digital” ao analisar os trabalhos acadêmicos que investigam as percepções, concepções e práticas dos professores de Matemática em relação à formação e ao uso das TD. Esses estudos se dedicam a compreender como os educadores percebem e integram as tecnologias em seu ensino, tanto na formação inicial quanto na prática docente. Ao agrupar essas pesquisas sob essa categoria, destaca-se a importância de entender as visões, crenças e experiências dos professores em relação ao uso das TD, o que contribui para uma análise mais aprofundada sobre a incorporação dessas ferramentas no contexto educacional.

As práticas pedagógicas inovadoras dessa categoria convergem para refletir sobre a integração das TD na formação inicial e/ou continuada do professor de Matemática, com o objetivo de aproximar esse público em formação das práticas tecnológicas digitais. Essa abordagem reconhece não apenas a importância da cultura digital na Educação Matemática, mas também busca emergir tanto os futuros quanto os educadores já consagrados nesse universo tecnológico em constante evolução. Nesse sentido, esses estudos oferecem novas inspirações para a implementação de estratégias que visam integrar as TD ao currículo e às práticas pedagógicas dos profissionais que lecionam conteúdos matemáticos.

Identificou-se à categoria "Aplicação Formativa e suas Contribuições Digitais" ao analisar os trabalhos acadêmicos que exploram como as TD são aplicadas de maneira formativa na Educação Matemática e quais contribuições elas oferecem para o processo de formação de professores. Esses estudos investigam como as ferramentas digitais são utilizadas em cursos de formação inicial e/ou continuada, por meio de propostas intervencionistas, bem como os impactos dessas ferramentas no desenvolvimento profissional dos educadores.

Ao agrupar essas pesquisas sob essa categoria, destaca-se a importância de compreender como as TD são incorporadas de maneira intencional e estratégica no processo formativo dos participantes, com o direcionamento de promover uma aprendizagem que esteja alinhada às demandas contemporâneas da educação. Nesta categoria, cada trabalho acadêmico apresenta uma proposta pedagógica inovadora e distinta, conforme o detalhamento do **Quadro 3**.

Quadro 3 – Inovação

Trabalho	Proposta Pedagógica Inovadora
Milani (2024)	Criação de uma comunidade de prática de professores de Matemática em um espaço formativo *online*.
Oliveira (2023)	Criação e implementação do OA Navemática, que integra história, tecnologia e Matemática, proporcionando uma abordagem interdisciplinar e contextualizada para o ensino de Matemática.
Silva (2023)	Integração das TDICs no ensino de Matemática por meio das metodologias ativas, em um curso de extensão oferecido por uma Instituição de Ensino Superior no sul da Bahia.
Souza (2022)	Criação de Produto Educacional que promoveu a articulação entre a História da Matemática e o ensino por meio da combinação entre esse conteúdo e TD via investigação matemática.
Pereira (2021)	Utilização da plataforma *Google for Education* como parte de uma experiência de formação continuada de professores de Matemática.
Meredyk (2019)	Desenvolvimento de um curso básico de programação de aplicativos educacionais móveis utilizando o *software App Inventor* 2.

Fonte: Pesquisador (2024).

A análise do **Quadro 3** revela que cada trabalho apresenta uma abordagem única e valiosa, contribuindo para uma compreensão mais ampla e aprofundada do papel das tecnologias no ensino e aprendizado da Matemática. Essas propostas destacam a importância

da interdisciplinaridade, da colaboração entre os professores e da utilização de metodologias ativas no processo formativo. Além disso, enfatizam a necessidade de capacitar os professores para utilizarem artefatos digitais de maneira eficaz, numa tentativa de promover uma aprendizagem mais engajadora para os estudantes.

Portanto, as propostas pedagógicas apresentadas nos trabalhos analisados representam um importante avanço no campo da FPM, destacando a relevância das TD como recursos tecnológicos essenciais para o ensino e aprendizado da Matemática. Ao integrar de forma criativa e inovadora essas tecnologias no processo formativo, essas abordagens contribuem para a construção de uma Educação Matemática alinhada à cultura digital.

0.2.3 Perspectivas digitais na formação de professores de Matemática

Ao examinar as pesquisas brasileiras sobre a integração das TD na FPM, é evidente que o foco principal reside na busca por práticas pedagógicas inovadoras que possam melhorar significativamente o ensino e a aprendizagem da Matemática. Os cenários educacionais explorados são diversos, abrangendo desde espaços formativos *online* durante a pandemia da Covid-19, conforme evidenciado por Milani (2024), até cursos de extensão presenciais e a distância, analisados por Batista Júnior (2023) e Silva (2023), respectivamente. Essa variedade de circunstâncias reflete a necessidade de adaptabilidade e flexibilidade diante dos diferentes contextos educacionais brasileiros.

As práticas inovadoras estão sendo implementadas principalmente em espaços formativos que incentivam a colaboração e o compartilhamento de experiências entre os professores. Por exemplo, a criação de comunidades de prática *online*, discutida por Milani (2024), demonstra como o diálogo entre os educadores pode impulsionar a reflexão e a inovação pedagógica. Por conseguinte, estudos como os de Oliveira (2023) e Silva (2023) destacam a importância de estratégias formativas que integrem a História da Matemática, metodologias ativas e outras abordagens pedagógicas inovadoras, utilizando os recursos digitais como ferramentas facilitadoras.

No entanto, apesar dos avanços observados, as pesquisas também indicam algumas lacunas e desafios a serem superados. Uma das principais lacunas é a falta de integração efetiva das TD em alguns currículos de FPM. Estudos como os de Araujo (2020) e Abreu (2018) destacam a escassez de disciplinas específicas sobre o uso de TD, bem como a insuficiência de formação adequada dos educadores nessa área. Isso sugere a necessidade de uma revisão

curricular e de um investimento expressivo na capacitação dos formadores, a fim de garantir uma formação mais alinhada com as demandas contemporâneas da educação.

De forma complementar, a pesquisa destaca a importância de superar as barreiras tecnológicas e infraestruturais que ainda limitam o pleno aproveitamento das TD na FPM. A falta de acesso à *Internet* e a escassez de recursos tecnológicos em algumas escolas e comunidades representam desafios significativos que precisam ser enfrentados. Assim, para aprimorar pesquisas futuras, seria benéfico incluir estratégias de *feedback* contínuo e adaptativo nas metodologias, permitindo ajustes dinâmicos com base nas respostas dos participantes. Recomenda-se também um detalhamento mais profundo dos planos de viabilidade, incluindo análises dos recursos disponíveis e possíveis contingências. Essas adições poderiam proporcionar uma visão mais completa e prática da implementação das TD na FPM, contribuindo para resultados ainda mais robustos e aplicáveis.

0.2.4 Ziguezagueando: explorando os caminhos das singularidades

Em um intricado cenário de pesquisas sobre a FPM, esta tese se destaca ao adentrar esse labirinto acadêmico com uma abordagem única e inovadora. Ao traçar paralelos com outros estudos e delinear suas singularidades, é possível compreender melhor seu lugar neste rico ecossistema de conhecimento. Assim, a originalidade desta tese pode ser analisada ao compará-la com as características identificadas por Vagarinho (2019) nas seis teses e oito dissertações mencionadas. Desse modo, ressalta-se a originalidade ao enfatizar as diferenças nas seguintes características: tema, objetivo, metodologia, dados, resultados e contribuição.

Primeiramente, a tese se destaca pelo tema ao focar na Tecformação Digital e no uso do ggb-CB em um contexto de ensino híbrido, visando expandir o pensamento geométrico dos futuros professores de Matemática. Essa abordagem é realizada por meio da conexão formativa humana consigo mesmo, com outros e com os artefatos digitais interativos, combinando momentos presenciais e virtuais. Essa integração robusta diferencia-se das demais abordagens, que tendem a se concentrar exclusivamente em um formato ou no outro.

De maneira geral, os objetivos desta tese também estão direcionados para a investigação de um recurso digital interativo específico, capaz de promover um modelo inovador de ensino híbrido. Isso contrasta com outros trabalhos que se concentram em objetivos mais convencionais e menos integrados tecnologicamente, analisando a utilização de TD de maneira mais genérica, sem o mesmo nível de detalhamento.

Em termos de metodologia, embora a abordagem qualitativa seja comum, esta tese destaca o procedimento de uma pesquisa intervencionista, promovendo intervenções práticas e específicas no contexto educativo. Os participantes da pesquisa são licenciandos que estão cursando uma disciplina de um curso de LM, na modalidade presencial, mas seu processo formativo é realizado de forma híbrida, rompendo os limites da sala de aula tradicional e transcendendo a mera integração de TD no processo de ensino e aprendizagem. Isso a diferencia das demais pesquisas que geralmente adotam estudos de caso ou pesquisas participativas, sem a mesma ênfase em intervenções metodológicas direcionadas.

No que se refere aos dados, a tese utiliza instrumentos como observação, questionário e entrevista, que são comuns em muitas pesquisas. No entanto, ela se aprofunda na especificidade da observação *online* e analisa os dados por meio da análise temática, oferecendo uma abordagem mais detalhada e específica para compreender as interações no ambiente digital, especialmente nas AOEA. Essa abordagem especializada possibilita uma investigação mais robusta e prática das interações tecnológicas no ensino de Matemática, diferenciando esta tese de estudos mais generalistas.

Os resultados desta tese demonstram que a integração do ggb-CB em um contexto híbrido de ensino promove a expansão do pensamento geométrico e qualifica as habilidades conceituais e tecnológicas dos futuros professores. O uso específico desse recurso digital, não apenas como uma ferramenta, mas como um elemento central do modelo educativo, proporciona percepções detalhadas sobre sua eficácia e suas potencialidades pedagógicas. Outras pesquisas tendem a focar em resultados mais gerais sobre a utilização de TD na formação docente, sem o mesmo nível de detalhamento quanto ao impacto direto sobre o pensamento geométrico.

Esta tese contribui para o conhecimento educacional ao apresentar um modelo inovador de ensino híbrido, denominado Tecformação Digital, que demonstra a eficácia do GeoGebra *Classroom* na expansão do pensamento geométrico. Em tal contexto, destaca-se o processo da ecoformação, heteroformação, autoformação e da formação da cultura digital, enquanto outras pesquisas tendem a se concentrar em aspectos específicos da formação de professores e na utilização de TD sem integrar de maneira tão sistemática esses três pilares formativos. Assim, oferece uma estrutura única que combina desenvolvimento pessoal, colaboração entre pares e mediação com as TDI. Esse enfoque tripolar é inédito e não é encontrado nas pesquisas analisadas, estabelecendo um novo paradigma para a formação de professores.

Neste caminho entrelaçado de ideias, são nas reviravoltas do *zigzag* acadêmico que este estudo se destaca com uma luz própria. Ao introduzir a Tecformação Digital e evidenciar a conexão das TDI com metodologias pedagógicas específicas, esta tese apresenta distintas abordagens de AOEA, alinhadas à TA e voltadas para o desenvolvimento de competências geométricas, estabelecendo-se como um farol de originalidade em meio a uma vasta gama de estudos semelhantes. Além disso, ao final desse percurso sinuoso, esta pesquisa não se destaca apenas pela contribuição única ao campo da FPM, mas também pela capacidade de inspirar novas direções e perspectivas, oferecendo um olhar valioso para o futuro da educação. Considerando o exposto, o próximo tópico apresenta a justificativa que ressalta a relevância desta pesquisa.

0.3 Justificativas: caminhos relevantes

A sociedade contemporânea é rotulada de sociedade digital (Castells, 2006), e tem experimentado profundas mudanças sociais e comportamentais. Nesse âmbito, as TDIC são as responsáveis por alterar as relações e interações humanas. Diante dessas transformações, aceleradas pela evolução tecnológica e, sobretudo, pelas consequências da pandemia do novo *coronavírus*[2] (Covid-19), surge a necessidade de incorporar, no ambiente educacional, o uso de recursos educacionais digitais que favoreçam o processo de ensino e aprendizagem.

Nesse âmbito dinâmico, esta tese se insere na linha de pesquisa intitulada “Práticas Pedagógicas no Ensino de Ciências e Matemática”, a qual integra o Programa de Pós-graduação em Ensino (PPGEn) da Uesb – campus Vitória da Conquista, em parceria com o Programa de Pós-Graduação em Ensino da Rede Nordeste de Ensino (Renoen). Essa abordagem de pesquisa prioriza a exploração e a qualificação de estratégias pedagógicas para enfrentar os desafios educacionais contemporâneos, especialmente em um contexto de crescente influência das TD.

Convém ressaltar que a relação entre o homem e a tecnologia se constrói de forma dialética, e esse conflito modifica tanto as interações sociais quanto a necessidade de utilizar os recursos tecnológicos. Esse processo de mão dupla molda as relações ser-humano-tecnologias-digitais-coletividade. Nesse sentido, distintas áreas do conhecimento têm se apropriado de diferentes recursos tecnológicos digitais para potencializar seu desenvolvimento. Em

[2] Em 30 de janeiro de 2020, a Organização Mundial da Saúde (OMS) declarou o surto da doença causada pelo novo *coronavírus* (Covid-19) como uma Emergência de Saúde Pública de Importância Internacional, o mais alto nível de alerta estabelecido pelo Regulamento Sanitário Internacional. Posteriormente, em 11 de março de 2020, a OMS caracterizou a Covid-19 como uma pandemia. Essas decisões foram tomadas devido à disseminação global da doença e aos riscos que ela representava para a saúde pública.

decorrência disso, os cenários educacionais precisam se adequar ao perfil das gerações digitais, a fim de atender às novas configurações que favoreçam o processo de ensino e aprendizagem.

A educação, de forma ampla, deve estar alinhada ao conceito de Tecformação Digital, uma metodologia mediada por TD em ambientes híbridos. Nesse aspecto, a incorporação de ferramentas tecnológicas como recursos educacionais digitais conectados em rede abre novas perspectivas para a formação. Para validar essa concepção, foi empregada uma abordagem metodológica inovadora, distinta das práticas tradicionais predominantes em sala de aula, aplicada em uma disciplina do curso de LM de uma universidade pública na Bahia.

Essa abordagem surgiu a partir das inquietações geradas pelas práticas docentes do pesquisador e de sua orientadora, que atuam em diversos contextos educacionais. Com base nessa experiência, tornou-se cada vez mais evidente a necessidade de ampliar a adoção da cultura digital e de explorar um ensino mais flexível nas Instituições de Ensino Superior (IES). Assim, o objetivo inicial era integrar recursos educacionais digitais ao processo formativo, alinhando-se às demandas contemporâneas e preparando futuros professores para uma realidade cada vez mais tecnológica.

Vale ressaltar que os avanços nas TD têm gerado novas práticas sociais e exigido novas competências na formação dos cidadãos contemporâneos. Essas tecnologias impulsionam o progresso em diversas áreas do conhecimento, permitindo a realização de experimentos e simulações virtuais, além de facilitar o acesso, o armazenamento e o compartilhamento de um vasto conteúdo em diferentes plataformas digitais.

Atualmente, artefatos tecnológicos como computadores, *tablets* e *smartphones*, aliados à *Internet* e a uma variedade de *softwares* e aplicativos, oferecem recursos didáticos digitais adaptados à educação. Quando integrados a uma prática pedagógica bem planejada, esses recursos têm a capacidade de potencializar a aprendizagem dos conteúdos, proporcionando uma abordagem mais dinâmica e interativa. Nesse sentido, a utilização dessas tecnologias configura-se como uma alternativa eficaz para superar obstáculos no processo de produção, análise e reflexão sobre os objetos de estudo.

No contexto da Educação Matemática, as TDIC contribuem para desmistificar o ensino mecanicista, no qual os professores se concentram exclusivamente na transmissão de conteúdo curricular, aplicando exercícios de fixação e avaliações padronizadas, sem levar em conta a diversidade dos estudantes. Esse modelo tradicional gera dificuldades na aprendizagem da Matemática, refletindo-se em altos índices de reprovação. Entretanto, para promover essa

transformação, é imprescindível repensar as metodologias de ensino, com as TDIC desempenhando um papel central nesse processo de inovação educacional.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), os estudantes da sociedade moderna devem ser considerados protagonistas na construção de seu próprio conhecimento (Brasil, 2018). Para isso, a BNCC recomenda que os ambientes de ensino sejam mais propícios ao desenvolvimento da capacidade criativa, do senso crítico e das habilidades que promovem o saber-fazer e o aprender a aprender. Entretanto, para alcançar essas recomendações, é primordial formar professores que sejam capazes de avançar na implementação dessas propostas, de modo que possam atender às demandas do mundo contemporâneo.

Esse fato é enfatizado como um princípio norteador para a formação inicial de professores da Educação Básica na resolução do Conselho Nacional de Educação/Conselho Pleno (CNE/CP), nº 2, de 20 de dezembro de 2019, que define as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN). Para esse modelo formativo, foi instituída a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação), especificamente em seu capítulo III, que aborda a organização curricular dos cursos superiores para a formação docente. No Art. 8º, inciso IV, afirma que "[...] o emprego pedagógico das inovações e linguagens digitais como recurso para o desenvolvimento, pelos professores em formação, de competências sintonizadas com as previstas na BNCC e com o mundo contemporâneo" (Brasil, 2019, p. 5).

Além disso, o parecer CNE/Câmara de Educação Superior (CES), n° 1.302/2001, que estabelece as DCN para os cursos de Matemática, tanto para o bacharelado quanto para as licenciaturas, ressalta que

> Desde o início do curso o licenciando deve adquirir familiaridade com o uso do computador como instrumento de trabalho, incentivando-se sua utilização para o ensino de matemática, em especial para a formulação e solução de problemas. É importante também a familiarização do licenciando, ao longo do curso, com outras tecnologias que possam contribuir para o ensino de Matemática. (Brasil, 2002b, p. 6)

Diante do exposto, é fundamental garantir aos futuros professores de Matemática uma formação inicial adequada para atuar em uma sociedade em constante evolução tecnológica. É essencial prepará-los para a docência, que ainda está em processo de desenvolvimento, capacitando-os a utilizar e manusear as TD disponíveis. Isso permitirá que eles auxiliem na resolução de problemas ainda desconhecidos e na formalização de conceitos matemáticos complexos.

Cabe destacar que o estudo de Aquino, Aquino e Caetano (2022) analisa os impactos dos avanços tecnológicos na educação, com foco na inteligência artificial, nas tecnologias móveis, na *Internet* das Coisas e nos recursos educacionais abertos, à luz da Agenda 2030. O objetivo principal é explorar como os professores podem utilizar, adaptar e transformar essas tecnologias no contexto docente. Conduzida em alguns países europeus, a pesquisa destaca o esforço do continente para implementar competências digitais nas práticas educacionais, evidenciando a importância da formação docente para o domínio dessas ferramentas e o desenvolvimento de cursos formativos mediados por TD.

Além disso, a sociedade contemporânea exige um novo conjunto de habilidades, nas quais a proficiência em TD se torna tão essencial quanto as habilidades tradicionais de leitura, escrita e cálculo (Lévy, 2021). Essa necessidade transcende disciplinas e áreas do conhecimento, exigindo que a educação prepare os indivíduos não apenas para serem consumidores, mas também criadores e solucionadores de problemas em ambientes digitais. Em decorrência disso, esta tese alinha-se diretamente a essa demanda, ao focar na qualificação da formação inicial, ampliando as competências digitais essenciais para integrar as tecnologias emergentes em suas práticas pedagógicas e prepará-los para os desafios do ensino no futuro.

Nesse cenário, a implementação do ggb-CB em cursos de LM pode desempenhar um papel fundamental. Diante das potencialidades desse artefato digital, uma proposta intervencionista que o integre não apenas reforça as bases construídas nas etapas educacionais anteriores, mas também expande o repertório de habilidades dos professores, qualificando-os para enfrentar desafios mais complexos que exigem maior abstração e reflexão. De forma complementar, essa abordagem pode contribuir para a ampliação dos conhecimentos teóricos e auxiliar na superação das lacunas formativas oriundas da Educação Básica.

O ggb-CB, integrante da multiplataforma GeoGebra, é um artefato digital acessível que oferece recursos tecnológicos para o ensino e a aprendizagem de conceitos algébricos, aritméticos, geométricos, estatísticos e probabilísticos (Oliveira; Silva, 2023b). Observa-se que a utilização das funcionalidades desse recurso, voltadas para o ensino de Geometria, possibilita a construção e a reconstrução dinâmica dos objetos geométricos, que, de outra forma, seriam difíceis de representar com precisão utilizando apenas lápis e papel, mesmo com instrumentos convencionais como régua e compasso. Isso pode facilitar o desenvolvimento tanto das habilidades construtivas quanto das habilidades conceituais dos estudantes.

Diante dessas potencialidades, a implementação de intervenções pedagógicas que integrem o ggb-CB torna-se essencial. De outro modo, intervenções com essa característica não

devem se limitar a exibir objetos geométricos e suas propriedades, mas devem buscar promover um ambiente de aprendizagem mais ativo e reflexivo, no qual os estudantes possam construir, abstrair e experimentar os conceitos de forma mais autônoma. No contexto da formação docente, essas intervenções devem também proporcionar aos futuros professores de Matemática uma experiência prática e digital que integre construção e reflexão, preparando-os de maneira mais eficaz para os desafios do ensino contemporâneo.

É importante sinalizar que o ggb-CB caracteriza-se como uma tecnologia interativa, não apenas pela sua capacidade de permitir aos usuários a manipulação direta e a exploração dinâmica do saber matemático, mas também por possibilitar a interação coletiva entre formandos e formadores. Nesse contexto, o uso desse recurso possui uma grande potencialidade pedagógica, proporcionando aos estudantes uma nova perspectiva sobre a produção e análise de objetos matemáticos. Nessa lógica, este ambiente digital pode funcionar não apenas como um Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA), mas também como um itinerário didático que facilita a construção do conhecimento geométrico, integrando teoria e prática. Assim, ao combinar recursos didáticos digitais com a proposta de AOEA, o ggb-CB pode contribuir de forma significativa para a formação gradual e processual do pensamento geométrico.

De forma adicional, esse ambiente pode proporcionar que futuros professores de Matemática experimentem construções geométricas de maneira dinâmica, promovendo a criatividade e a exploração. Nessa concepção, os participantes têm a oportunidade de verificar variantes de propriedades aplicadas ou interagir com outras construções, desenvolvendo suas habilidades de conjectura e investigação. Essa dinâmica sugere a necessidade de um estudo aprofundado sobre as contribuições dessa TDI para o ensino de Geometria.

Nessa circunstância, a adoção de uma proposta intervencionista mediada pelo ggb-CB é relevante para a Educação Matemática. Dessa forma, essa abordagem tem a capacidade de proporcionar informações e reflexões cruciais para um ambiente formativo que busca desenvolver habilidades culturais digitais. Em decorrência disto, ao facilitar a visualização, a experimentação, a interpretação e a argumentação dos objetos geométricos, essa metodologia contribui diretamente para a formação inicial de professores de Matemática, alinhando-se à TA (Oliveira; Silva, 2023a). Embora existam alguns estudos específicos sobre esse tema, a escassez de materiais torna esta tese uma contribuição acadêmica inovadora e pioneira.

No cenário da Educação Matemática, a capacidade transformadora das TD é evidente. Em tal contexto, esta tese propõe uma mudança na forma como os saberes geométricos são ensinados e aprendidos. Especificamente, ao incorporar o GeoGebra como recurso educacional,

a proposta abrange a qualificação de futuros professores de Matemática, permitindo-lhes explorar e apresentar tópicos geométricos de maneira interativa e visualmente rica em detalhes, por meio de recursos virtuais. Esses benefícios não apenas melhoram a qualidade do ensino, mas também aumentam o engajamento dos participantes, promovendo uma abordagem mais prática e aplicada da Geometria. Em virtude disto, a presente pesquisa tem relevância na busca da integração da Tecformação Digital como um modelo híbrido de ensino, ampliando a compreensão dos conceitos geométricos por meio do uso das TDI.

Dentro dessa perspectiva, quatro temas centrais foram abordados: o ensino de Geometria, as TD, a formação docente e a TA. Todos esses temas foram interligados de maneira estratégica, com o propósito de criar uma abordagem pedagógica inovadora e dinâmica. Assim, a tese se destaca ao demonstrar como a expansão do pensamento geométrico pode atuar como um elo essencial entre os diversos processos de amadurecimento do conhecimento. Em vez de se concentrar exclusivamente no desenvolvimento de habilidades específicas, como o cálculo de áreas ou volumes, a proposta se torna relevante por ampliar a compreensão dos estudantes, oferecendo-lhes uma visão mais holística e integrada. Esse processo de ampliação do conhecimento transcende o desenvolvimento de habilidades restritas, conectando diferentes conceitos geométricos e incentivando uma perspectiva inovadora sobre o saber-fazer.

Esses temas foram interligados de maneira estratégica para criar uma abordagem pedagógica inovadora e dinâmica. Em vista disso, a tese destaca a importância de expandir o pensamento geométrico como um elo essencial entre os processos de amadurecimento do saber matemático. Em vez de se concentrar apenas no desenvolvimento de habilidades específicas, como o cálculo de áreas ou volumes, a proposta ofereceu aos estudantes uma compreensão mais ampla e integrada da Geometria. Dessa forma, a intervenção ultrapassou a mera prática de habilidades, promovendo uma abordagem criativa e inovadora.

Essa expansão do pensamento geométrico, formalizada neste contexto híbrido, foi essencial para estimular a criatividade dos participantes, ao apresentá-los a novas formas de perceber e interpretar os objetos geométricos. Assim, a pesquisa evidencia que, ao ampliar a compreensão dos conceitos geométricos, os estudantes não apenas reconhecem as formas, mas também estabelecem relações, compreendem transformações e conectam diferentes elementos geométricos de maneira mais integrada e inovadora ao utilizarem as TDI. Como consequência, esta pesquisa gera diversas reflexões sobre como viabilizar o desenvolvimento de soluções inovadoras no ensino de Geometria, ao integrar ferramentas digitais que transformam o aprendizado e proporcionam novas abordagens para o processo de aprender a aprender.

Cabe também destacar que as instituições de ensino enfrentam a urgente necessidade de se reinventar, especialmente diante do avanço tecnológico e da facilidade de acesso à informação. A incorporação das TDIC nas práticas pedagógicas deixou de ser uma escolha e tornou-se uma exigência, particularmente em modelos que rompem com métodos tradicionais. Por exemplo, antes da pandemia, muitos professores ainda adotavam abordagens convencionais, caracterizadas por aulas expositivas, uso limitado de recursos como lousas e livros, e uma organização padronizada em sala de aula, com o professor no centro do processo. Entretanto, o Ensino Remoto Emergencial (ERE) evidenciou as limitações desse modelo e revelou a capacidade dos recursos digitais de transformar as práticas educacionais, desde a Educação Básica até o Ensino Superior.

Em meio a esse contexto, o ensino híbrido emergiu como uma solução promissora, integrando o ensino presencial e o digital de forma a ampliar as possibilidades de construção e exploração do conhecimento. Nesse sentido, as ferramentas digitais, quando utilizadas de maneira estratégica, tornam-se instrumentos poderosos para criar atividades que superam as limitações dos métodos tradicionais, promovendo uma aprendizagem mais interativa, dinâmica e alinhada às demandas do mundo contemporâneo. Entretanto, para que essa abordagem seja eficaz, é imprescindível que os professores estejam preparados para atuar em ambientes flexíveis, combinando competências pedagógicas com o domínio das TD.

Em razão disso, os achados desta tese têm impactos tanto no âmbito acadêmico quanto no prático. No plano acadêmico, ela contribui para o avanço da Educação Matemática ao propor uma abordagem inovadora, fundamentada em evidências empíricas, para a formação de professores. No contexto prático, a pesquisa oferece ferramentas e estratégias que aprimoram as práticas pedagógicas dos docentes, alinhando-as às demandas da sociedade digital e às necessidades educacionais contemporâneas.

Portanto, a relevância desta tese reside em sua proposta inovadora, que explora a formação inicial de professores de Matemática no contexto do ensino híbrido. Ao integrar artefatos digitais e interativos no processo formativo, ela não apenas contribui para a melhoria das práticas pedagógicas atuais, mas também abre novos horizontes para o desenvolvimento de metodologias educacionais mais flexíveis. Além disso, as conclusões obtidas têm um impacto imediato e projetam efeitos a longo prazo, ao fornecer direções para futuras pesquisas, incentivando a continuidade da investigação e a ampliação do uso das TD no ensino de Matemática.

1 APONTAMENTOS TEÓRICOS

Esta seção está estruturada em quatro tópicos principais, com o propósito de oferecer uma visão abrangente e integrada dos diferentes aspectos que permeiam o contexto educacional abordado nesta pesquisa.

O primeiro tópico explora a formação de professores sob uma perspectiva histórico-cultural, abordando as mudanças curriculares e as novas propostas formativas no cenário brasileiro. Esta articulação teórica enfatiza o impacto da formação híbrida, que, embora constitua uma metodologia, pode ser fundamentada em diversas teorias educacionais. Nesse sentido, demonstra como é primordial compreender os modelos de inovações sustentadas e as abordagens de inovações disruptivas, conforme discutido por Michael Horn e Heather Staker, para entender como o ensino híbrido se insere nesse processo de transformações na área da educação. Outro ponto relevante abordado nesta articulação teórica é a discussão dos aspectos formativos essenciais para preparar educadores no atual panorama educacional, com base nas influentes contribuições de Gastón Pineau e Sidnei Macedo, que destacam os conceitos de autoformação, heteroformação e ecoformação.

O **Esquema 1** ilustra a perspectiva para a formação de professores desta pesquisa, destacando a conexão entre os modelos de inovação híbrida e os aspectos formativos.

Esquema 1 – A conexão da estrutura formativa

Fonte: Pesquisador (2024).

O segundo tópico examina o papel das TD na educação, destacando a influência da cibercultura e da inteligência coletiva, que se intensificaram desde a década de 1990, conforme analisado por Pierre Lévy. Neste contexto, discute-se como a cultura digital está transformando o aprendizado, enfatizando aspectos como personalização e colaboração, ao mesmo tempo, em que se identificam os desafios que as instituições enfrentam para se adaptar a essa nova realidade tecnológica que caminha para uma educação digital.

O **Esquema 2** ilustra a transição tecnológica explorada nesta pesquisa, com ênfase na cibercultura.

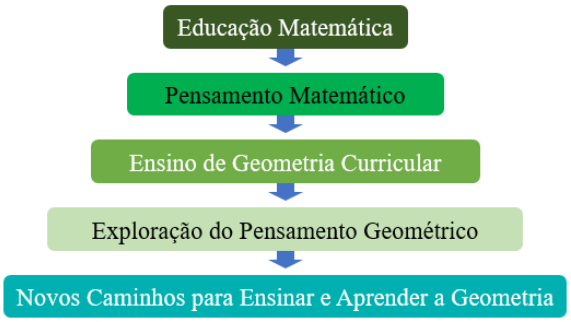
Esquema 2 – Transição para educação digital

Fonte: Pesquisador (2024).

O terceiro tópico aborda o pensamento geométrico no contexto da Educação Matemática, discutindo o surgimento dessa subárea e destacando sua relação com a maturação do pensamento matemático. Nesse tópico, é enfatizado o movimento histórico-cultural do ensino de Geometria no currículo escolar e a exploração do pensamento geométrico ao longo do tempo. Além disso, são apresentados novos caminhos para o ensino e a aprendizagem dos conceitos geométricos nos dias atuais, levando em conta as abordagens e ferramentas mais recentes que enriquecem o processo educacional.

O **Esquema 3** representa a estrutura das principais abordagens que sustentam o ensino e a aprendizagem do pensamento geométrico explorado nesta pesquisa.

Esquema 3 – Estrutura da exploração do pensamento geométrico



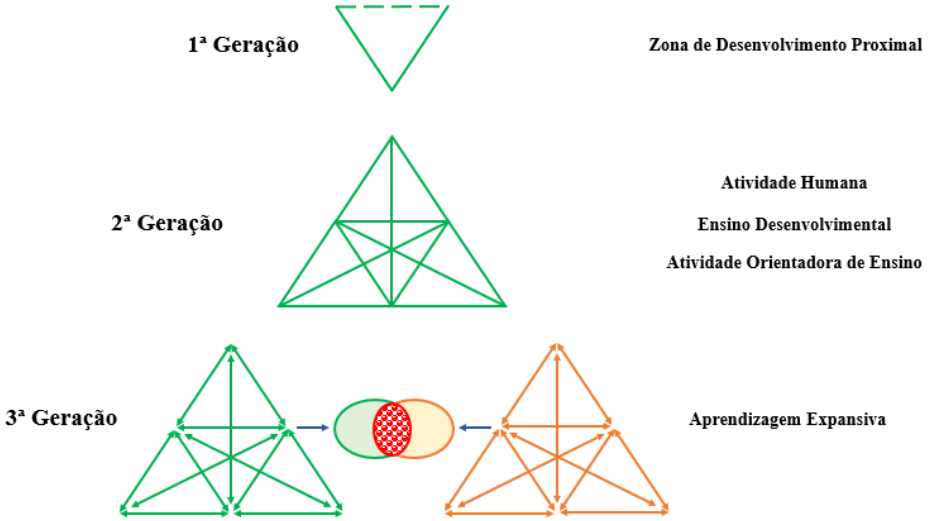
Fonte: Pesquisador (2024).

Por fim, o último tópico desta seção aborda a TA, explorando suas três gerações, discutidas simultaneamente por Lev Vygotsky, Alexei Leontiev e Yrjö Engeström. A partir dessa base, o tópico aprofunda-se na ideia conceitual de Aprendizagem Expansiva proposta por este último teórico, destacando como essa articulação teórica abre caminho para a difusão e criação de novos conhecimentos. Essa estrutura teórica é essencial para a análise das atividades

educativas descritas nesta pesquisa, proporcionando uma perspectiva sobre como a aprendizagem ocorre nos sistemas de atividades.

O **Esquema 4** ilustra a interconexão entre as abordagens conceituais essenciais para a compreensão da dinâmica do processo de ensino e aprendizagem, no contexto da TA discutida nesta pesquisa.

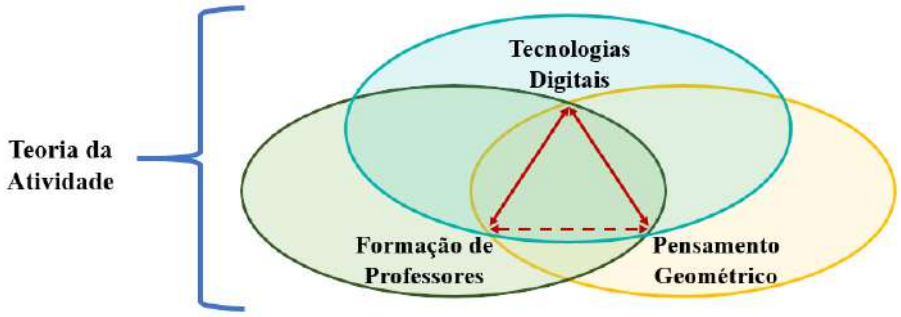
Esquema 4 – As triangulações da TA e alguns conceitos inter-relacionados



Fonte: Pesquisador (2024).

Dessa forma, esses apontamentos teóricos constituem um convite à reflexão sobre a formação de professores, as TD e o pensamento geométrico, com base na TA, que inter-relaciona esses três aspectos nesta pesquisa, conforme ilustrado no **Esquema 5**.

Esquema 5 – Integração teórica



Fonte: Pesquisador (2024).

Essa interconexão triangular implica que, ao se conectar de forma estruturada, os três pressupostos podem gerar novas formas de entendimento e práticas pedagógicas, à luz da TA.

1.1 Formação de Professores

A formação de professores tem sido amplamente estudada e discutida no campo da educação, envolvendo diversos autores e pesquisadores. Entre eles, destacam-se Oliveira (2022), Nóvoa (2019), Gatti (2014), Tardif (2014), Imbernón (2011) e Schön (2000), que conduziram pesquisas abordando diferentes aspectos relacionados à formação docente. Esses estudos têm como propósito estabelecer a coerência entre a formação recebida nas licenciaturas e nos cursos de formação continuada, além de alinhar essa formação às práticas esperadas desses profissionais.

Oliveira (2022) destaca que o processo de formação docente é um tema central e recorrente nas discussões sobre educação. Isso se deve ao fato de que a formação dos professores desempenha um papel primordial na qualidade do sistema educacional como um todo. A busca por reformas educacionais eficazes frequentemente envolve a revisão e a melhoria dos processos formativos desses profissionais. Assim, as políticas educacionais e as ações governamentais estão engajadas nesse processo, promovendo diferentes modelos e abordagens para a formação de professores. Isso pode incluir a criação de novos programas de formação, a revisão de currículos, o investimento na capacitação de professores em exercício e a implementação de práticas inovadoras de formação.

Gatti (2014) destaca a importância da formação de professores como um desafio significativo enfrentado pelas políticas educacionais em todo o mundo. Ela enfatiza que os professores desempenham um papel central na disseminação do conhecimento e da cultura em uma sociedade. Para abordar essa questão, muitos países têm implementado políticas e ações destinadas a aprimorar o processo formativo docente, tornando suas carreiras mais atraentes e alinhadas com as necessidades educacionais contemporâneas. A autora observa que essa preocupação com a formação de professores tornou-se uma tendência global, com nações como Tailândia, França, Chile, Estados Unidos, Inglaterra, Colômbia, Suécia, Finlândia, Nigéria, Argentina, Equador, entre outras, adotando medidas para fortalecer a formação docente. No entanto, ela ressalta que, no contexto brasileiro, a formação inicial de professores no ensino superior enfrenta desafios específicos (Gatti, 2014).

Conforme Gatti (2014), apesar de algumas resoluções do CNE a partir do ano 2000, o Brasil ainda carece de uma iniciativa nacional robusta para adequar os currículos das licenciaturas às necessidades da Educação Básica. A autora argumenta que a formação de professores deve se concentrar em preparar profissionais para atuar nesse cenário educacional,

em vez de apenas formar especialistas em disciplinas específicas. Essa discussão levanta questões importantes sobre a necessidade de políticas educacionais que promovam a formação inicial de professores de alta qualidade, alinhada às reais necessidades das escolas e dos estudantes.

Para Gatti (2014), é fundamental que as políticas educacionais relacionadas à formação inicial de professores adotem uma abordagem mais coerente e integrada. Isso implica que a criação de novos caminhos para a formação desses profissionais deve ser orientada por uma compreensão das complexidades do sistema educacional e das necessidades em constante evolução da sociedade. Para compreender melhor esse cenário, é importante analisar as políticas públicas que moldam a formação de professores.

Nesse sentido, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN, Lei nº 9.394/1996) representa um marco significativo no contexto brasileiro. Essa legislação estabelece a exigência de que os professores sejam formados em cursos de licenciatura plena em nível superior (Brasil, 1996). Além disso, serve como referência para cada nova diretriz educacional, constituindo um parâmetro para a construção de políticas e práticas educacionais mais atualizadas e eficazes.

Nesse âmbito, em 2001, foi divulgado o Parecer CNE/CP nº 9/2001, que aborda as DCN para a Formação de Professores da Educação Básica em nível superior, especialmente para os cursos de licenciatura de graduação plena (Brasil, 2002a). Este documento reforça os princípios orientadores de uma reforma no processo de formação docente, superando a visão tradicional e enfatizando a importância de uma formação profissional de alta qualidade.

De forma adicional, o parecer estabelece uma série de competências a serem desenvolvidas ao longo do processo formativo do licenciado. Ele destaca a concepção de competência como um elemento central na formação do professor, que vai além do domínio dos conhecimentos específicos. Essa concepção abrange a compreensão das questões relacionadas ao trabalho docente, a capacidade de tomar decisões de forma autônoma, a responsabilidade pelas escolhas realizadas, a avaliação crítica da própria atuação e a interação cooperativa com a comunidade profissional, bem como com a sociedade em geral.

Essa abordagem amplia o escopo da formação docente, visando desenvolver habilidades, atitudes e valores necessários para o exercício competente e responsável da profissão, contribuindo para uma prática docente reflexiva e contextualizada.

> As competências tratam sempre de alguma forma de atuação, só existem “em situação” e, portanto, não podem ser aprendidas apenas no plano teórico nem

> no estritamente prático. A aprendizagem por competências permite a articulação entre teoria e prática e supera a tradicional dicotomia entre essas duas dimensões, definindo-se pela capacidade de mobilizar múltiplos recursos numa mesma situação, entre os quais os conhecimentos adquiridos na reflexão sobre as questões pedagógicas e aqueles construídos na vida profissional e pessoal, para responder às diferentes demandas das situações de trabalho. (Brasil, 2002a)

Com base nessa afirmação, a aprendizagem por competências enfatiza a importância de uma formação docente que transcenda a mera transmissão de conhecimentos teóricos ou o desenvolvimento isolado de habilidades práticas. Essa abordagem visa promover uma integração em que os conhecimentos teóricos sejam aplicados e contextualizados na prática, enquanto a experiência prática é enriquecida e amparada pelos conhecimentos teóricos. Isso contribui para que os professores enfrentem de maneira mais eficaz os desafios e as demandas de um ambiente educacional em constante transformação. Este parecer também enfatiza a importância de formar professores com base em uma visão de aprendizagem construtivista e interativa. Essa abordagem fundamenta-se em três concepções principais, que estão destacadas no **Quadro 4**.

Quadro 4 – Concepções

Concepção de Aprendizagem	Concepção de Conteúdo	Concepção de Avaliação
O conhecimento é construído em interação com a realidade e os outros indivíduos. A aprendizagem depende das possibilidades de pensamento do indivíduo e de suas experiências anteriores. A interação com o meio social e a escola é determinante para a construção de competências.	Os conteúdos devem ser tratados nas dimensões conceitual, procedimental e atitudinal. O currículo de formação deve contemplar os conteúdos necessários para o desenvolvimento das competências profissionais. É fundamental garantir a articulação entre conteúdo e método de ensino, para uma aprendizagem significativa e a formação de uma rede de significados.	A avaliação é parte integrante do processo de formação e tem como objetivo diagnosticar lacunas, verificar resultados e identificar mudanças necessárias. A avaliação não deve ser punitiva, mas sim auxiliar o estudante a identificar suas necessidades de formação e investir em seu desenvolvimento profissional. Os instrumentos de avaliação devem diagnosticar o uso funcional e contextualizado dos conhecimentos.

Fonte: Pesquisador organizando as ideias do Parecer CNE/CP nº 9/2001.

Essas concepções ressaltam a importância de uma formação de professores que valorize a construção do conhecimento, a interconexão entre o conteúdo e os métodos de ensino, além de uma avaliação que considere o desenvolvimento de competências. Ao adotar essas perspectivas, que se opõem a um ensino unidimensional centrado apenas no conteúdo, pode-se promover uma formação mais eficaz e qualificada, capacitando os educadores a enfrentar os desafios da prática educativa contemporânea.

Nesse cenário, podemos refletir sobre a compreensão de Tardif (2014) a respeito dos saberes curriculares, que se referem às diversas facetas que compõem a estruturação e apresentação de uma determinada área disciplinar. Esses saberes "[...] apresentam-se concretamente sob a forma de programas escolares (objetivos, conteúdos, métodos), que os professores devem aprender a aplicar" (Tardif, 2014, p. 38). Em virtude disso, os saberes curriculares abrangem desde os direcionamentos educacionais definidos nos planos de ensino até os métodos de avaliação, englobando todos os aspectos do processo educacional. Esses saberes desempenham um papel primordial na organização e condução do ensino, oferecendo diretrizes claras e estruturadas para o processo educativo, assegurando, dessa forma, coesão e eficácia na aprendizagem dos conteúdos.

Dando continuidade ao processo de transformação dos processos formativos docentes, é importante destacar que a Resolução CNE nº 02/2002 trouxe mudanças significativas para a formação de professores no Brasil, buscando romper com o modelo conteudista ancorado na racionalidade técnica que estava em vigor desde 1939. Essa resolução estabeleceu novas diretrizes para a carga horária e a duração dos cursos de formação de professores. Antes da implementação da resolução mencionada, os currículos dos cursos de licenciatura eram predominantemente estruturados em torno dos conteúdos a serem ensinados, com uma ênfase excessiva na transmissão de conhecimentos específicos de cada disciplina. Esse modelo, conhecido como 3+1, destinava três anos ao estudo das disciplinas relacionadas aos conteúdos e apenas um ano à formação didática (Gatti, 2014).

Esses cursos de formação de professores eram orientados pelo modelo da racionalidade técnica. Tardif (2014) argumenta que esse modelo apresenta dois problemas epistemológicos consideráveis. Primeiramente, ele é concebido de acordo com uma lógica disciplinar, a qual não reflete a realidade do trabalho dos professores e suas atribuições. Em segundo lugar, esse modelo tende a tratar os estudantes como se fossem prévias sobre o aprendizado.

Conforme destacado por Nóvoa (2019), o processo de tornar-se professor é complexo e requer uma reflexão profunda sobre diversas dimensões. Isso abrange aspectos pessoais, profissionais e coletivos do magistério, bem como uma compreensão abrangente da "[...] complexidade da profissão em todas as suas dimensões: teóricas, experienciais, culturais, políticas, ideológicas, simbólicas etc." (Nóvoa, 2019, p. 6). O autor ressalta que ser professor vai muito além de simplesmente transmitir conhecimento; trata-se de uma jornada intrincada que envolve um profundo autoconhecimento, habilidades práticas, integração com a

comunidade educacional e uma compreensão abrangente das diversas camadas que permeiam a educação.

Em 2015, foi aprovada uma nova resolução do CNE, especificamente a Resolução nº 02/2015, que estabelece as DCN para a formação inicial em nível superior. Essa resolução abrange os cursos de licenciatura, a formação pedagógica para graduados, a segunda licenciatura e a formação continuada de professores. A implementação dessa resolução trouxe avanços e conquistas para a formação de professores no Brasil.

A Resolução nº 02/2015 estabelece diretrizes abrangentes e significativas para a formação de profissionais do magistério. Ela reconhece a importância dos saberes disciplinares, a responsabilidade dos professores na formação cultural dos estudantes e a complexidade inerente à profissão docente. De forma adicional, destaca a relação essencial entre teoria e prática, enfatizando a relevância da tecnologia na formação dos educadores. Este documento também ressalta a importância da integração entre teoria e prática na formação dos professores, reconhecendo que os futuros profissionais do magistério precisam não apenas adquirir conhecimentos teóricos, mas também desenvolver habilidades práticas que lhes permitam uma atuação reflexiva e adaptável em sala de aula (Brasil, 2015).

A formação de professores é um processo complexo que exige a integração de diversos elementos para assegurar uma educação de qualidade. Um dos pilares essenciais é a compreensão dos saberes disciplinares, que abrangem "[...] aos diversos campos do conhecimento, aos saberes de que dispõem a nossa sociedade, tais como se encontram hoje integrados nas universidades, sob a forma de disciplinas, no interior de faculdades e de cursos distintos" (Tardif, 2014, p. 38).

Esses saberes são fundamentais para que os profissionais compreendam e dominem os conteúdos específicos de suas áreas de atuação, contribuindo, sobretudo, para uma formação de qualidade e efetiva no exercício da docência. Ao adquirir essas competências, os profissionais ficam mais bem preparados para ensinar os saberes aos estudantes, promovendo uma educação enriquecedora.

Além disso, à medida que a sociedade evolui, é fundamental repensar a educação e adaptar os métodos de ensino às mudanças socioculturais em curso. Isso implica ajustar os conteúdos programáticos para atender às novas demandas e reconhecer a diversidade dos estudantes, que aprendem de maneiras distintas e em ritmos variados. De acordo com Moran (2015b), os métodos de ensino tradicionais precisam evoluir para incluir abordagens centradas

no estudante, de maneira coletiva e personalizada, incorporando tecnologias e estratégias inovadoras, como atividades *online*, jogos e projetos relevantes.

Recentemente, outros documentos educacionais têm impulsionado a reformulação dos cursos de licenciatura em todo o país. Nesse contexto, a Resolução do CNE/CP nº 2, de 20 de dezembro de 2019, estabelece as novas DCN para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica e institui a BNC-Formação. Essas diretrizes e a base têm como referência a implementação da BNCC da Educação Básica (Brasil, 2018), que busca garantir o desenvolvimento integral dos estudantes, contemplando seus aspectos intelectuais, físicos, culturais, sociais e emocionais.

Em outras palavras, a BNCC é um documento que visa promover a formação integral do estudante, estabelecendo um conjunto de aprendizagens essenciais que contribuem para o desenvolvimento de competências (Brasil, 2018). Essas competências abrangem a mobilização de conceitos, procedimentos, habilidades práticas, cognitivas e socioemocionais, além de atitudes e valores voltados para a resolução de problemas do cotidiano.

Cabe destacar que a aprovação da Lei nº 13.415/2017, que alterou o parágrafo 8º do artigo 62 da Lei nº 9.394/1996, e a BNCC (Brasil, 2018) tornaram-se referências para a reformulação dos cursos de formação de professores. Isso significa que os currículos desses cursos devem ser revisados e atualizados de acordo com as diretrizes estabelecidas nesta base, a fim de preparar os futuros educadores para atuarem em conformidade com os princípios e objetivos definidos no documento. Dessa forma, a referida base (Brasil, 2018) não se limita apenas aos currículos das escolas, mas também exerce impacto na formação dos professores. A intenção é que os futuros docentes estejam alinhados com as diretrizes dessa base, compreendendo as competências que devem ser desenvolvidas pelos estudantes e estando preparados para promover uma educação de qualidade que estimule o pleno desenvolvimento dos seres humanos.

Imbernón (2011) enfatiza a importância do papel do professor no processo educativo, destacando que a capacidade dos educadores de tomar decisões competentes na Educação Básica está profundamente relacionada à sua formação inicial. Para esse autor, é essencial preparar os futuros professores de maneira abrangente, considerando os aspectos científicos, culturais, contextuais, psicopedagógicos e pessoais. Essa formação sólida permite que eles assumam a complexa tarefa educativa de forma reflexiva, com flexibilidade e rigor.

O documento que compõe as DCN para a formação inicial de professores da Educação Básica é constituído pelo Parecer CNE/CP nº 22/2019 e pela Resolução nº 2 que o homologa.

Nesta primeira parte, apresenta-se uma introdução que expõe o embasamento legal e um breve histórico das políticas de formação e valorização do professor, além dos indicadores de aprendizagem. No desenvolvimento, são discutidos os referenciais e diretrizes internacionais que orientam o documento, os fundamentos da BNCC (Brasil, 2018) e a formação inicial de professores para a Educação Básica em nível superior, incluindo os princípios da política de formação docente, a organização curricular dos cursos e as competências profissionais dos professores. Também são abordados os princípios pedagógicos e organizacionais dos cursos de licenciatura, além dos processos avaliativos internos e externos.

A Resolução CNE/CP nº 02/2019 é composta por nove capítulos e um anexo. No Capítulo I, são definidos o objeto das diretrizes e a instituição da BNC-Formação. Sob essa perspectiva, estabelecem-se duas categorias de competências a serem desenvolvidas pelos futuros professores: as competências gerais – as mesmas da BNCC (Brasil, 2018) – e as competências específicas. As competências específicas estão divididas em três dimensões interligadas: conhecimento, prática e engajamento profissional (Brasil, 2019). Essas competências são complementares e não possuem uma hierarquia entre si. Há uma preocupação em formar professores capazes de gerenciar e mobilizar conhecimentos tanto para seu próprio desenvolvimento profissional quanto para a aprendizagem dos estudantes.

No que diz respeito ao conhecimento profissional, os futuros professores devem dominar os conteúdos a serem ensinados, saber como transmiti-los, demonstrar compreensão sobre os estudantes e seus processos de aprendizagem, reconhecer os contextos de vida dos estudantes e entender a estrutura e a governança dos sistemas educacionais. Em relação à prática profissional, os futuros educadores devem ser capazes de planejar ações de ensino eficazes, criar e gerenciar ambientes de aprendizagem, avaliar o desenvolvimento dos estudantes, a aprendizagem e o ensino, além de conduzir práticas pedagógicas relacionadas aos conteúdos, competências e habilidades.

Além disso, a BNC-Formação categoriza o conhecimento em três dimensões: o saber (o que o professor deve conhecer), o saber-fazer (as habilidades práticas que o professor deve desenvolver) e o saber-ser (as qualidades pessoais e características comportamentais do professor). Cada uma dessas dimensões é traduzida em competências específicas, que, por sua vez, são subdivididas em habilidades passíveis de serem medidas e avaliadas de forma objetiva.

A motivação para explorar tanto a BNC-Formação quanto a BNCC (Brasil, 2018) no contexto da formação de professores neste estudo decorre da necessidade de desenvolver competências digitais nos futuros educadores. Essas competências, que envolvem habilidades

no uso das TD, já eram consideradas fundamentais para a profissão docente no século XXI e tornaram-se ainda mais relevantes diante do cenário pós-pandemia, em que o ensino remoto e híbrido se consolidaram como parte da realidade educacional.

É importante ressaltar que a cultura digital é uma das competências gerais presentes na BNCC (Brasil, 2018) e na BNC-Formação. Isso reflete o reconhecimento da tecnologia como um recurso transversal no contexto educacional, capaz de contribuir para o alcance dos objetivos de aprendizagem estabelecidos. Assim, ambas as bases enfatizam a importância do uso das TD de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética, tanto para compreendê-las quanto para utilizá-las e criar novas possibilidades.

O **Quadro 5** descreve as competências digitais de cada base mencionada.

Quadro 5 – Competências digitais da BNCC e BNC-Formação

Competências Gerais Educação Básica BNCC	Competências Gerais Docentes BNC-Formação
5. Compreender, utilizar e criar TD de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.	5. Compreender, utilizar e criar TD de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas docentes, como recurso pedagógico e como ferramenta de formação, para comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e potencializar as aprendizagens.

Fonte: Pesquisador (2024) inspirado nas BNCC (Brasil, 2018) e BNC- Formação (Brasil, 2019).

Essa convergência reflete o reconhecimento de que as TD desempenham um papel cada vez mais central na sociedade contemporânea, incluindo o contexto educacional. Tanto os estudantes quanto os professores devem ser capazes de utilizar essas tecnologias de forma consciente, compreendendo suas vantagens, limitações e impactos, a fim de aproveitar plenamente seus benefícios. Em decorrência disso, a formação dos professores deve incluir a capacitação para a utilização efetiva das TD, permitindo que se tornem facilitadores do processo de ensino e aprendizagem nesse âmbito cada vez mais digital.

No entanto, é importante ressaltar que a formação dos futuros professores em relação ao uso das TD só poderá ocorrer de forma efetiva se as IES estiverem preparadas e atualizadas nesse aspecto. “Quem lhes forma precisa ser competente nos conhecimentos e nas práticas docentes mais ajustadas com a realidade atual. A universidade precisa ser coerente e responder com qualidade às mais novas demandas e necessidades do momento em que vivemos” (Kenski, 2015a, p. 439).

Aquino, Aquino e Caetano (2022), destacam a importância da competência digital dos professores no contexto da educação atual. Eles enfatizam que as competências digitais desses

profissionais são essenciais para melhorar a qualidade da educação, promover o desenvolvimento profissional, impulsionar a inovação e transformar a prática pedagógica. No entanto, alcançar esse nível de competência é um desafio que requer esforços significativos por parte das instituições de ensino, especialmente em países como o Brasil, onde ainda há muito a ser feito nesse sentido.

Em vista disso, é fundamental priorizar a capacitação dos futuros professores no uso crítico e reflexivo das TD. Isso não se restringe apenas ao domínio técnico dessas ferramentas, mas também envolve a compreensão das implicações pedagógicas, éticas e sociais associadas à sua aplicação. Essa formação digital desempenha um papel crucial, uma vez que a sociedade contemporânea exige cidadãos com habilidades digitais robustas.

Cabe destacar que as políticas públicas, ao investir em modelos de formação que capacitem os futuros professores a adotar as TD de maneira crítica e reflexiva, estão construindo uma base sólida para a educação. Com o desenvolvimento dessas habilidades, os futuros educadores podem integrar os diversos recursos digitais de forma mais eficaz em suas práticas pedagógicas, promovendo, assim, uma aprendizagem expansiva e incentivando a participação ativa dos estudantes. Essa busca por aprimorar a qualidade da formação docente não se limita apenas ao domínio de conteúdos específicos, mas também abrange o desenvolvimento de competências pedagógicas amplas, habilidades digitais, conscientização cibercultural e a capacidade de se adaptar às mudanças na sociedade da informação. Consequentemente, a formação digital torna-se uma necessidade emergente.

Para uma melhor compreensão dessas ideias, o **Esquema 6** ilustra visualmente o que foi discutido neste tópico, destacando a importância da formação de professores no contexto das TD e sua relação com uma educação digital.

Esquema 6 – Esquema da necessidade formativa digital

Fonte: Pesquisador (2024).

Esse panorama reflexivo revela a estreita relação entre a formação de professores e os contextos sociais, bem como os desafios enfrentados diante das transformações em curso. É resultado das preocupações relacionadas à preparação e orientação dos futuros docentes, levando em consideração as mudanças no ambiente escolar. Nesse sentido, no subtópico a seguir, aborda-se a Educação Híbrida como um conceito metodológico promissor para o desenvolvimento da cultura digital entre os futuros profissionais da educação.

1.1.1 **Formação híbrida:** as características da educação contemporânea

No cenário da educação contemporânea, caracterizada pela rápida evolução tecnológica e por novas abordagens pedagógicas, a formação docente desempenha um papel primordial na preparação de professores para atuarem de maneira eficaz e inovadora. Neste texto, exploram-se as características da educação contemporânea, especialmente diante da crescente demanda por modelos híbridos de ensino. Esse processo é essencial para capacitar os futuros educadores a enfrentarem os desafios impostos por um contexto educacional em constante transformação.

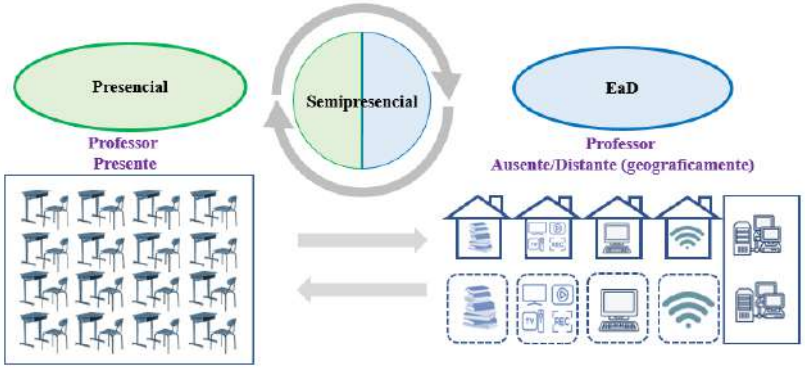
Ao longo do tempo, a educação presencial e EaD têm se aproximado e se complementam, criando novas concepções de ensino e aprendizagem. Litto e Formiga (2009) destacam que o uso de tecnologias e métodos virtuais tem sido amplamente adotado na educação presencial. O desafio de engajar, acompanhar e interagir com estudantes à distância tem impulsionado o desenvolvimento de soluções eficazes na EaD, que, por sua vez, enriquecem também os cursos presenciais. É essencial ressaltar que

> Hoje temos a educação presencial, semipresencial (parte presencial/parte virtual ou a distância) e educação a distância (ou virtual). A presencial é a dos cursos regulares, em qualquer nível, onde professores e alunos se encontram sempre num local físico, chamado sala de aula. É o ensino convencional. A semipresencial acontece em parte na sala de aula e outra parte a distância, através de tecnologias. A educação a distância pode ter ou não momentos presenciais, mas acontece fundamentalmente com professores e alunos separados fisicamente no espaço e ou no tempo, mas podendo estar juntos através de tecnologias de comunicação (Moran, 2002, p. 1).

O **Esquema 7**, a seguir, ilustra a transição entre a educação presencial e a EaD. De um lado, apresenta uma sala de aula com cadeiras organizadas em filas, representando o formato tradicional de ensino, onde os estudantes estão fisicamente presentes e interagem diretamente com o professor. Por outro lado, mostra a possibilidade de estudar em casa ou em outros locais, utilizando recursos educacionais como livros, revistas, computadores, *Internet*, *Wi-Fi* e outras

tecnologias. Neste formato, o estudante possui maior autonomia para gerenciar seu tempo e aprender de maneira mais independente. No entanto, ao mesclar esses dois modelos, surge o conceito de Ensino Híbrido, que combina a interação presencial com a flexibilidade do ensino a distância. Esse modelo, atualmente, tem sido potencializado pelas TD, proporcionando aos estudantes uma experiência de aprendizagem mais dinâmica, interativa e personalizada.

Esquema 7 – Esquema da transição entre a educação presencial e a EaD



Fonte: Pesquisador (2024).

Essa transição, especialmente nos aspectos virtuais, deu origem a algumas tendências que buscam combinar atividades presenciais e atividades desenvolvidas à distância (*online*), sendo denominadas de Educação Híbrida, Ensino Híbrido ou *Blended Learning*. Esses termos são abrangentes e possuem diversas outras definições e variações, o que os torna um conceito polissêmico. Eles englobam outras denominações, como *b-learning*, *hybrid flexible*, *hyflex*, *mixed-mode*, aprendizagem híbrida, aprendizagem flexível, aprendizagem combinada, entre outras. Essa diversidade de terminologias reflete a multiplicidade de abordagens e estratégias que podem ser adotadas no processo de ensino e aprendizagem mesclado (real e virtual).

Conforme Moran (2015a), o conceito de educação híbrida enfatiza como a educação sempre foi uma combinação de diversos elementos ao longo do tempo, incluindo espaços, tempos, atividades, metodologias e públicos. No entanto, o processo de hibridização tornou-se mais perceptível, amplo e profundo com a mobilidade e conectividade proporcionadas pelas tecnologias atuais, criando um ecossistema educacional mais aberto e criativo. O autor menciona ainda que o termo híbrido é descrito como rico, apropriado e complexo, representando a ideia de que podemos ensinar e aprender de inúmeras formas, em diferentes momentos e em múltiplos espaços. Essa diversidade de possibilidades permite que os professores combinem diferentes elementos e abordagens para criar experiências de aprendizagem mais personalizadas.

Contudo, Moran (2015a) destaca que a mistura mais complexa na educação híbrida é a integração do que realmente vale a pena aprender, assim como o porquê e o como fazê-lo. Essa questão envolve a escolha de conteúdos, competências e valores em uma sociedade multicultural e em constante transformação. Determinar o que faz sentido aprender em um mundo heterogêneo e dinâmico é um desafio. O autor também realiza uma reflexão crítica sobre a coerência e a prática dos educadores, questionando se é possível ensinar sobre mudança e evolução quando os próprios gestores e docentes enfrentam dificuldades em tomar decisões e evoluir. Além disso, enfatiza a importância de que os professores sejam coerentes, livres e realizados, praticando aquilo que ensinam, a fim de proporcionar uma educação verdadeiramente significativa e eficaz aos estudantes. Essa reflexão remete à ideia de que a prática educativa deve estar alinhada com os valores e as competências que se deseja transmitir, construindo um ambiente autêntico e inspirador de aprendizado.

Segundo Moran (2015a), o conceito de hibridização na educação é abordado sob diversas perspectivas, que vão desde a integração de saberes e valores até a articulação de metodologias variadas. O autor também destaca a importância de combinar abordagens pedagógicas, utilizar TD para enriquecer as atividades em sala de aula e integrar processos de ensino e aprendizagem formais com os informais. No entanto, antes de explorar esse contexto de abordagem pedagógica híbrida, é fundamental ressaltar que educação híbrida e EaD não são sinônimos. A EaD não é uma prática contemporânea, mas sim o resultado de um longo processo de desenvolvimento que se estende desde o século passado até os dias atuais. Essa modalidade de ensino abrange diferentes conceitos e denominações, refletindo a diversidade de abordagens e perspectivas a ela associadas (Litto, Formiga, 2009).

A EaD pode ser compreendida como um sistema tecnológico de comunicação bidirecional que substitui a interação na sala de aula tradicional (Silva, 2012). Essa modalidade permite a transmissão de conhecimentos, habilidades e atitudes, possibilitando o ensino e a aprendizagem em um contexto não presencial. De forma complementar, representa uma forma de ensinar e aprender de maneira mais industrializada, utilizando recursos tecnológicos para disseminar o conhecimento.

Inicialmente, essa modalidade de ensino baseava-se no envio de materiais impressos e na troca de correspondências entre estudantes e instituições. Com o avanço das tecnologias de áudio e vídeo, a EaD expandiu-se para incluir cursos universitários e outros formatos de educação. O surgimento e a popularização do computador e da *Internet*, juntamente com o

desenvolvimento das TDIC, impulsionaram ainda mais o crescimento dessa modalidade no Brasil (Silva, 2012).

Segundo os autores Borba, Malheiros e Amaral (2021), a *Internet* proporcionou diversas possibilidades para os cursos oferecidos na modalidade de EaD, resultando em mudanças significativas na forma como essa modalidade educacional é concebida e aplicada. Um fator importante que diferencia os diversos modelos existentes neste modelo é o grau de interação entre professores e estudantes, conforme também destacado por Valente (2003).

Nesse contexto, os autores Borba, Malheiros e Amaral (2021) utilizam o termo "EaD *online*" para descrever uma abordagem de educação a distância em que a aprendizagem ocorre principalmente por meio de interações via *Internet* e tecnologias relacionadas. Isso significa que os cursos e disciplinas a distância são desenvolvidos utilizando ferramentas como salas de bate-papo, videoconferências, fóruns e outras interfaces que facilitam a comunicação e a interação entre os participantes do curso. Nesse sentido, a educação *online* é apresentada como uma resposta eficaz para atender às demandas da sociedade da informação, oferecendo maior flexibilidade e interatividade aos estudantes. Desse modo,

> A educação *online* é fenômeno da cibercultura, isto é, do conjunto imbricado de técnicas, práticas, atitudes, modos de pensamento e valores que se desenvolvem juntamente com o crescimento do ciberespaço. Por esse termo entenda-se o novo ambiente comunicacional que surge com a interconexão mundial de computadores e das memórias dos computadores: principal suporte de trocas e de memória da humanidade a partir do início do século XXI: novo espaço de comunicação, de sociabilidade, de organização, de informação, de conhecimento e de educação. (Silva, 2012, p. 11, grifo do autor)

Essas transformações impulsionam tanto o contínuo desenvolvimento da EaD quanto às adaptações dos métodos educacionais para atender às necessidades da era digital. A presença cada vez mais significativa da *Internet* e das TD tem revolucionado a área educacional. Com o avanço da *Web* 2.0 e das redes sociais, a colaboração aberta *online* foi facilitada, resultando na criação dos *Massive Open Online Courses* (Mooc), que se tornaram uma importante referência em educação *online*. Em vista disso, o aprendizado mediado por computador e/ou pela rede estimulou essa modalidade e fortaleceu o movimento da educação aberta.

> O termo "educação aberta" teve muitas abordagens ao longo dos anos, tais como aprender fazendo, aprendizagem informal, abordagem holística, aprendizagem no mundo real ("aprendizado autêntico") e muitos outros. No entanto, espera-se que professores e alunos estejam abertos às variedades de

> abordagens de ensino, que acabam por ser, talvez, a estrutura histórica mais útil para a compreensão dos atuais desafios da aprendizagem em rede e abundância digital. Em épocas anteriores, as aulas da educação aberta muitas vezes pareceram apenas uma contracultura alternativa (lembra-se da "sala de aula aberta"?). Agora, no entanto, à medida que avançamos mais plenamente na era do conhecimento digital, o que era apenas uma alternativa é agora um imperativo. A Internet e a Web, e mais uma série de recursos educacionais disponíveis, estão fazendo "abrir" o padrão necessário. (Batson; Paharia; Kumar, 2014, p. 89).

Nessa linha de pensamento, o termo mencionado possui várias interpretações e abrange diferentes dimensões. Desse modo, em vez de apresentar uma única definição, os autores destacam a multiplicidade de significados que esse conceito pode assumir ao longo do tempo, como amplo acesso, maior diversidade de escolhas e flexibilidade. No entanto, eles ampliam essas definições, enfatizando a importância da coletividade na educação aberta.

Iiyoshi e Kumar (2014) também argumentam que é fundamental adotar uma perspectiva que vá além das práticas e estruturas educacionais tradicionais. Eles enfatizam que a reutilização e a remixagem de recursos educacionais abertos, juntamente com a colaboração em comunidades de pesquisa conectadas, proporcionam oportunidades para a inovação nas interfaces entre diferentes áreas do ensino. Um ponto central discutido pelos autores é a ideia de educação híbrida, que visa integrar métodos tradicionais de ensino com novas possibilidades baseadas em tecnologia e redes, proporcionando, assim, mais qualidade nas oportunidades educacionais.

> Acreditamos que a identificação das oportunidades criadas pela confluência de recursos educacionais abertos, e pelas possibilidades da rede e da tecnologia multimídia, além de maior compreensão da "pedagogia social", serão encontradas na educação sem fronteiras e no ensino híbrido. (Iiyoshi, Kumar, 2014, p. 431).

Além disso, destacam que os ambientes de aprendizagem híbridos não se restringem apenas a tecnologias como a realidade aumentada, mas também englobam a utilização de espaços reais e virtuais para complementar o acesso *online* aos conteúdos e à EaD ou presencial. "Isso pode também incluir os "especialistas" para colocá-los em contato com os estudantes, ou até mesmo em experiências de aprendizagem tais como a utilização de laboratórios reais e virtuais, para complementar o acesso on-line a conteúdos e formas de educação a distância" (Iiyoshi; Kumar, 2014, p. 431).

Iiyoshi e Kumar (2014) ressaltam que o uso da tecnologia pode ampliar e qualificar as abordagens tradicionais de ensino, permitindo um acompanhamento mais próximo por parte

dos professores, em conjunto com o acesso a recursos educacionais abertos. Isso cria oportunidades para oferecer uma educação de qualidade a novos públicos em diversos contextos, incluindo modalidades não tradicionais e informais de ensino. É importante destacar que, a partir da década de 2010, com a consolidação da educação aberta e o crescente uso de tecnologias interativas, a noção de educação híbrida começou a se concretizar, abrindo espaço para a tendência pedagógica que busca mesclar o modelo presencial com o ensino a distância *online*, fomentando o conceito de ensino híbrido. Conforme Horn e Staker (2015),

> O ensino híbrido é um programa de educação formal no qual um aluno aprende, pelo menos em parte, por meio do ensino online, com algum elemento de controle do estudante sobre o tempo, lugar, modo e/ou ritmo do estudo, e pelo menos em parte em uma localidade física supervisionada, fora de sua residência. [...]. As modalidades ao longo do caminho de aprendizado de cada estudante em um curso ou matéria são conectadas para oferecer uma experiência de educação integrada. (p. 7).

Sob essa perspectiva, o programa educacional formal refere-se à organização do conteúdo em sala de aula por um professor, seguindo um currículo ou programa estabelecido. Essa abordagem permite a inclusão de recursos digitais educativos ou aplicativos que podem ser adaptados para a aprendizagem. Assim, o ensino híbrido combina a aprendizagem estruturada em sala de aula, mediada pelo professor, com o uso de recursos *online*, que proporcionam maior flexibilidade e autonomia ao estudante.

É importante ressaltar que a abordagem do ensino híbrido busca uma integração efetiva da aprendizagem, combinando componentes *online* e presenciais de forma sinérgica. Conforme mencionado por Horn e Staker (2015), a concepção de um curso híbrido baseia-se na ideia de integrar os elementos virtuais e presenciais de maneira que atuem de forma complementar, sendo projetados para criar uma experiência de aprendizagem coesa e integrada. Essa integração visa potencializar os benefícios de cada modalidade, proporcionando aos estudantes uma abordagem educacional mais abrangente e enriquecedora.

No formato *online* do ensino híbrido, o estudante tem controle sobre o conteúdo e o processo de aprendizagem, o que inclui a possibilidade de regular seu próprio ritmo. Isso coloca o aprendiz no centro do processo educativo, permitindo-lhe a liberdade de pausar, retroceder ou pular determinados conteúdos *online*, conforme suas necessidades e ritmo de aprendizagem. É importante ressaltar que, nesse contexto, esse modelo é utilizado para descrever programas educacionais formais nos quais a aprendizagem ocorre tanto na modalidade virtual quanto na presencial. Em decorrência disso, um estudante que não está inserido em um programa que

combina essas duas modalidades não pode ser considerado um estudante híbrido. Nesse sentido, existem distinções claras entre o ensino híbrido, o ensino presencial e a EaD.

De outro modo, conforme mencionado por Horn e Staker (2015), o estudante aprende, pelo menos em parte, em um ambiente físico supervisionado, distante de sua residência. Isso implica que o aprendiz deve frequentar uma escola tradicional, onde há a presença de professores e supervisores que oferecem suporte e orientação durante a parte presencial do ensino híbrido. Segundo Valente (2015),

> [...] o ensino híbrido é uma abordagem pedagógica que combina atividades presenciais e atividades realizadas por meio das tecnologias digitais de informação e comunicação (TDICs). Existem diferentes propostas de como combinar essas atividades, porém, na essência, a estratégia consiste em colocar o foco do processo de aprendizagem no aluno e não mais na transmissão de informação que o professor tradicionalmente realiza. De acordo com essa abordagem, o conteúdo e as instruções sobre um determinado assunto curricular não são transmitidos pelo professor em sala de aula. O aluno estuda o material em diferentes situações e ambientes, e a sala de aula passa a ser o lugar de aprender ativamente, realizando atividades de resolução de problemas ou projeto, discussões, laboratórios, entre outros, com o apoio do professor e colaborativamente com os colegas. (p. 3)

Valente (2015) ainda sinaliza que o ensino híbrido reflete uma tendência de mudança observada em diversos setores da sociedade que incorporaram recursos das TD, como o sistema bancário, o comércio e as empresas. Trata-se de uma abordagem que não é apenas uma moda passageira, mas sim uma inovação que veio para permanecer na educação.

Isso sugere que essa abordagem pedagógica está alinhada com as demandas e necessidades da sociedade contemporânea, que valoriza a integração das tecnologias na educação como forma de enriquecer a experiência de aprendizagem. Assim, o ensino híbrido pode ser compreendido como uma manifestação do processo histórico e sociocultural, representando uma resposta adaptativa às mudanças e avanços da sociedade moderna. De acordo com Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2015), o modelo híbrido de educação promove uma ruptura com a perspectiva tradicional de ensino passivo, na qual o estudante é meramente um receptor de conhecimento. Por meio do uso de metodologias ativas, busca-se engajar os estudantes de maneira mais participativa, permitindo que tomem decisões e direcionem seu próprio processo de aprendizagem, utilizando recursos tecnológicos interativos.

No contexto educacional, o ensino híbrido pode ser abordado de duas maneiras distintas. O primeiro modelo busca combinar métodos tradicionais de ensino com o suporte de tecnologias, visando oferecer o melhor do aprendizado presencial em sala de aula, aliado às

vantagens do aprendizado *online*. O segundo modelo, mais radical, tem como propósito inovar completamente a sala de aula tradicional, explorando abordagens pedagógicas que transcendem os métodos convencionais (Horn, Staker, 2015).

Essa primeira abordagem é considerada uma inovação sustentada em relação ao modelo tradicional de sala de aula. Dentre as inovações sustentadas no ensino híbrido, destacam-se os modelos de Rotação por Estações, Laboratório Rotacional e Sala de Aula Invertida. Essas abordagens equilibram aspectos do ensino presencial e *online*, criando ambientes de aprendizagem enriquecedoras e mais flexíveis, nos quais os estudantes podem vivenciar diferentes métodos de ensino que se complementam e promovem a construção do conhecimento de forma mais dinâmica e adaptativa (Horn; Staker, 2015).

Por outro lado, os modelos Flex, A La Carte, Virtual Enriquecido e Rotação Individual são considerados inovações disruptivas no ensino híbrido. Essas abordagens exploram novas formas de abordar a educação, questionando a estrutura tradicional da sala de aula e buscando alternativas mais alinhadas às necessidades dos estudantes em uma sociedade em constante transformação. Ao romper com paradigmas estabelecidos, essas metodologias desafiam o ensino convencional e oferecem possibilidades inovadoras de aprendizado, capacitando os participantes a se envolverem ativamente com o conteúdo, adaptarem seu ritmo de estudos e fortalecerem o desenvolvimento de habilidades essenciais para o mundo contemporâneo (Horn; Staker, 2015).

Os modelos mencionados apresentam diferentes abordagens para a implementação do ensino híbrido. Em virtude disso, o **Quadro 6** oferece uma breve análise dessas abordagens, conforme a concepção de Horn e Staker (2015).

Quadro 6 – Modelos híbridos

<table>
<tr><th colspan="4">Abordagens de Inovações Sustentadas</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Rotação</td><td rowspan="4">É aquele no qual, dentro de um curso ou matéria (ex.: Matemática), os estudantes revezam entre modalidades de ensino, em um roteiro fixo ou a critério do professor, sendo que pelo menos uma modalidade é a do ensino online. Outras modalidades podem incluir atividades como as lições em grupos pequenos ou turmas completas, trabalhos em grupo, tutoria individual e trabalhos escritos.</td><td>Rotação por Estações</td><td>É aquele no qual os estudantes revezam dentro do ambiente de uma sala de aula. Conhecido também por “Rotação de Turmas” ou “Rotação em Classe”.</td></tr>
<tr><td>Laboratório Rotacional</td><td>É aquele no qual a rotação ocorre entre a sala de aula e um laboratório de aprendizado para o ensino online.</td></tr>
<tr><td>Sala de Aula Invertida</td><td>É aquele no qual a rotação ocorre entre a prática supervisionada presencial pelo professor (ou trabalhos) na escola e a residência ou outra localidade fora da escola para aplicação do conteúdo e lições online.</td></tr>
<tr><td>Rotação Individual</td><td>É aquele em que cada estudante tem um roteiro individualizado e, não necessariamente, participa de todas as estações ou modalidades disponíveis.</td></tr>
</table>

Abordagens de Inovações Disruptivas	
Flex	É aquele no qual o ensino *online* é a espinha dorsal do aprendizado do estudante, mesmo que ele o direcione para atividades *offline* em alguns momentos. Os estudantes seguem um roteiro fluido e adaptado individualmente nas diferentes modalidades de ensino, e o professor responsável está na mesma localidade.
A La Carte	É aquele no qual os estudantes participam de um ou mais cursos inteiramente *online*, com um professor responsável *online* e, ao mesmo tempo, continuam a ter experiências educacionais em escolas tradicionais. Os estudantes podem participar dos cursos *online* tanto nas unidades físicas ou fora delas.
Virtual Enriquecido	É uma experiência de escola integral na qual, dentro de cada curso (ex.: Matemática), os estudantes dividem seu tempo entre uma unidade escolar física e o aprendizado remoto com acesso a conteúdos e lições *online*.

Fonte: Pesquisador organizando as ideias de Horn e Staker (2015, p. 27).

Essas abordagens híbridas podem incluir o uso de recursos digitais, como plataformas *online*, vídeos, jogos educacionais e interações em tempo real, combinados com atividades presenciais, como discussões em grupo, projetos colaborativos e experimentos práticos. A integração de elementos *online* e presenciais têm como propósito proporcionar uma experiência de aprendizagem mais flexível, personalizada e envolvente, que atenda às necessidades e preferências dos estudantes.

De forma adicional, essas diferentes abordagens refletem a diversidade de possibilidades no cenário da educação contemporânea, onde a tecnologia e as novas concepções pedagógicas oferecem oportunidades para repensar e transformar o processo educacional. Assim, o ensino híbrido é considerado uma inovação no setor educacional, pois combina as vantagens das TD com os benefícios do ensino presencial, criando novas oportunidades de aprendizagem e promovendo maior flexibilidade, interatividade e eficácia no processo educativo.

Para Moran (2015b), as instituições educacionais que estão atentas às mudanças têm duas opções principais a seguir. A primeira é um caminho mais suave, caracterizado por mudanças progressivas. Nesse contexto, as escolas mantêm o modelo curricular predominante, que é o disciplinar, mas buscam um maior envolvimento dos estudantes por meio da adoção de metodologias ativas. Por outro lado, existem instituições que optam por modelos mais inovadores e disruptivos, buscando mudanças profundas. Nesses casos, abandonam-se as estruturas tradicionais baseadas em disciplinas, e o projeto educacional é totalmente redesenhado. Isso abrange a reestruturação dos espaços físicos, a adoção de metodologias centradas em atividades, desafios, problemas e jogos, além de um enfoque no aprendizado personalizado.

Moran (2015b) também enfatiza a complexidade das questões relacionadas ao ensino híbrido, que vai além da simples utilização de metodologias ativas ou da combinação de ambientes presenciais e *online*. Ele destaca que o ensino híbrido oferece inúmeras

oportunidades, mas também apresenta desafios para garantir que todos os estudantes desenvolvam suas habilidades e se engajem plenamente no processo de aprendizagem. Com base nas informações apresentadas, pode-se concluir que o ensino híbrido representa uma abordagem educacional em ascensão, que busca valorizar as particularidades individuais dos participantes e se adapta constantemente às suas necessidades de aprendizagem. A integração da inovação tecnológica e pedagógica desempenha um papel fundamental nesse processo, proporcionando aos estudantes um ambiente de ensino mais dinâmico e inovador.

Nesse sentido, o hibridismo no ensino não se restringe à simples combinação de momentos presenciais e virtuais; ao contrário, enriquece o ensino presencial por meio da tecnologia, que facilita a organização das aprendizagens e estimula a participação ativa dos participantes. Nessa abordagem, o estudante assume um papel proativo, produzindo conhecimento e desenvolvendo competências, enquanto o professor atua como orientador e mentor, criando experiências de aprendizagem adaptadas às necessidades dos estudantes.

A implementação do ensino híbrido no Brasil encontra respaldo nos documentos e regulamentações educacionais que enfatizam o uso das TIC tanto no ensino presencial quanto na EaD. Nesse âmbito, o Decreto nº 9.235, promulgado em 2017, destaca-se por estabelecer diretrizes para a implementação da abordagem híbrida no ensino superior, promovendo uma educação mais flexível e acessível, que combina elementos presenciais e a distância, com o suporte dos recursos tecnológicos (Brasil, 2017).

Apesar de não haver menção explícita ao termo “ensino híbrido” nas portarias referentes ao ensino presencial e à EaD, a proposta de combinar elementos presenciais e a distância com o uso de TIC está alinhada aos princípios do ensino híbrido. Essa abordagem possibilitou a adoção de práticas híbridas nas instituições de ensino no Brasil. No entanto, foi durante a pandemia da Covid-19 que essa tendência foi acelerada, em decorrência do fechamento de escolas em todo o mundo, o que demandou soluções inovadoras para a continuidade da educação.

Essa situação representou um dos maiores desafios enfrentados por autoridades, famílias e estudantes, que precisaram se adaptar a uma nova realidade de isolamento social. Com a suspensão imediata das aulas presenciais em todo o país, em decorrência das rigorosas medidas de saúde, tornou-se necessário assegurar a continuidade do processo educacional, o que resultou na implementação do ERE. Essa transição demandou uma rápida adaptação por parte de professores e estudantes para enfrentar os desafios impostos pelo novo cenário.

À medida que as restrições de saúde foram flexibilizadas, algumas escolas decidiram adotar um modelo de ensino flexível, alternando entre aulas presenciais e a distância, utilizando as TDIC como ferramentas mediadoras. Essa abordagem destacou a importância de implementar metodologias de ensino híbrido, que combinam momentos educacionais presenciais e *online*, com o propósito de alcançar melhores resultados no processo de ensino e aprendizagem.

Esse período recente acentuou a falta de investimentos e de prioridade na qualificação da educação brasileira. Isso evidenciou que a comunidade educacional deveria ter realizado revisões e promovido investimentos em inovações metodológicas há décadas. Por outro lado, as experiências vividas durante esse momento trouxeram lições valiosas, especialmente no que diz respeito ao uso mais eficiente das TDIC. Essas experiências abriram caminho para o ensino híbrido, que combina elementos do ensino presencial e *online*, integrando o melhor de ambos os mundos. Ao enfrentar os desafios do isolamento, foi possível observar tanto as vantagens quanto os obstáculos do ensino a distância e presencial, criando espaço para uma nova abordagem híbrida que busca adaptar-se às necessidades em constante mudança da educação.

Essa mudança requer uma ruptura com a abordagem tradicional de educação, na qual o professor é visto como o detentor absoluto do conhecimento e os estudantes como receptores passivos. Em vez disso, o professor deve assumir o papel de mediador do saber, incentivando a reflexão, o diálogo e a construção conjunta do conhecimento. Isso implica em desconstruir a ideia ultrapassada da "educação bancária", conforme proposto por Paulo Freire. Nessa nova abordagem, o professor capacita os estudantes a aplicar o conhecimento em suas próprias experiências, permitindo conexões significativas com o mundo real e estimulando a participação ativa com base nos saberes prévios adquiridos no cotidiano. Essa transformação pedagógica é essencial para promover uma educação mais alinhada com as demandas do mundo contemporâneo.

Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2015) destacam que, apesar das vantagens do ensino híbrido, ainda há uma carência de professores qualificados para utilizar efetivamente as ferramentas e tecnologias necessárias nesse modelo de ensino e aprendizagem. Para os autores, é fundamental que os professores atuem como mediadores e facilitadores do acesso rápido a uma vasta quantidade de informações, além de serem capazes de engajar os estudantes de maneira interativa durante as aulas. Além disso, indicam que a implementação bem-sucedida de cursos híbridos exige um plano de gestão adequado, que leve em conta a participação e a

interação dos estudantes ao longo de todo o processo. Para isso, a formação docente deve incluir o uso das novas TD e promover a aprendizagem dos estudantes de maneira proativa.

> Encontramos nas instituições educacionais um número razoável de professores que estão experimentando estas novas metodologias, utilizam aplicativos atraentes e compartilham o que aprendem em rede. O que predomina, no entanto, é uma certa acomodação, repetindo fórmulas com embalagens mais atraentes, esperando receitas, num mundo que exige criatividade e capacidade de enfrentar desafios complexos. Há também um bom número de docentes e gestores que não querem mudar, que se sentem desvalorizados com a perda do papel central como transmissores de informação e que pensam que as metodologias ativas deixam o professor em um plano secundário e que as tecnologias podem tomar o seu lugar. (Moran, 2015b, 27).

Portanto, para uma formação docente verdadeiramente eficaz, é necessário superar a acomodação e incentivar uma postura mais criativa e aberta aos desafios complexos da educação contemporânea. Considerando essa circunstância, Kenski (2015a) ressalta a urgência de desenvolver propostas inovadoras que garantam a qualidade da formação dos professores, incluindo uma ampla renovação didática digital. As instituições responsáveis pela formação de docentes precisam, portanto, repensar a formação inicial, preparando-os adequadamente para o exercício profissional em um mundo tecnológico e digital. Essa transformação no cenário educacional evidencia a importância da formação do professor, tanto na etapa inicial quanto em cursos de formação continuada.

É imprescindível uma reestruturação curricular inovadora e dinâmica, pois, como destaca Kenski (2015a, p. 426), "[...] alunos bem formados terão melhores condições de serem bons professores e garantir aprendizados mais significativos a seus estudantes, superando os desafios e as necessidades postas pela sociedade contemporânea". Em decorrência disso, a qualificação dos professores e a adoção de planejamentos eficazes são elementos-chave para o pleno aproveitamento das vantagens do ensino híbrido. Nesse sentido, uma formação docente abrangente, aliada ao uso das TD, possibilitará uma educação mais interativa, participativa e enriquecedora para os estudantes, preparando-os para enfrentar os desafios da sociedade contemporânea e do mundo digital em constante evolução.

Em virtude disto, a formação docente contemporânea, ao adotar a abordagem híbrida, prepara os professores para utilizarem ferramentas digitais e recursos multimídia de maneira eficiente no ensino presencial, enriquecendo a experiência dos estudantes. Além disso, ao estarem preparados para atuar tanto no ambiente físico quanto no virtual, os professores tornam-se mais capacitados para engajar, acompanhar e interagir com os estudantes à distância,

potencializando as possibilidades educacionais. Para aprofundar essa abordagem centrada na formação, o próximo subtópico explora os pilares que a sustentam.

1.1.2 Aspectos formativos

Atualmente, abordar o desenvolvimento formativo requer uma perspectiva ampla da realidade contemporânea. De acordo com Macedo (2010), a formação humana é um processo complexo e sistêmico que só pode ser compreendido por meio de uma série de reflexões informadas e inter-relacionadas, que vão além da mera preocupação com a capacidade de reproduzir conhecimentos ensinados. Nessa linha de pensamento, o autor destaca que a formação é vista como um fenômeno que ocorre a partir do mundo e da consciência do Ser, que aprende ao transformar eventos, informações e conhecimentos em experiências relevantes, com intenção e construção explícita de sentidos e significados.

> Por mais que tenham nos ensinado que a formação significa aprender algumas coisas que os outros nos recomendam como importantes para nossa vida – uma das sínteses da sua simplificação – quando aprendemos, mesmo no erro, ou na transgressão, aprendemos totalizados, ou seja, é o Ser na sua caminhada histórica, composta de domínios, consensos, contradições, paradoxos e ambivalências que se move, se mobiliza, e, portanto, aprende. (Macedo, 2010, p. 43).

Nesse sentido, Macedo (2010) argumenta que a formação humana ocorre em diversas situações, com valores que devem ser cultivados ao longo da vida. Dessa forma, esse processo, além de incluir o desenvolvimento de habilidades sociais, tecnológicas e de autoconhecimento, pode conduzir o indivíduo a um sucesso pessoal e profissional, tanto a curto quanto a longo prazo. O processo formativo é contínuo de aprendizado, expansão de habilidades, conhecimentos específicos e valores que permitem que um indivíduo se torne competente em uma determinada área. Essa formação pode ser acadêmica, profissional ou pessoal, e pode ser adquirida por meio de diversos métodos, como cursos, treinamentos, leituras, práticas e experiências.

De acordo com Macedo (2010), a formação humana ocorre na existência de um ser social que transforma em experiências significativas os acontecimentos, informações e conhecimentos que o cercam, assim como suas relações. Esse processo de aprendizado se dá com o outro (heteroformação), consigo mesmo (autoformação) e com o ambiente, incluindo as coisas, outros seres e instituições, enfatizando o conceito de ecoformação. Em virtude disso, o

indivíduo emerge, formado em sua infinita incompletude, para saberrefletir, saber-fazer e saber-ser, em um constante movimento, pois está sempre sendo desafiado.

Nesse contexto, Lévy (2003) propõe que o laço social deve ser fundamentado no conhecimento, ressaltando que "[...] o núcleo da engenharia do laço social é a economia das qualidades humanas" (p. 32). Sob essa ótica, a união dos indivíduos não se dá mais pela pertença a um território ou ideologia, mas pela capacidade de compartilhar saberes, onde as identidades se redefinem em função do conhecimento. Esse saber, mais amplo do que o científico, relaciona-se com o saber-viver e o viver-aprendendo, integrando experiências do cotidiano.

O saber-viver está relacionado ao ambiente em que o indivíduo está inserido, considerando-o um elemento importante para uma formação humana mais completa e atualizada. Considerando essa circunstância, é importante destacar que, segundo Pineau (2023), a ecoformação é uma forma de aprendizagem que ocorre em contextos mais amplos, nos quais o sujeito está integrado a uma rede de relações que se estende além dos limites da sala de aula. Essa forma de aprendizagem é caracterizada pela interação entre o sujeito e o ambiente, no qual o espaço é considerado um recurso elementar para o desenvolvimento pessoal, interpessoal e, sobretudo, para a construção do conhecimento.

Nesse âmbito, a heteroformação é um aspecto formativo que ocorre por meio da influência de outras pessoas ou instituições, como professores, mentores, colegas e instituições de ensino, entre outros. Além disso, pode ser estimulada pela participação em grupos de estudo, presenciais ou *online* (ciberespaço), que possibilitam a troca de experiências e conhecimentos entre os participantes. Consequentemente, "Quando se diz que a aprendizagem é sempre um fenômeno relacional, potencializando sua constituição interativa, intercompreensiva, estamos reconhecendo que a formação se realiza no contato, no contato significativo com o outro e consigo mesmo" (Macedo, 2010, p. 73).

Lévy (2003) complementa essa perspectiva ao afirmar que "[...] o ser humano organiza ou reorganiza sua relação consigo mesmo, com seus semelhantes, com as coisas, com os signos, com o cosmo" (p. 121). Essa reorganização das relações é fundamental para o desenvolvimento pessoal e profissional, pois permite que o indivíduo não apenas absorva conhecimentos, mas também construa uma compreensão mais ampla do mundo ao seu redor. Sob essa ótica, a heteroformação não é apenas um complemento à ecoformação ou à autoformação, mas sim um aspecto essencial para uma formação integral, na qual as interações sociais enriquecem a experiência de aprendizado e ampliam as perspectivas de cada indivíduo.

Para Galvani (2002), o processo de heteroformação é determinado por uma combinação de fatores, incluindo a educação recebida, as influências sociais transmitidas pela família, o ambiente social e cultural, bem como a formação inicial e continuada. Esses elementos moldam a maneira como os indivíduos pensam, agem e se comportam em relação aos outros e ao mundo ao seu redor. No entanto, é primordial reconhecer que a heteroformação não é um fenômeno estático, mas sim um procedimento em constante evolução, que pode ser modificado por meio de novas experiências e aprendizados. Assim, a partir da interação com outros indivíduos, como colegas e professores, o futuro docente pode ser influenciado em sua formação, adquirindo conhecimentos, habilidades e valores que podem ser incorporados à sua prática pedagógica.

Essa dinâmica de interação é relevante para a construção da inteligência coletiva, conceito que Lévy (2003) define como um conjunto de habilidades cognitivas, como perceber, lembrar, aprender, imaginar e raciocinar, exercidas em um contexto social. A inteligência coletiva emerge precisamente da heteroformação, pois é por meio das interações e da comunicação que os indivíduos constroem e compartilham conhecimento. A linguagem, nesse processo, permite que se herde a cultura de gerações anteriores, facilitando não apenas a compreensão do mundo, mas também a atualização contínua do saber. Por conseguinte, a formação docente se torna uma prática coletivamente interativa, na qual a troca de experiências e saberes enriquece os indivíduos envolvidos.

A inteligência coletiva, portanto, busca estabelecer o conhecimento como a base das relações interpessoais, sendo necessário um espaço específico que Lévy (2003) denomina de Espaço do Saber, onde a valorização das habilidades individuais promove um ambiente coletivo. Embora esse espaço ainda seja considerado virtual, é possível afirmar que, no contexto atual, ele está em construção. Isso se deve ao fato de que, apesar das tecnologias que facilitam a conexão entre os indivíduos, sua efetivação exige mudanças nas esferas política e social, além de uma reestruturação significativa no campo educacional.

Ainda nesse contexto, a autoformação é essencial para o desenvolvimento profissional dos professores, pois valoriza a experiência como um componente primordial na construção do conhecimento. Ela destaca a habilidade de aprender a aprender e a importância de um papel ativo na própria formação, enfatizando a autoavaliação e uma postura reflexiva em relação à prática pedagógica (Galvani, 2002).

Por exemplo, na formação inicial de professores, a autoformação pode ser entendida como uma abordagem formativa que visa estimular a autonomia e a responsabilidade do futuro educador em relação à sua própria formação. Isso implica um processo formativo que incentiva

a busca por informações, reflexões críticas sobre as práticas pedagógicas e a participação em atividades práticas que contribuam para o desenvolvimento profissional. Esse processo exige do indivíduo uma visão crítica da realidade e uma postura proativa, capaz de identificar e aproveitar oportunidades formativas. Assim,

> Se estamos hoje potencializados para experimentar de forma realçada a autoformação, pelo advento e pelas disponibilidades das tecnologias da informação e da comunicação propositivas, por exemplo, é preciso não vê-las/utilizá-las de uma forma simplificada ou reduzida, mas como mais um pólo da formatividade do Ser, a ser desenvolvido com a melhor qualidade possível, até porque, insistimos, um dos sentidos fortes da educação e da formação é a construção da autonomia socialmente edificada e exercida de forma qualificada. (Macedo, 2010, p. 69).

Essa afirmação enfatiza que, atualmente, as novas tecnologias podem ser utilizadas para qualificar a autoformação. No entanto, é importante não vê-las ou utilizá-las de forma simplificada ou reduzida, mas sim reconhecê-las como um aspecto medular da formação do indivíduo. O autor ressalta que a educação e a formação têm como propósito construir uma autonomia socialmente edificada e exercida de maneira qualificada. Portanto, é necessário desenvolver a melhor qualidade possível na utilização desses recursos tecnológicos, especialmente os relacionados às TD, para aprimorar a formação do indivíduo.

Em síntese, as abordagens formativas discutidas por Pineau (2023) foram concebidas como um processo tripolar de formação, englobando três aspectos: o si (autoformação), o outro (heteroformação) e o ambiente (ecoformação). Em outras palavras,

> Inspirando-se nos três mestres fundamentais na educação conforme definidos por Rousseau (1712- 1778) – a própria pessoa, os outros e as coisas – , Gaston Pineau forjou a teoria tripolar da formação. Foi explorando a metodologia das histórias de vida e as diversas formulações que os sujeitos dão para seus trajetos de formação que Pineau formulou a teoria dos três movimentos que interferem na formação – personalização, socialização e ecologização –, o que o levou a criar os conceitos de auto, hetero e ecoformação. (Sommerman, 2003, p. 58-59).

Em acréscimo, é importante enfatizar que a teoria sobre autoformação, heteroformação e ecoformação contribui para a compreensão de que esses aspectos formativos não são excludentes, mas sim complementares em diferentes níveis. Dessa forma, quanto mais eles estiverem presentes na formação humana, maior será a profundidade e a amplitude dos resultados (Sommerman, 2003). Em termos simples, Pineau (2023) alerta para não nos apegarmos rigidamente a uma única abordagem de formação, reconhecendo que, em certas

situações, é necessário dar mais ênfase à autoformação, enquanto, em outras, a heteroformação ou a ecoformação podem desempenhar papéis mais preponderantes. Essa flexibilidade é essencial para adaptar o processo formativo às necessidades e desafios que surgem ao longo da vida de um indivíduo, criando uma abordagem mais holística e dinâmica para a formação humana.

> Segundo Pineau, o meio ambiente, as coisas e o mundo ciber, são as novas/outras entradas que inflexionam a formação para uma mudança paradigmática em direção a novos heteros. É aí que o currículo e que, além de as ações da formação não podem desprezar essas novas/outras referências, sob pena de não levar em conta a nossa própria temporalidade e seus emergentes saberes-referência serem pautas/conteúdos, demandam formação. Uma urgência histórica para nós. (Macedo, 2010, p. 74-75).

À luz dessas considerações, é essencial destacar a importância das mediações sistematizadas na formação humana educacional, conforme enfatiza Macedo (2010). Ao abordar a compreensão contínua do conhecimento, ele provoca uma transformação na maneira como encara a formação docente, defendendo que esta deve ser estruturada com rigor, criando ambientes de aprendizado fundamentados em princípios e valores específicos. Esses espaços devem ser permeados pela cibercultura, que exerce um impacto significativo na qualificação de professores, moldando as metodologias adotadas no processo de ensino.

A crescente integração de TD nas práticas educacionais não representa apenas uma atualização superficial, mas sim uma oportunidade de revisar e enriquecer as abordagens pedagógicas tradicionais, criando espaço para o desenvolvimento de estratégias mais eficazes na construção do conhecimento. Nesse cenário, é relevante que os professores sejam qualificados não apenas para aceitar essas mudanças, mas para incorporá-las de maneira reflexiva e crítica em suas práticas, permitindo que atendam às complexas necessidades de aprendizagem dos estudantes no século XXI.

Os programas de formação inicial, portanto, devem promover uma compreensão mais ampla do conhecimento, incentivando a reflexão crítica sobre o que é ensinado. Macedo (2010) destaca a natureza dinâmica do conhecimento, lembrando que os indivíduos em formação não devem se contentar apenas em absorver informações, mas precisam estar dispostos a questionar e atualizar seus saberes à medida que novas perspectivas surgem. Essa visão reforça a ideia de que o processo formativo humano é contínuo, constituindo um ciclo de aprendizado que se estende além das paredes da sala de aula e ao longo de toda a vida.

No contexto desta pesquisa, as TD se tornam relevantes por serem uma possibilidade de entrelaçamento desses aspectos formativos em cenários híbridos de ensino. Em decorrência disso, no próximo tópico explora algumas concepções direcionadas para uma educação digital.

1.2 Tecnologias Digitais

As tecnologias têm estado disponíveis ao ser humano desde os tempos em que os homens escreviam nas cavernas, utilizando carvão e substâncias para tingir as pedras. Esse conceito abrange tanto as atividades organizacionais, estruturais, de informática e treinamento, consideradas atividades-meio, quanto os produtos, processos e equipamentos, denominados atividades-fim. Desse modo, para compreender a evolução da ideia de tecnologia, é fundamental examinar as diversas abordagens e significados que foram incorporados ao longo da história. Nesse panorama, vários estudiosos de diferentes áreas de pesquisa (Rodrigues, 2001; Kenski, 2015b; Veraszto *et al.*, 2009) contribuíram para a construção desse conceito, levando em conta os contextos sociais e culturais em que estavam inseridos.

Vale ressaltar que estabelecer uma definição precisa e exata da palavra tecnologia é um desafio. Para Rodrigues (2001), o termo é formado pela combinação de tecno, que deriva do grego *techné* e significa saber fazer, e logia, que vem do grego *logos* com o sentido de razão. Nessa perspectiva, a expressão tecnologia pode ser entendida como a razão do saber fazer, no contexto do ensinamento da técnica. Contudo, de acordo com Veraszto *et al.* (2009), a definição vai além, correspondendo ao estudo da própria atividade de modificar, transformar e agir.

Kenski (2015b) enfatiza que a tecnologia abrange uma ampla variedade de criações da inteligência humana ao longo da história, destinadas a atender necessidades específicas e alcançar objetivos determinados. Muitos desses artefatos estão tão integrados ao cotidiano que não os reconhecemos como tecnologias. Contudo, a tecnologia não se limita apenas a dispositivos, aparelhos e objetos, como lousas, cadernos e lápis. Ela também inclui o conjunto de conhecimentos e habilidades que utilizamos para manusear e interagir com essas ferramentas. Em virtude disto, é ressaltado que

> Ao conjunto de conhecimentos e princípios científicos que se aplicam ao planejamento, à construção e à utilização de um equipamento em um determinado tipo de atividade, chamamos de “tecnologia”. Para construir qualquer equipamento – uma caneta esferográfica ou um computador –, os homens precisam pesquisar, planejar e criar o produto, o serviço, o processo. Ao conjunto de tudo isso, chamamos de tecnologias. (Kenski, 2015b, p. 24).

Nessa perspectiva, a tecnologia transcende os produtos tangíveis, englobando também a compreensão dos processos, técnicas e métodos utilizados para maximizar seus recursos. Essa breve exploração propicia uma reflexão sobre como a tecnologia influencia e é influenciada pela sociedade, ampliando o debate e a compreensão da função desse conceito no progresso e no desenvolvimento humano em diversas áreas, especialmente na cultura.

Convém destacar que cultura "[...] é o conjunto de crenças, costumes, ideias e valores, bem como os artefatos, objetos e instrumentos materiais, que são adquiridos pelos indivíduos enquanto membros de um grupo ou sociedade" (Thompson, 2009, p. 173). Ela representa a maneira como uma sociedade vive e se comporta socialmente, denotando um fenômeno dinâmico que está sujeito a mudanças ao longo do tempo, com certas características sendo incorporadas e outras deixadas de lado. Nessa visão, as mudanças culturais, por sua vez, são influenciadas por diversos fatores, como contingências ambientais, consciência social e a invenção ou desenvolvimento de tecnologias.

Essa evolução tecnológica, caracterizada pela interconectividade global, tem impulsionado o progresso da sociedade, facilitando a disseminação do conhecimento e permitindo o desenvolvimento de novas formas de colaboração e criação coletiva. Desse modo, a *Internet* tornou-se um instrumento medular para democratizar o acesso à informação e promover a participação ativa das pessoas na produção e compartilhamento de conteúdo. Isso reforça a ideia da Sociedade em Rede, que, segundo Castells (2006, p. 17), refere-se a uma "[...] estrutura social baseada em redes operadas por tecnologias de comunicação e informação fundamentadas na microelectrónica e em redes digitais de computadores que geram, processam e distribuem informação a partir de conhecimento acumulado nos nós dessas redes".

É importante ressaltar que o termo digital é comumente utilizado para descrever algo que é processado ou armazenado em formato binário, utilizando os dígitos 0 e 1 para representar a presença ou ausência de eletricidade. Em outras palavras, trata-se de uma forma de representação de dados que emprega códigos binários para transmitir informações. Essa modalidade de representação está presente em diversas mídias contemporâneas, como computadores, celulares, televisores, cinema e jogos eletrônicos. Por outro lado,

> A codificação digital é o processo que faz com que as informações armazenadas em um computador (dados), produtos culturais (músicas, filmes, livros), as telecomunicações e os processos de transmissão de rádio e televisão, convirjam para o mesmo formato. A tecnologia convergente combina as capacidades tecnológicas que andavam separadas e anuncia que o telefone, o computador, a TV e o aparelho de som irão operar como uma única unidade, muito mais poderosa e com muito mais incidência nas nossas vidas

> do que poderíamos imaginar. A Internet é a materialização deste novo cenário, impulsionada pelo esforço de fabricantes, investidores, pesquisadores académicos, «hackers» e de políticas Governamentais. Antes do surgimento da rede das redes (a Internet), as comunicações tradicionais se dividiam em duas categorias: uma a um ou um-a-alguns (fax e telefone) e um-a-muitos (TV, rádio, jornal impresso e cinema). No novo ambiente, além das categorias anteriores, surge a possibilidade de comunicação do tipo muitos-a-muitos. [...] Surgem novas formas de relacionamento e novas comunidades não enraizadas geograficamente, novos produtores, novos distribuidores e novos consumidores posicionados na esfera global e não mais de forma local ou regional. Esta nova relação econômica, política e social — chamada de virtual — não tem cara e nem espaço, agora é parte da rotina de nossas vidas. Nossa vida no Ciberespaço. (Branco, 2006, p. 227-228)

Lévy (2021) destaca que o ciberespaço é o ambiente de comunicação que emerge da interconexão global de redes de computadores. Trata-se de um espaço virtual onde as pessoas podem se conectar e trocar informações independentemente de sua localização geográfica. “O termo especifica não apenas a infraestrutura material da comunicação digital, mas também o vasto universo de informações que ela abriga, assim como os seres humanos que navegam e alimentam esse universo” (Lévy, 2021, p. 17). Nesse sentido, ocorre em um espaço social que engloba tanto as redes sociais que estabelecem culturas locais dentro dele, quanto as redes técnicas que possibilitam essas conexões.

É importante destacar que “As tecnologias digitais surgiram, então, como a infraestrutura do ciberespaço, novo espaço de comunicação, de sociabilidade, de organização e de transação, mas também novo mercado da informação e do conhecimento” (Lévy, 2021, p. 32). Essas tecnologias representam uma forma específica de inovação, caracterizando-se pelo uso da lógica digital para processar e transmitir informações. Em decorrência disso, utilizam-se dispositivos eletrônicos relacionados à informática, como computadores, *notebooks*, *smartphones* e *tablets*. Esses equipamentos são compostos por *hardware* e *software*, que possibilitam a criação, o armazenamento, o processamento e o compartilhamento de informações de maneira rápida e eficiente.

Nesse contexto, a informática constitui a base técnica que possibilita a manipulação eficiente da informação, promovendo a rápida disseminação dos recursos digitais.

> Do ponto de vista do equipamento, a informática reúne técnicas que permitem digitalizar a informação (entrada), armazená-la (memória), tratá-la automaticamente, transportá-la e colocá-la à disposição de um usuário final, humano ou mecânico (saída). Estas distinções são conceituais. Os aparelhos ou componentes concretos quase sempre misturam diversas funções. (Lévy, 2021, p. 33)

Essas técnicas de informática são essenciais para a criação e operação de dispositivos e sistemas que sustentam a TD e suas aplicações em diversos campos, como comunicação, produção de conteúdo e processamento de dados. Essas práticas estão intrinsecamente ligadas ao mundo contemporâneo, impulsionado pelas amplas possibilidades da *Internet*, que tem reformulado a organização espaço-temporal da vida social, introduzindo novas dinâmicas de ação e interação.

> Um modelo digital não é lido ou interpretado como um texto clássico, ele geralmente é explorado de forma interativa. Contrariamente à maioria das descrições funcionais sobre o papel ou aos modelos reduzidos analógicos, o modelo informático é essencialmente plástico, dinâmico, dotado de uma certa autonomia de ação e reação (Lévy, 2023, p. 122).

Essa perspectiva é essencial para compreender como a *Internet*, como uma forma avançada de TD, disponibiliza uma ampla variedade de recursos virtuais. Por meio dela, os usuários se conectam em uma comunicação aberta e coletiva, estabelecendo interações muitos para muitos. Essa interação não apenas facilita a troca de ideias e experiências, mas também enriquece o ambiente virtual, permitindo que as pessoas criem e manipulem conteúdos digitais de maneira personalizada. Assim, os recursos digitais não apenas promovem a comunicação e a interação social, mas também geram novas formas de produção cultural, superando fronteiras e ampliando esferas culturais de maneira significativa.

Vale ressaltar que as culturas dos povos são continuamente moldadas pelo uso de tecnologias, que influenciam comportamentos, valores e modos de aprendizado. Um exemplo clássico é a televisão, que, ao longo das décadas, transformou hábitos familiares e impactou significativamente o comportamento social. Atualmente, observa-se um fenômeno semelhante com a introdução das TDI, que potencializam novas formas de interação e aprendizado na sociedade.

No contexto educacional, a interatividade é uma ferramenta essencial para enriquecer a experiência de aprendizagem, pois facilita a troca ativa entre usuários e conteúdos digitais, promovendo uma vivência dinâmica e envolvente. Conforme descrito por Lévy (2021), a interatividade refere-se à capacidade de um sistema ou ambiente de facilitar trocas mútuas. As TDI incluem recursos como *softwares* educacionais, plataformas de ensino *online* e multimídia (texto, áudio, vídeo e animações), que promovem comunicação e colaboração em tempo real entre estudantes e professores. Essas ferramentas digitais tornam o ambiente educacional mais flexível e centrado no estudante, permitindo uma adaptação às demandas contemporâneas da

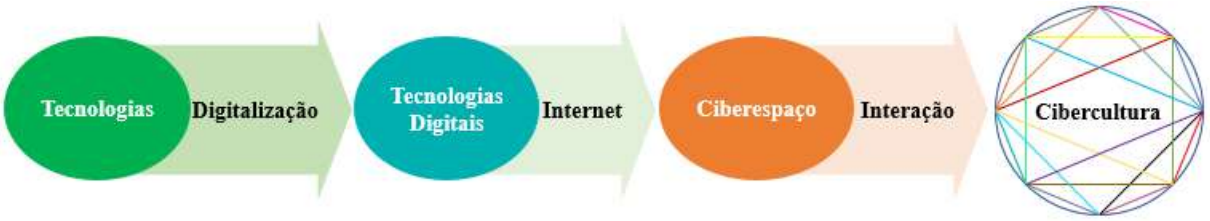
era digital, ao mesmo tempo, em que transformam papéis e abordagens pedagógicas convencionais.

Para Lévy (2017, p. 95), “[...] as instituições, as línguas, os sistemas de signos, as técnicas de comunicação, de representação e de registros informam profundamente nossas atividades cognitivas”. Isso implica que as TDI, ao se integrarem ao ambiente educacional, não apenas facilitam o aprendizado, mas também moldam a maneira como o ser humano pensa e constrói o conhecimento. Nesse âmbito, essas tecnologias podem transformar a aprendizagem em uma experiência mais prática, tornando conceitos abstratos mais acessíveis e promovendo uma compreensão abrangente por meio da prática interativa em cenários digitalizados.

Em meio a esse contexto, a cibercultura se destaca como um fenômeno gerador de mudanças, influenciando a maneira como as pessoas vivem, se relacionam e constroem sua identidade. As interações e experiências no ciberespaço são tão reais e impactantes quanto aquelas vivenciadas no espaço físico, evidenciando a importância e a relevância do ambiente virtual na vida cotidiana. Nesse sentido, a cibercultura abrange um conjunto de técnicas, práticas, atitudes, modos de pensamento e valores que se desenvolvem em paralelo ao crescimento do ciberespaço (Lévy, 2021). Assim, esse fenômeno está relacionado a um meio tecnológico avançado, que envolve interações complexas entre eventos históricos, humanos e computadores, desde os que se iniciaram na década de 1960 até os atuais. Essas interações são ampliadas por novas possibilidades, gerando ainda mais transformações.

O **Esquema 8** ilustra os procedimentos que demonstram a evolução das tecnologias até a cibercultura.

Esquema 8 – Esquema dos procedimentos para a cibercultura



Fonte: Pesquisador (2024).

Além disso, conforme Lévy (2021), a cibercultura representa uma universalidade sem totalidade, pois promove a conexão entre todos, ao mesmo tempo, em que abraça a diversidade que dissolve a noção de completude. Nesse sentido, a interação *online* desempenha um papel primordial na formação de uma vasta rede em constante expansão, na qual cada ponto de

conexão representa uma fonte de heterogeneidade e variedade de temas, significados e discussões em contínua renovação. Essas interconexões entre indivíduos e seus pontos de contato estabelecem redes colaborativas, tanto em dinâmicas sociais quanto em processos de aprendizagem cooperativa, transformando as redes em ferramentas que contribuem para a inteligência coletiva.

Essas novas formas de convivência e trabalho estão emergindo, impulsionadas pela digitalização e pelas oportunidades oferecidas pelo ciberespaço. No atual cenário de transformações sociais e culturais, é evidente o surgimento de um movimento inovador que introduz novos conceitos e padrões mais adequados à realidade emergente. Esse impacto da nova cultura expande as possibilidades existentes, resultando em um processo de renovação.

O campo educacional não permanece inerte diante dessas transformações. Muito do que foi praticado na educação até o momento não está alinhado com as demandas do novo âmbito sociocultural. As formas tradicionais de ensino, frequentemente criticadas por sua ineficácia, enfrentam ainda mais dificuldades com o surgimento de novas abordagens para conceber e conduzir os processos de ensino e aprendizagem, agora mediadas pelas novas tecnologias e metodologias. Assim, a cibercultura impõe desafios à educação, exigindo flexibilidade em termos de tempo e espaço para a aprendizagem.

De forma adicional, requer ambientes motivadores, ágeis, bem organizados e dinâmicos. Lévy (2021) ainda argumenta que o modelo tradicional de educação, com seus programas e cursos padronizados, não é mais adequado para atender às demandas da cibercultura. Ele propõe a construção de novos modelos de espaços de conhecimento que sejam emergentes, abertos, contínuos, em fluxo e não lineares. Cada indivíduo ocuparia uma posição singular e evolutiva nesses espaços, em vez de seguir uma trajetória linear e pré-definida.

Nessa conjuntura, Lévy (2021) propõe duas diretrizes para a reforma dos sistemas educacionais. A primeira diretriz é a adoção do ensino aberto e a distância, explorando as técnicas pedagógicas oferecidas pelas hipermídias, redes de comunicação interativas e outras tecnologias da cibercultura. Essa abordagem favorece aprendizagens personalizadas e coletivas em rede, na qual o professor atua como um facilitador da inteligência coletiva do grupo de estudantes, em vez de ser um mero transmissor de conhecimento. A segunda diretriz proposta pelo autor mencionado refere-se ao reconhecimento das experiências adquiridas pelos indivíduos. Ele argumenta que, à medida que as pessoas aprendem por meio de suas atividades sociais e profissionais, as instituições educacionais devem orientar os percursos individuais de conhecimento e reconhecer os conjuntos de saberes que pertencem a cada pessoa.

Lévy (2017, 2021) destaca a importância de mapear o espaço do saber de uma comunidade, criando uma árvore do conhecimento que represente visualmente os diferentes domínios do saber e suas interconexões. Ele ressalta que a visibilidade dos saberes e a precisão dos mapas podem contribuir para o desenvolvimento do pensamento crítico, da análise racional e do método experimental. Nesse sentido, a aprendizagem no contexto da cibercultura vai além da sala de aula tradicional, expandindo-se para ambientes digitais, onde os estudantes podem acessar uma vasta gama de recursos, interagir de maneira colaborativa com colegas e professores, e explorar diferentes formas de conhecimento. Assim, a TD se torna uma aliada no processo de ensino e aprendizagem, fornecendo ferramentas e recursos que potencializam a construção do conhecimento de forma mais dinâmica.

No entanto, é importante ressaltar que a incorporação das tecnologias na educação não significa simplesmente substituir os métodos tradicionais. Trata-se de uma reconfiguração que envolve repensar os papéis de professores e estudantes, explorar novas abordagens pedagógicas e adaptar os currículos para incluir habilidades digitais essenciais. Diante dessas reflexões, é relevante que os professores estejam abertos a novas práticas para utilizar efetivamente as TD nos ambientes de aprendizagem. O propósito é promover uma educação digital que esteja em sintonia com as demandas da cibercultura, aproveitando as oportunidades oferecidas pelas tecnologias contemporâneas.

Isso demanda uma reavaliação das práticas educacionais, abandonando métodos tradicionais e uniformizados, em favor de abordagens mais flexíveis e personalizadas. Em vista disso, é fundamental incorporar as novas TD direcionadas para o processo de ensino e aprendizagem, com o intuito de qualificar a construção do conhecimento, facilitar o acesso a uma variedade de informações, promover a colaboração e a troca de saberes, além de alinhar a educação às necessidades da sociedade contemporânea.

Para compreender melhor a inclusão da cultura digital no cenário educacional, o próximo tópico explora o movimento histórico-cultural da formação do pensamento geométrico no contexto da Educação Matemática.

1.3 O Pensamento Geométrico no Contexto da Educação Matemática

As ciências exatas têm suas raízes nos primeiros pensamentos matemáticos registrados na Pré-História, emergindo das ações práticas de sobrevivência e evoluindo em paralelo com o desenvolvimento das civilizações. Nesse contexto, o saber matemático se destaca não apenas

como uma necessidade essencial para a resolução de problemas abstratos, mas também como um sistema de pensamento que oferece caminhos para descrever, analisar e compreender o mundo, apresentando uma variedade de características específicas. Nesse sentido, a Matemática pode ser compreendida sob diferentes perspectivas: como ciência, área de conhecimento e componente curricular.

De acordo com o *Programme for International Student Assessment* (Pisa[3], 2022), a Matemática é uma ciência dedicada ao estudo de objetos e conceitos bem definidos, que podem ser examinados e modificados por meio do raciocínio matemático, a fim de alcançar conclusões precisas e invariáveis ao longo do tempo. Como uma ciência exata, ela se concentra na investigação de padrões, estruturas e relações abstratas, utilizando o pensamento lógico para formular teoremas, resolver problemas e aplicar seus próprios princípios, axiomas e métodos de prova. Seu objetivo é compreender e descrever fenômenos quantitativos e qualitativos de maneira rigorosa e sistemática.

A Matemática, como área de conhecimento, abrange uma vasta gama de campos, como Álgebra, Cálculo, Estatística, Geometria, Probabilidade e Trigonometria. Cada um desses ramos não apenas desenvolve suas próprias técnicas, conceitos e aplicações específicas, mas também desempenha um papel primordial na construção de teorias e na resolução de problemas complexos em diversos domínios do saber (Brasil, 1997). Essa diversidade e profundidade não apenas evidenciam a centralidade do pensamento matemático para enfrentar desafios dentro de sua esfera de atuação, mas também promovem avanços significativos em outras áreas do conhecimento.

Além disso, a Matemática é formalizada como uma disciplina educacional presente nos currículos escolares e universitários. Ensinada desde os primeiros anos de escolaridade até o ensino superior, a Matemática, como componente curricular, tem como propósito desenvolver habilidades básicas, raciocínio lógico, resolução de problemas e a aplicação prática do conhecimento matemático em diferentes contextos. Ao longo desse processo educacional, os conteúdos matemáticos tornam-se progressivamente mais complexos e aprofundados, promovendo o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes para enfrentar desafios tanto acadêmicos quanto práticos (D'Ambrosio, 1993).

Para D'Ambrosio (1993), a essencialidade e a onipresença da Matemática são fundamentais para a formação do pensamento moderno. Segundo ele, esse conhecimento exerce

[3] Programa Internacional de Avaliação de Estudantes. Disponível em: https://pisa2022-maths.oecd.org/pt/index.html#Whats-New. Acesso em: 25 jun. 2024.

um impacto abrangente e crescente em diversos campos do saber e na vida cotidiana. Em decorrência disso, o pensamento matemático permeia o sistema educacional e o contexto histórico-cultural da sociedade, integrando-se de forma natural a diversas áreas do conhecimento. Essa integração destaca a importância da Educação Matemática, que se dedica ao ensino e à aprendizagem dos conceitos matemáticos, não apenas no ambiente escolar, mas também em sua aplicação prática nas ciências não exatas.

Vale ressaltar que a preocupação com o ensino do conhecimento matemático remonta à Antiguidade, mas é após as Revoluções Industrial, Americana e Francesa que a Educação Matemática começa a se delinear como uma área específica. A formação dessa subárea da educação contou com contribuições significativas de importantes figuras da Matemática e da Psicologia, entre outras disciplinas. John Dewey, destacado por Miguel *et al*. (2004), foi um dos primeiros a abordar explicitamente a Educação Matemática, defendendo a cooperação entre professor e estudante, bem como a integração entre as disciplinas.

Conforme Miguel *et al*. (2004), foi o matemático alemão Félix Klein quem contribuiu significativamente para a constituição da Educação Matemática como disciplina. Em seu livro publicado em 1908, ele defendeu a importância de considerar as questões psicológicas e a diplomacia no ensino, com o direcionamento de despertar o interesse dos estudantes. Nesse mesmo ano, sob sua liderança, foi criada a *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI), um evento que consolidou a Educação Matemática como uma subárea interdisciplinar da Matemática e da Educação.

Entretanto, o grande desenvolvimento da Educação Matemática ocorreu após a Segunda Guerra Mundial, impulsionado por ideias de renovação curricular fundamentadas em teorias cognitivistas de psicólogos como Burrhus Skinner, David Ausubel, Howard Gardner, Jean Piaget, Jerome Bruner e Lev Vygotsky, entre outros (Miguel *et al*., 2004). As proposições teóricas e práticas desses autores, aliadas ao entendimento de como o cérebro funciona e se desenvolve ao longo da infância e adolescência, constituem argumentos centrais para a renovação dos discursos e práticas educacionais. A disseminação dessas teorias marcou uma mudança expressiva na pesquisa em Educação Matemática, resultando em uma crescente aceitação e validação de abordagens qualitativas, que respondem de maneira mais eficaz às inovações curriculares.

No Brasil, a Educação Matemática tem suas origens em debates que remontam à década de 1950 e se consolida na década de 1980, quando matemáticos começaram a investigar maneiras de transformar a realidade crítica do ensino de Matemática predominante na época.

Sua formalização ocorreu com a fundação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (Sbem) em 1988, marcando um importante marco na legitimação desse movimento como um campo de pesquisa dentro da Educação, em contraste com a Matemática pura. Essa escolha terminológica, que adota ‘Educação Matemática’ em vez de ‘Didática das Matemáticas’, preferida por autores de língua alemã, francesa e espanhola, reflete a filiação e a interseção contínua com a Educação como um todo.

Autores como Fiorentini e Lorenzato (2007), Kilpatrick (1996), Bicudo (1993), D’Ambrosio (1993) e Carvalho (1991) convergem na visão de que a Educação Matemática é uma área multidisciplinar, voltada para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, envolvendo tanto o domínio do conteúdo específico quanto a compreensão de ideias e processos pedagógicos. Carvalho (1991) define a Educação Matemática como o estudo dos fatores que influenciam os processos de ensino e aprendizagem em Matemática, ressaltando a importância de preservar a especificidade do saber matemático, mesmo ao integrar contribuições de outras áreas.

D’Ambrosio (1993) destaca que a Educação Matemática vai além do ensino de conceitos matemáticos, posicionando-se como um ramo independente dentro da Educação. No entanto, foi durante o I Seminário Internacional de Educação Matemática (Siem), realizado no Estado do Rio de Janeiro em 1993, que essa subárea foi oficialmente definida como um fenômeno autônomo de conhecimento, com objeto de estudo e pesquisa interdisciplinar. Essa definição abrange tanto a produção quanto a aquisição do saber matemático, incluindo a prática pedagógica e outras práticas sociais.

Bicudo (1993) complementa essa perspectiva ao afirmar que a pesquisa em Educação Matemática não se restringe à Matemática ou à Educação de forma isolada, mas se situa na interseção entre ambas, com o propósito de compreender, praticar e interpretar os significados sociais, culturais e históricos da Matemática. Kilpatrick (1996), por sua vez, caracteriza a Educação Matemática como um campo tanto profissional quanto científico, enfatizando a importância da aplicação do conhecimento especializado para apoiar estudantes e professores. Ele também ressalta a formação de professores como uma função essencial dentro dessa subárea.

Diversas áreas do conhecimento, como Filosofia, Pedagogia e Psicologia, têm contribuído para o desenvolvimento da Educação Matemática. Uma das principais finalidades dessa subárea é proporcionar uma base científica sólida aos agentes educacionais, permitindo-lhes desenvolver métodos de ensino e aprendizagem eficazes, além de estruturar planos

pedagógicos e currículos que estimulem as potencialidades dos indivíduos, sejam eles crianças, adolescentes ou adultos.

A Educação Matemática, fundamentada na concepção construtivista, redefine o papel do ensino ao priorizar o aprendizado ativo. Essa abordagem reconhece que o conhecimento não é meramente transmitido, mas construído pelo próprio indivíduo por meio de interações significativas com o ambiente. Esse movimento histórico e cultural implica uma transformação profunda nos processos educacionais, na qual os professores construtivistas assumem um papel relevante ao estimular a ação dos estudantes na busca pelo entendimento. Como consequência, o estudante se envolve ativamente na experiência, elaborando suas próprias percepções e compreensões, rompendo com a rigidez da didática tradicional centrada na transmissão passiva de conhecimento.

Nesse sentido, o foco da Educação Matemática está relacionado à promoção de uma compreensão reflexiva e crítica dos princípios matemáticos, incluindo as ações humanas e suas relações interpessoais e culturais. Dessa forma, essa subárea busca identificar abordagens pedagógicas inovadoras, visando contextualizar o aprendizado e torná-lo mais relevante para os estudantes. Isso abrange não apenas propostas formativas para os agentes educacionais, mas também adaptações aos diferentes cenários educacionais, sejam eles presenciais, virtuais ou híbridos, garantindo que o ensino da Matemática seja dinâmico e acessível.

Fiorentini e Lorenzato (2007) destacam dois objetivos principais da pesquisa em Educação Matemática: o pragmático, que visa aprimorar o ensino e a aprendizagem da Matemática, e o científico, que busca desenvolver o campo por meio da investigação, produção e divulgação de conhecimentos. Essa dualidade evidencia a complexidade e a amplitude da Educação Matemática como subárea de estudo e prática educativa, enfatizando a necessidade de ir além da simples resolução mecânica de problemas, promovendo o pensamento reflexivo e crítico, a criatividade e a argumentação lógica, que são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático.

Esses objetivos aproximam a Educação Matemática das teorias psicológicas, especialmente ao enfatizar as condições cognitivas que influenciam os caminhos para a assimilação dos conhecimentos matemáticos, deslocando o foco das pesquisas para o processo de ensino e aprendizagem. Isso resulta em novas concepções e abordagens de ensino que não apenas consideram os processos educacionais convencionais, mas também integram essas influências em contextos mais amplos, como a cultura digital e outras práticas sociais fora do ambiente escolar.

As abordagens mencionadas podem priorizar a investigação dos processos cognitivos envolvidos na interação dos estudantes com diferentes relações matemáticas, incluindo as dimensões do pensamento matemático: aritmética, geométrica, algébrica e estatístico-probabilística. Assim, em vez de se limitar ao estudo dos conteúdos matemáticos, o foco deve estar em compreender como os estudantes pensam e aplicam esses conceitos. Ao considerar essas dimensões na Educação Matemática contemporânea, ressalta-se a importância de os professores acompanharem o desenvolvimento de significados, conceitos e procedimentos matemáticos realizados pelos estudantes. Isso implica ajudá-los a desenvolver habilidades de raciocínio matemático que sejam aplicáveis em diversos contextos.

Enfatiza-se, ainda, a necessidade de promover a compreensão das relações matemáticas não apenas na perspectiva intuitiva, mas também na analítica. Conforme descrito por Bruner (2015), o pensamento intuitivo ocorre quando um indivíduo, após trabalhar longamente em um problema, encontra uma solução repentina que requer uma prova formal. Esse autor destaca que o pensamento analítico, por sua vez, caracteriza-se por um progresso metódico e consciente, no qual cada etapa é explicitamente delineada e pode ser comunicada a outros.

Segundo Bruner (2015), o pensamento analítico é primordial para estruturar o ensino de maneira que os estudantes possam construir conhecimento de forma sequencial e lógica. Nessa perspectiva, os estudantes são incentivados a desenvolver investigações, formular hipóteses, coletar dados, realizar análises e, finalmente, chegar a soluções bem fundamentadas. Para o autor, ao estimular os estudantes a raciocinar de forma cuidadosa e dedutiva, utilizando métodos explícitos e bem definidos, promove-se não apenas a resolução de problemas, mas também a compreensão das inter-relações e das justificativas subjacentes às soluções encontradas. Esse processo pode não apenas aprimorar as habilidades específicas planejadas, mas também reforçar outras competências, contribuindo para o desenvolvimento das dimensões do pensamento matemático.

É importante ressaltar que as dimensões do pensamento matemático são inter-relacionadas, contribuindo para uma compreensão mais holística dos componentes curriculares de Matemática. No entanto, devido à sua abrangência, este estudo se limita a explorar alguns caminhos específicos relacionados às implicações do pensamento geométrico nos currículos educacionais, com ênfase nas contribuições de autores como Fainguelernt (1999), Pais (1996), Lorenzato (1995), Van Hiele (1986), entre outros.

Vale ressaltar que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática enfatizam a importância dos conceitos geométricos no currículo escolar. Sob essa ótica, é

destacado que, por meio do estudo da Geometria, os estudantes desenvolvem um tipo especial de raciocínio que lhes permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vivem (Brasil, 1997). No que diz respeito aos conhecimentos geométricos a serem abordados durante a Educação Básica, atual BNCC sugere que o ensino geométrico envolva:

> [...] o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, o estudo da posição e deslocamentos no espaço e o das formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria [...]. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência. (Brasil, 2018, p. 227)

Essa recomendação ressalta a importância da maturação do pensamento geométrico entre os estudantes. Esse tipo de pensamento vai além da mera memorização de fórmulas ou da identificação de figuras; envolve a compreensão e a aplicação prática e criativa dos conceitos. Ao explorar a posição e os deslocamentos no espaço, bem como as formas e as relações entre os elementos das figuras, os estudantes são desafiados a pensar de maneira abstrata e a estabelecer conexões entre diferentes conceitos geométricos. Isso pode fortalecer as habilidades matemáticas, estimular o raciocínio lógico e promover a capacidade de resolver problemas de forma eficiente.

Ao destacar a construção, representação e interdependência dos conceitos geométricos, a BNCC (Brasil, 2018) orienta o ensino para uma abordagem prática e reflexiva. Dessa forma, os estudantes são incentivados a criar, explorar, experimentar, verificar e, principalmente, a pensar de forma crítica, comunicando suas ideias de maneira convincente. Essa abordagem visa o desenvolvimento de habilidades técnicas e a formação de um pensamento autônomo, resultando na capacidade de aplicar os conhecimentos em situações do cotidiano.

Vale ressaltar que a interdependência refere-se à maneira como diferentes conceitos geométricos não são aprendidos de forma isolada, mas sim em conexão uns com os outros. Por exemplo, ao construir uma figura geométrica, os estudantes utilizam suas percepções sensoriais e representam essas figuras graficamente. Essa interação contínua entre percepção, construção e representação pode facilitar uma compreensão mais profunda e integrada do conhecimento geométrico, promovendo também a concepção. Essa integração não apenas favorece a transição

entre diferentes níveis de complexidade, mas também enriquece o aprendizado ao conectar experiências práticas com conceitos abstratos, promovendo um desenvolvimento cognitivo mais completo.

No entanto, conforme apontam Santos e Nacarato (2021), a realidade do ensino geométrico nas escolas ainda enfrenta desafios significativos. Diversos fatores têm contribuído para um processo de ensino geométrico insatisfatório, resultando no abandono desse conteúdo em muitas instituições. Segundo as autoras mencionadas, na Educação Básica, os conteúdos geométricos são frequentemente deixados para o final do ano letivo devido à insegurança dos professores em abordar o tema. Em outros casos, o conteúdo é tratado de maneira superficial, o que impede o desenvolvimento adequado do pensamento geométrico dos estudantes.

> É interessante observar que distintas são as razões utilizadas pelos professores para justificar a ausência do estudo da Geometria nos diferentes graus "porque não sei", "porque não dá tempo", "porque os alunos preferem trabalhar com números", "porque os problemas são de contas", etc. No entanto, nenhuma razão tenta colocar em dúvida os méritos próprios da Geometria. Talvez, o maior de todos eles seja o fato da Geometria exigir do aluno uma maneira específica de raciocinar; isso quer dizer que ser bom conhecedor de Aritmética ou de Álgebra não é suficiente para resolver problemas de Geometria. (Lorenzato, 1995, p. 5)

Além disso, muitos dos atuais docentes foram influenciados pelo Movimento da Matemática Moderna (MMM), o que dificultou ainda mais a compreensão dos conceitos geométricos (Santos; Nacarato, 2021). Na década de 1960, a introdução desse movimento no Brasil trouxe mudanças significativas no ensino de Matemática. Essa inclusão representou uma alternativa ao ensino tradicional, criticado por sua ênfase na memorização e na aplicação mecânica de fórmulas e cálculos. Como resultado, o ensino geométrico começou a ser relegado a segundo plano. O movimento mencionado priorizava o estudo da Teoria dos Conjuntos e da Álgebra Abstrata em detrimento da Geometria, reduzindo os conteúdos geométricos nos currículos escolares e integrando a Aritmética, a Álgebra e a Geometria por meio de abordagens modernas, como a linguagem dos conjuntos e estruturas algébricas, o que acabou por negligenciar a aprendizagem geométrica.

Câmara dos Santos (2009) sintetiza as mudanças no ensino geométrico ao longo do tempo, destacando dois grandes posicionamentos que refletem diferentes abordagens em relação aos objetos geométricos. Até a primeira metade do século XX, a Geometria era predominantemente vista como um instrumento para descrever o mundo real ou sensível. Sob essa perspectiva, os objetos geométricos eram idealizados com base em observações do mundo

físico, como exemplificado pelos critérios de congruência de triângulos propostos por Euclides, onde dois triângulos são considerados congruentes se puderem ser sobrepostos diretamente.

Com o advento do MMM, a Geometria passou a assumir um novo papel no sistema educacional brasileiro. Ela foi reconceituada como um modelo teórico dentro da Matemática, capaz de representar idealizações que podem ser aplicadas em cenários reais. Nessa nova perspectiva, os objetos geométricos se afastaram das descrições do mundo físico e passaram a ser considerados entidades ideais, cuja função principal é representar conceitos abstratos e universais. Em virtude disso, em vez de apenas descrever as propriedades das figuras geométricas observáveis, os estudantes são desafiados a raciocinar sobre suas propriedades abstratas e a deduzir teoremas por meio da lógica matemática. Essa evolução indicou uma transformação no *status* das figuras geométricas, que deixam de ser meros objetos descritivos para se tornarem entidades matemáticas que sustentam a estrutura teórica do conhecimento geométrico, promovendo um ensino mais abstrato e conceitual da disciplina.

A visualização também desempenha um papel fundamental nesse processo, pois permite que os indivíduos criem representações mentais das formas geométricas observadas. Com base na análise das definições de visualização, entende-se que essa habilidade está diretamente relacionada à capacidade de formar um esquema mental que representa informações visuais ou espaciais, facilitando, assim, a compreensão de representações de objetos matemáticos e promovendo o pensamento matemático (Borba; Gadanidis; Silva, 2020). A visuabilidade abrange não apenas a geração e manipulação de imagens mentais, mas também a retenção das modificações realizadas. Nesse sentido, visualizar é um processo dinâmico que envolve a criação, interpretação e registro de ideias e imagens. Essa atividade pode desencadear novas concepções, integrando-se a diversos aspectos do fazer-geométrico, como intuição, criação, abstração, formalização e comunicação.

Fainguelernt (1999) complementa essa ideia ao afirmar que a imaginação interna, ligada à mente, pode ser equiparada à imaginação externa, que está relacionada à representação. Isso implica que a aquisição de conhecimento matemático requer a capacidade de mudar de perspectiva, associar e construir novas ideias a partir da visualização e percepção dos dados geométricos. Em decorrência disso, o citado autor afirma que “[...] aprender e compreender matemática significa ter a capacidade de trabalhar com diferentes representações de uma mesma ideia, realizando conexões entre elas e sabendo identificar bem as restrições” (p. 59).

A visualização, portanto, não apenas facilita a habilidade de pensar matematicamente, especialmente na construção do raciocínio geométrico, mas também desempenha um papel

primordial na produção de significados e na aprendizagem (Gadanidis; Borba; Silva, 2020). Em vista disso, é essencial que os estudantes não apenas percebam as figuras como um todo, mas também compreendam suas relações e propriedades, operando com essas relações em diversas situações para avançar no pensamento geométrico.

Pais (1996) também apresenta uma perspectiva abrangente sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico. Ele identifica três dimensões fundamentais do conhecimento geométrico: a intuitiva, a experimental e a teórica. Segundo o autor mencionado, para desenvolver o conhecimento teórico geométrico nos estudantes, é essencial que os professores integrem tanto as questões intuitivas quanto as atividades experimentais em seu ensino. O autor enfatiza que, para construir um conhecimento geométrico sólido, é essencial que os professores considerem esses dois aspectos. A combinação desses elementos – objeto, desenho, imagem mental e conceito – possibilita que os estudantes desenvolvam uma compreensão abrangente e integrada da Geometria.

Nessa conjuntura, apesar de algumas críticas direcionadas aplicação limitada ao ensino formal, o modelo de Van Hiele (1986) se apresenta como um guia para a avaliação das habilidades dos estudantes em Geometria, delineando cinco níveis de compreensão que elucidam as características do processo de pensamento dos estudantes. Os níveis do modelo variam desde a visualização e reconhecimento, passando pela análise, dedução informal e formal, até culminar no rigor.

Esses níveis indicam que os estudantes em uma única turma podem estar em diferentes estágios de desenvolvimento do pensamento geométrico e, frequentemente, utilizam terminologias e objetos que diferem das palavras e formas apresentadas pelos professores e nos livros didáticos. Esse descompasso entre os níveis de compreensão dos estudantes e a abordagem didática pode levar a uma assimilação superficial e temporária do conteúdo, conforme observado por Van Hiele (1986).

Além dos níveis de pensamento, o modelo de Van Hiele (1986) também apresenta cinco fases metodológicas que possibilitam o desenvolvimento cognitivo do estudante em cada um dos níveis. A implementação dessas fases de forma sequencial favorece a aquisição de um nível de pensamento em tópicos específicos de Geometria. Para cada conceito geométrico, o estudante deve passar por essas fases para desenvolver os cinco níveis de pensamento. No entanto, o professor pode adaptar a sequência conforme necessário para atingir as metas de aprendizagem desejadas.

Conforme descrito no **Quadro 7**, os níveis e fases do modelo de Van Hiele (1986) destacam tanto as ações dos estudantes quanto às intervenções que os professores devem realizar para promover o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Quadro 7 – Uma Concepção do Modelo de Van Hiele (1986)

Níveis do Pensamento Geométrico	Ações dos Estudantes	Fases de Aprendizagem	Ações do Professor
Nível 0 Visualização ou Reconhecimento	Raciocinar por meio de considerações visuais; Reconhecer figuras pela sua aparência global, sem explicitar as propriedades; Aprender vocabulário geométrico e identificar formas específicas.	Fase 1 Questionamento ou Informação	Estabelecer um diálogo professor-estudante sobre o conceito em estudo; Apresentar observações, levanta questões e introduz o vocabulário específico do nível; Identificar os conhecimentos prévios dos estudantes e orientar a direção dos estudos.
Nível 1 Análise	Analisar informalmente as partes e os atributos das figuras geométricas; Discernir as características e estabelecer propriedades é fundamental, mas não se explicitam as inter-relações entre figuras ou propriedades.	Fase 2 Orientação Direta	Selecionar cuidadosamente materiais que possibilitem aos estudantes explorar o conceito em estudo; Produzir atividades com tarefas objetivas e específicas que ajudem os estudantes a se familiarizarem com as características cognitivas do nível; Guiar a exploração dos estudantes.
Nível 2 Dedução Informal ou Ordenação	Formam definições abstratas e estabelecem inter-relações entre as propriedades das figuras; Reconhecem classes de figuras e entendem a inclusão ou interseção dessas classes, mas não compreendem a dedução formal.	Fase 3 Explicitação	Observar se os estudantes aprimoram o uso do vocabulário com base em experiências anteriores, expressando verbalmente suas opiniões emergentes; Minimize sua intervenção, permitindo que os estudantes autônomos busquem estabelecer um sistema de relações sobre o conteúdo geométrico em estudo.
Nível 3 Dedução Formal	Desenvolvem sequências de afirmações dedutivas e compreendem a relevância dessas deduções; Raciocinam formalmente em sistemas matemáticos completos, construindo e compreendendo as demonstrações.	Fase 4 Orientação Livre	Apresentar tarefas de múltiplas etapas e abertas, que permitam diversas formas de resolução; Verificar se o estudante adquiriu experiência na busca de sua forma individual de resolver as tarefas; Promover a clareza nas relações entre os objetos de estudo, incentivando a descoberta e a autonomia do estudante.
Nível 4 Rigor	Entendem a estrutura de diversos sistemas dedutivos com precisão; Comparam-se sistemas baseados em diferentes axiomas e estudam-se várias geometrias sem modelos concretos, analisando a consistência, a independência e a completude dos axiomas.	Fase 5 Integração ou Fechamento	Auxiliar os estudantes na revisão e síntese do que foi estudado, com o objetivo de promover a integração global dos materiais didáticos, do conteúdo e das relações estabelecidas; Fornecer experiências e observações globais sem introduzir novas ideias, contribuindo para a unificação e a internalização do novo domínio de pensamento.

Fonte: Pesquisador (2024).

Esse modelo de Van Hiele (1986) integra uma teoria construtivista que pressupõe que os estudantes precisam adquirir, por meio de experiências de aprendizagem adequadas, às estratégias mentais dos níveis anteriores para avançar com sucesso para o próximo estágio, sem pular etapas. Costa e Santos (2020) destacam que, ao conhecer as características dos níveis de pensamento geométrico dos estudantes, os professores de Matemática podem organizar de maneira mais produtiva as atividades didáticas em sala de aula, garantindo uma aprendizagem mais eficaz. Em virtude disso, para promover esse desenvolvimento nos participantes envolvidos, recomenda-se utilizar as fases do ensino conforme as metas planejadas.

Segundo Van Hiele (1986), cada nível de pensamento geométrico possui características específicas, como um vocabulário próprio e diferentes relações com os objetos geométricos. Assim, na teoria vanhieliana, estudantes de ensino superior podem dominar processos dedutivos e demonstrações, que são características dos níveis mais avançados de pensamento geométrico. É importante ressaltar que diversos pesquisadores vêm adotando variações na enumeração dos níveis (de 1 a 5) e utilizando diferentes denominações para cada um deles. Algumas dessas adaptações estão incluindo subdivisões adicionais e contextualizações específicas, enriquecendo a aplicação do modelo mencionado em diferentes contextos educacionais. Nesse contexto de ramificações, recursos manipuláveis, tanto físicos quanto digitais, têm sido amplamente adotados.

Cabe enfatizar que nas últimas décadas, o ensino geométrico tem sido transformado pela inclusão de TD, especialmente por meio dos avanços nas interfaces gráficas dos computadores, que possibilitaram o desenvolvimento dos primeiros *softwares* de Geometria Dinâmica (GD), capazes de criar representações em movimento de conceitos geométricos (Borba, Scucuglia e Gadanidis, 2020). Esses recursos têm enriquecido o ensino de Geometria e estão alinhados às novas diretrizes curriculares, que buscam integrar a educação digital e promover uma abordagem mais moderna no cenário educacional.

Notare e Basso (2016) destacam um reconhecimento crescente, embora ainda incipiente, da importância da Geometria na formação do saber matemático na Educação Básica. Segundo os autores mencionados, esse leve avanço é impulsionado pela disponibilidade de novos recursos proporcionados pela GD, que potencializam a aprendizagem dos conhecimentos geométricos. Essa realidade é evidenciada em artigos, dissertações e teses disponíveis em repositórios digitais.

Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020) enfatizam o dinamismo desses recursos tecnológicos ao destacar a capacidade de manipular, combinar, visualizar e construir

virtualmente objetos geométricos, abrindo novas possibilidades para a investigação matemática. Segundo esses autores, essas ferramentas são essenciais para o construtivismo, no qual a aprendizagem é construída ativamente pelo estudante, promovendo a maturação do pensamento geométrico. Para eles, os *softwares* de GD permitem que os estudantes interajam diretamente com objetos matemáticos na tela do computador, facilitando o reconhecimento das propriedades invariáveis dessas construções geométricas. Além disso, funcionam como extensões do pensamento dos estudantes, oferecendo *feedback* imediato e estratégias de aprendizagem que não seriam viáveis apenas com papel e lápis.

Por exemplo, a importância da 'prova do arrastar', conforme destacado por Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020), reside em seu papel de distinguir entre simples desenhos e construções geométricas autênticas. Segundo os autores, se uma figura não consegue resistir à manipulação dinâmica sem perder suas propriedades invariantes fundamentais, ela não é considerada uma construção geométrica genuína. Essa distinção evidencia a capacidade dos *softwares* de GD de estabelecer claramente a diferença entre desenho e construção geométrica, promovendo um entendimento mais profundo e eficaz dos conceitos matemáticos, essenciais para a maturação do pensamento geométrico dos estudantes.

Notare e Basso (2016) observam que esses sistemas dinâmicos transformaram a abordagem dos problemas matemáticos, tornando acessíveis e manipuláveis objetos matemáticos que anteriormente eram tratados de maneira estática e abstrata. Assim, o uso de materiais manipulativos é enfatizado por eles como essencial para a construção de imagens mentais robustas, superando as limitações dos desenhos estáticos na exploração dos conceitos geométricos. Dessa forma, integrar as TD ao ensino da Geometria pode potencializar a maturação do pensamento geométrico, facilitando a transição entre diferentes tipos de representações e fortalecendo a capacidade de abstração espacial dos estudantes. No entanto, a mera inclusão da GD não resolverá o problema da aprendizagem geométrica.

Cabe ressaltar que os estudos de Costa e Santos (2020, 2018) indicam que estudantes de diferentes níveis escolares apresentam baixo desempenho em questões geométricas e conteúdos afins. Observa-se, no entanto, que a crescente disponibilidade de recursos e o reconhecimento não se traduzem necessariamente em uma transformação efetiva nas práticas de ensino em sala de aula. Costa e Santos (2020) destacam que o saber geométrico continua sendo abordado de forma tímida por muitos professores de Matemática. Para Lorenzato (1995, p. 3-4), "[...] o professor que não conhece Geometria também não conhece o poder, a beleza e a importância que ela possui para a formação do futuro cidadão, então, tudo indica que, para esses professores,

o dilema é tentar Geometria sem conhecê-la ou então não ensiná-la". Esse despreparo pode resultar em uma abordagem inadequada e superficial do conhecimento geométrico, comprometendo a plena maturação do pensamento geométrico dos estudantes.

Essa lacuna no saber geométrico também se reflete nos cursos de formação de professores. Costa e Santos (2020) descrevem que os estudantes de LM e os professores de Matemática da Educação Básica frequentemente cometem erros semelhantes em testes sobre quadriláteros, o que indica a presença de dificuldades conceituais persistentes. De acordo com a pesquisa de Costa e Santos (2018), quando o campo da Geometria é abordado nesses cursos, o foco costuma ser restrito às demonstrações de sistemas axiomáticos, negligenciando o desenvolvimento de habilidades pedagógicas essenciais. Por conseguinte, as autoras afirmam que a formação docente tende a priorizar o conhecimento teórico especializado em detrimento das práticas pedagógicas, que são essenciais para a maturação do pensamento geométrico.

De acordo com Costa e Santos (2020), diversos pesquisadores brasileiros têm investigado sistematicamente as razões subjacentes ao baixo desempenho dos estudantes em relação ao conhecimento geométrico e a forma como esse tema é abordado em sala de aula. Elas apontam que a Geometria é abordada de maneira insuficiente na Educação Básica e que muitos professores se sentem inseguros ao ensinar esse campo da Matemática. Isso ressalta a necessidade urgente de implementar práticas educacionais inovadoras que estejam alinhadas ao conhecimento geométrico, além de integrar essas abordagens nos modelos de formação docente, visando melhorar a qualidade do ensino e a aprendizagem desse citado campo.

Até o momento, foram apresentadas a formação de professores, entendida como um processo formativo, as TD, enquanto ferramentas educacionais, e o pensamento geométrico, como uma prática cognitiva, sob uma perspectiva de inter-relação no processo de ensino e aprendizagem. Essas práticas e elementos não existem isoladamente, mas se entrelaçam dentro de um sistema de atividade, no qual as ferramentas e os sujeitos (professores e estudantes) interagem de maneira organizada para alcançar objetivos educacionais. Para compreender melhor essa dinâmica, a TA é explorada no próximo tópico.

1.4 Teoria da Atividade

O ser humano está em constante transformação, adaptando-se e modificando seus modos de vida e costumes de acordo com suas necessidades, o que possibilita seu desenvolvimento existencial. Essa capacidade de agir sobre sua prática e seu ambiente pode ser

considerada uma evolução humana, promovendo o contínuo desenvolvimento histórico-cultural, uma vez que se torna algo específico e culturalmente partilhado.

Lev Vygotsky, com base em suas observações sobre a autoconstrução do ser humano ao longo dos períodos e inspirado por ideias marxistas e fenômenos psíquicos, desenvolveu a Teoria da Atividade Histórico-Cultural (TAHC), também conhecida como TA. Essa teoria permanece em aberto e propõe que, para cada etapa do processo de desenvolvimento humano, existe uma atividade medular que desperta a motivação para ações e amplia as estruturas psíquicas, reforçando a aquisição de novos conhecimentos.

A TA pode ser compreendida como uma estrutura teórica que busca entender a relação entre a mente humana (pensamentos e sentimentos) e a atividade prática (ações realizadas pelos homens). Ela é considerada um caminho interdisciplinar para estudar como os seres humanos transformam intencionalmente a realidade natural e social, incluindo a si mesmos, por meio de um processo contínuo, culturalmente situado e mediado material e socialmente. Ao longo das últimas décadas, essa teoria consolidou-se como um arcabouço teórico internacional aplicado ao estudo do trabalho e da atividade social em setores que vão desde a organização e gestão até a interação humano-computador, psicologia social e educação.

A amplitude dessas áreas científicas ressalta a abrangência e a relevância da TA em diferentes campos do conhecimento. Essa teoria proporciona uma abordagem ampla e interconectada para compreender como os seres humanos interagem com o mundo ao seu redor, moldam sua consciência e desenvolvem suas capacidades em um contexto social e cultural. Conforme Engeström (2016), a TA transcende a categorização como uma mera teoria psicológica, transformando-se em uma abordagem interdisciplinar de relevância significativa nas ciências sociais e humanas.

Engeström (2016) oferece um relato detalhado das diversas fontes filosóficas e psicológicas que alicerçam a TA. Ao longo dos anos seguintes, uma síntese simplificada desse trabalho, assim como de pesquisas de outros estudiosos, levou à compreensão de que existem três gerações distintas dessa teoria. A primeira geração baseia-se nos conceitos de Lev Vygotsky, focando na ação mediada e na perspectiva do indivíduo no contexto histórico e cultural. A segunda geração apoia-se nas ideias de Alexei Leontiev, relacionadas ao sistema de Atividade Humana. Por fim, a terceira geração fundamenta-se nas contribuições de Yrjö Engeström, que enfatiza os múltiplos sistemas de atividade desenvolvidos em diferentes contextos, promovendo a aprendizagem de forma compartilhada.

Essas três gerações da TA têm proporcionado valiosas inspirações para compreender como as atividades humanas são moldadas por contextos sociais e culturais, bem como como a expansão cognitiva e sociocultural ocorre por meio da interação entre indivíduos, comunidades e a cultura em que estão imersos. De forma adicional, há indícios do surgimento de uma quarta geração da TA; no entanto, essa possível eventualidade ainda não está consolidada no cenário educacional e não será abordada neste trabalho.

As gerações elencadas por Engeström (1987, 2016) estão intrinsecamente relacionadas, uma vez que a segunda e a terceira gerações fundamentam-se nas concepções vygotskianas. Além disso, a terceira geração também é influenciada por algumas proposições de Leontiev. A partir dessas fundamentações teóricas, diversas pesquisas têm contribuído para o aprofundamento dos conceitos e observações propostas por esses teóricos. Em decorrência disso, este tópico explora algumas contribuições desses autores, com ênfase no processo de ensino e aprendizagem. É importante ressaltar que investigações de diferentes áreas do conhecimento (Freitas, Libâneo, 2019; Munhoz, Moura, 2020; Medeiros, 2021) apresentam aspectos desses entrelaçamentos teóricos de maneira mais completa ou superficial.

Na abordagem vygotskiana, o sujeito é considerado ativo na reconstrução de seus conhecimentos por meio de suas interações. Nesse processo, surge a mediação, que se manifesta como uma ação humana que promove interações sociais históricas ou histórico-culturais. De acordo com Vygotsky (2019), o desenvolvimento cognitivo do sujeito ocorre por meio da interação social, ou seja, da interação com outros indivíduos e com o ambiente em que está inserido. Essa interação entre os sujeitos possibilita a produção de novas experiências e a ampliação dos conhecimentos. Em virtude disto, a aprendizagem é resultado da experiência social, mediada pela utilização de instrumentos e signos, assim como pela interação entre linguagem e ação.

A TA da primeira geração incorpora a ideia de mediação semiótica, presente no famoso modelo triangular de Vygotsky (2019), que é composto pela tríade sujeito, objeto e artefato mediador. Na ação mediada, essa tríade estabelece uma relação dialética em que cada elemento afeta o outro e a atividade como um todo. “O conceito de mediação e de relação triangular é visto como uma característica constituinte da atividade humana” (Engeström, 2016, p. 69).

Para compreender o conceito de mediação, é relevante considerar a perspectiva de Vygotsky (2019), que descreve atividades mediadas por signos e ferramentas. Os instrumentos psicológicos e físicos atuam de maneira complementar, ampliando a ação humana em direções distintas. Desse modo, as ferramentas possuem uma aplicação externa, provocando mudanças

no ambiente e na natureza; no entanto, ao realizar essa transformação, o ser humano também se transforma, conforme proposto nas ideias de Karl Marx e Friedrich Engels sobre o trabalho (Vygotsky, 2019). Por outro lado, os signos direcionam-se para as operações psicológicas, influenciando o comportamento interno. Ademais, os signos também são utilizados para influenciar o comportamento de outras pessoas, sendo a linguagem o sistema de signos mais essencial e determinante para o desenvolvimento cultural do indivíduo.

A conduta humana é caracterizada pela mediação proporcionada pelo uso da linguagem (e dos signos em geral) e das ferramentas. Essa mediação é o que nos distingue como seres humanos. Diferentemente dos animais, cuja relação com o meio é direta e não mediada, conforme ilustrado no **Esquema 9**, as respostas dos animais aos estímulos do ambiente ocorrem de maneira imediata e instintiva, sem envolver a utilização de signos ou ferramentas para influenciar seu comportamento.

Esquema 9 – Esquema da relação mediada de Vygotsky: modelo I

Fonte: Pesquisador reproduzindo a ideia de Vygotsky (2019).

Isso representa as condutas elementares, nas quais o estímulo (S) e a resposta (R) estão diretamente relacionados, caracterizando um comportamento instintivo. Por exemplo, quando um animal está com fome, ele buscará alimento e, ao encontrá-lo, saciará sua necessidade. Nesse caso, a comida é o estímulo e comer é a resposta. No entanto, no caso dos seres humanos, quando sentem fome e veem comida na vitrine de uma padaria, sabem que precisarão de dinheiro para adquiri-la. Nesse cenário, o estímulo (comida) não gera uma resposta imediata, mas sim uma resposta mediada pelas normas sociais da cultura e pela linguagem internalizada do indivíduo, que reflete sobre a possibilidade de comer ou não, o que comer e como obter a comida.

A conduta humana, ao considerar um indivíduo inserido em uma cultura, é frequentemente mediada. O pensamento é, em geral, mediado pela linguagem e por signos, enquanto as ações podem ser mediadas por instrumentos. Isso implica que os seres humanos utilizam símbolos, como a linguagem, para intermediar seus pensamentos e ações, além de recorrer a artefatos que auxiliam nas atividades cotidianas.

No contexto educacional, ao resolver um problema geométrico, um estudante pode utilizar uma régua e um compasso como instrumentos para realizar as construções necessárias.

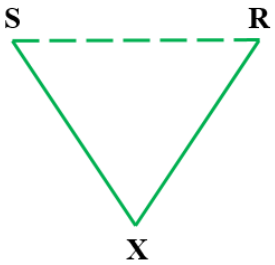
Esses instrumentos funcionam como mediadores, permitindo que ele execute as ações específicas exigidas pelo problema, como traçar linhas retas e círculos, garantindo maior precisão e eficiência na resolução.

Além disso, a linguagem desempenha um papel primordial na Geometria. Ao ler ou ouvir as instruções de um problema, o estudante compreende o que está sendo solicitado e, em seguida, formula suas estratégias e ações com base nessa compreensão mediada pela linguagem. Por meio desse processo comunicativo, o conhecimento geométrico é transmitido e compartilhado entre os indivíduos, permitindo que eles resolvam problemas de maneira mais eficiente.

Essa resolução do problema geométrico também pode ocorrer em um ambiente físico que foi completamente modificado pela intervenção humana, como uma sala de aula ou um laboratório de Matemática. Nessas configurações, os materiais e recursos são organizados de maneira a facilitar a aprendizagem e a aplicação dos conhecimentos geométricos, proporcionando um ambiente propício para a mediação das atividades dos estudantes. É importante notar que os exemplos de mediação em Geometria podem se estender a outras situações, como o uso de *softwares* de GD ou aplicativos educacionais que auxiliam no aprendizado e na prática da disciplina. Assim, a mediação está presente além do que o estudante pode perceber de forma consciente, influenciando e moldando a compreensão humana.

O **Esquema 10** representa a relação mediada — entre S e R, na qual um estímulo X é interposto — ilustrando a primeira geração da TA. Nessa ilustração, é possível observar que o elemento X, que representa o instrumento, é responsável por mediar esse vínculo. Em decorrência disso, a conexão original entre S e R, antes direta, passa a ser mediada pela inserção do X. O traço pontilhado simboliza essa mudança, indicando que a interação deixa de ser direta e passa a ser mediada pelo instrumento.

Esquema 10 – Esquema da relação mediada de Vygotsky: modelo II



Fonte: Pesquisador reproduzindo a figura de Vygotsky (2019).

Dessa forma, o uso de signos, segundo Vygotsky (2019), resulta em uma estrutura específica do comportamento humano, possibilitando a criação de novas formas de processos psicológicos de base cultural. Por isso, o contexto histórico-cultural é de extrema importância, uma vez que os indivíduos não podem ser compreendidos isoladamente do ambiente cultural em que estão inseridos, e a sociedade não pode ser entendida sem considerar a agência dos indivíduos que produzem e utilizam esses artefatos culturais. O mencionado teórico argumenta também que a relação entre um sujeito humano e um objeto nunca é direta, devendo ser buscada na sociedade e na cultura, que evoluem historicamente, em vez de ser explicada apenas pelo cérebro humano ou pela mente individual.

Nessa perspectiva, os objetos tornam-se entidades culturais, e a ação direcionada a esses objetos torna-se fundamental para compreender a psique humana. Em vista disto, a TA de primeira geração concentra-se principalmente no indivíduo como unidade de análise e tem sido utilizada para entender o comportamento individual, examinando como as ações orientadas de uma pessoa são mediadas culturalmente.

Em meio a esse contexto, destaca-se a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), um conceito essencial proposto por Vygotsky (2019), que se refere à diferença entre o que uma pessoa é capaz de realizar sozinha e o que ela pode alcançar com o auxílio de um mediador mais experiente, como um professor, colega ou adulto. Em outras palavras, a ZDP representa a distância entre o nível de desenvolvimento atual de um indivíduo e o nível de desenvolvimento que pode ser atingido com ajuda.

A ZDP destaca a importância das interações sociais e da mediação na aprendizagem e no desenvolvimento. Vygotsky (2019) acreditava que a aprendizagem não ocorre apenas dentro do indivíduo, mas também é imensamente influenciada pelo contexto social e cultural em que ele está inserido. Ele argumentava que a aprendizagem mais eficaz acontece quando uma pessoa é desafiada a realizar tarefas que estão além de seu nível atual de habilidade, mas que ainda são alcançáveis com orientação e apoio.

Convém ressaltar que o pensamento teórico enfatizado por Davidov (1988) está fundamentado na ideia central de Vygotsky (2019) de que a aprendizagem e o ensino são formas universais de desenvolvimento mental. Assim, o mencionado autor, ao expandir as concepções vygotskianas relacionadas à generalização e à formação de conceitos científicos, postula que o conteúdo da atividade de estudo dos estudantes é constituído pelo conhecimento teórico-científico e pelas habilidades intelectuais necessárias para investigar um objeto específico de conhecimento.

As ideias de Davidov (1988) alinham-se harmoniosamente com as de Leontiev, contribuindo para uma abordagem coesa na compreensão da Atividade Humana e sua relação com o desenvolvimento do pensamento. Embora Vygotsky (2019) tenha apresentado a atividade prática humana como a categoria explicativa geral da psicologia, a natureza precisa dessa atividade não foi totalmente esclarecida. A segunda geração da TA avança além do modelo individual, ampliando a unidade de análise para incluir a atividade coletivamente motivada em direção a um objeto.

Consequentemente, enquanto Vygotsky (2019) enfatiza a mediação entre indivíduos, destacando a relação entre um mediador (como um professor) e um aprendiz (um estudante), Leontiev (2018) amplia essa perspectiva ao incorporar as relações sociais e as normas de conduta, influenciadas por fatores culturais, econômicos e políticos no contexto da atividade. Essa ampliação possibilita a compreensão de como a ação coletiva, mediada por grupos sociais, influencia a atividade, evidenciando a importância das relações sociais e culturais na formação do pensamento e na apropriação do conhecimento.

> Não chamamos todos os processos de atividade. Por esse termo designamos apenas aqueles processos que, realizando as relações de homem com o mundo, satisfazem uma necessidade especial correspondente a ele. [...]. Por atividade, designamos os processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objetivo que estimula o sujeito a executar esta atividade, isto é, o motivo. [...] Distinguimos o processo que chamamos de ação da atividade. Um ato ou ação é um processo cujo motivo não coincide com seu objetivo, (isto é, com aquilo para o qual ele se dirige), mas reside na atividade da qual ele faz parte. [...] porque o objetivo de uma ação, por si mesma, não estimula a agir. Para que a ação surja e seja executada é necessário que seu objetivo apareça para o sujeito, em sua relação com o motivo da atividade da qual ele faz parte. [...] o objeto de uma ação é, por conseguinte, nada mais que seu alvo direto reconhecido. (Leontiev, 2016, p. 68-69)

Essa afirmação revela que a atividade é percebida como a maneira pela qual os sujeitos se relacionam com os objetos, evidenciando a existência de uma triangulação entre sujeito, atividade e objeto. É importante ressaltar que as atividades podem variar entre si, uma vez que dependem da forma ou método de realização, os quais são diferenciados pelo tempo, espaço e diversas outras variáveis que influenciam seu contexto de aplicação. Em virtude disso, o principal aspecto que distingue uma atividade da outra é a diferenciação entre seus objetos. Nesse sentido, utilizou-se Moura (2000) para indicar que essas atividades podem ser construídas como Atividades de Ensino. Nessa perspectiva, a

> [...] atividade é regida por uma necessidade que permite o estabelecimento de metas bem definidas. O estabelecimento de objetivos, por sua vez, permitirá a criação de estratégias para se chegar a cumprir as metas. É aí que aparece o conjunto de ações necessárias para levar a bom termo os objetivos a serem alcançados. Estas ações devem fazer parte de um plano no qual se inclui o uso de instrumentos, sejam eles simbólicos ou não, que servirão como auxiliares para a execução das ações (Moura, 2000, p. 24).

Nessa perspectiva, a Atividade Humana é orientada por necessidades que levam ao estabelecimento de metas, as quais, por sua vez, conduzem à formulação de estratégias. Essas estratégias são implementadas por meio de um plano de ação que envolve uma série de ações coordenadas e planejadas, apoiadas pelo uso de instrumentos, sejam eles físicos ou simbólicos. Esse processo complexo de atividade é uma parte fundamental da forma como indivíduos e grupos alcançam seus objetivos e realizam tarefas específicas.

Para compreender a estrutura da Atividade Humana, Leontiev (2018) destacou a importância da análise de seus componentes: ações e operações. Enquanto a atividade é identificada pelo objeto ou motivo que a impulsiona, as ações são definidas por seus objetivos ou metas, e as operações são determinadas pelas condições instrumentais necessárias para sua execução.

O **Quadro 8** apresenta, de forma esquemática, essa estrutura.

Quadro 8 – Estrutura da Atividade Humana segundo Leontiev

Atividade	Refere-se a qualquer ação ou série de ações empreendidas por um indivíduo ou grupo para alcançar um objetivo específico. É um conjunto de ações organizadas e relacionadas entre si, que podem ser desenvolvidas em diferentes contextos sociais e culturais.	**Motivo/Objeto**	Representa a razão ou propósito que impulsiona a atividade. É o motivo pelo qual a atividade está sendo realizada, o objetivo que se pretende alcançar por meio das ações empreendidas.
Ações	São as sequências de passos ou comportamentos específicos que constituem a atividade. As ações são direcionadas para cumprir o motivo ou objetivo da atividade, e sua execução contribui para o alcance das metas pretendidas.	**Metas/Objetivos**	Referem-se aos resultados ou conquistas que se espera alcançar por meio da realização das ações. São os fins a serem atingidos e estão diretamente relacionados ao motivo ou objeto da atividade.
Operações	São os processos mentais ou físicos automatizados que facilitam a execução das ações. As operações podem incluir habilidades e conhecimentos que foram internalizados ao longo do tempo, tornando-se condições necessárias para a realização das ações.	**Condições**	São os elementos ou fatores que precisam estar presentes ou ocorrer para que as ações sejam realizadas com sucesso. As condições podem ser de natureza material, social ou cultural e são essenciais para viabilizar a atividade e o alcance das metas propostas.

Fonte: Pesquisador 2024 adaptando as ideias de Leontiev (2018).

Essa diferenciação entre atividade, ação e operação constitui a base do modelo proposto por Leontiev (2018). Para definir a atividade, é importante esclarecer o motivo ou objeto que a orienta. A partir dessa compreensão, é possível determinar as ações necessárias para alcançar as metas desejadas e identificar as operações automatizadas que facilitam a execução dessas ações. Essa análise da estrutura da atividade proporciona uma compreensão mais profunda do funcionamento das atividades humanas em diversos contextos. Os elementos ação e operação estão interligados e contribuem para a organização eficaz das atividades dentro de seus contextos sociais e culturais.

Leontiev (2018) esclarece uma diferença importante entre ações individuais e atividades coletivas por meio de um exemplo famoso: a “caça coletiva primitiva”. Sob essa perspectiva, as ações individuais de cada caçador são distintas, mas todos compartilham o mesmo objetivo subjacente, que é a obtenção de alimento. Por outro lado, as operações realizadas por cada caçador são influenciadas pelas condições e ferramentas disponíveis durante a caça.

Para compreender as ações individuais dos caçadores, é relevante entender o motivo mais amplo por trás da atividade coletiva, que é a busca por alimento. Isso ajuda a explicar os três níveis hierárquicos do funcionamento humano: os motivos relacionados ao objeto impulsionam a atividade coletiva em direção a um objetivo comum; os objetivos orientam as ações, sejam elas individuais ou do grupo; e, por fim, as condições e ferramentas conduzem as operações automatizadas.

Essa estrutura hierárquica é fundamental para compreender a complexidade das atividades humanas e como elas são influenciadas pela sociedade e pela cultura ao redor do indivíduo. Em outras palavras, ela ilustra como as ações individuais estão interligadas ao contexto coletivo em que a pessoa vive. As motivações, os objetivos e as condições em que está inserida desempenham um papel importante nessa conexão. Isso contribui para a compreensão de como a cultura e a sociedade moldam as atividades humanas, além de evidenciar como a interação entre esses fatores e o ambiente afeta o comportamento e o pensamento do indivíduo.

É importante ressaltar que a ação mediada pode ser significativamente transformada pela incorporação de diferentes formas de mediação. Nesse contexto, a atividade desempenha o papel de intermediária entre o indivíduo e a realidade a ser transformada. Contudo, para que uma situação seja considerada uma atividade, é necessário que esteja envolvida na inter-relação entre objeto, ação, motivo, operação, consciência e objetivo. De maneira diferente, a ação é

concebida como o meio pelo qual a atividade é executada, satisfazendo o motivo em questão, que, por sua vez, está sempre voltado para um objetivo específico.

Por exemplo, no contexto da Geometria, a atividade abrange todas as ações e operações necessárias para resolver um problema geométrico, como, por exemplo, calcular a área de um triângulo. Cada ação representa uma etapa específica do processo, com metas bem definidas, como a aplicação da fórmula da área. As operações, por sua vez, são processos matemáticos automatizados que facilitam a execução de ações, como a realização de cálculos aritméticos.

Vale ressaltar que os motivos impulsionam o estudante a se envolver na atividade; as metas indicam o objetivo específico de encontrar a área do triângulo; e as condições representam os elementos que favorecem o processo de resolução, como o conhecimento prévio, os recursos disponíveis e um ambiente de estudo adequado. Ao considerar esses elementos em conjunto, o estudante pode desenvolver uma abordagem eficaz para resolver o problema e alcançar a meta proposta. Assim, os conceitos de atividade, ação e operação estão inter-relacionados e podem se intercalar conforme a motivação e a consciência do estudante sobre o problema mudam.

Em diferentes situações ou níveis de conhecimento em Geometria, a mesma atividade pode ser percebida como uma ação ou uma operação, dependendo das habilidades e do entendimento do estudante. Portanto, é fundamental analisar o contexto específico e as etapas envolvidas na resolução do problema para compreender adequadamente a estrutura da atividade proposta.

A hierarquia proposta por Leontiev (2018), composta por três níveis - atividade geral, ações constitutivas e operações executadas - constitui a base conceitual que sustenta a compreensão da Atividade Humana. Sob essa perspectiva, os componentes reguladores dessa estrutura - motivos, metas e condições - desempenham papéis cruciais na orientação e na dinâmica desse processo complexo. Contudo, é importante ressaltar que essa hierarquia não é estática, mas sim parte de um fluxo contínuo de transformações interconectadas, conforme delineado pelo autor mencionado.

Essa abordagem conceitual de atividade, proposta por Leontiev (2018), encontra aplicação direta no contexto educacional, particularmente na prática docente relacionada à organização do ensino. A Atividade de Ensino, que ocorre dentro do ambiente escolar, não é um elemento isolado, mas sim intrinsecamente ligada ao conteúdo a ser ensinado e aos próprios participantes envolvidos nessa dinâmica. Nesse sentido, a ação pedagógica não se limita apenas

à transmissão de informações, mas também abrange a formação dos sujeitos como agentes ativos na apropriação da cultura humana.

A Atividade de Ensino é considerada um meio eficaz para promover a construção das funções psíquicas superiores nos estudantes. Esse processo ocorre por meio da relação mediada por instrumentos culturais, ou seja, pela interação dos indivíduos com os objetos do conhecimento. Essa abordagem ressalta a importância do papel do professor na criação de um ambiente de aprendizagem que favoreça a inclusão dos estudantes no contexto social e facilite a apropriação da cultura humana já desenvolvida. Considerando essa circunstância, o professor tem a responsabilidade de proporcionar metodologias que possibilitem aos estudantes a aquisição e a criação de ferramentas simbólicas, permitindo o pleno desenvolvimento de suas capacidades.

O desafio que se apresenta ao professor está diretamente relacionado à organização do ensino, buscando transformar o processo educativo escolar em uma atividade significativa tanto para o estudante quanto para o próprio professor. Moura *et al*. (2010) propõem o conceito de Atividade Orientadora de Ensino (AOE) com esse propósito.

O **Esquema 11** ilustra a estrutura da AOE.

Esquema 11 – Atividade orientada de ensino

Fonte: Pesquisador reproduzindo Moura *et al.* (2010, p. 98).

Essa abordagem mantém a estrutura da atividade proposta por Leontiev (2018), ao estabelecer uma necessidade (apropriação da cultura), um motivo real (apropriação do

conhecimento historicamente acumulado) e objetivos claros (ensinar e aprender), considerando também as condições objetivas da instituição escolar. Os elementos estruturantes da atividade referem-se aos aspectos que moldam e dão forma à interação entre o professor e o estudante durante o processo educativo. Isso inclui a definição clara dos objetivos de ensino, a seleção adequada de métodos e materiais didáticos, bem como a consideração das condições objetivas da instituição escolar.

Nessa abordagem, o estudante se dedica à Atividade de Aprendizagem, enquanto o professor se empenha na Atividade de Ensino, ambos atuando como sujeitos ativos. Noat-se que a AOE possui elementos estruturantes que englobam a definição de objetivos, a identificação de motivos reais, a realização de ações adequadas e a utilização de recursos metodológicos para a formação do pensamento teórico do estudante. Essa abordagem busca não apenas transmitir conhecimentos específicos, mas também desenvolver a capacidade dos estudantes de acessar, utilizar e criar conhecimento de maneira significativa.

Dentro da AOE, tanto o professor quanto o estudante são considerados sujeitos em atividade, sendo indivíduos portadores de conhecimentos, valores e afetividade, os quais influenciam a maneira como realizam suas ações em busca de um conhecimento de qualidade nova. Essa abordagem ressalta a importância de compreender que os seres humanos em atividade são indivíduos em transformação, o que é primordial para o processo de aproximação do objeto central. A atividade, portanto, deve atuar como uma orientação, funcionando como mediação no processo de ensino e aprendizagem, no qual os indivíduos, ao interagirem no espaço de aprendizagem, se transformam e evoluem, desenvolvendo novas habilidades e competências.

No contexto escolar atual, a função principal do professor é mediar o conhecimento, tendo o conteúdo como foco central. A intenção subjacente a essa atividade é promover a aprendizagem dos estudantes. Para que essa aprendizagem ocorra de maneira eficaz, é essencial que os estudantes reconheçam a relevância de assimilar o conteúdo, o que leva à prática do estudo. Essa abordagem concebe a atividade como uma série de estruturas e sistemas que culminam em eventos mediados. As ações, por sua vez, são as unidades fundamentais que constroem objetos específicos por meio de processos mentais. Assim, a atividade estabelece uma conexão entre o sujeito, o objeto, os objetivos a serem alcançados e as ferramentas cognitivas empregadas.

As ações empreendidas pelo professor devem ser orientadas pelo propósito de ensino, buscando atingir objetivos que atendam às necessidades educacionais. O intuito é que os

estudantes alcancem a aprendizagem desejada do conteúdo abordado. Nesse sentido, tanto o professor quanto os estudantes compartilham o desejo de concretizar esse propósito. Os objetivos delineados no plano educacional servem como diretrizes que orientam as ações, as quais, por sua vez, têm como foco o tema a ser ensinado e o resultado esperado da aprendizagem. O tema, ao ser abordado por meio da atividade, é continuamente moldado e enriquecido na consciência dos estudantes.

É essencial considerar a atividade como uma categoria psicológica que reflete a interação contínua do ser humano com o mundo e com outros indivíduos. Em vista disto, o ser humano é concebido como um agente ativo em um sistema de relações, e sua atividade é o cerne dessa interação constante. Isso ilumina a abordagem das situações desencadeadoras, nas quais os estudantes, por meio de suas ações, buscam alcançar um objetivo específico, como, por exemplo, a compreensão dos conceitos geométricos. Essa ação é realizada por meio de um conjunto de operações que constituem procedimentos, métodos, técnicas e estratégias para transformar o objeto em produto. Entretanto, as circunstâncias podem variar, mas o objetivo da ação permanece constante.

Um exemplo prático disso é o estudo da Geometria, que pode ser realizado por meio da leitura, de atividades práticas ou de discussões coletivas, conforme as situações e os materiais disponíveis. Nesse contexto, os instrumentos desempenham um papel fundamental como mediadores entre o sujeito e o objeto da atividade, facilitando a execução efetiva das ações educacionais. Sob essa perspectiva,

> Entendemos que a mediação entre o ensino e a aprendizagem de um conceito é uma atividade que tem como objeto um conceito presente na situação-problema escolhida como *situação desencadeadora de aprendizagem*, intencionalmente criada ou identificada pelo professor como mobilizadora da atividade de aprendizagem dos estudantes. A Atividade Orientadora de Ensino (AOE) é, portanto, uma atividade mediadora entre a atividade de ensino (do professor) e a atividade de aprendizagem (do estudante), ou seja, constitui-se como mediação entre sujeito e objeto, tal como defende Leontiev (1983, p. 105), ao se referir à mediação como atividade. (Moura, 2020, p. 360, grifos do autor).

Vale ressaltar que uma situação desencadeadora de aprendizagem refere-se a uma atividade, problema ou cenário projetado especificamente para promover a aprendizagem de um determinado tópico, conceito ou habilidade. Trata-se de uma abordagem pedagógica que visa engajar os estudantes em um contexto significativo e desafiador, no qual eles precisam

aplicar seus conhecimentos, raciocínio e habilidades para resolver problemas, tomar decisões ou realizar uma tarefa.

Essas situações são elaboradas para estimular o pensamento crítico e a resolução de problemas, incentivando os estudantes a explorar, investigar e se envolver ativamente com o conteúdo de aprendizagem. O objetivo é criar um ambiente educacional mais dinâmico e participativo, onde os estudantes não apenas absorvem informações de forma passiva, mas também as aplicam de maneira prática e contextualizada.

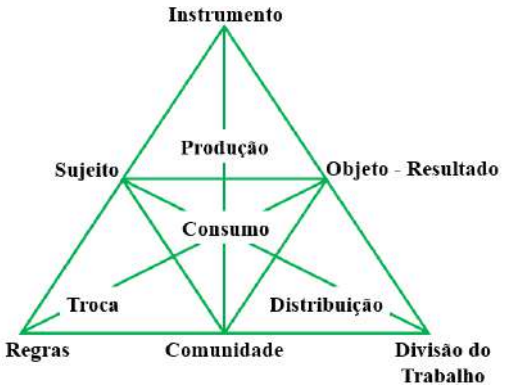
A importância da organização das ações do professor reside na capacidade de proporcionar aos estudantes a apropriação dos conhecimentos e experiências histórico-culturais da humanidade. Dado o vasto acervo de informações disponíveis, o foco não deve ser o ensino exaustivo de todos os detalhes, o que seria impraticável, mas sim capacitar os estudantes a desenvolver um método generalizado para acessar, utilizar e criar conhecimento, uma perspectiva fomentada pela formação do pensamento teórico. Nesse contexto, a abordagem da AOE de Moura *et al*. (2010) desempenha um papel essencial ao qualificar a eficácia da segunda geração da TA, ao reconhecer as interconexões entre as ações do professor, o envolvimento dos estudantes, os objetivos educacionais e a mediação de instrumentos cognitivos.

No entanto, apesar dos esforços pioneiros de Leontiev (2018), Moura *et al*. (2010) entre outros teóricos e pesquisadores em diferenciar atividade, ação e operação, o modelo triangular original proposto por Vygotsky (2019) permaneceu inalterado. Somente com a contribuição da terceira geração, representada pelas ideias de Yrjö Engeström, o conceito de atividade foi expandido. Nesse sentido, Engeström (1987; 2016) reforça o enfoque de Leontiev (2018) na centralidade do objeto na definição do sistema de atividade. Esse enfoque proporciona uma compreensão mais profunda da intenção do ser humano, ou seja, de seu motivo, que, por sua vez, molda a própria atividade.

Para Engeström (2016), a divisão social do trabalho transforma o produto do trabalho em uma mercadoria destinada à troca, resultando em mudanças significativas no produto final. A partir desse ponto, a produção do conhecimento assume uma natureza impessoal e independente do produtor original, perdendo sua identidade individual. A separação entre produção e consumo, na qual diferentes indivíduos se envolvem nessas atividades, é uma consequência da divisão social do trabalho. Essa divisão abrange tanto o trabalho material quanto o intelectual, afetando tanto o prazer quanto os esforços despendidos nas atividades. Esses conceitos viabilizam as interações e ampliam as possibilidades da ideia triangular.

O **Esquema 12**, fundamentado na discussão de Engeström (2016), representa os componentes de produção, consumo, troca e distribuição, que constituem os subtriângulos do sistema social da Atividade Humana. Esses elementos estão intrinsecamente interconectados, moldando as interações e a estrutura das atividades humanas em um contexto social específico.

Esquema 12 – A estrutura da Atividade Humana



Fonte: Pesquisador reproduzindo a imagem de Engeström (2016, p. 105).

Os subtriângulos propostos por Engeström (2016) são uma forma de descrever as interações entre os diferentes polos da Atividade Humana. Cada um deles é representado por três componentes que se relacionam entre si. São eles: a) Produção: envolve a relação entre o sujeito (a pessoa que realiza a atividade), o instrumento (a ferramenta ou meio utilizado na atividade) e o objeto (aquilo que é produzido ou transformado pela atividade); b) Troca: refere-se à interação entre o sujeito, as regras (normas ou diretrizes que regulam a atividade) e a comunidade (o grupo social no qual a atividade está inserida); c) Distribuição: engloba a relação entre a comunidade, o objeto (resultado ou produto da atividade) e a divisão do trabalho (como as tarefas são distribuídas entre os membros da comunidade); d) Consumo: envolve a interação entre o sujeito, a comunidade e o objeto, especialmente no contexto de como o resultado da atividade é utilizado ou consumido.

Esses subtriângulos representam as diferentes dimensões e conexões presentes em uma Atividade Humana complexa, permitindo uma análise abrangente dos diversos aspectos envolvidos em seu desenvolvimento. Todas essas inter-relações que ocorrem na produção, consumo, distribuição e troca fazem do objeto o elemento central de toda a produção do conhecimento. Em outras palavras, é o objeto que conecta as ações individuais dos participantes à atividade coletiva em que estão envolvidos.

De forma específica, o objeto é aquilo que direciona as atividades e confere significado ao processo como um todo. Ele representa o propósito ou a razão que impulsiona as ações e orienta o comportamento dos envolvidos, tornando-se o elo fundamental que mantém a coesão e a direção da atividade. Ao considerar o objeto como o ponto focal da produção do conhecimento, compreende-se melhor como as ações individuais convergem e se articulam em uma atividade coletiva com propósitos e significados compartilhados.

Engeström (2016), ao aprofundar a discussão teórica, amplia o modelo essencial do sistema de atividade, direcionando o foco para a interação entre múltiplos sistemas. Esse avanço representa a terceira geração da TA. Considerando essa circunstância, ele destaca que a ideia de mediação na Atividade Humana foi revolucionária, pois reconheceu a interdependência entre o indivíduo e seu ambiente cultural. Assim, o objeto de análise dessa teoria não é o sujeito ou o meio de forma isolada, mas sim o processo dinâmico de transformação que ocorre entre ambos.

Neste marco teórico, Engeström (2016) amplia essa compreensão ao introduzir a noção de movimento cíclico, que se estende e conecta diversos sistemas de atividade, formando uma rede interligada. Isso resulta em uma visão mais abrangente da atividade, levando em consideração os elos de intersecção entre os sistemas. Essa sistematização possibilita uma compreensão mais completa das complexas interações presentes na atividade dos seres humanos. Em virtude disso, a terceira geração que emerge das ideias desse teórico destaca a necessidade de desenvolver recursos conceituais para entender o diálogo, as múltiplas perspectivas e as redes de atividade interativas.

Conforme Engeström (2016), a Atividade Humana é intrinsecamente contraditória, englobando processos de produção e reprodução, conservação e inovação. O que distingue esse conceito é a constante criação de novas ferramentas, que, por sua vez, afetam e reconfiguram a própria estrutura da atividade. Para o mencionado autor, é importante que a Atividade Humana não se limite apenas à parte superior do triângulo. Ela não se restringe à produção individual, mas também abrange o intercâmbio social e a distribuição social. Em outras palavras, esse tipo de atividade ocorre sempre dentro de uma comunidade, regida por uma divisão específica do trabalho e por regras estabelecidas.

À luz disso, para Engeström (2016), a TA tem como foco o estabelecimento de um sistema de atividades que possibilite compreender como transformar a teoria em prática. Diante disso, ele destaca cinco princípios para a ampliação dessa teoria. O primeiro princípio é o denominado *sistema de atividade coletivo*, que representa uma unidade primária de análise, enfatizando as ações individuais e grupais direcionadas a metas de forma relativamente

independente, mediadas por artefatos e orientadas por um objeto. Esse princípio é compreendido como uma relação entre as redes de outros conjuntos de atividades.

O segundo princípio é chamado de *multivocalidade* dos sistemas de atividade, pois se refere a um grupo de atividades que exibe uma multiplicidade de pontos de vista, tradições e interesses da comunidade do sistema. Esse conceito enfatiza a divisão do trabalho, com posições e perspectivas distintas oriundas dos diferentes participantes, que, por sua vez, trazem consigo suas próprias histórias e culturas. Assim, a multivocalidade é ampliada por meio das interações nas redes de sistemas de atividade.

O terceiro princípio é denominado de *historicidade*, uma vez que os sistemas de atividade assumem formas e são modificados ao longo de um extenso período de tempo. Portanto, suas complexidades e potencialidades só podem ser compreendidas com base em seu próprio percurso histórico. O quarto princípio é conhecido como *contradições*, que são fontes de mudança e desenvolvimento. Nesse contexto, existem contradições que se manifestam como tensões estruturais cumulativas historicamente nos sistemas de atividades e entre eles. Isso, por um lado, promove perturbações e conflitos; por outro, gera possibilidades de renovação por meio de tentativas de modificar as atividades.

O último princípio refere-se às *transformações expansivas* em sistemas de atividades que ocorrem em decorrência de contradições, quando o objeto e o propósito da atividade são reconstruídos para ampliar um horizonte de possibilidades de forma radicalmente mais ampla do que aquele preestabelecido na atividade anterior. A partir desses princípios, o objeto e o propósito da atividade podem ser reconstruídos e reconfigurados, o que resulta em uma ampliação radical do horizonte de possibilidades. Esse processo de transformação não ocorre de forma linear, mas envolve a criação de novas formas de interação, que ampliam a atividade em uma direção mais complexa e mais ampla do que aquela inicialmente prevista.

Neste marco teórico, Engeström (2016) apresentou uma perspectiva sobre o conceito de aprendizagem expansiva, superando a limitação da aprendizagem restrita ao ambiente escolar e ampliando gradualmente tanto o objeto quanto o contexto da aprendizagem. Em virtude disso, o objeto de aprendizagem, segundo o autor, abrange não apenas o contexto crítico, mas também o ambiente de descoberta e a aplicação dos conteúdos curriculares específicos que estão sendo estudados.

Medeiros (2021) destaca que a dinâmica do sistema de atividades é fluida, de modo que uma atividade que se sobressai em um determinado momento pode assumir um papel secundário em outra situação, dependendo das necessidades dos estudantes. Essa variação pode

determinar a diferença entre a ação e a operação da atividade. Diante disso, a autora enfatiza a importância de um planejamento holístico do sistema, considerando a totalidade do processo. Assim, independentemente de sua posição momentânea, cada atividade contribui para o desenvolvimento da psique e da consciência dos estudantes, cujas ações e operações interligadas se refletem nas relações internas e externas, evidenciando-se nos resultados observáveis.

De modo complementar, Engeström (2016) amplia essa perspectiva ao examinar criticamente a relação entre sujeito, objeto e ferramentas na TA. Ele argumenta que a compreensão das ações individuais só é possível ao se considerar a complexa interação entre esses elementos, que são mediados por fatores sociais e organizacionais. Desse modo, para ele, a presença de contradições dentro da Atividade Humana impulsiona o desenvolvimento de novas atividades com objetivos distintos, desencadeando a criação de sistemas de atividades renovados em busca de soluções.

Engeström (2016) classifica as contradições em quatro níveis. O primeiro nível abrange as contradições que ocorrem dentro de cada componente da atividade, relacionadas internamente a esse próprio componente. O segundo nível refere-se às contradições que surgem da interação entre um novo objeto e um instrumento antigo, especialmente quando novos fatores externos impactam a atividade. O terceiro nível diz respeito às contradições resultantes da interação entre dois ou mais componentes de uma atividade e dois ou mais componentes de outra atividade dentro do sistema. Por fim, o quarto nível envolve a relação entre a atividade central de um sistema de atividades e as atividades adjacentes.

Essas contradições evidenciam a capacidade de desenvolvimento de uma atividade, indicando áreas no sistema de atividade com potencial de expansão. Engeström (2016), além de categorizar essas contradições, apresenta a seguinte analogia: as contradições de primeira ordem refletem traços da formação socioeconômica, expondo conflitos internos entre o valor de troca e o valor de uso em cada vértice do triângulo da atividade. As contradições de segunda ordem surgem entre os vértices do triângulo, ocorrendo entre os componentes do sistema de atividade, quando um novo fator emerge em um desses componentes.

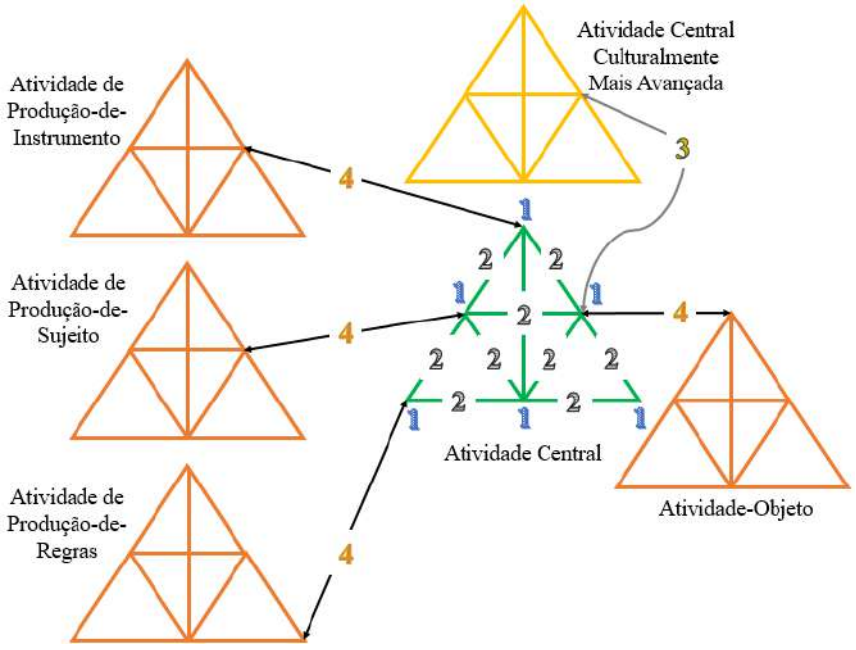
As contradições de terceira ordem ocorrem quando representantes de uma cultura, como professores, introduzem objetos e motivos de um sistema de atividade culturalmente mais avançado no sistema de atividade atual (Engeström, 2016). Um exemplo fornecido pelo autor é o caso de um garoto que frequenta a escola primária para brincar com os colegas (motivo

predominante), enquanto seus pais e o professor tentam incentivá-lo a estudar de forma mais séria (motivo culturalmente mais avançado).

Por fim, as contradições de quarta ordem ocorrem entre o sistema de atividade central e os sistemas de atividades periféricas na rede de sistemas, emergindo da interação entre a atividade central e as atividades periféricas. As atividades periféricas englobam, em primeiro lugar, aquelas nas quais os objetos e produtos da atividade central estão incorporados (atividades-objeto). Em segundo lugar, incluem as atividades que produzem ferramentas essenciais para a atividade central (atividades de produção de ferramentas). Em terceiro lugar, abarcam atividades relacionadas à aprendizagem e à educação do sujeito (atividades de produção do sujeito). Por fim, as atividades de administração e legislação também estão contempladas (atividades de produção de regras) (Engeström, 2016).

O **Esquema 13** ilustra essas contradições, mostrando de maneira visual as interações entre a atividade central e as atividades periféricas. Nele, os pontos 1, 2, 3 e 4 indicam as diferentes contradições que surgem dentro da rede de sistemas de atividades.

Esquema 13 – Quatro níveis de contradições dentro do sistema de Atividade Humana



Fonte: Pesquisador reproduzindo a imagem de Engeström (2016, p. 115).

Os componentes do sistema de atividade estão em constante construção e renovação devido ao desenvolvimento contínuo de novas contradições. A superação dessas contradições caracteriza-se como uma transformação expansiva das atividades produtivas. Essas contradições podem levar a um ciclo de aprendizagem expansiva, no qual o objeto da atividade

é modificado, surgindo novas contradições e possibilitando a criação de outros sistemas de atividade com novos ciclos de aprendizagem expansiva.

Para Engeström e Sannino (2016), as raízes dos conflitos podem ser exploradas ao desviar o foco do conflito no nível da ação para identificar as contradições no nível da atividade. Quando abordadas dessa forma, as contradições se tornam as verdadeiras forças propulsoras da aprendizagem expansiva, ao transformarem um objeto emergente em um motivo, como observado por Leontiev (2018), enfatizando o extraordinário ato de identificar uma necessidade correspondente ao objeto. Esse motivo da atividade coletiva torna-se eficaz em nível individual ao estabelecer um sentido pessoal. Com base nisso, os autores, respaldados por Leontiev (2018), afirmam que o sentido expressa a relação entre o motivo da atividade e a meta imediata da ação.

No contexto da aplicação nas escolas, a Teoria da Aprendizagem Expansiva (TAE), desenvolvida por Engeström (2016), reconhece a influência histórica das contradições internas nas estruturas socialmente organizadas de aprendizagem, proporcionando espaço para a formulação do conceito de Atividade de Aprendizagem. Essa abordagem, ao identificar as tensões e contradições presentes nas práticas educativas, permite que os professores e estudantes reconfigurem seus processos de ensino e aprendizagem, promovendo a criação de novas formas de saber-fazer e aprender a aprender.

Além disso, Engeström (2016) apresenta uma crítica à abordagem tradicional de ensino, que se baseia unicamente na utilização de livros didáticos para ilustrar fenômenos naturais. Para exemplificar esse ponto, o autor analisa livros didáticos aprovados para uso em escolas públicas, concentrando-se na forma como esses materiais retratam as fases da lua e os eclipses solares e lunares. Ele observa que esses livros frequentemente utilizam diagramas simplificados para representar esses fenômenos, com diferenciações mínimas entre os materiais examinados.

Segundo Engeström (2016), essa abordagem carece de uma exploração crítica e do estabelecimento de conexões significativas. Em vez de serem utilizados como instrumentos para compreender o mundo, os textos tornam-se o foco principal da atividade de aprendizado. O autor argumenta que, quando uma atividade de aprendizagem na escola se limita a aceitar o texto pronto como o objetivo final, o próprio conhecimento perde sua relevância. Ele identifica essa situação como um exemplo de encapsulamento da aprendizagem escolar.

Uma das abordagens inovadoras sugeridas por Engeström (2016) para superar essa encapsulação é conhecida como aprendizagem por expansão. Na aprendizagem por expansão, ocorre uma reconfiguração fundamental do próprio contexto da aprendizagem. Sob essa perspectiva, a aprendizagem escolar passa por um processo reflexivo de reorganização,

transformando-se em um sistema de atividades mais abrangente. Em essência, a aprendizagem por expansão busca romper com as limitações da aprendizagem escolar tradicional, ampliando o escopo do objeto de aprendizagem para incluir não apenas o conteúdo do texto escolar convencional, mas também as conexões e interações entre esse conteúdo, o contexto em que é descoberto e o contexto em que é aplicado na prática. Isso resulta em uma transformação interna da dinâmica da atividade de aprendizagem escolar.

Em outras palavras, a aprendizagem por expansão busca romper com a visão limitada de aprendizado que se concentra exclusivamente no conteúdo do livro didático. Em vez disso, promove a interconexão entre os conceitos apresentados no texto, a descoberta ativa por parte dos estudantes e a aplicação prática desses conceitos em situações do mundo real. Esse enfoque mais amplo e interconectado visa enriquecer a experiência de aprendizagem, promovendo uma compreensão mais profunda e uma aplicação mais significativa do conhecimento adquirido. Como resultado, a aprendizagem por expansão busca transformar a própria natureza da Atividade de Aprendizagem, permitindo que os estudantes se envolvam de maneira mais ativa e contextualizada no processo de construção do conhecimento (Engeström, 2016).

Engeström e Sannino (2016) destacam que a aprendizagem expansiva conduz a um processo de criação de um novo objeto ampliado, acompanhado por um padrão de atividade orientado para esse objeto. Fundamentados em Davidov (1990), eles enfatizam que isso envolve a elaboração de um conceito teórico com base na compreensão e modelagem da relação inicial simples, frequentemente denominada célula germe, responsável por originar a nova atividade e suas diversas manifestações práticas. A construção desse objeto expandido e a formulação de seu novo modelo de atividade requerem uma organização coletiva e distributiva, que desafia e transcende as limitações da atividade existente, permitindo a exploração do território inexplorado da ZDP (Engeström, 2016).

Neste marco teórico, Engeström e Sannino (2016) ressaltam que o cerne da aprendizagem expansiva é composto por um tripé fundamental: um modelo de atividade expandido, um conceito teórico correspondente e um novo formato de organização. Além disso, os autores acrescentam que a transição do abstrato para o concreto é alcançada por meio de ações epistêmicas ou de aprendizado, que, ao serem combinadas, constituem um ciclo expansivo ou em espiral.

Sob essa perspectiva, o processo de aprendizagem expansiva abrange um conjunto de etapas interligadas, com o propósito de transformar e qualificar as práticas e conhecimentos estabelecidos. Esse ciclo dinâmico, proposto por Engeström e Sannino (2016), tem início com

a etapa ‘1. Questionamento’, que consiste em uma análise crítica, rejeição ou questionamento dos elementos da prática aceita e do conhecimento vigente. A etapa seguinte é a ‘2. Análise da Situação’, que envolve uma reestruturação mental, discursiva ou prática da situação em foco, visando desvendar suas causas e mecanismos explicativos. Nesse processo, surgem questionamentos importantes que buscam entender o “porquê” das coisas e os princípios explanatórios. Dois enfoques analíticos se delineiam: o histórico-genético, que investiga a origem e a evolução da situação, e o real-empírico, que constrói um quadro das relações internas sistêmicas.

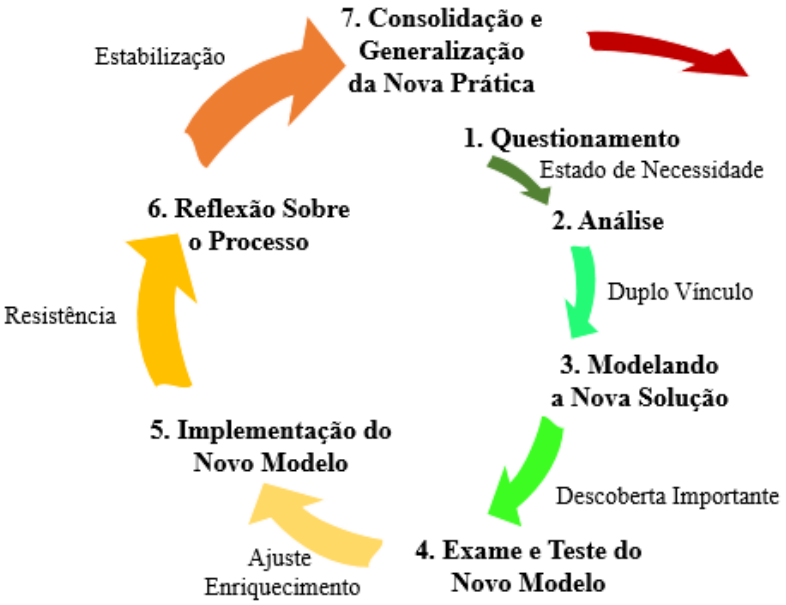
A etapa subsequente, denominada ‘3. Modelagem’, consiste em traduzir a nova relação explicativa em uma forma observável e comunicável ao público. Isso implica a criação de um modelo simplificado e explícito da nova ideia, oferecendo uma solução para a questão problemática. A próxima etapa é o ‘4. Exame do Modelo’, aprofunda-se o entendimento ao experimentar e testar o modelo desenvolvido, explorando sua dinâmica, potencialidades e limitações. A quinta etapa é a ‘5. Implementação do Modelo’ entra em cena ao aplicar o modelo por meio de práticas concretas, enriquecendo e ampliando as perspectivas conceituais. Por conseguinte, as etapas ‘6. Reflexão’ e ‘7. Consolidação’ emergem como fundamentais, promovendo uma análise crítica e avaliativa do processo, além de consolidar os resultados obtidos em uma nova forma de prática, agora mais estável e alinhada com os objetivos estabelecidos.

Para Engeström e Sannino (2016), essas ações apresentam similaridades com as seis etapas de aprendizado propostas por Davidov (1988), exceto pela ausência da primeira etapa, que envolve o questionamento crítico e a rejeição. Enquanto a teoria de Davidov (1988) é direcionada a ambientes de sala de aula, onde os conteúdos curriculares são predefinidos, a abordagem de sequência de ações e aprendizado em um ciclo de aprendizagem expansiva destaca a importância do questionamento crítico e enriquece as fases de implementação e consolidação. Nesse sentido, promove a criação de práticas genuinamente novas e culturalmente enraizadas. É importante ressaltar que o questionamento crítico pode, muitas vezes, desencadear encontros conflituosos e choques de perspectivas (Sannino, 2010), o que acrescenta complexidade e vitalidade ao processo de aprendizagem expansiva.

Nesse sentido, o ciclo de aprendizagem expansiva envolve uma constante construção e resolução de tensões e contradições dentro de um sistema de atividade. Nessa abordagem, o desenvolvimento implica resolver ou transformar as contradições existentes no sistema de atividade, resultando em mudanças que incluem a criação de um novo objeto e motivo.

O **Esquema 14** ilustra as sete etapas do ciclo de aprendizagem expansiva, conforme proposto por Engeström (2016). Esse processo descreve a sequência de ações e aprendizados que emergem à medida que os indivíduos interagem com os sistemas de atividades e enfrentam contradições, avançando para novas etapas.

Esquema 14 – Sequência de ações e aprendizado em um ciclo de aprendizagem expansiva



Fonte: Pesquisador reproduzindo a imagem de Engeström (2016, p. 384).

É essencial ressaltar que essa sequência não é fixa nem rígida. Em intervenções e situações cotidianas, a aprendizagem expansiva ocorre de maneira flexível e adaptativa. No entanto, a sequência proposta é valiosa para promover a reflexão sobre o processo e planejar mudanças eficazes. Dessa forma, a TAE busca compreender a essência do conteúdo e como ele se desenvolve culturalmente. Ela transforma ideias teóricas em objetos complexos por meio de ciclos de aprendizagem expansiva, permitindo a criação de novos conceitos e práticas para atividades emergentes.

Neste marco teórico, é possível observar que a aprendizagem expansiva é fundamental para a transformação qualitativa de todo o sistema de atividades, impulsionando a evolução das práticas profissionais e possibilitando a ampliação do objeto da atividade. Assim, a TAE de Engeström (2016) enriquece a compreensão da aprendizagem em diferentes níveis, promovendo a criação de soluções inovadoras e a transformação das práticas profissionais em configurações de atividade que permitem a expansão do conhecimento e dos objetos de estudo.

Essa abordagem ultrapassa os limites físicos da escola, estendendo-se para além de seus muros e transformando a própria instituição em um instrumento coletivo de aprendizagem. O conceito de redes de aprendizagem, proposto por Engeström (1987), possibilita a conexão entre diferentes contextos e atores sociais, criando uma sinergia entre eles e promovendo uma aprendizagem mais abrangente. Em virtude disso, a aprendizagem se torna um processo mais integrado e enriquecido, interligando conhecimentos teóricos e práticos em uma abordagem que valoriza a aplicação do aprendizado no contexto real.

Essa concepção de aprendizagem expansiva incentiva a criação de ambientes educacionais mais dinâmicos e coletivos, nos quais os estudantes podem interagir com diversos contextos e atores sociais, enriquecendo suas experiências de aprendizado e tornando-as mais relevantes para suas vidas. Assim, a escola deixa de ser um espaço isolado e passa a integrar uma rede mais ampla de aprendizagem, na qual conhecimentos teóricos e práticos estão interconectados e aplicados em situações reais.

Em suma, a abordagem da aprendizagem expansiva proposta por Engeström (2016) representa uma mudança significativa na compreensão da educação, abrindo caminho para uma aprendizagem mais abrangente, contextualizada e socialmente conectada. Portanto, ao ampliar o objeto e o contexto da aprendizagem, essa abordagem favorece a transformação educacional, estimulando novas formas de ensinar e aprender.

2 TRILHA METODOLÓGICA

Esta seção apresenta a trajetória metodológica da pesquisa. A metodologia foi elaborada de forma cuidadosa, integrando instrumentos, fundamentação teórica, participantes e as condições materiais dos objetos analisados. Essa abordagem visa aprofundar a compreensão dos eventos investigados.

Primeiramente, descreve-se o percurso metodológico relacionado ao tema, abordando a panorâmica investigativa, os fundamentos epistemológicos e o contexto intelectual e acadêmico em que a proposta intervencionista foi desenvolvida. Em seguida, são apresentados os procedimentos e as abordagens elaboradas para examinar as ações intervencionistas que podem transformar a prática de ensino dos futuros professores de Matemática. Destaca-se a caracterização do cenário da pesquisa, incluindo a proposta curricular do curso e da disciplina em análise, além dos participantes envolvidos, com ênfase especial nos voluntários que participaram das entrevistas.

A seguir, são apresentadas as técnicas e instrumentos utilizados na coleta de dados, que englobam diferentes abordagens em cada fase da pesquisa, como documentação indireta, documentação direta e entrevista semiestruturada. A atenção volta-se, então, para a intervenção pedagógica, explorando os métodos de ensino adotados. Por fim, a seção conclui com uma exposição detalhada dos procedimentos utilizados na análise dos dados coletados, com o propósito de conduzir uma investigação rigorosa e aprofundada.

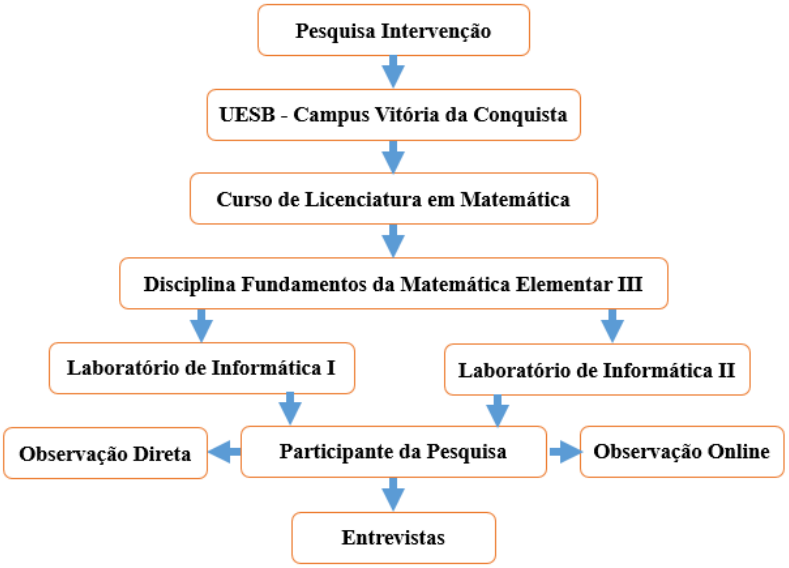
Para facilitar a compreensão dos caminhos dessa trilha metodológica, o **Esquema 15** oferece um mapeamento visual dos procedimentos iniciais.

Esquema 15 – Mapa da trilha metodológica: procedimentos iniciais

Fonte: Pesquisador (2024).

Conforme mencionado anteriormente, os procedimentos iniciais foram realizados em conformidade com a abordagem da pesquisa intervencionista. Nesse âmbito, o **Esquema 16** ilustra a caracterização do espaço e dos participantes.

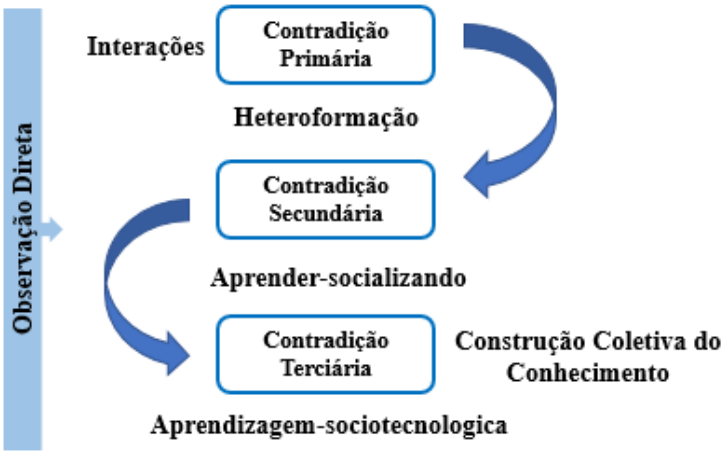
Esquema 16 – Mapa da trilha metodológica: efetivação



Fonte: Pesquisador (2024).

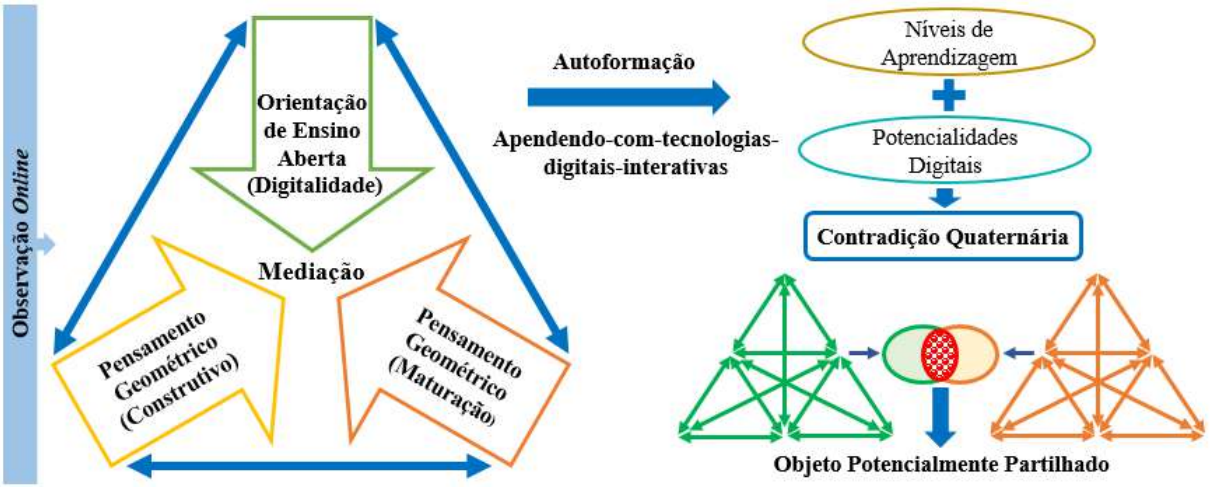
Para concluir os aspectos visuais da trilha metodológica, os esquemas do 17 ao 20, ilustram os procedimentos finais relacionados à análise dos dados.

Esquema 17 – Mapa da trilha metodológica: análise da observação direta



Fonte: Pesquisador (2024).

Esquema 18 – Mapa da trilha metodológica: análise da observação *online*



Fonte: Pesquisador (2024).

Esquema 19 – Mapa da trilha metodológica: análise das entrevistas

Fonte: Pesquisador (2024).

Esquema 20 – Mapa da trilha metodológica: gráficos automáticos

Fonte: Pesquisador (2024).

Esse **Esquema 20** trata da análise dos formulários, cujos gráficos foram construídos por meio do *Google Forms*, e são discutidos à luz das ideias teóricas que fundamentam esta tese.

2.1 Caminhos Metodológicos

Uma pesquisa científica pode ser compreendida como um processo de enriquecimento do pensamento do pesquisador, que se confronta com o objeto de estudo em um sistema de mediações, realizando sucessivas aproximações. Em vista disto, a finalidade desse procedimento é promover o conhecimento do objeto ou fenômeno investigado, visando alcançar suas múltiplas determinações e possíveis relações. É nesse movimento reflexivo que se insere a presente investigação.

De acordo com Minayo (2014), às abordagens quantitativas e qualitativas possuem funções, contextos e adequações específicas. A aplicação correta de cada um desses métodos pode proporcionar percepções significativas sobre a realidade social analisada. Portanto, buscou-se destacar algumas características da abordagem escolhida para esta pesquisa, explicando os fundamentos que justificaram essa escolha.

Nesse sentido, a escolha pela abordagem qualitativa nesta tese é justificada, principalmente, pela complexidade do problema em investigação. A natureza dessa complexidade exige um estudo aprofundado e flexível do objeto de pesquisa, permitindo, assim, uma compreensão abrangente dos diversos elementos e fatores envolvidos. É importante ressaltar que nem sempre é viável tratar essas questões de forma que as informações do nível da realidade sejam quantificáveis por meio de modelos matemáticos ou estatísticos. Além disso,

> As pesquisas que se utilizam da abordagem qualitativa possuem a facilidade de poder descrever a complexidade de uma determinada hipótese ou problema, analisar a interação de certas variáveis, compreender e classificar processos dinâmicos experimentados por grupos sociais, apresentar contribuições no processo de mudança, criação ou formação de opiniões de determinado grupo e permitir, em maior grau de profundidade, a interpretação das particularidades dos comportamentos ou atitudes dos indivíduos. (Oliveira, 2007, p. 117).

Dessa forma, a abordagem qualitativa possibilita a investigação dos aspectos subjetivos dos fenômenos sociais e do comportamento humano, levando em consideração o contexto (real e/ou virtual) em que estão inseridos, assim como as particularidades da sociedade à qual pertencem. Esse enfoque subjetivo orientou esta pesquisa para um ambiente investigativo, no qual o pesquisador principal precisou se envolver de maneira direta ou indireta para observar o fenômeno social em questão. É importante ressaltar que esse tipo de abordagem pode ser aplicado tanto em cenários presenciais quanto em ambientes *online* ou híbridos.

De acordo com Triviños (1987, p. 130), a utilização da abordagem qualitativa permite que a pesquisa descreva o fenômeno, explorando os caminhos que revelam as interações e contradições presentes na realidade investigada. Dessa maneira,

> [...] as causas da existência dele, procurando explicar sua origem, suas relações, suas mudanças [...] aprecia o desenvolvimento do fenômeno [...] para descobrir suas relações e avançar no conhecimento de seus aspectos evolutivos, tratando de identificar as forças decisivas responsáveis por seu desenrolar característico; [...] busca as raízes dos significados, as causas de sua existência, suas relações, num quadro amplo do sujeito como ser social e histórico. (Triviños, 1987, p. 130)

Complementando essa visão, Minayo (2014, p. 57) afirma que a abordagem qualitativa é adequada para os "[...] estudos da história, das representações e crenças, das relações, das percepções e opiniões, ou seja, dos produtos das interpretações que os humanos fazem durante suas vidas, da forma como constroem seus artefatos materiais e a si mesmos, sentem e pensam". Segundo essa autora, a abordagem qualitativa reforça essa afirmação ao enfatizar que é apropriada para os estudos relacionados à história, representações, crenças, relações, percepções e opiniões, ou seja, para os produtos das interpretações que os seres humanos realizam ao longo de suas vidas, bem como para a maneira como constroem objetos materiais e a si mesmos, além de seus sentimentos e pensamentos.

De maneira abrangente, isso evidencia que essa abordagem lida com o âmbito dos significados e das atitudes. Assim, essa abordagem qualitativa se revelou adequada para esta pesquisa, pois permitiu a exploração de conceitos e variáveis relevantes que ainda eram desconhecidos ou careciam de definições claras, além de atender à necessidade de explicações aprofundadas relacionadas aos aspectos específicos do comportamento do objeto de estudo.

Nesse ponto, é importante destacar que "A investigação qualitativa requer, como atitudes fundamentais, a abertura, a flexibilidade, a capacidade de observação e de interação com o grupo de investigadores e com os atores sociais envolvidos" (Minayo, 2014, p. 195). De acordo com essa autora, o perfil do investigador deve ser dinâmico, capaz de combinar elementos quantitativos e qualitativos, interpretando os dados por meio da observação e da análise participante. Essa abordagem deve refletir uma postura crítica, criativa, flexível e investigativa, incorporando elementos significativos da pesquisa.

Nesse sentido, os investigadores são incentivados a refletir sobre o comportamento observável, mantendo uma estreita relação com os processos internos, a fim de filtrar e organizar ações relevantes para a investigação. Como resultado, o pesquisador central deste

estudo não se concentrou apenas nos resultados obtidos, mas, principalmente, no processo dos eventos que levaram ao produto final.

Quanto ao tipo de investigação, de acordo com o objetivo estabelecido, compreende-se que esta pesquisa se desenvolveu em duas vertentes interligadas: exploratória e descritiva. Esses dois enfoques se complementam e atuam em conjunto para proporcionar uma compreensão abrangente do objeto de estudo.

O viés exploratório, como salientado por Metring (2015), desempenha o papel de qualificar ideias e oportunidades, permitindo um maior grau de familiaridade com o problema em questão e favorecendo a explicitação de conceitos e a formulação de diferentes hipóteses. Esse tipo de investigação constitui um passo importante em abordagens qualitativas, direcionando a pesquisa e fornecendo um panorama essencial para a compreensão do objeto de estudo. Sua natureza flexível, sustentada em observações diretas e intensivas, permite uma construção adaptável e a consideração de múltiplos aspectos imprevisíveis, possibilitando que o processo de investigação seja ajustado conforme as questões emergentes ao longo do estudo.

Por outro lado, o viés descritivo se destaca pela busca de conclusões consistentes e pela formalização de um modelo coerente do objeto em análise, conforme Metring (2015). Por meio dessa abordagem, buscou-se elaborar uma representação detalhada do fenômeno investigado, fundamentada em observações extensivas e documentação indireta, que permitiram capturar diferentes dimensões do objeto de estudo. O foco não se limitou apenas ao registro das características observadas, mas também à compreensão das relações entre esses aspectos, oferecendo uma visão mais abrangente e integrada do fenômeno.

A escolha estratégica dessa combinação de abordagens possibilitou a coleta de dados significativos, enriquecendo a compreensão do objeto de estudo e permitindo ajustes ao longo do processo. À medida que a pesquisa avançava, foi possível acumular informações e conhecimentos que até então não haviam sido imaginados, proporcionando uma visão mais profunda e esclarecedora do fenômeno em análise.

No que diz respeito ao tipo de pesquisa e aos procedimentos adotados, este trabalho é classificado como pesquisa de intervenção, mais especificamente como pesquisa de intervenção pedagógica. Essa categorização é embasada metodologicamente por Damiani *et al*. (2013), uma vez que esse enfoque se baseia em princípios histórico-culturais ao realizar intervenções, como mudanças ou inovações, em contextos educacionais. O objetivo subjacente é promover avanços e qualificações nos processos de ensino e aprendizagem dos participantes, sendo imprescindível avaliar os efeitos dessas intervenções ao término das ações.

> Na pesquisa-intervenção, a relação pesquisador/objeto pesquisado é dinâmica e determinará os próprios caminhos da pesquisa, sendo uma produção do grupo envolvido. Pesquisa é, assim, ação, construção, transformação coletiva, análise das forças sócio-históricas e políticas que atuam nas situações e das próprias implicações, inclusive dos referenciais de análise. É um modo de intervenção, na medida em que recorta o cotidiano em suas tarefas, em sua funcionalidade, em sua pragmática - variáveis imprescindíveis à manutenção do campo de trabalho que se configura como eficiente e produtivo no paradigma do mundo moderno. (Aguiar, Rocha, 1997, p. 97).

É nesse contexto de promover novas relações entre os elementos presentes em um determinado ambiente que as intervenções em contextos educacionais se entrelaçam com a pesquisa científica. Conforme Vergara (2013, p. 43), a pesquisa intervencionista não se limita a explicar, pois tem "[...] como principal objetivo interpor-se, interferir na realidade estudada para modificá-la". Por essa razão, o termo "intervenção" é amplamente adotado por pesquisadores vinculados à Teoria Histórico-Cultural da Atividade, com destaque para os trabalhos de Vygotsky (2019), Leontiev (2018) e Engeström (2016).

Segundo Damiani *et al.* (2013), as pesquisas de intervenção pedagógica têm como propósito detalhar minuciosamente os procedimentos realizados no contexto educacional, avaliá-los e gerar explicações plausíveis sobre os efeitos das intervenções, fundamentadas em dados e teorias relevantes para reflexões educacionais. Por conseguinte, essas pesquisas podem ser divididas em duas fases: a) Ensino, que abrange o planejamento e a implementação da intervenção; b) Avaliação, que envolve a análise dos efeitos da intervenção (o próprio método de pesquisa).

Damiani *et al*. (2013) também enfatizam que as pesquisas de intervenção pedagógica não apenas têm o poder de testar a relevância das ideias teóricas que as fundamentam na prática, mas também podem impulsionar o desenvolvimento dessas ideias, contribuindo para a formulação de novas teorias educacionais. Nesse sentido, esse tipo de abordagem pode facilitar a implementação de práticas pedagógicas em microssistemas de ensino, promovendo amplas possibilidades de transformações educacionais.

2.1.1 Caracterização do local de pesquisa

A escolha da Uesb, campus Vitória da Conquista, como cenário da pesquisa, deve-se à sua relevância no contexto educacional da região e à experiência da professora orientadora no ambiente acadêmico dessa instituição. Criada pela Lei Delegada n° 12, de 1980, e formalizada

pelo Decreto Federal n° 94.250, em 1987, a universidade é uma autarquia de caráter multicampi, atuando sob um regime especial de ensino, pesquisa e extensão. Sua missão, centrada na formação crítica e reflexiva de profissionais capacitados para atender às demandas regionais e globais, a torna uma instituição essencial para este estudo, especialmente no campo da Educação Matemática (Uesb, 2008).

A escolha da Uesb também está fundamentada na experiência da orientadora, que possui uma vasta trajetória no curso de LM da instituição, implantado em 1998, com o objetivo de formar professores para a Educação Básica, com ênfase em Ciências Exatas. Atualmente, o citado curso possui uma carga horária total de 3.480 horas/aula, sendo 50 minutos cada aula, distribuídas ao longo de oito semestres. Dentre essas horas, 1.575 são destinadas aos conteúdos curriculares obrigatórios de natureza científica específica ou áreas afins da Matemática (Uesb, 2008). Essa distribuição é subdividida em disciplinas obrigatórias, organizadas de acordo com a estrutura apresentada no **Quadro 9**.

Quadro 9 – Conteúdos curriculares do curso em LM investigado

Conteúdo	Disciplinas Obrigatórias	C.H.	Semestre
Álgebra Linear	Álgebra Linear I	60h/a	3°
Cálculo Diferencial e Integral	Cálculo I	90h/a	2°
	Cálculo II	90h/a	3°
	Cálculo III	90h/a	4°
	Cálculo IV	75h/a	5°
	Equações Diferenciais	60h/a	7°
	Cálculo Numérico	60h/a	8°
	Introdução às Variáveis Complexas	60h/a	8°
Fundamentos de Análise	Análise Real I	90h/a	6°
Conteúdos de áreas afins à Matemática, que são fontes originadoras de problemas e campos de aplicações de suas teorias	Introdução Algoritmo Estruturado	60h/a	1°
	Estatística e Probabilidade	90h/a	1°
	Física I	75h/a	5°
	Física II	75h/a	6°
	Matemática Financeira	60h/a	7°
Conteúdos matemáticos presentes na Educação Básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise	Fundamentos de Matemática Elementar I	60h/a	1°
	Fundamentos de Matemática Elementar II	60h/a	1°
	Fundamentos de Matemática Elementar III	60h/a	1°
Fundamentos de Álgebra	Teoria dos Números	60h/a	2°
	Álgebra I	60h/a	4°
	Álgebra II	60h/a	5°
Fundamentos de Geometria	Geometria Euclidiana	60h/a	3°
	Desenhos Geométricos	60h/a	6°
Geometria Analítica	Geometria Analítica e Cálculo Vetorial	60h/a	2°

Fonte: Pesquisador reorganizando os dados contidos no documento da Uesb (2008).

Dentre as disciplinas listadas no quadro acima, destaca-se a disciplina Fundamentos de Matemática Elementar III (FME III), que integra o grupo de Conteúdos Matemáticos presentes na Educação Básica, abordando áreas como Álgebra, Geometria e Análise. Essa disciplina é

oferecida no primeiro semestre do curso e marca o início da introdução dos estudantes aos conhecimentos geométricos, sendo um ponto de partida essencial na formação de futuros professores de Matemática. Sua ementa abrange tópicos da Geometria Plana, como triângulos, paralelismo, perpendicularidade, polígonos e circunferências, além de temas da Geometria Espacial, como prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas.

Dada a importância dessa componente curricular para a formação dos docentes e sua relevância para atender às necessidades educacionais da região, especialmente no contexto contemporâneo do ensino de Matemática, somada à experiência da orientadora, que lecionou essa disciplina por anos, surgiram inquietações sobre como inovar o ensino obedecendo sua proposta curricular. Essas preocupações, geradas pela prática de ensino e pela necessidade de um aprofundamento metodológico, foram determinantes para a escolha dessa disciplina como espaço de aplicação da pesquisa.

Esse contexto gerou a primeira ação do ciclo de aprendizagem de Engeström e Sannino (2016), que se caracteriza pela identificação de contradições. No caso, a inquietação da orientadora em questionar o modelo de atividade atual, que se centrava exclusivamente no conhecimento curricular, levou a essa reflexão. A partir disso, surgiram questionamentos mais amplos, influenciados pelas ideias deste pesquisador, que propunham uma formação voltada para o digital.

Essa reflexão inicial resultou na segunda ação do citado ciclo de aprendizagem, que é a análise da situação. Nesse momento, buscou-se compreender as causas e os mecanismos que sustentavam a prática atual. Para tanto, duas abordagens foram adotadas: uma histórica, que traçou a origem e evolução da situação, e outra atual-empírica, que procurou entender as relações sistêmicas internas envolvidas.

Nesse sentido, a abordagem histórica buscou traçar a origem e evolução da situação, ou seja, compreender como as práticas educacionais e os métodos de ensino se desenvolveram ao longo do tempo na instituição e no curso. Essa análise permitiu identificar como fatores históricos moldaram a situação atual, revelando padrões e decisões passadas que ainda influenciam a prática presente. Observou-se, por exemplo, que o ensino era centrado em materiais convencionais (lousa e piloto) e apresentações formais de conceitos e suas demonstrações.

Por outro lado, a abordagem atual-empírica focou em uma análise mais concreta da situação presente. Buscou-se entender as relações sistêmicas internas, ou seja, como os diferentes elementos do sistema educacional, como o currículo, as práticas pedagógicas, os

recursos tecnológicos e o ambiente físico, interagem e se influenciam mutuamente. Essa análise permitiu identificar problemas reais e suas causas dentro do contexto imediato, facilitando o diagnóstico das contradições que surgiam no dia a dia da prática educacional.

Embora todas as salas contassem com projetores e sinal de *Wi-Fi*, para a efetivação da formação digital era necessário dispor de computadores. Um dos problemas identificados foi a falta de espaço adequado para acomodar os equipamentos e os estudantes. Desse modo, a organização da intervenção formativa, então, envolveu colaborações entre os pesquisadores e o coordenador do curso, que também era o professor responsável pela disciplina na época.

O primeiro passo foi a busca por um laboratório de informática adequado para a execução da intervenção. Dois laboratórios foram reservados, mas, após uma análise preliminar, percebeu-se que nenhum deles comportaria acomodar o número de estudantes previamente matriculados. Isso revelou uma nova contradição a ser enfrentada na intervenção, evidenciando a necessidade de ajustes logísticos para a implementação do plano.

De maneira específica, constatou-se que os laboratórios disponíveis possuíam uma média de 21 computadores, mas nem todos estavam em boas condições de uso. Muitos apresentavam falhas técnicas, como problemas no funcionamento do sistema operacional e defeitos em teclados e mouses, componentes essenciais para o bom andamento das atividades propostas. Esses contratempos causaram desconfortos consideráveis, prejudicando o progresso das atividades planejadas. Como resultado, foi necessário solicitar reparos técnicos em diversas ocasiões, a fim de garantir uma maior fluidez na aplicação das atividades.

Outra dificuldade que poderia surgir seria a diversidade de habilidades e níveis de familiaridade dos estudantes com os artefatos tecnológicos utilizados. Para minimizar esse desafio, foi inserido um monitor voluntário com experiência relevante nas TD empregadas. Nesse âmbito, durante as quatro primeiras aulas, a presença desse monitor foi essencial para apoiar os participantes na adaptação ao ambiente digital, facilitando o uso das ferramentas e recursos disponíveis e garantindo um melhor aproveitamento das atividades propostas ao longo da intervenção.

A intervenção formativa foi conduzida durante o primeiro semestre, abrangendo o período de fevereiro a junho. Ao longo desse período, foram realizados 15 encontros presenciais, agendados para as quintas-feiras, no turno vespertino, das 13h às 16h40min, com um intervalo de 20 minutos (das 13h às 15h20min), totalizando quatro horas-aula, sendo cada uma com duração de 50 minutos. Os encontros presenciais eram intercalados com atividades iniciadas nos laboratórios e posteriormente complementadas em outros ambientes.

Este processo formativo foi abordado tanto em laboratórios físicos como em um ambiente de laboratório virtual, formando um modelo que atende às condições híbridas de ensino. A turma selecionada para a intervenção pedagógica era composta originalmente por 36 estudantes matriculados, embora sete deles tenham optado por não comparecer a nenhuma das aulas, resultando em um total de 29 estudantes que concluíram o processo formativo. Cada laboratório de informática selecionado estava equipado com recursos audiovisuais que permitiam a projeção das explanações proferidas pelo professor formador.

Durante as sessões presenciais, as aulas eram conduzidas no Laboratório 1, enquanto os materiais eram projetados simultaneamente no Laboratório 2, que contava com um sistema de transmissão de áudio. Nesse processo, o professor formador estabelecia uma presença virtual, com imagem, voz e interação em tempo real. Essa dinâmica permitiu que ele acompanhasse e orientasse todos os estudantes, realizando transições estratégicas para minimizar dúvidas e garantir que todos tivessem acesso a uma compreensão clara do conteúdo abordado.

A **Figura 1** ilustra um dos momentos em ambos locais de aplicação.

Figura 1 – Ambientes físicos de implantação da proposta formativa

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Com o intuito de otimizar a qualidade do processo de ensino e aprendizagem, essa intervenção contou também com a presença de um professor supervisor, regente da disciplina. Ele era responsável por estar fisicamente presente em um dos laboratórios quando o professor formador não estava, assegurando a continuidade da supervisão, sem a necessidade de executar intervenções didáticas. Considerando essa circunstância, o supervisor realizava a transição entre os laboratórios, apesar de estarem localizados lado a lado.

2.1.2 Caracterização dos participantes

A disciplina FME III contou com a participação de 29 estudantes ao longo do período letivo. Para a realização desta pesquisa, a seleção dos participantes para as entrevistas foi executada em conformidade com as diretrizes éticas estabelecidas pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP), com ênfase no rigor e na transparência.

Conforme Gil (2019), em pesquisas que envolvem um grande número de elementos, muitas vezes é inviável considerar todos os componentes de maneira detalhada e completa. Nesse contexto, é comum o uso de uma amostra, ou seja, uma seleção representativa dos elementos do universo em estudo. Para esta tese, optou-se por uma amostragem não probabilística, mais especificamente, uma amostragem por tipicidade ou intencional. Essa abordagem é amplamente utilizada em pesquisas qualitativas, especialmente em estudos exploratórios, como o presente. Assim, a escolha dos sete voluntários foi baseada na seleção de um subgrupo que representasse de forma eficaz as características de interesse desta pesquisa.

A amostragem por tipicidade ou intencional, conforme explica Gil (1999), permite que o pesquisador selecione deliberadamente os participantes que considera mais representativos ou relevantes para o estudo, levando em conta o conhecimento prévio da população e os objetivos da pesquisa. Nessa linha de pensamento, os sete voluntários, identificados pelos pseudônimos Mary, Aden, Théo, Hend, Elen, Ulan e Seth, foram escolhidos com o intuito de proteger suas identidades, garantindo a confidencialidade das informações fornecidas, ao mesmo tempo, em que se assegurava a qualidade e a relevância das contribuições para o desenvolvimento da pesquisa. Essa estratégia foi fundamental para o andamento do estudo qualitativo, uma vez que a escolha dos participantes seguiu um critério intencional, assegurando que as entrevistas resultassem em dados significativos e aprofundados, alinhados aos direcionamentos exploratórios da investigação.

Os sete estudantes foram abordados de maneira clara e transparente em relação aos objetivos da fase de entrevistas e estavam plenamente cientes do propósito e das condições envolvidas. Para garantir a conformidade com os requisitos éticos, os voluntários foram informados previamente sobre todos os detalhes do processo e convidados a assinar o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) antes do início das gravações, que foram realizadas *online* por meio da plataforma *Google Meet*.

Cada aspecto do TCLE foi cuidadosamente explicado aos participantes, incluindo informações sobre a duração das gravações e sua finalidade. Além disso, os voluntários foram

informados de que as gravações seriam armazenadas de forma confidencial por até cinco anos. Em conformidade com essas medidas éticas, ressaltou-se também que o acesso aos dados seria restrito apenas ao pesquisador responsável e à sua orientadora, sendo utilizado exclusivamente para a realização de análises científicas, alinhadas aos objetivos da pesquisa.

2.1.3 Técnicas e instrumentos para a produção de dados

Esta tese utilizou, inicialmente, a técnica de documentação indireta para a coleta de dados, realizando revisões sistemáticas da literatura com o propósito de fornecer uma visão geral sobre o tema e identificar caminhos promissores. Vale ressaltar que

> Toda pesquisa implica o levantamento de dados de variadas fontes, quaisquer que sejam os métodos ou técnicas empregadas. Esse material-fonte geral é útil não só por trazer conhecimentos que servem de *back-ground* ao campo de interesse, como também para evitar possíveis duplicações e/ou esforços desnecessários; pode, ainda, sugerir problemas e hipóteses e orientar para outras fontes de coleta. (Marconi, Lakatos, 2003, p. 174).

Com base nessas afirmações, a técnica da documentação indireta foi empregada com o propósito de realizar um mapeamento e um panorama abrangente das abordagens abordadas nos últimos anos no contexto da temática desta pesquisa. Conforme salientado por Marconi e Lakatos (2003), a pesquisa bibliográfica transcende a mera recapitulação do que já foi discutido ou registrado sobre determinado assunto; ela possibilita a análise de um tema sob uma nova perspectiva ou abordagem, levando a conclusões inovadoras. Isso permitiu a formulação de novas abordagens para a pesquisa em questão.

Em continuidade, a observação direta extensiva foi executada por meio de questionários *online*, seguindo a abordagem de Marconi e Lakatos (2003). A elaboração desses questionários, desenvolvidos na plataforma *Google Forms*, proporcionou uma visão geral das percepções dos participantes, sem a presença do pesquisador. Ao serem disponibilizados via ggb-CB da turma, esses instrumentos foram projetados para garantir uma linguagem simples e direta, minimizando a possibilidade de interpretações equivocadas e assegurando maior clareza na coleta de dados.

Além disso, a observação direta intensiva foi empregada para uma análise mais detalhada e qualitativa. Dessa forma, a observação foi realizada de maneira estruturada, por meio de registros meticulosos em diários de bordo e quadros comparativos, utilizados para captar as nuances das interações dos participantes no ambiente de aprendizagem. Assim, a

técnica de observação participante, conforme descrita por Marconi e Lakatos (2003), foi central para essa fase da pesquisa, permitindo que o pesquisador se integrasse ao grupo e obtivesse uma perspectiva das dinâmicas sociais. Adicionalmente, a observação sistemática *online* também foi utilizada para analisar interações nos espaços virtuais, ampliando o alcance da coleta de dados e possibilitando uma compreensão mais aprofundada dos fenômenos observados (Flick, 2009).

Por fim, a entrevista semiestruturada foi utilizada como o último método de coleta de dados. Ela foi elaborada com seis questões abertas, que proporcionaram aos entrevistados a oportunidade de expressar suas opiniões de maneira espontânea, permitindo captar percepções mais profundas sobre o impacto da intervenção realizada. Entretanto, para garantir a eficácia das entrevistas, ressaltou-se a importância de manter o foco nas perguntas e ajustar a abordagem conforme a fluidez das respostas.

2.2 Técnica para Análise dos Dados

Neste tópico, são discutidas as técnicas de análise de dados utilizadas nesta tese. Esta etapa da investigação não é simples, pois qualquer análise investigativa exige a apresentação e interpretação dos dados com clareza e precisão. A complexidade torna-se ainda mais evidente em uma análise qualitativa, que busca compreender aspectos que os dados quantitativos não revelam, aprofundando a interpretação do objeto de estudo.

A análise dos dados observados nas aulas e nas interfaces do ggb-CB foi realizada com base nas contradições propostas por Engeström (2016), sendo que a quarta contradição foi articulada com o modelo dos níveis de aprendizagem de Van Hiele (1986). Essa combinação de teorias possibilitou uma compreensão mais profunda das interações e dos processos de aprendizagem dos estudantes no ambiente digital.

É importante ressaltar que o modelo dos níveis de aprendizagem de Van Hiele (1986), apesar de receber diversas críticas, foi escolhido para a análise desta parte do estudo, pois a pesquisa qualitativa permite a seleção das ferramentas mais adequadas de acordo com a perspectiva do pesquisador sobre os dados coletados. Nesse tipo de pesquisa, a flexibilidade para escolher abordagens e modelos que se alinhem com os objetivos e as características do estudo é um diferencial significativo, possibilitando uma interpretação mais rica e contextualizada dos fenômenos observados. Contudo, nada impede que, em uma futura reaplicação da pesquisa, seja adotado outro modelo de níveis de aprendizagem, caso este se revele mais apropriado ao contexto ou às novas descobertas.

Os questionários foram analisados por meio de dados estatísticos, como frequência e porcentagem, mantendo um diálogo com as ideias teóricas apresentadas na fundamentação. O objetivo principal era quantificar elementos iniciais para a implementação da proposta intervencionista. Desse modo, esse tipo de análise foi essencial para garantir que as decisões fossem embasadas em dados concretos.

Dentre as diversas técnicas de análise de dados, este trabalho também se fundamenta na Análise Temática proposta por Braun e Clarke (2022) para a interpretação das entrevistas. As autoras delineiam um processo composto por seis fases, ressaltando a importância de cada uma delas, o que possibilita ao pesquisador desenvolver ou adaptar instrumentos de análise além dos que foram apresentados, conforme as descrições apresentadas no **Quadro 10**.

Quadro 10 - Etapa da Análise Temática

1ª Fase	2ª Fase	3ª Fase	4ª Fase	5ª Fase	6ª Fase
Familiarização com dados	**Gerando códigos iniciais**	**Buscando temas**	**Revisando os temas**	**Definindo e nomeando os temas**	**Produzindo o relatório**
Transcrever os dados e revisá-los; ler e reler as informações da pesquisa; anotar ideias iniciais ao longo do processo.	Codificar aspectos interessantes dos dados de maneira sistemática em todos os achados da pesquisa e reunir extratos relevantes para cada código.	Organize os códigos em temas-chave e agrupe todos os dados relevantes relacionados a cada um deles.	Verificar se os temas estão funcionando em relação aos extratos e ao banco de dados como um todo; gerar um mapa temático da análise.	Refinar os detalhes de cada tema e a narrativa que a análise apresenta; criar definições e denominações claras para cada tema.	Fornecer exemplos vívidos; realizar uma análise final dos extratos selecionados em relação à pergunta de pesquisa e à literatura existente; apresentar um relato científico da análise.

Fonte: Pesquisador (2024).

Na fase de familiarização, foram realizadas as operações preparatórias essenciais para uma análise robusta. Em decorrência disso, a primeira etapa desse processo consistiu na transcrição das sete entrevistas, seguida de uma leitura minuciosa dos dados para assegurar a compreensão de todos os aspectos relevantes. A geração de códigos iniciais envolveu a identificação de segmentos expressivos nos dados e a atribuição de códigos preliminares a esses trechos. Cada conjunto de dados foi analisado de forma detalhada, e os elementos mais relevantes foram sistematicamente codificados. Na fase de busca por temas, os códigos foram agrupados em potenciais temas, com o propósito de identificar padrões e tendências

significativas. Essa etapa incluiu uma análise crítica dos códigos e a busca por relações entre eles, visando à formação de temas mais amplos e coerentes.

A revisão dos temas foi fundamental para garantir a clareza e a exclusividade de cada um deles. Os temas foram refinados para eliminar sobreposições, assegurando que cada um fosse bem definido. Esse processo garantiu que os temas finais fossem robustos e representassem com precisão os dados coletados. Em decorrência disso, todas as transcrições relevantes foram analisadas dentro desse âmbito, que abrange cinco fases, conforme as descrições apresentadas no **Quadro 11**.

Quadro 11 – Modelo de análise das entrevistas

1ª Fase	2ª Fase	3ª Fase	4ª Fase	5ª Fase
"Isso foi o que mais me dificultou no curso, pois eu não sabia nada, absolutamente nada sobre o GeoGebra, que conheci durante as aulas". (Mary)	Primeira vez utilizando ferramentas tecnológicas	Dificuldade inicial com o uso da ferramenta digital	Adaptação ao uso de tecnologias	Adaptação Tecnológica

Fonte: Pesquisador (2024).

Essa definição clara e precisa possibilitou a construção de uma narrativa temática coesa, que será apresentada no relatório final sob o tópico 'Discussões Temáticas'. O relatório está dividido em dois tópicos: o primeiro aborda a sexta etapa da expansão da aprendizagem proposta por Engeström e Sannino (2016), relacionada à reflexão, e o segundo trata da sétima etapa, que diz respeito à consolidação. Como consequência, os resultados da pesquisa foram organizados de maneira a facilitar a compreensão dos leitores, destacando as principais percepções encontradas.

Neste processo investigativo, as fases foram empreendidas de forma estruturada e interligada, promovendo uma análise aprofundada dos dados coletados. Além disso, as inferências que orientaram nossas interpretações foram elaboradas à luz do contexto teórico e conceitual desta tese. De acordo com Braun e Clarke (2006), a flexibilidade do design teórico e de pesquisa permite aos pesquisadores aplicar diversas teorias na Análise Temática dentro de diferentes epistemologias, fortalecendo, assim, o processo analítico. Buscou-se, portanto, extrair significados relevantes das análises realizadas, proporcionando uma compreensão enriquecedora e fundamentada para as conclusões alcançadas.

3 A IDEALIZAÇÃO DA TECFORMAÇÃO DIGITAL

Nesta seção, apresenta-se a proposta da Tecformação Digital, um modelo de ensino híbrido inovador que visa criar oportunidades educacionais que transcendam as fronteiras físicas das escolas e superem as expectativas convencionais do processo de ensino curricular, por meio da mediação tecnológica das ferramentas digitais. Para facilitar a compreensão, esta parte foi organizada em três tópicos.

No primeiro tópico, é realizada uma RBS que analisa a aplicação da TA no contexto educacional brasileiro, com foco na incorporação de recursos tecnológicos na Educação Matemática. Ao revisar os estudos existentes, a pesquisa identifica lacunas significativas na literatura, especialmente no que diz respeito à integração eficaz das tecnologias na formação de educadores. Essas lacunas, que indicam áreas ainda pouco exploradas ou insuficientemente desenvolvidas, foram fundamentais para direcionar a pesquisa e serviram como base para a formulação da Tecformação Digital.

No segundo tópico, apresenta-se a Tecformação Digital, uma abordagem inovadora que integra a formação humana com a digital no contexto do ensino híbrido, utilizando tecnologias interativas, como o GeoGebra *Classroom*. Estruturada em cinco fases — exploração, interação, proatividade, mediação e avaliação —, essa abordagem tem como intencionalidade proporcionar uma forma ativa e autônoma de construção do conhecimento. Fundamentada na TA de Alexei Leontiev e na TAE de Yrjo Engeström, a proposta é descrita com o intuito de promover tanto a aprendizagem individual quanto a coletiva, estimulando processos como autoformação, heteroformação e o desenvolvimento de competências digitais essenciais para uma educação contemporânea.

O último tópico explora a integração de práticas pedagógicas híbridas com tecnologias interativas no ensino geométrico, fundamentando-se no modelo da Tecformação Digital. Inicialmente, apresenta as articulações tripolares das AOEA, que envolvem três componentes principais: digitalidade, construção e maturação. Em seguida, descreve-se a proposta pedagógica para a realização de aulas dinâmicas e flexíveis, com o intuito de promover a expansão da aprendizagem, estimular a construção coletiva do conhecimento e potencializar o engajamento ativo dos estudantes. Para isso, o tópico detalha o sistema de atividades adotado, esclarecendo a composição e as interações entre seus elementos.

3.1 Efeito Zoom: a TA nos contextos formativos da Educação Matemática

Este tópico tem o propósito de estabelecer os fundamentos iniciais desta pesquisa, traçando os primeiros passos em direção ao seu desenvolvimento. Aqui, é apresentada uma síntese de uma revisão sistemática da literatura[4], voltada para a exploração da seguinte indagação: como outros estudos, teses e dissertações abordaram e investigaram os processos de ensino e aprendizagem da Matemática ao incorporar a TA em contextos formativos que utilizam recursos digitais? Por conseguinte, realizou-se uma exploração preliminar descritiva e exploratória, utilizando procedimentos que envolvem uma busca sistemática de dados por meio da pesquisa bibliográfica. Especificamente, a abordagem se enquadra na categoria de RBS.

Para delimitar o campo da pesquisa, a RBS foi realizada nas plataformas *online* do catálogo de teses e dissertações da Capes e na BDTD. A busca foi direcionada a teses e dissertações que abordassem a temática da "Teoria da Atividade no ensino e aprendizagem de Matemática". Para isso, foram utilizados três descritores: "Teoria da Atividade", "ensino e aprendizagem" e "Matemática". As aspas duplas foram empregadas para garantir a especificidade na busca, assim como o operador booleano "AND" entre os descritores.

A busca inicial no catálogo de teses e dissertações da Capes produziu um grande número de resultados, que foram refinados progressivamente por meio da aplicação de aspas duplas e do operador booleano "AND". A busca na BDTD também gerou um grande número de resultados. Em decorrência disso, os trabalhos encontrados nessas plataformas foram submetidos a critérios de inclusão e exclusão. Para selecionar as produções acadêmicas, foram estabelecidos critérios específicos. Nesse sentido, definiu-se que os trabalhos selecionados deveriam ter sido publicados entre 2016 e 2021, aprovados pela comunidade científica e estar integralmente disponíveis em bases de dados eletrônicas. Por outro lado, foram excluídos os trabalhos que não abordavam a relação entre ensino e aprendizagem de Matemática com a TA, bem como aqueles que não evidenciaram o uso de recursos digitais ou que eram duplicados.

Após o processo de refinamento, foram identificadas oito produções acadêmicas relevantes para a pesquisa, selecionadas de acordo com os critérios estabelecidos. Esses trabalhos constituem o conjunto de dados subjacente à análise nesta RBS. Posteriormente, a análise dos dados foi realizada após o refinamento das produções acadêmicas. Nesse contexto, foi conduzida uma investigação descritiva e exploratória dos dados por meio de uma leitura

[4] Neste tópico, apresenta-se uma síntese do artigo publicado em 2023 em uma revista classificada como Qualis A3, enriquecida com elementos visuais e textuais relevantes para esta pesquisa. Disponível em: https://interfaces.unileao.edu.br/index.php/revista-interfaces/article/view/1101. Acesso em: 29 ago. 2023.

completa, utilizando uma abordagem predominantemente qualitativa. A análise foi caracterizada por uma avaliação crítica e reflexiva dos resultados em relação aos objetivos delineados.

3.1.1 Estratégias e confluências nas produções acadêmicas analisadas

Nesta etapa, foi realizada uma análise descritiva das produções acadêmicas selecionadas. A **Tabela 1** abaixo apresenta os trabalhos em ordem decrescente, de acordo com o 'Ano' de defesa. As colunas intermediárias exibem o 'Título', o nome do(a) 'Autor(a)', bem como o nome do 'Programa" e da 'Instituição' de afiliação, além da localidade institucional, ou seja, 'Cidade'. A última coluna contém os códigos de identificação, sendo que as dissertações são identificadas pela letra 'D' seguida de um número sequencial, e as teses pela letra 'T', também seguida de um número sequencial.

Tabela 1 – Produções Acadêmicas Selecionadas: identificação

Ano	Título	Autor(a)	Programa Instituição Cidade	Código
2019	A Didática da Matemática como Disciplina: um estudo em cursos de Licenciatura em Matemática a distância	Claudia Maria Witt	Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática Universidade Federal do Paraná Curitiba – PR	**D1**
	A Aprendizagem da Docência em Matemática a partir da Elaboração de uma Situação Desencadeadora da Aprendizagem	Cezar Augusto Ferreira	Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática Universidade Federal de Goiás Goiânia – GO	**D2**
	Robótica Educacional Inclusiva: uma experiência com alunos da rede pública de ensino	Railane Costa Santos	Pós-Graduação em Ensino Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia Vitória da Conquista – BA	**D3**
2018	O Processo de Ensino e Aprendizagem dos Conceitos de Razão e Proporção Mediado pela Atividade Orientadora de Ensino na Educação Básica	Jefferson Kelson Cavalcante Rodrigues Oliveira	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) Instituto Federal do Piauí Floriano – PI	**D4**
	Usos/Significados de Materiais Manipuláveis (Régua e transferidor) e do *Software* GeoGebra como Formas Alternativas de Ensinar Semelhança de Triângulos a Estudantes do 9º Ano de uma Escola Pública de Rio Branco	Héliton Melo da Silva	Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática Universidade Federal do Acre Rio Branco – AC	**D5**
2017	Teoria da Atividade e Lousa Digital no Ensino Superior: perspectivas para aprendizagem dos conceitos matemáticos	Danubia Sebastião	Pós-Graduação em Educação Universidade do Extremo Sul Catarinense Criciúma – SC	**D6**
2016	Modelagem Matemática na Modalidade *Online*: análise segundo a teoria da atividade	Jeannette Emma Galleguillos Bustamante	Pós-Graduação em Educação Matemática Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"	**T1**

			Rio Claro – SP	
	Atividades Docentes de uma Professora de Matemática: artefatos mediadores na EAD	Jorge Luís Costa	Pós-Graduação Conhecimento e Inclusão Social Universidade Federal de Minas Gerais Belo Horizonte – MG	**T2**

Fonte: Pesquisador (2023).

Observando os títulos das produções acadêmicas, é possível identificar tendências relacionadas a diferentes objetos de estudo no campo da Educação Matemática. No contexto analisado, os trabalhos D1, D2 e D6 abordam aspectos da formação inicial e continuada de professores. Por outro lado, os trabalhos D3, D4 e D5 exploram características de experimentações vinculadas ao ensino na Educação Básica. De forma mais específica, o trabalho T1 discute a tendência da Modelagem Matemática, enquanto o trabalho T2 trata de um caso específico relacionado à elaboração de atividades docentes na modalidade de ensino não presencial. De forma adicional, o trabalho D3 também aborda o tema da robótica, que se configura como uma tendência emergente na esfera educacional.

Vale ressaltar que essas produções acadêmicas são frutos de programas de pós-graduação *stricto sensu*, tanto de mestrado quanto de doutorado, abrangendo diferentes áreas do conhecimento. Nesse contexto, as produções D1, D2, D6 e T1 estão relacionadas à área da Educação, sendo que D1 e D2 também possuem conexões com as Ciências e a Matemática, enquanto a T1 está estritamente ligada à Matemática. Por sua vez, as produções D3 e D5 estão vinculadas à área do Ensino, com D5 também abordando as Ciências e a Matemática. A produção T2 pertence à subárea de Conhecimento e Inclusão Social, destacando-se por não se enquadrar nas áreas mencionadas anteriormente nem apresentar uma ligação explícita com a Matemática. Além disso, a produção D4 é resultado de um Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat). É importante mencionar que a produção D5 também ressalta o caráter profissional do mestrado.

Esses programas estão distribuídos por diferentes regiões do Brasil, com dois deles localizados no Nordeste — um no interior da Bahia e outro no interior do Piauí; dois no Sudeste — um no interior de São Paulo e outro na capital de Minas Gerais; um no Centro-Oeste, na capital de Goiás; um no Norte, na capital do Acre; e dois no Sul — um no interior de Santa Catarina e outro na capital do Paraná. Portanto, eles estão presentes tanto em capitais quanto em cidades do interior dos estados. De forma complementar, as instituições envolvidas são classificadas como Universidades Federais, Universidades Estaduais, Universidade Comunitária e Instituto Federal. A **Figura 2** ilustra essa distribuição de maneira regional.

Figura 2 – Distribuição Regional dos Trabalhos Analisados

Fonte: Pesquisador (2023).

Diante do exposto, inferimos que a TA, apesar de estar sendo investigada e aplicada no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, apresenta evidências da utilização de recursos tecnológicos por pesquisadores de distintas áreas do conhecimento, com pelo menos uma produção em cada região do país. No entanto, considerando a quantidade de pesquisas realizadas, a articulação dessa teoria com o mencionado processo ainda é pouco explorada nas produções acadêmicas atuais.

A **Tabela 2** complementa a tabela anterior e foca em aspectos práticos relacionados à coleta de dados nas produções acadêmicas analisadas. Em decorrência disso, a primeira coluna mantém a referência dos trabalhos. Na segunda, destaca-se de forma concisa o 'Objetivo Principal' de cada estudo. A terceira oferece uma descrição do '*Lócus* da Pesquisa', ou seja, o ambiente onde as investigações foram executadas. Por fim, a quarta coluna indica os 'Recursos Digitais' utilizados, delineando as TD empregadas nesse contexto específico.

Tabela 2 – Produções Acadêmicas Selecionadas: estratégias

Código	Objetivo Principal	Lócus da Pesquisa	Recurso Digital
D1	Reconhecer elementos essenciais e estruturantes da Didática da Matemática como disciplina nos cursos de LM a Distância.	Um Polo de Apoio Presencial	Ambiente Virtual
D2	Investigar as contribuições do processo de elaboração de uma Situação Desencadeadora da Aprendizagem para a aprendizagem da docência de professores que participam do Clube de Matemática.	Um Clube da Matemática	Ambiente Virtual Editor de Vídeo
D3	Analisar como RE pode contribuir para que alunos, da rede pública de ensino, com NEE desenvolvam habilidades físicas, sociais e emocionais e qual o papel do professor como mediador dessa aprendizagem.	Uma Escola da Rede Pública de Ensino Municipal	Plataforma Arduino Scratch para Arduino – S4A
D4	Analisar como as atividades orientadas de ensino de razões e proporções contribuem para a aprendizagem desses conceitos por estudantes do ensino médio, e assim como	Um Centro de Ensino Público	Editores de Textos e Imagens

	também estas práticas estão ligadas ao cotidiano desses estudantes.		
D5	Descrever formas alternativas de se ensinar o conteúdo semelhança de triângulos, a partir do uso de materiais manipuláveis (régua e transferidor) e o *software* GeoGebra buscando ver de outra maneira como se mediar, conteúdo – aluno – aprendizagem.	Uma Escola da Rede Pública de Ensino Municipal	GeoGebra
D6	Investigar a proposição de um conjunto de tarefas, a partir de um olhar de pressupostos da Teoria da Atividade, como indicador de possibilidade para a organização de ensino do conceito de medida de tendência central, para o ensino superior, tendo como uma operação o uso da Lousa Digital.	Interfaces Digitais	*ActivInspire*
T1	Como ocorre o desenvolvimento de processos de Modelagem Matemática em um curso de extensão *online*, segundo a Teoria da Atividade?	Um Curso Extensionista *Online*	*Facebook;* GeoGebra.
T2	Compreender as relações entre a atividade docente de uma professora de Matemática de um curso a distância, que faz parte do sistema UAB, e os artefatos mediadores utilizados e apropriados por ela.	Uma Disciplina Virtual	*Moodle* GeoGebra NetMeeting Blueberry Flashback *PowerPoint Impress*

Fonte: Pesquisador (2023).

Na **Tabela 2**, destaca-se a produção acadêmica D1, que buscou alcançar o objetivo da pesquisa ao combinar análise documental com observações das aulas da disciplina "Iniciação à Pesquisa em Didática da Matemática" em um curso de LM a distância de uma IES pública. As observações foram realizadas em um polo de apoio presencial na cidade de Indaial, Santa Catarina. Embora o capítulo 2 da produção mencione interações entre conhecimentos de Matemática, aspectos didático-pedagógicos e o uso de TD, não fornece detalhes sobre a plataforma de aprendizagem ou outros recursos digitais utilizados. Essa falta de informações limita a compreensão do ambiente virtual e das ferramentas que podem ter influenciado as atividades observadas.

Na análise da produção acadêmica D2, observa-se que seu objetivo principal é desenvolver uma Situação Desencadeadora da Aprendizagem (SDA) para a formação de professores do Clube de Matemática (CluMat) da Universidade Estadual de Goiás (UEG). O foco está em atividades de ensino relacionadas a conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental, visando à formação dos graduandos do clube. A experiência formativa é baseada na SDA, estruturada em AOE, com ênfase em números. A escolha deste trabalho se deve à menção de experimentos formativos que utilizam SDA e recursos digitais. As atividades foram organizadas em uma História Virtual intitulada "Os *Agnuns*", apresentada em formato de Histórias em Quadrinhos. O estudo também menciona o uso de um ambiente virtual como sala temática e inclui dois vídeos narrados por um dos participantes. No entanto, não são fornecidos detalhes sobre a plataforma de aprendizagem ou os recursos digitais utilizados para editar os vídeos, o que limita a compreensão dos aspectos tecnológicos do estudo.

A produção acadêmica D3 concentra-se na Robótica Educacional (RE) voltada para estudantes com Necessidades Educacionais Especiais (NEE). A pesquisa foi executada em uma oficina de RE, com a participação de quatro estudantes e duas professoras especializadas, utilizando materiais de baixo custo. O destaque foi dado ao *Arduino Uno*, por ser financeiramente acessível, e ao *software Scratch* para *Arduino* S4A, que facilita a programação. No entanto, o trabalho D3 não detalha como esses recursos foram integrados na oficina e carece de informações sobre os resultados e as contribuições específicas para o desenvolvimento das habilidades dos estudantes com NEE. Essa ausência de detalhes dificulta uma compreensão completa do impacto desses recursos na aprendizagem.

Ao analisar o trabalho acadêmico D4, observamos que seu principal objetivo é abordar as AOE relacionadas a razões e proporções no ensino médio. A pesquisa foi realizada com uma turma do 3º ano do Ensino Médio no Centro de Ensino Teresa Leite Miranda, em Bom Lugar – MA. Destaca-se a criação de histórias virtuais que conectam as questões do Enem a situações do cotidiano dos estudantes, utilizando conteúdos textuais e visuais relevantes ao seu contexto. No entanto, o trabalho não detalha os recursos tecnológicos empregados na elaboração dessas histórias, mencionando apenas que estavam disponíveis em formato impresso. Essa ausência de informações sobre as ferramentas digitais limita a compreensão da eficácia e do impacto delas na aprendizagem dos estudantes.

Ao analisar o trabalho acadêmico D5, observa-se que seu objetivo é explorar as potencialidades do *software* GeoGebra para aprimorar a relação entre conteúdo, estudante e aprendizagem. A pesquisa foi desenvolvida com os estudantes da turma A do 9º ano em uma escola pública de Rio Branco - AC. O GeoGebra foi utilizado em um segundo encontro de 3 horas, após uma primeira aula com materiais manipuláveis. Os resultados indicaram que os estudantes apresentaram um desempenho superior ao utilizar dispositivos móveis em comparação com régua e transferidor. Isso levanta questões sobre as vantagens e desvantagens de diferentes recursos, bem como sobre as preferências dos estudantes. No entanto, o trabalho poderia ser ainda mais enriquecido se incluísse detalhes sobre a metodologia de avaliação do desempenho dos estudantes, o que contribuiria para uma compreensão mais aprofundada do impacto do *software* e dos materiais na aprendizagem sobre a semelhança de triângulos.

Ao analisar o trabalho acadêmico D6, observa-se que seu objetivo é organizar o ensino de medidas de tendência central no ensino superior, fundamentando-se nos princípios da TA. A pesquisa explora o uso da lousa digital como recurso para ensinar esse conceito, utilizando interfaces digitais para a coleta de dados, embora não envolva a participação de estudantes. Para

a elaboração das atividades, foi adotado o *software ActivInspire*, que possibilitou a criação de oito tarefas interativas, adaptadas a partir de estudos teóricos, especialmente sobre multiplicação e divisão, conforme proposto por Davidov (1987) e colaboradores. O estudo investiga de que maneira a lousa digital e as tarefas podem aprimorar o ensino de medidas de tendência central. No entanto, seria benéfico que o D6 fornecesse mais detalhes sobre a adaptação das tarefas e a estruturação delas, a fim de facilitar a compreensão desse conceito.

Ao analisar a produção acadêmica T1, observa-se que o objetivo da pesquisa é desenvolver processos de Modelagem Matemática com base na TA. O estudo foi efetuado por meio de um curso *online* de 32 horas intitulado 'Tendências em Educação Matemática: modelagem, aplicações e investigação', que contou com a participação de quatro professores organizadores, três professores convidados e 20 estudantes, incluindo professores de Matemática de diferentes estados do Brasil e de outros países da América do Sul. O curso utilizou a rede social *Facebook* como plataforma, criando um grupo fechado para organizar as aulas e disponibilizar as tarefas. Nesse cenário, os professores gerenciavam os eventos, que eram organizados em blocos de discussão. Além disso, os participantes utilizaram o *software* GeoGebra para modelar dados da *Internet*. No entanto, seria interessante que o autor aprofundasse a discussão sobre os resultados do uso da rede social como ambiente de aprendizagem, bem como explorasse as vantagens e os desafios desse ambiente em contextos educacionais.

O trabalho acadêmico T2 investiga a atividade docente de uma professora de Matemática em um curso de EaD, realizado em duas turmas da disciplina de Álgebra Vetorial, cada uma com 60 horas, em uma LM de uma universidade federal. O estudo destaca o uso da plataforma *Moodle* como recurso central, onde eram disponibilizadas videoaulas e fóruns de discussão que exigiam o uso da linguagem *LaTeX*, além de atividades que incluíam o *software* GeoGebra. Os tutores precisavam dominar os recursos digitais mencionados e ter conhecimentos básicos de HTML. Essa pesquisa também explora os *softwares* utilizados pela professora para criar videoaulas, como o *NetMeeting* para a lousa digital e o *Blueberry Flashback* para gravação de tela, com slides elaborados no *PowerPoint* ou no *Impress*. Embora o estudo detalhe a apropriação dos recursos tecnológicos pelos participantes, seria enriquecedor incluir mais informações sobre suas percepções e resultados, além de discutir as vantagens e os desafios enfrentados pelos docentes na EaD e seu impacto na aprendizagem dos estudantes.

As análises empreendidas nas produções acadêmicas revelam lacunas significativas relacionadas aos recursos tecnológicos utilizados nos estudos. Essas lacunas incluem a falta de

especificação das plataformas de aprendizagem, a ausência de detalhes sobre os recursos digitais empregados, a carência de informações sobre a incorporação e os resultados obtidos com o uso desses recursos tecnológicos, a falta de discussão sobre os critérios de avaliação e o impacto dos recursos tecnológicos na aprendizagem, além da ausência de detalhes sobre a utilização e a integração dos recursos digitais nas atividades propostas.

Para um curso que visa contemplar a formação humana por meio do uso das TD, é primordial preencher essas lacunas e fornecer informações mais detalhadas sobre os recursos tecnológicos utilizados, as plataformas de aprendizagem adotadas e os resultados alcançados com a utilização dessas tecnologias. Em acréscimo, é fundamental promover discussões sobre as implicações pedagógicas desses recursos, as possíveis vantagens e os desafios enfrentados ao utilizá-los, bem como explorar de que maneira eles podem efetivamente potencializar a aprendizagem dos estudantes.

A **Tabela 3** apresenta uma continuidade das tabelas anteriores, fornecendo elementos teóricos relevantes extraídos das produções acadêmicas analisadas. Na primeira coluna, mantém-se a mesma estrutura da tabela anterior. A segunda especifica o ‘Objeto de Estudo’, detalhando o tópico abordado na pesquisa. A terceira destaca o ‘Aporte Teórico’, abordando tanto a adoção da TA nas pesquisas quanto os entrelaçamentos teóricos utilizados. Por fim, a última coluna elucida a ‘Contribuição’ da pesquisa, indicando a categoria que mais se beneficia dos resultados obtidos.

Tabela 3 – Confluências

Código	Objeto de Estudo	Aporte Teórico		Contribuição
		Teoria da Atividade	Entrelaçamentos Teóricos	
D1	Didática da Matemática	Teoria Histórico-cultural (Vygotsky, 2016) Teoria da Atividade (Leontiev, 1978, 1983)	Atividade Orientadora de Ensino (Moura, 1996) Ensino Desenvolvimental (Davidov, 1988) Teoria da Assimilação (Galperin, *apud* Nuñez, 2009)	Formação Inicial de Professores de Matemática
D2	Espaço de Aprendizagem para a Docência	Teoria Histórico-cultural (Vygotsky, 1993) Teoria da Atividade (Leontiev, 1978, 1983)	Atividade Orientadora de Ensino (Moura, 1996, 2004)	Formação Inicial de Professores de Matemática
D3	Robótica Educacional Inclusiva	Teoria Sócio-Histórica (Vygotsky, Leontiev, Luria, 2010)	Teoria do Construcionismo (Papert, 1985, 1994) Construcionismo Contextualizado (Valente, 1991, 1999)	Aprendizagem Discente
D4	Conteúdos Matemáticos	Teoria da Atividade (abordagens de diferentes pesquisadores)	Atividade Orientadora de Ensino (Moura, 1996, 2002) Atividade de Estudo (Davidov, 1988)	Aprendizagem Discente
D5	Recursos Didáticos	Teoria da Atividade (Leontiev, 1983) (Engeström, 1987)	Abordagem da Linguagem (Wittgenstein, 1987) Perspectiva da Semiótica	Formação Continuada do Professor de Matemática

			(Abordagens de diferentes pesquisadores)	
D6	Tecnologia da Informação e Comunicação	Teoria da Atividade (Leontiev, 1978, 2004)	Atividade Orientadora de Ensino (Moura, 1996) Atividade de Estudo (Davidov, 1987, 1988)	Formação Continuada do Professor de Matemática
T1	Modelagem Matemática	Teoria Histórico-cultural da Atividade (Vygotsky, 1978, 1981) (Leontiev, 1978) (Engeström, 1987, 1999)	Teoria da Aprendizagem Expansiva (Engeström, 1987) Seres-humanos-com-mídias (Borba, 2002)	Formação Continuada do Professor de Matemática
T2	Educação a Distância	Teoria Histórico-cultural da Atividade (Vygotsky, 1978) (Leontiev, 1978, 1981) (Engeström, 1987, 1999, 2008)	Teoria da Aprendizagem Expansiva (Engeström, 1987, 2003)	Formação Continuada do Professor de Matemática

Fonte: Pesquisador (2023).

O trabalho D1 concentra-se na Didática da Matemática (DM), utilizando a Teoria Histórico-cultural (THC) de Vygotsky (2016) para investigar o desenvolvimento psíquico e a formação da consciência social do professor. Também explora a TA de Leontiev (1978, 1983), analisando elementos como necessidade, motivo, objetivo, ações e operações, que auxiliam na compreensão da interconexão desses conceitos nas atividades de ensino e aprendizagem. Destaca a abordagem das AOE de Moura (1996) e as contribuições do Ensino Desenvolvimental de Davidov (1988), enfatizando a didática desenvolvimental e a Teoria da Assimilação de Galperin (*apud* Nuñez, 2009). Essas contribuições são relevantes para a formação inicial de professores de Matemática, ressaltando a necessidade de revisar a DM nos cursos de licenciatura a distância, evidenciando a importância da TA para a qualificação da DM na formação docente.

O trabalho D2 analisa o clube como um ambiente de aprendizagem para professores, abordando inicialmente perspectivas sobre a formação docente e explorando a THC de Vygotsky (1993) e a TA de Leontiev (1978, 1983), com foco no conceito de atividade e nas funções psíquicas superiores. A pesquisa discute a AOE de Moura (1996, 2004), destacando sua aplicação nas atividades de ensino em SDA. O D2 busca fortalecer as atividades orientadas de ensino como ferramentas teórico-metodológicas para os membros do clube, enfatizando a formação inicial de professores de Matemática, especialmente no CluMat da UEG em Quirinópolis. A análise evidencia o valor do clube como espaço de aprendizado para a docência e para a Matemática escolar, além da relevância das teorias abordadas para fundamentar as práticas educativas no contexto do clube.

A pesquisa D3 investiga a Robótica Educacional Inclusiva (REI) no contexto da Educação Inclusiva, fundamentando-se nas ideias de Papert (1985, 1994) sobre o

Construcionismo e na abordagem do Construcionismo Contextualizado de Valente (1991). Essa teoria auxilia o educador a atuar como mediador na ZDP, alinhando-se aos princípios vygotskianos. O estudo também explora a TA de Vygotsky, Leontiev e Luria (2010). A pesquisa apresenta a TA como um sistema que apoia a assimilação do aprendizado por meio de ações, especificamente na construção de instrumentos físicos dentro da REI. O foco da pesquisa é enriquecer a aprendizagem dos estudantes, especialmente aqueles com NEE, integrando a REI como uma ferramenta alternativa que contribui para a superação de barreiras cognitivas, sociais e físicas.

O estudo D4 concentra-se nos conteúdos de razão e proporção na Educação Básica, apresentando um embasamento teórico que menciona a TA de forma superficial. Destacam-se as contribuições de Davidov (1988) e Moura (1996, 2002) sobre a classificação das atividades de estudo, que incluem tarefas, ações e autoavaliação. Esses conceitos reforçam o modelo estrutural da AEO proposto por Moura (1996), enfatizando sua importância como ferramenta de transformação na realidade educacional. Nesse cenário, D4 estabelece uma conexão entre as AOE de Matemática e a experiência dos estudantes, com o objetivo de melhorar seu desempenho nas atividades de aprendizagem. Como resultado, a abordagem formativa proposta contribuiu para qualificar o processo de aprendizagem, permitindo que os estudantes avaliassem os aspectos positivos e negativos das atividades e alcançassem os objetivos estabelecidos.

O estudo D5 concentra-se nos recursos didáticos, especialmente em materiais manipuláveis e *softwares* educacionais, para o ensino geométrico. O embasamento teórico fundamenta-se na TA de Leontiev (1983), que inclui uma contextualização histórica e a definição de objetivos, além de expandir a TA no contexto ocidental por meio de Engeström (1987). A pesquisa também examina os reflexos da TA em temas como imagem, pedagogia do olhar, fotografia, educação, arte visual e semiótica, incluindo uma breve menção à linguagem, conforme discutida por Wittgenstein (1987), que oferece uma reflexão sobre como os significados e interpretações das imagens podem ser compreendidos a partir das práticas sociais e culturais. Em meio a esse contexto, a pesquisa apresenta a TA como um guia para organizar ações educacionais e conclui que sua aplicação contribui para a formação continuada de professores de Matemática, desenvolvendo um tutorial com sequências didáticas que utilizam materiais alternativos e o *software* GeoGebra, com o objetivo de aprimorar a prática pedagógica e incentivar a formação contínua. Em virtude disso, o estudo ressalta a importância da educação continuada e do uso eficaz de tecnologias para a abordagem de ensino mencionada.

O estudo D6 investiga a TIC, com foco na lousa digital. O embasamento teórico apoia-se na TA de Leontiev, relacionando o conceito de atividade e seus elementos à organização das atividades do professor, com ênfase na AOE proposta por Moura (1996). Além disso, destaca o modelo davidoviano de organização do ensino, especialmente na Atividade de Estudo, e elenca os princípios didáticos da escola tradicional conforme Davidov (1987, 1988). O objetivo do estudo D6 é utilizar a TA para fortalecer os princípios da organização do ensino, promovendo avanços teóricos na área. A pesquisa contribui para a formação continuada do professor de Matemática, desenvolvendo tarefas e modelando o processo avaliativo, o que melhora a prática docente e a utilização da lousa digital como recurso tecnológico no ensino, beneficiando tanto professores quanto estudantes.

O trabalho T1 concentra-se na Modelagem Matemática como objeto de estudo, apoia-se na THCA, com base nas obras de Vygotsky (1978, 1981), Leontiev (1978) e Engeström (1987, 1999). A pesquisa discute conceitos da THCA, como mediação, ZDP, coletividade e o ciclo de ações de aprendizagem expansiva, além de explorar a TAE de Engeström (1987) e sua relação com o construto "Seres-humanos-com-mídias" de Borba (2002). O T1 apresenta a TA como um referencial teórico que auxilia na compreensão do processo formativo como um sistema de atividade, contribuindo para a formação continuada de professores de Matemática ao integrar TA e Modelagem Matemática em contextos *online*. O estudo oferece valiosas inspirações para a prática docente e para a aplicação da Modelagem Matemática no ensino.

O trabalho acadêmico T2 investiga o modelo de EaD na disciplina de Álgebra Vetorial, fundamentando-se na THCA de Vygotsky (1978). A pesquisa detalha elementos-chave da THCA, destacando as gerações propostas por Engeström (1987, 1999, 2008): a primeira foca na ação mediada; a segunda, na atividade coletiva, com base em Leontiev (1978, 1981); e a terceira aborda diálogos teóricos de Engeström (1987). Também são exploradas as contribuições da TA e da TAE de Engeström (1987, 2013), ressaltando o papel mediador dos artefatos. O T2 apresenta a TA como uma ferramenta para analisar as atividades dos participantes da pesquisa, contribuindo para a formação continuada de professores de Matemática ao oferecer diretrizes para a atuação na EaD, especialmente em licenciaturas no sistema UAB, promovendo uma reflexão sobre a prática pedagógica nesse contexto.

Nos trabalhos analisados, a TA foi aplicada em diversos contextos educacionais, abrangendo desde a formação inicial de professores até a utilização de recursos tecnológicos no ensino de disciplinas específicas da área da Matemática. Dessa forma, a abordagem teórica central, aqui pesquisada, contribuiu para a compreensão dos processos de ensino e

aprendizagem, fornecendo subsídios para a melhoria das práticas pedagógicas e o desenvolvimento de estratégias de ensino mais eficazes.

3.1.2 Caminhos para a inovação

A revisão apresentada ressalta de maneira enfática a importância da exploração da aplicação da TA em diversos contextos educacionais, assim como sua interseção com outras abordagens teóricas relevantes. Ao longo dessa análise, fica evidente que essas investigações desempenham um papel crucial na ampliação da compreensão dos processos formativos e no enriquecimento das práticas educacionais. As contribuições dessas pesquisas não se restringem apenas ao aprimoramento teórico, mas também oferecem subsídios valiosos para qualificar o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos abordados.

É notável que os estudos examinados abrangem tanto o ensino presencial quanto o ensino a distância, o que ressalta a flexibilidade e a adaptabilidade da TA diante das particularidades de cada ambiente educacional. É importante, no entanto, destacar que a aplicação da TA transcende as fronteiras de um único contexto ou modalidade de ensino. Embora os estudos analisados tenham um foco predominante na formação dos indivíduos e enfatizem aspectos relacionados à formação inicial e continuada dos professores, bem como ao processo de aprendizagem dos estudantes, é imprescindível que essas abordagens reforcem ainda mais o papel do professor como mediador do conhecimento e valorizem a importância de sua formação e capacitação aprofundada.

É importante ressaltar que esses estudos também apresentam algumas lacunas que merecem uma análise mais aprofundada: a) Especificação dos Recursos Tecnológicos – há uma falta de informações detalhadas sobre os recursos tecnológicos utilizados. Isso inclui a necessidade de especificar as plataformas de aprendizagem empregadas e as ferramentas digitais aplicadas durante o processo de ensino. Um nível de detalhamento mais profundo permitiria uma compreensão mais abrangente do impacto dessas tecnologias no ambiente educacional; b) Uso Pedagógico das Tecnologias: Para uma compreensão completa, as pesquisas podem aprofundar a análise do uso pedagógico das tecnologias. Isso envolve investigar como os recursos tecnológicos são efetivamente integrados nas atividades de ensino, bem como seu papel na promoção da aprendizagem dos estudantes.

Diante do exposto, esta RBS forneceu orientações inestimáveis para o presente estudo, servindo como ponto de partida na abordagem da Tecformação Digital à luz da TA, por meio

da incorporação de recursos digitais na expansão do pensamento geométrico. Em decorrência disso, no próximo tópico, é apresentado esse modelo enriquecedor e propício ao desenvolvimento tanto de habilidades tecnológicas quanto de competências específicas em conexão com as demandas do cenário híbrido de ensino.

3.2 Tecformação Digital

Ao integrar as TDI em um modelo híbrido que abrange tanto a formação humana quanto a formação digital voltada para o conhecimento disciplinar, surgiu a proposta da Tecformação Digital. O objetivo é promover uma abordagem inovadora para o desenvolvimento de saberes específicos nos conteúdos curriculares. Essa iniciativa não apenas visa atender às necessidades formativas dos indivíduos, mas também enriquecer a experiência de aprendizado, permitindo que o conhecimento seja construído de maneira coletiva, dinâmica e prática.

A Tecformação Digital, ao adotar a linguagem digital e suas tecnologias interconectadas, incorpora um paradigma emergente na era digital, conforme discutido por Lévy (2021). Esse cenário instiga uma abordagem pedagógica fundamentada na construção do conhecimento, tanto de forma individual quanto coletiva, na qual as competências digitais desempenham um papel dinâmico. Essas competências englobam um conjunto essencial de habilidades que possibilitam a identificação e manipulação de diversos recursos digitais, capacitando os indivíduos a explorar, criar, registrar e compartilhar saberes. Além de enriquecer a prática, a habilidade de utilizar eficazmente ferramentas digitais também promove a interação com outras pessoas em diferentes contextos.

Em decorrência disto, a Tecformação Digital apoia-se na interação entre seres humanos e TD no contexto formativo híbrido, sustentada por três aspectos formativos fundamentais: a ecoformação, que aborda a relação entre o indivíduo e seu ambiente de aprendizagem; a autoformação, que diz respeito à relação do indivíduo consigo mesmo; e a heteroformação, que se refere à interação com outras pessoas. Esse processo deve ser potencializado pelo uso de ferramentas digitais interativas, que mediando o aprendizado, possibilitam a transformação das capacidades cognitivas por meio da interação com os outros e com os recursos do ambiente digital.

Nesse contexto da Tecformação Digital, o conteúdo e as práticas de ensino, mediados pelas TDI, são adaptados às características do espaço formativo, às necessidades da comunidade e à realidade do estudante. Essa abordagem visa integrar o ambiente de aprendizagem digital

ao processo educacional, configurando um processo ecoformativo que ocorre em contextos ambientais ou sociais específicos, nos quais as interações e o ambiente ao redor influenciam diretamente o aprendizado (Pineau, 2023).

Essas TDI devem possibilitar que os estudantes interajam com colegas, professores, especialistas e outros membros da comunidade acadêmica, mesmo à distância, alinhando-se ao conceito de heteroformação, que se refere à interação com outras pessoas durante o processo de aprendizagem (Pineau, 2023). Esse procedimento pode ser viabilizado por meio de plataformas sociais, fóruns de discussão, videoconferências e atividades em grupo, enriquecendo a experiência de aprendizagem ao possibilitar a troca de ideias e debates construtivos.

Nesse meio, as TDI também podem desempenhar um papel essencial, oferecendo recursos personalizados e adaptados às necessidades individuais dos participantes, o que favorece a autoformação, relacionada à capacidade do estudante de assumir um papel ativo em sua própria aprendizagem (Pineau, 2023). Em razão disso, as plataformas digitais de aprendizagem adaptativa, os conteúdos *online* e as ferramentas de autoavaliação são exemplos de recursos que permitem ao estudante explorar seus interesses e seu ritmo de aprendizagem, ao mesmo tempo em que desenvolvem habilidades de autorregulação e autogestão.

Ainda no âmbito da Tecformação Digital, é importante enfatizar que a mediação tecnológica envolve a interação com recursos digitais como parte integrante do processo educativo. Isso permite que a interação entre a formação humana e a formação digital seja desenvolvida ou expandida para o domínio de habilidades e conhecimentos específicos. Desse modo, as TD são utilizadas como ferramentas essenciais para o desenvolvimento das competências e habilidades dos estudantes. Assim, recursos multimídia, aplicativos educacionais, simuladores e outras tecnologias interativas podem ser empregados para tornar o ensino mais dinâmico, atrativo e alinhado às demandas da sociedade digital.

Este modelo busca adotar uma abordagem de formação holística, reconhecendo a centralidade das interações humanas e das competências digitais. Sua fundamentação teórica está ancorada na TA, configurando-se como um produto de um sistema de atividades interconectadas, cuja análise deve ser realizada no contexto da evolução cognitiva e tecnológica. Isso possibilita a integração de diversos contextos educacionais, resultando em ambientes de aprendizagem híbridos que transcendem o paradigma convencional.

Nessa conjuntura, a Tecformação Digital busca impulsionar o desenvolvimento de competências tecnológicas, facilitando a troca de conhecimentos entre os indivíduos e promovendo uma aprendizagem mais enriquecedora. De acordo com Lévy (2021), grande parte

das nossas habilidades é adquirida por meio da observação, imitação e prática, em contraste com abordagens que se limitam a teorias ou leituras superficiais. Apoiada nessas ideias, esse modelo de ensino híbrido propõe uma abordagem que se concentra em atender às demandas da cibercultura, permitindo uma manipulação efetiva, domínio e utilização das TD de forma prática e interativa.

Com base nas premissas previamente apresentadas, este modelo inovador foi intrinsecamente entrelaçado com a abordagem da AOE e a utilização de recursos educacionais abertos. Nesse contexto, suas etapas foram meticulosamente planejadas para convergir de maneira harmoniosa, resultando em um notável enriquecimento da experiência educacional. O cerne desse enfoque reside na promoção ativa do protagonismo do estudante em formação, impulsionando interações sociais, estimulando a expansão do pensamento crítico, possibilitando a (re)construção ativa do conhecimento e ampliando os horizontes de aprendizado. Essa abordagem é articulada pela mediação dos sujeitos envolvidos, enquanto a incorporação fluida das TDI permeia cada fase desse dinâmico processo formativo.

Assim como na TA aprimorada por Leontiev (2018), surgem elementos que atuam de forma coordenada para alcançar objetivos específicos. A combinação eficaz das TDI, juntamente com a orientação ativa dos participantes, desempenha um papel fundamental na construção do saber-fazer. Isso indica que a interação harmoniosa entre a ação mediadora das pessoas e o uso das tecnologias possibilita a ampliação do conhecimento.

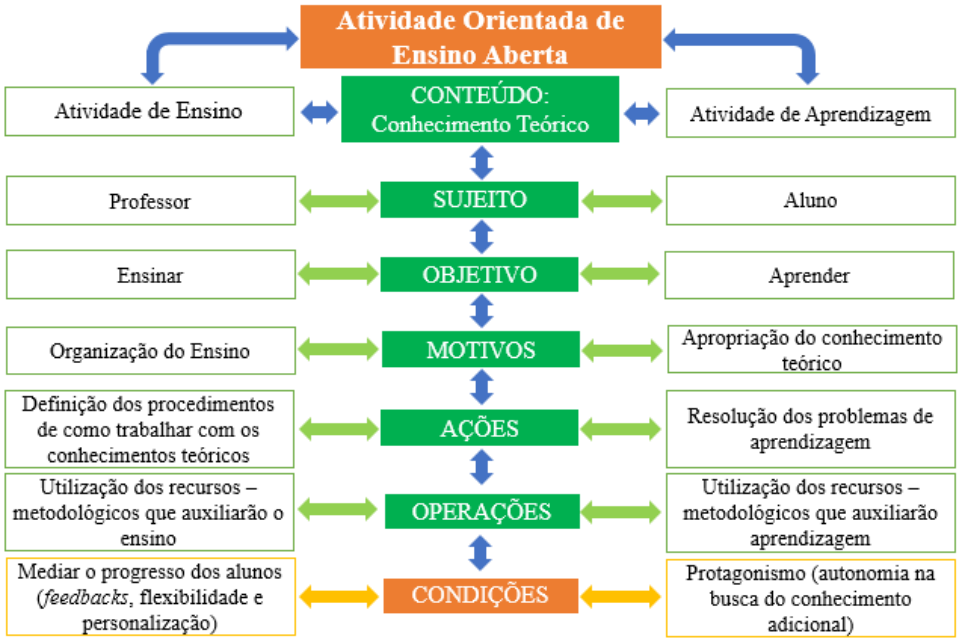
Vale ressaltar que as ideias de Leontiev (2018) enfatizam as condições como elementos ou fatores essenciais para o sucesso das ações. Torna-se evidente que essas condições, que englobam aspectos materiais, sociais e culturais, são componentes essenciais para viabilizar tanto as atividades em si quanto a concretização das metas almejadas. No entanto, é notável que tais condições frequentemente estão ausentes no modelo proposto por Moura *et al.* (2010). Nesse sentido, esta abordagem busca enriquecer esse modelo ao reconhecer que, no contexto da Tecformação Digital, as condições desempenham um papel decisivo, especialmente em relação ao modelo de ensino híbrido.

Diante do cenário de ensino híbrido, que combina momentos presenciais e online, as condições apontadas por Leontiev (2018) adquirem uma nova dimensão. Nesse paradigma, as Atividades de Ensino exigem a presença ativa de um professor mediador. Esse profissional não apenas transmite conhecimento, mas também atua como facilitador, supervisionando o progresso dos estudantes, fornecendo *feedback* enriquecedor e promovendo ajustes no processo de ensino, garantindo flexibilidade e personalização quando necessário. Sua interação direta

com os estudantes é um componente essencial para o sucesso das ações, permitindo uma adaptação mais ágil e individualizada.

No âmbito da Atividade de Aprendizagem, as condições se manifestam por meio do protagonismo do sujeito em formação. A tecnologia proporciona a oportunidade de explorar materiais educacionais abertos e diversas fontes de conhecimento, promovendo a autonomia na busca por informações complementares. Considerando essa circunstância, as condições criam um ambiente propício para que o formando desenvolva habilidades de autogerenciamento e autodireção, estabelecendo uma relação ativa com seu próprio aprendizado. Os espaços *online* exigem que os participantes assumam a responsabilidade por seu processo de aprendizagem, impulsionados pela capacidade de se engajar de maneira independente com o conteúdo. Dessa forma, foi possível ampliar a AOE para a AOEA, conforme representado no **Esquema 21**.

Esquema 21 – Atividade orientada de ensino aberta (AOEA)



Fonte: Pesquisador (2024).

A ampliação da AOE para AOEA neste estudo foi fundamental para adequar o processo de ensino e aprendizagem às demandas contemporâneas, que se caracterizam pela necessidade de flexibilidade, coletividade e uso crítico dos recursos digitais. Essa transição expandiu o alcance das práticas pedagógicas, conectando o aprendizado às competências exigidas na atualidade, como autonomia, criatividade e capacidade de adaptação.

Nesse contexto, a AOEA destaca a interação humana e a aprendizagem ativa, promovendo habilidades cognitivas e tecnológicas que atendem às demandas de um ensino mais

dinâmico e centrado no estudante. Em virtude disso, a Tecformação Digital, proposta neste estudo, consolida-se como um modelo de inovação disruptiva no ensino híbrido, ao articular as diretrizes da AOEA com o uso estratégico das TDI como mediadoras do processo educacional. Essa abordagem introduz uma dinâmica inovadora ao ensino e à aprendizagem, estruturando práticas que conectam momentos presenciais e virtuais de forma complementar.

De acordo com Christensen, Horn e Staker (2013), às inovações disruptivas seguem um padrão específico: emergem em áreas onde há pouco ou nenhum uso das práticas anteriores e crescem até substituir os métodos tradicionais. No caso do modelo aqui apresentado, ele surge como uma resposta ao "não consumo" de metodologias híbridas integradas ao conteúdo curricular, oferecendo uma alternativa que rompe com o modelo convencional de formação humana. À luz disso, a Tecformação Digital não apenas se adapta à crescente influência do ensino online como meio cultural para disponibilizar conteúdo e personalizar a aprendizagem dos estudantes, mas também reconhece a importância dos papéis desempenhados pelas instituições de ensino.

A partir dessa integração, foram delineadas cinco fases que organizam a aplicação da Tecformação Digital: exploração, interação, proatividade, mediação e avaliação (**Quadro 12**). Essas fases configuram um modelo funcional e dinâmico, permitindo que a formação atenda tanto às demandas tecnológicas quanto às exigências pedagógicas, promovendo uma aprendizagem orientada para o protagonismo dos estudantes.

Quadro 12 – Estrutura de aplicação da Tecformação Digital

Fase	Atividade de Ensino	Atividade de Aprendizagem
Exploração	O professor seleciona uma tecnologia digital interativa para desenvolver roteiros de aprendizagem que integram o ambiente físico escolar com habilidades da cibercultura. Desse modo, estratégias planejadas são implementadas para introduzir o conteúdo teórico, utilizando ferramentas digitais que facilitam a aplicação prática dos conceitos e promovem o pensamento crítico.	Os estudantes mergulham em atividades curriculares mediadas por tecnologias digitais interativas, explorando conteúdos teóricos de maneira dinâmica. A combinação do ambiente presencial e virtual proporciona uma experiência imersiva, permitindo que se familiarizem com as ferramentas e conectem a teoria à prática.
Interação	O professor atua como um facilitador, criando um ambiente estimulante onde os estudantes podem interagir, tanto virtual quanto presencialmente, através de fóruns, debates e projetos colaborativos. O professor encoraja a troca de ideias e o debate sobre os objetos de estudo, promovendo reflexões críticas e discussões guiadas.	Os estudantes colaboram ativamente com colegas e professor, utilizando ambientes digitais e presenciais para análise de objetos de estudo. Essa interação multifacetada promove o compartilhamento de ideias, desenvolvimento de projetos em grupo e debates interativos, enriquecendo o aprendizado.

Proatividade	O professor propõe atividades orientadas e abertas (autodirigidas), desafiando os estudantes a desenvolverem modelos virtuais que apliquem os conceitos abordados. Questões reflexivas e exploratórias são integradas por meio de simulações, modelagens e estudos de caso que desafiam os estudantes a explorar múltiplas abordagens e a desenvolver soluções inovadoras para problemas.	Os estudantes assumem uma postura ativa, aplicando os conceitos em atividades criativas e práticas. Eles desenvolvem e testam modelos virtuais, resolvendo questões abertas e explorando soluções inovadoras para os desafios propostos, fortalecendo suas capacidades de raciocínio crítico e resolução de problemas complexos.
Mediação	Durante as atividades de aprendizagem, o professor monitora continuamente o progresso dos estudantes, oferecendo *feedback* personalizado e pontual. Utilizando ferramentas digitais de monitoramento como análise de desempenho em tempo real e relatórios de progresso, o professor identifica dificuldades individuais e ajusta o suporte de forma personalizada.	Os estudantes recebem *feedback* personalizado durante o processo, revisando suas produções com base nas orientações fornecidas. Isso permite que identifiquem suas limitações e qualifique seu trabalho, promovendo um ciclo contínuo de desenvolvimento e melhoria.
Avaliação	O professor adota uma avaliação formativa contínua, coletando dados das atividades finalizadas e oferecendo *feedback* detalhado e reflexivo. Esse retorno é fornecido de maneira personalizada e intencional, motivando o estudante a refletir sobre seu progresso e estabelecer metas de melhoria.	Os estudantes refletem sobre seus resultados em cada atividade, utilizando o *feedback* para reavaliar suas abordagens e melhorar seu desempenho nas próximas tarefas. Essa autoavaliação constante promove um aprendizado mais profundo, colaborando para a expansão cognitiva do conhecimento abordado.

Fonte: Pesquisador (2024).

O **Quadro 12**, a seguir, apresenta a estrutura da Tecformação Digital em cinco fases distintas do processo de ensino e aprendizagem, destacando a atuação do professor e dos estudantes. Cada fase inclui orientações para a Atividade de Ensino e a Atividade de Aprendizagem, detalhando as ações planejadas para ambos. Dessa forma, a proposta é apresentada como um processo sequencial e integrado, com cada fase desempenhando uma função específica no desenvolvimento do pensamento crítico-reflexivo, da coletividade, da autonomia e das habilidades práticas. Em decorrência disso, a aplicação estruturada e o uso de TDI buscam incentivar uma experiência de ensino híbrido e dinâmico, permitindo que todos participem ativamente na construção do conhecimento.

Sob essa perspectiva, a Tecformação Digital busca transformar a abordagem do conteúdo educacional, promovendo a exploração do conhecimento por meio de roteiros abertos e combinando interações presenciais e virtuais para criar um ambiente de aprendizado inovador e dinâmico. Essa prática está alinhada à ideia de uma “nova população de clientes”, conforme descrito por Christensen, Horn e Staker (2013), atraindo estudantes que, anteriormente, não eram plenamente atendidos pelo modelo escolar tradicional.

Esse processo não apenas responde às demandas em constante mudança, mas também integra de forma estratégica a tecnologia educacional. A Tecformação Digital, assim, busca promover uma aprendizagem flexível, alinhada ao contexto contemporâneo, resultando em uma educação dinâmica, adaptativa e expansiva. Como destaca Lévy (2017), “Nós, seres humanos,

jamais pensamos sozinhos ou sem ferramentas" (p. 95), ressaltando a importância das ferramentas digitais na ampliação e no enriquecimento do processo cognitivo.

O **Esquema 22** apresenta uma representação visual desse modelo, demonstrando que as fases estão interconectadas em um movimento circular, no qual as setas indicam a dinâmica entre elas.

Esquema 22 – As fases da Tecformação Digital

Fonte: Pesquisador (2024).

Nessa linha de pensamento, as regras fundamentais da AOEA se integram aos processos de ecoformação, fortalecendo o desenvolvimento reflexivo e crítico dos professores. Vale ressaltar que a relevância dessas normas vai além da adaptação tecnológica, pois proporcionam uma abordagem que estimula a exploração, a interação e a reflexão contínua no aprendizado. A aplicação ampliada da TA, portanto, não se limita à adoção de ferramentas digitais, mas envolve uma reconfiguração completa do ecossistema educacional. Nesse sentido, a postura formativa abordada por Macedo (2010) relaciona-se diretamente com o reconhecimento das diretrizes e estruturas dentro do ambiente educacional, promovendo uma análise crítica das regras e de sua aplicabilidade em diferentes contextos.

Os professores que adotam essa postura vão além da simples aplicação das normas específicas, participando ativamente do processo de construção e interpretação no ambiente de aprendizagem. Isso envolve uma abordagem interpretativa constante, ajustando e adaptando as diretrizes de acordo com as necessidades e particularidades de cada situação. Assim, as regras da AOEA não são vistas como elementos rígidos, mas como guias flexíveis que promovem a construção contínua de compreensões essenciais para o contexto educacional, atendendo aos objetivos formativos e às demandas dos estudantes.

Conforme ressaltado por Lévy (2021), o crescente aumento no uso das TD e das redes de comunicação interativa está desencadeando uma transformação significativa na abordagem

relacionada ao conhecimento. Essa transformação abrange diversos aspectos, desde a forma como os indivíduos interagem com as informações até a maneira como as processam e compartilham. Esse processo evidencia o papel fundamental da comunidade no contexto formativo, ressaltando a importância do engajamento coletivo na construção do conhecimento.

Essa abordagem promove uma aprendizagem sociotecnológica que integra aspectos sociais e tecnológicos, enriquecendo o processo educativo ao facilitar a colaboração entre estudantes e professores. Além disso, possibilita uma construção do conhecimento mais contextualizada e relevante para a realidade contemporânea, ou seja, é um processo alinhado ao aspecto heteroformativo.

Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2015) ressaltam que boas práticas educacionais promovem a reciprocidade e a cooperação entre os estudantes. Eles enfatizam que a aprendizagem se torna mais envolvente quando resulta do trabalho em equipe, caracterizado por uma abordagem colaborativa em vez de competitiva. Por conseguinte, a integração dessas abordagens proporciona uma experiência educacional mais abrangente, permitindo que os participantes exploram uma variedade de papéis, responsabilidades e métodos de ensino e aprendizagem, ao mesmo tempo, em que se beneficiam da interação com diversas fontes de conhecimento e do uso da tecnologia para enriquecer o processo de aprendizado.

No contexto abordado por Lévy (2003), as TDI oferecem oportunidades para a criação coletiva distribuída, o aprendizado cooperativo e a colaboração em rede, especialmente por meio do ciberespaço. Esse cenário levanta questionamentos sobre o funcionamento das instituições e a divisão do trabalho, tanto em empresas quanto em escolas. Lévy (2021) também discute como as práticas pedagógicas podem se adaptar aos novos processos de troca de conhecimento. Ele enfatiza que a abordagem não deve se limitar ao uso de tecnologias, mas sim adotar conscientemente uma mudança cultural mais abrangente que redefina estruturas institucionais, mentalidades e a cultura dos sistemas educacionais tradicionais. Isso implica repensar os papéis convencionais do professor e do estudante, de modo a alinhá-los com essa nova realidade educacional impulsionada pelas inovações tecnológicas.

Nesse contexto de transformações educacionais, as ideias de Engeström (2016) ressaltam a criação de redes de aprendizagem que transcendem os limites da escola, convertendo a instituição em um instrumento coletivo. Essa abordagem implica que as interações e conexões de aprendizagem não se restringem apenas ao ambiente escolar, mas se expandem para diversos contextos e recursos, como tecnologias, comunidades e ambientes de trabalho. Essa ampliação pode enriquecer a educação, permitindo que os estudantes explorem

uma variedade de experiências e perspectivas, ampliando, assim, sua compreensão. Nesse cenário dinâmico, torna-se cada vez mais evidente a necessidade de uma divisão do trabalho.

Além disso, a complexidade enriquecedora do processo de Tecformação Digital emerge das divisões do trabalho propostas pela AOEA, possibilitando a autoformação. Em virtude disso, o desenvolvimento tecnológico, enquanto instrumentos mediadores, enriquecedores e simbólicos, tem o potencial de redefinir a experiência educacional dos estudantes, culminando em uma aprendizagem autônoma no sentido de aprender-com-tecnologias-digitais-interativas, onde cada estudante se torna capaz de utilizar essas tecnologias como ferramentas essenciais em seu processo de aprendizado. Dessa forma, o modelo mencionado busca potencializar a formação digital, enfatizando a importância da autonomia mediada por recursos digitais interativos.

Essa autoformação está intimamente relacionada à prática do professor formador, pois exige um planejamento mais aprofundado, aliado à mediação pedagógica e ao desenvolvimento contínuo de competências tecnológicas. Consequentemente, o professor deve criar ambientes que promovam a autonomia dos estudantes, oferecendo as ferramentas necessárias para que possam aprender de maneira independente. Nesse processo, é relevante que o professor saiba integrar as TDI de maneira eficaz, proporcionando recursos que favoreçam tanto o aprendizado individual quanto a colaboração, enquanto ajusta suas abordagens às necessidades específicas de cada participante.

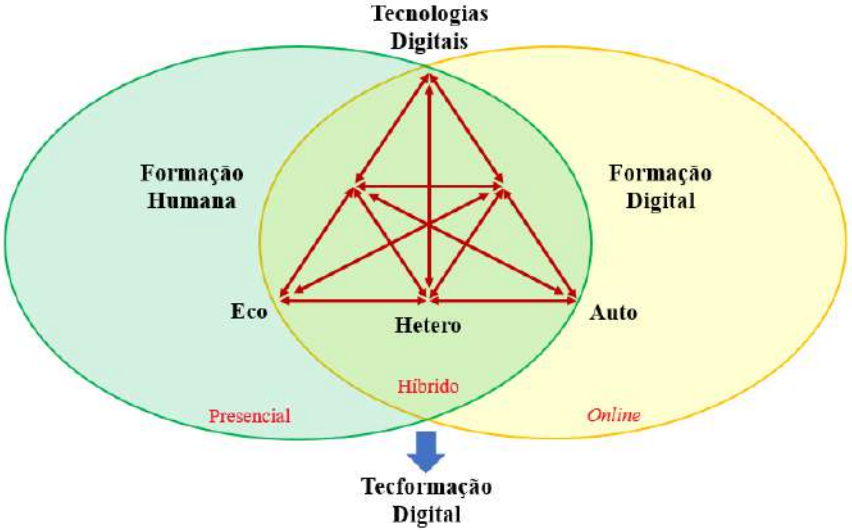
Sob essa perspectiva, Lévy (2023) menciona que as tecnologias intelectuais com suporte digital têm a capacidade de ampliar determinadas habilidades cognitivas humanas, como a memória, a imaginação e a percepção. Isso significa que essas tecnologias não apenas facilitam tarefas, mas também podem expandir as capacidades cognitivas, possibilitando novas formas de interação entre as pessoas e com o conhecimento. Em decorrência disso, a Tecformação Digital reafirma seu compromisso com uma educação que qualifica os formandos a se tornarem aprendizes autônomos, ativos e eficazes em um mundo digital em constante evolução.

Cabe enfatizar que a Tecformação Digital adota uma abordagem que transcende as limitações tradicionais do ensino, promovendo a criatividade e a flexibilidade no uso das TDI para a aquisição de conhecimento. Essa abordagem enriquece a prática educacional ao estimular interações dinâmicas entre estudantes e professores, possibilitando a troca constante de ideias, recursos e responsabilidades. A interligação desses elementos resulta na concepção da Tecformação Digital, fundamentada no modelo de sistema de atividade de Engeström (2016).

Esse modelo transforma as TD em agentes essenciais para redefinir a forma como aprendemos, colaboramos e construímos conhecimento.

O **Esquema 23** ilustra de forma visual essa integração, destacando a interação entre a formação humana e a digital, mediada por tecnologias e sustentada pelos pilares da ecoformação, heteroformação e autoformação. Em acréscimo, enfatiza o cenário híbrido, que combina o ensino presencial com o *online*.

Esquema 23 – A concepção da Tecformação Digital



Fonte: Pesquisador (2024).

Em vista dos argumentos apresentados, este modelo de ensino híbrido foi concebido para alinhar-se aos princípios da inovação disruptiva, propondo uma transformação significativa no cenário educacional. A flexibilidade, a integração tecnológica e o atendimento às necessidades anteriormente negligenciadas tornam a Tecformação Digital uma proposta revolucionária para o processo de ensino e aprendizagem. Para uma melhor compreensão, no próximo tópico, será apresentada a modelagem e a testagem dessa abordagem formativa, detalhando suas aplicações práticas.

3.3 Modelando novas práticas de ensino

Com base nas orientações fornecidas no tópico anterior, que auxiliaram na compreensão das possibilidades de uma aplicação pedagógica inovadora, esta pesquisa descreve, neste momento, os procedimentos adotados para a criação de um modelo híbrido de ensino. Assim,

o direcionamento desta etapa foi desenvolver novas práticas de ensino, utilizando a TA como fundamento.

A terceira ação do ciclo de aprendizagem de Engeström e Sannino (2016) visa modelar novas práticas por meio da criação de um modelo explícito e acessível, que possa servir como solução para a situação problemática identificada. Para isso, a estratégia principal consistiu na integração das AOEA no ambiente do ggb-CB. O planejamento desta etapa concentrou-se em aprimorar três aspectos essenciais:

i. Orientação de Ensino Aberta (Digitalidade): Desenvolver habilidades reflexivas para a digitalização dos conceitos geométricos. Essa orientação reflete a necessidade de integrar TDI ao ensino de Geometria. Em virtude disso, esta etapa é importante para preparar os estudantes para um ambiente de aprendizagem híbrido e tecnológico.
ii. Pensamento Geométrico (Construtivo): Desenvolver habilidades práticas e criativas para a construção e manipulação de objetos geométricos. Essa abordagem construtiva é fundamental para promover um aprendizado ativo e dinâmico.
iii. Pensamento Geométrico (Maturação): Desenvolver habilidades conceituais para a expansão do pensamento geométrico. Esta orientação visa o amadurecimento do raciocínio geométrico, descrito de forma analítica.

O **Esquema 24** ilustra a triangulação unificada das AOEA, com as setas indicando a dinâmica entre seus elementos para o processo de mediação.

Esquema 24 – Triangulação unificada das AOEA

Fonte: Pesquisador (2024).

A integração desses aspectos resultou em AOEA que não apenas unificaram a TDI e o pensamento geométrico, mas também ofereceram uma abordagem mais holística para o desenvolvimento de novas habilidades. Essa triangulação dos aspectos tecnológicos, construtivos e conceituais facilitou a inclusão de uma experiência de aprendizagem bem-sucedida. Quando aplicada em algumas atividades do ensino técnico da formação básica, essa experiência serviu como um exame do novo modelo, representando a quarta ação do ciclo de aprendizagem de Engeström e Sannino (2016), ou seja, a análise do modelo, experimentando-o para compreender plenamente sua dinâmica, eficiência e limitações.

O modelo foi testado como parte das atividades avaliativas de uma unidade de ensino no curso técnico de informática da Educação Básica, durante o período de ensino remoto. O engajamento dos estudantes, suas respostas resolutivas e as produções geradas indicaram a potencialidade do ggb-CB na realização das AOEA. No entanto, também surgiram limitações, como a restrição quanto ao número de elementos (questões, materiais, *applet* etc.) que podem ser inseridos no sistema de atividades, além da ausência de uma ferramenta adequada para a quantificação das notas.

Com base nas etapas de Engeström e Sannino (2016) na Teoria da Expansão da Aprendizagem, a quarta fase consiste em analisar o modelo desenvolvido para verificar sua aplicabilidade, dinamicidade e eventuais limitações. Sob essa perspectiva, o modelo desenvolvido foi testado em um ambiente de atividade avaliativa para estudantes do terceiro ano do curso técnico de informática, nível médio, abordando conteúdos curriculares de Geometria Espacial por meio de atividades aplicadas no ggb-CB. A escolha dessa ferramenta deve-se à sua capacidade de integrar conceitos geométricos de maneira visual e interativa, promovendo um ambiente propício para o aprendizado ativo e a experimentação.

A aplicação prática do modelo, que incluía o uso de objetos e recursos interativos, permitiu que os estudantes interagissem com conceitos geométricos em uma perspectiva tridimensional, representando um avanço em relação à experiência anterior com o GeoGebra *Classic online* no ensino de funções. Observou-se que, enquanto alguns estudantes já possuíam familiaridade com o *software*, o que facilitou seu engajamento, outros ficaram surpresos e curiosos com as novas possibilidades oferecidas pela Janela 3D do GeoGebra. Esse encantamento inicial, no entanto, foi acompanhado por algumas dificuldades técnicas relacionadas ao manuseio dos recursos avançados. Esse cenário indica que a transição para o trabalho com construções geométricas tridimensionais exige não apenas habilidades

tecnológicas prévias, mas também uma orientação inicial sólida e um tempo adequado para exploração e adaptação ao novo ambiente digital.

Além disso, ao refletir sobre o desenvolvimento da atividade, ficou evidente que a construção geométrica no GeoGebra requer uma base conceitual sólida nos conhecimentos axiomáticos, servindo como alicerce para que os estudantes compreendam as operações e relações envolvidas na Geometria Espacial. Essa observação ressalta a importância de revisar conceitos fundamentais e garantir que os estudantes possuam um entendimento inicial bem estruturado antes de avançar para construções mais complexas. O uso das janelas do GeoGebra (visualização, álgebra e 3D), com suas diversas possibilidades de visualização de objetos e manipulação de elementos geométricos no espaço, reforça a necessidade de adaptar o ensino para possibilitar uma exploração progressiva.

Outro ponto importante observado foi a necessidade de promover discussões coletivas para a troca de ideias e esclarecimento de dúvidas entre os estudantes. A interação entre os pares e com o professor foi essencial para superar as dificuldades iniciais e aprimorar a compreensão dos conceitos. Essas discussões também contribuíram para que os estudantes refletissem criticamente sobre as limitações e potencialidades do modelo, possibilitando um aprendizado mais reflexivo e coletivamente interativa, alinhado ao objetivo da quarta fase da teoria de Engeström e Sannino (2016), que consiste em testar o modelo em um contexto real para compreender plenamente suas dinâmicas e limitações.

Esse processo de experimentação da atividade avaliativa revelou, ainda, a importância de um planejamento flexível e de uma adaptação contínua às necessidades dos estudantes. A análise das respostas e do engajamento dos estudantes permitiu identificar áreas que necessitam de ajustes, como o tempo destinado à exploração da ferramenta e a necessidade de orientações mais detalhadas. Assim, a atividade não apenas possibilitou a avaliação do modelo, mas também indicou direções para refinamentos futuros, evidenciando que o modelo deve ser um instrumento dinâmico, em constante aperfeiçoamento, fundamentado nas respostas e nas interações observadas.

Para contornar as limitações e alcançar os objetivos intervencionistas da implementação do novo modelo no curso superior de LM, especificamente na disciplina FME III, as atividades foram cuidadosamente planejadas e replanejadas, aula por aula, com base na TA proposta por Leontiev (2018, 2016), que considera diversos elementos essenciais para a efetividade da aprendizagem. Segundo esse teórico, a prática humana se estrutura em torno de artefatos,

objetos, motivos, ações, operações, metas e condições, que, juntos, formam um sistema integrado e dinâmico de atividade.

Diante desse contexto, os artefatos aqui apresentados estão relacionados às ferramentas e recursos digitais utilizados durante as atividades, como o GeoGebra, que possibilita a manipulação e a exploração de conceitos geométricos de maneira interativa e prática. Além disso, incluem os livros físicos mencionados na ementa da disciplina como referências obrigatórias. Os objetos, por sua vez, referem-se aos conteúdos elencados pela ementa curricular do curso, que os participantes devem aprender. Já os motivos são os interesses e necessidades que impulsionam a participação dos estudantes, buscando uma compreensão mais profunda, engajada e relevante dos conteúdos abordados.

Ações e operações representam as práticas e procedimentos concretos realizados pelos estudantes para alcançar os objetivos da atividade. As ações referem-se aos processos gerais envolvidos, como aplicação, construção, exploração e interação, que constituem a base do envolvimento com o conteúdo. Por outro lado, as operações são os procedimentos específicos e detalhados, como ajustar a posição de um segmento de reta ou medir ângulos com precisão.

As metas referem-se aos resultados desejados pela atividade, que incluem tanto a aquisição de habilidades tecnológicas quanto a compreensão aprofundada do conteúdo abordado. No planejamento das aulas, as metas foram formalizadas segundo o modelo Ciade[5], que orientou o desenvolvimento das atividades. Este modelo tem como metas: a) Construir a capacidade de criar e manipular figuras geométricas; b) Investigar as propriedades e relações geométricas; c) Aplicar os conhecimentos em diferentes contextos; d) Desenvolver habilidades tecnológicas para expandir o pensamento geométrico; e) Estimular a autonomia e o engajamento dos estudantes na resolução de problemas.

Esse processo de experimentação da atividade avaliativa revelou, ainda, a importância de um planejamento flexível e de uma adaptação contínua às necessidades dos estudantes. A análise das respostas e do engajamento dos estudantes permitiu identificar áreas que necessitam de ajustes, como o tempo destinado à exploração da ferramenta e a necessidade de orientações mais detalhadas. Em decorrência disso, a atividade não apenas possibilitou a avaliação do modelo, mas também indicou direções para refinamentos futuros, evidenciando que o modelo deve ser um instrumento dinâmico, em constante aperfeiçoamento, fundamentado nas respostas e nas interações observadas. Por fim, as condições referem-se ao contexto e ao ambiente em

[5] A sigla Ciade é composta por verbos no infinitivo que correspondem às metas estabelecidas no planejamento das aulas. Cada letra da sigla representa uma ação que orienta o desenvolvimento das atividades, conforme descrito a seguir: C - Construir, I - Investigar, A - Aplicar, D - Desenvolver, E - Estimular.

que as atividades são realizadas, incluindo as ferramentas digitais e os ambientes virtuais de aprendizagem. Neste caso, a abordagem adotada foi híbrida, combinando recursos digitais com métodos inovadores para criar um ambiente de aprendizado mais interativo e flexível.

Cada aula dentro da abordagem híbrida, denominada Tecformação Digital, é compreendida como um sistema de atividades complexo, conforme a estrutura proposta por Engeström (2016). Esse sistema é constituído por diversos elementos inter-relacionados que, em conjunto, definem a dinâmica do processo de ensino e aprendizagem. Dentro desse *framework*, os sujeitos do sistema incluem os participantes ativos: o professor formador e os estudantes. Assim, cada aula envolveu esses indivíduos na realização de tarefas e na interação tanto com o conteúdo quanto entre si. Nesse contexto, o objeto da atividade, que representa o foco do ensino, varia de aula para aula. Ele abrange os conteúdos semanais, com ênfase na construção de figuras geométricas utilizando o GeoGebra. Dessa forma, cada aula possui um objetivo específico, visando promover uma compreensão dinâmica de um conteúdo particular.

Cabe ressaltar que o termo ‘dinâmico’ é ideal para descrever os objetivos das aulas com o GeoGebra, pois reflete a capacidade desse artefato digital de permitir a manipulação e visualização em tempo real dos conceitos geométricos. De forma complementar, seus recursos oferecem um ambiente onde os estudantes podem explorar e adaptar as construções geométricas de forma interativa, facilitando uma compreensão mais profunda e adaptativa dos conceitos. Em decorrência disso, o termo mencionado busca capturar a essência da exploração ativa, flexível e interativa proporcionada por suas potencialidades, alinhando-se à proposta de promover um aprendizado progressivo dos conteúdos geométricos.

Segundo Engeström (2016), as ferramentas utilizadas são fundamentais para mediar a atividade. No contexto das aulas, isso abrange o GeoGebra e seus recursos digitais, além de tecnologias físicas, como computadores e *smartphones*. Esses artefatos facilitam a interação dos indivíduos com o objeto, promovendo uma construção e análise eficaz das figuras geométricas, bem como a realização das atividades propostas. O autor também menciona que, nas atividades, as regras estabelecem as normas e procedimentos que orientam o comportamento dos participantes durante o processo. Nesse sentido, as regras incluíram a condição de que os estudantes estivessem matriculados na disciplina FME III no semestre 2022.1, que se registrassem na plataforma GeoGebra e que participassem do ggb-CB da turma FME III, além de completarem as tarefas semanais (AOEA).

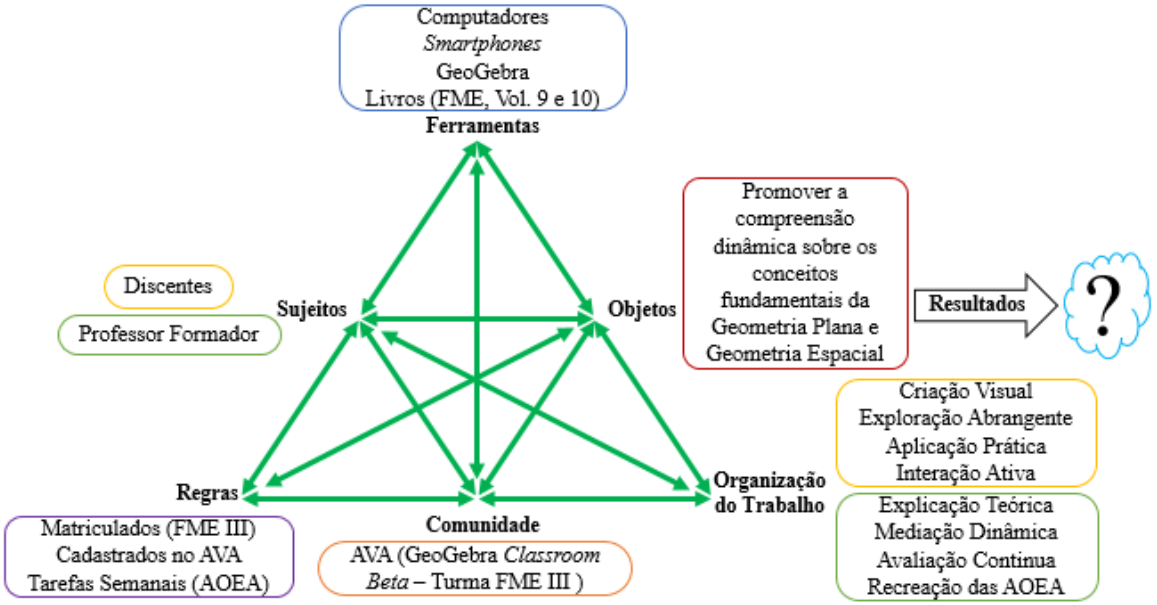
Conforme Engeström (2016), a comunidade é composta pelo grupo de indivíduos que participam da atividade e compartilham um interesse comum no objeto. Considerando essa

circunstância, ela abrange toda a turma de estudantes registrada no ggb-CB da turma FME III, bem como a equipe docente, que inclui o professor formador, o professor supervisor e o monitor. O autor também afirma que a divisão do trabalho descreve como as responsabilidades são distribuídas entre os sujeitos. Nesse sentido, os estudantes foram encarregados da criação virtual, da exploração abrangente, da aplicação prática e da interação ativa. Em contraste, o professor formador assumiu responsabilidades relacionadas à explicação teórica, à mediação dinâmica, à avaliação contínua e à supervisão das AOEA.

Em decorrência disto, os resultados, que são os desfechos da atividade, refletem o impacto das ações dos sujeitos sobre o objeto. No contexto desta aplicação, os resultados incluem a aquisição de habilidades tecnológicas, a compreensão dos conceitos geométricos e a capacidade de aplicar esses conceitos em diferentes contextos. Eles representam o sucesso dessa proposta em alcançar seus objetivos e promover o desenvolvimento dos participantes.

O **Esquema 25** ilustra um sistema de atividade dinâmico e multifacetado, apresentando uma visão concisa dos elementos que o compõem. As setas bidirecionais indicam as interações entre os diferentes componentes, enquanto a seta que aponta para o resultado destaca o surgimento de um novo elemento ou fenômeno.

Esquema 25 – Sistema de atividade dinâmico e multifacetado



Fonte: Pesquisador (2024).

A proposta intervencionista foi desenvolvida ao longo de 15 semanas, cada uma delas composta por quatro horas de aula, com um intervalo de 20 minutos entre o segundo e o terceiro horário, realizadas de forma consistente todas as quintas-feiras à tarde. Essa organização

temporal possibilitou um aprofundamento significativo no conteúdo abordado, promovendo a prática, a reflexão e a internalização dos conhecimentos partilhados.

Nesse contexto, cada aula foi planejada para construir sobre o conhecimento prévio dos estudantes, incorporando um novo conceito e um recurso adicional do GeoGebra a cada encontro. Essa abordagem não apenas consolidou o aprendizado de forma contínua, mas também aprimorou a experiência educacional ao introduzir ferramentas e comandos inovadores, ampliando gradualmente as habilidades dos estudantes.

Na próxima seção, será apresentada a implementação da proposta formativa híbrida, denominada Tecformação Digital. Este segmento inclui uma análise aprofundada das contradições observadas nas aulas e nas atividades virtuais realizadas no ggb-CB. Além disso, são apresentadas as análises gráficas dos formulários aplicados e uma exploração temática das entrevistas executadas. Esse conjunto de informações permitiu concretizar as sexta e sétima etapas do ciclo da teoria da aprendizagem expansiva, revelando nuances e percepções que enriquecem a compreensão do processo formativo. Como resultado, trata-se de um percurso descritivo e explicativo que busca demonstrar como essas interações moldaram a experiência de aprendizagem.

4 ANÁLISE E RESULTADOS DOS DADOS

A implementação da proposta formativa híbrida, descrita nesta seção, começa com uma análise detalhada de cada aula aplicada, que aborda os conteúdos curriculares específicos do ensino geométrico formal mediado pela tecnologia do GeoGebra *Classic online*, na disposição de Geometria. A descrição dessas práticas oferece um modelo replicável para futuras implementações no contexto educacional.

Após a apresentação das atividades de cada aula, exceto a primeira, discute-se a dinâmica das interações formativas entre os participantes da pesquisa, com ênfase em como as discussões reflexivas e coletivamente interativa sobre abordagens pedagógicas contribuem para a construção do conhecimento coletivo e evidenciam o processo de heteroformação. Essas interações são analisadas à luz da TA de Engeström (2016), com foco nas contradições primárias, secundárias e terciárias, que representam diferentes tipos de tensões que surgem ao longo do processo de aprendizagem e que, ao serem resolvidas, impulsionam o avanço do conhecimento.

De forma complementar, cada análise inclui uma reflexão sobre a proatividade dos estudantes, manifestada na autoformação por meio do uso dos recursos do ggb-CB. A exploração autônoma dessas ferramentas digitais possibilitou a aplicação dos novos conhecimentos adquiridos de forma independente, resultando em um aprendizado mais ativo e centrado no estudante. Essa proatividade é avaliada com base nos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele (1986), em diálogo conclusivo com a TA de Engeström (2016), especialmente no que se refere às contradições quaternárias.

Cada aula é considerada um sistema de atividade, conforme Engeström (2016), no qual o processo de ensino e aprendizagem é visto como um sistema dinâmico e multifacetado. Nesse contexto, não apenas as ações dos estudantes e professores são levadas em conta, mas também os instrumentos utilizados (como o ggb-CB) e as regras que estruturam a atividade. Compreender cada aula como um sistema de atividades permite identificar como diferentes elementos interagem para facilitar ou dificultar o aprendizado, proporcionando percepções valiosas para o aprimoramento contínuo das práticas educativas.

Para aprofundar a compreensão das experiências individuais, foi realizada uma Análise Temática das entrevistas semiestruturadas com sete voluntários, selecionados como participantes ativos desta pesquisa. Essas entrevistas forneceram uma perspectiva detalhada sobre as vivências dos estudantes, permitindo um entendimento mais abrangente dos impactos da proposta formativa. Essa etapa representa a sexta e a sétima ações da TAE de Engeström

(2016), que envolvem a reflexão e a consolidação do aprendizado por meio do modelo formativo aplicado (Tecformação Digital), além da avaliação das transformações alcançadas.

A análise dos resultados incluiu um questionário inicial, aplicado na primeira aula para traçar o perfil dos participantes, e um questionário final, efetuada na última aula, que buscou avaliar a efetividade e a recepção da proposta formativa a partir das percepções dos estudantes. Esses questionários forneceram dados gráficos valiosos para a avaliação do impacto das atividades híbridas e tecnológicas no desenvolvimento das AOEA. Para organizar melhor a sequência lógica, o questionário inicial é apresentado após a exploração da primeira aula, enquanto o questionário final aparece no último tópico, que aborda a consolidação de um novo modelo híbrido de ensino.

A descrição desta seção é extensa devido à necessidade de demonstrar que a proposta formativa implementada vai além do desenvolvimento do pensamento geométrico, promovendo uma expansão desse raciocínio. Para evidenciar que esse processo foi de fato expansivo, apresenta-se o ciclo completo, o qual ilustra a interligação das ideias, ultrapassando os conceitos de miniciclos ou ciclos simples, conforme abordados em algumas pesquisas. No entanto, caso o leitor deseje uma visão mais concisa do que foi explorado e analisado nesta pesquisa, pode consultar os tópicos 4.1, 4.2, 4.16 e 4.17, acrescentado de um dos tópicos que vai do 4.3 a 4.15.

Os tópicos de 4.2 a 4.15 apresentam uma exploração e análise similar, com suas respectivas particularidades. De uma forma específica, os tópicos de 4.2 a 4.6 abordam a bidimensionalidade com ênfase no alinhamento (4.2 Postulado Euclidiano, 4.3 Triângulos, 4.4 Paralelismo e Perpendicularidade, 4.5 Quadriláteros Notáveis, 4.6 Pontos Notáveis do Triângulo). Os tópicos de 4.7 a 4.11 aprofundam a bidimensionalidade com foco na ideia de área (4.7 Polígonos, 4.8 Transformações Geométricas, 4.9 Circunferências e Círculos, 4.10 Relações Métricas e Superfícies, 4.11 Diferentes Objetos Geométricos). Por fim, nos tópicos de 4.12 a 4.15, explora a tridimensionalidade com realce no volume (4.12 Figuras Espaciais de Posição, 4.13 Poliedros, 4.14 Sólidos Geométricos, 4.15 Corpos Redondos).

4.1 Introdução ao GeoGebra

Na primeira semana, as aulas foram organizadas para apresentar uma ‘Introdução ao GeoGebra’, com o objetivo de promover uma compreensão dinâmica sobre esses procedimentos. Nesse contexto híbrido de ensino, as ações pedagógicas incluíram a exploração

e a aplicação das funcionalidades desse recurso digital para construir e manipular figuras geométricas, além de promover a interação discursiva sobre as aplicabilidades discutidas.

Para isso, foi necessário desenvolver um repertório operacional nos estudantes por meio de atividades teóricas e práticas, como o gerenciamento de contas na plataforma GeoGebra, a criação, manipulação e personalização de pontos, curvas e outros objetos geométricos. Essas atividades foram planejadas para alcançar as metas Ciade, aproximando a turma dos recursos tecnológicos adotados, especialmente no incentivo à cultura digital por meio da utilização da ferramenta “Mover”.

O **Quadro 13**, apresentado a seguir, ilustra a estrutura e a organização dessa abordagem no contexto do ensino aplicado nesta primeira semana.

Quadro 13 – Planejamento da primeira semana de aula

<table>
<tr><td colspan="3">Artefato
Computador e Smartphone.
GeoGebra: Plataforma; Classroom Beta, Classic; Geometria.
<u>Ferramentas Específicas</u>: Mover; Ponto; Mover Janela de Visualização; Ampliar; Reduzir; Exibir/Esconder Objeto; Exibir/Esconder Rótulo; Copiar Estilo Visual; Apagar.
<u>Comando</u>: Reta(...).</td></tr>
<tr><td>Objeto
Introdução ao GeoGebra.</td><td>Motivo
Necessidade de proporcionar uma compreensão dinâmica das construções geométricas no GeoGebra.</td><td>Ação
❖ Construção e exploração de pontos e curvas de forma interativa;
❖ Aplicação prática das funcionalidades do GeoGebra para construir e manipular figuras geométricas;
❖ Interação discursiva das aplicabilidades abordadas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Operações
Personalizações: configurar, renomear, exibir/ocultar, etc.;
Inquietações: expor dúvidas subjetivas e/ou coletivas;
Interlocuções: participar das discussões construtivas;
Construções: produzir pontos e curvas geométricas;
Explorações: testar os recursos do GeoGebra;
Administrações: gerenciar conta;
Manipulações: mover objetos.</td><td>Metas
➢ Construir e manipular figuras geométricas;
➢ Investigar e aplicar os recursos básicos do GeoGebra;
➢ Desenvolver habilidades práticas de manipulação livre e interativa dos elementos geométricos com o uso da ferramenta mover;
➢ Estimular discussões e reflexões sobre abordagens teóricas e práticas relacionadas ao objeto de estudo.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Condições
Ambiente de ensino híbrido com suporte contínuo da equipe docente para a Introdução ao GeoGebra durante as atividades presenciais, oferecendo orientações e estímulos personalizados durante as observações online a distância.</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisador (2024).

Inicialmente, o professor formador, o professor supervisor (regente da disciplina) e o monitor se apresentaram à turma, criando um ambiente acolhedor e interativo. Os 29 estudantes matriculados na disciplina FME III também se apresentaram, compartilhando suas expectativas

e experiências anteriores de forma breve. Em seguida, foi apresentada a proposta de ensino, ressaltando os objetivos do curso e os métodos que seriam empregados.

Durante esta introdução, foi enfatizada a natureza dinâmica do método educacional, refletindo a flexibilidade necessária para um modelo de ensino híbrido. A aplicação desse modelo foi prontamente assimilada pelos estudantes, que compreenderam a importância da integração de atividades presenciais e *online* como parte do processo de aprendizado contínuo. A estratégia de incluir atividades práticas no AVA facilitou a autonomia dos estudantes e potencializou o aprendizado, permitindo o acesso a conteúdos e práticas fora do ambiente tradicional de sala de aula.

A TA descrita por Engeström (2016) destaca que as regras e os instrumentos, como as plataformas digitais e o AVA, desempenham uma função essencial na mediação das atividades e no desenvolvimento de uma aprendizagem mais estruturada e organizada. Dessa forma, os estudantes foram informados de que teriam acesso semanal a atividades *online*, o que proporcionou oportunidades adicionais para explorar conceitos além do tempo dedicado nos laboratórios presenciais.

A seguir, são apresentados dois livros como principais referências para o aprofundamento teórico dos conteúdos, ambos da coleção ‘Fundamentos da Matemática Elementar’, de José Nicolau Pompeu e Osvaldo Dolce: o volume 9, intitulado ‘Geometria Plana’, e o volume 10, intitulado ‘Geometria Espacial, Posição e Métrica’. Além disso, foram mencionadas outras obras complementares que podem enriquecer o aprendizado dos participantes. É importante ressaltar que também foi destacado que existem muitos materiais de apoio disponíveis na *Internet*, que podem ser úteis, mas é importante sempre verificar a veracidade dos procedimentos e das ideias apresentadas nesses recursos.

Um dos aspectos significativos desse modelo híbrido foi a introdução do GeoGebra, utilizando especificamente a versão GeoGebra *Classic online*, na disposição de Geometria, como uma ferramenta central no ensino de conceitos matemáticos. O professor formador apresentou as ferramentas básicas dessa TDI, destacando um conjunto de ícones (ferramentas) que permitem ao usuário construir, movimentar, medir e modificar os atributos dos objetos criados.

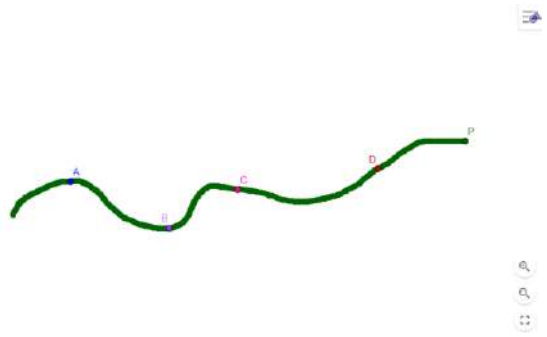
Em relação a esta última parte, destacaram-se as seguintes ferramentas: “Mover”, “Mover Janela de Visualização”, “Ampliar”, “Reduzir”, “Exibir/Esconder Objeto”, “Exibir/Esconder Rótulo”, “Apagar” e “Copiar Estilo Visual”, além dos ajustes de cores e estilos. Essas ferramentas foram exploradas para aprimorar a visualização das construções

geométricas. Essa familiarização inicial foi decisiva para integrar os estudantes ao uso da tecnologia, facilitando a construção do conhecimento e o desenvolvimento das competências necessárias para uma compreensão expansiva do pensamento geométrico.

Nesse sentido, foi possível observar que essa abordagem prática proporcionou uma compreensão mais aprofundada das capacidades iniciais do GeoGebra e facilitou a integração das ferramentas digitais no processo de aprendizagem. Durante esse período, foram ensinados dois modos de construção utilizando os recursos específicos do GeoGebra: por meio da Janela de Visualização e pela aplicação de comandos na Janela de Álgebra. Por exemplo, para construir uma reta, foi demonstrado que bastava clicar na ferramenta “Reta” e, em seguida, selecionar dois pontos na Janela de Visualização. Os pontos são criados no momento em que se clica na Janela de Visualização, e esse processo pode ser realizado utilizando pontos já construídos anteriormente. Alternativamente, foi apresentado que uma reta pode ser construída por meio do comando no campo de entrada: “Reta(Ponto, Ponto)”.

Neste momento, o professor formador explicou que uma linha é a trajetória definida pelo movimento de um ponto no espaço, ou seja, um conjunto de pontos dispostos em uma sequência infinita. Assim, uma linha é composta por uma sequência contínua de pontos, cada um ocupando uma posição específica ao longo da linha, sendo idealizada como uma entidade sem largura ou espessura. Para ilustrar essa abordagem, o professor utilizou a ferramenta “Ponto” e clicou em cinco locais distintos na tela de visualização, criando os pontos *A*, *B*, *C*, *D* e *P*, com ajustes de cores e denominações. Em seguida, ativou o rastro do ponto *P* e usou a ferramenta “Mover” para demonstrar como esse ponto se deslocava ao longo da tela, traçando uma linha contínua, conforme a ilustração da **Figura 3**.

Figura 3 – Formação de uma curva qualquer



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/vwjz3u6c. Acesso em: 14 ago. 2024.

Esse movimento evidenciou que a linha é formada por uma infinidade de pontos, destacando que ela é composta por uma sequência ininterrupta de pontos. Durante essa explicação, foi ressaltado que, devido à coordenação motora, é difícil para alguns fazer com que o ponto *P* passe exatamente por todos os pontos para formar uma curva que os conecte. Assim, a ferramenta "Mover" se mostra útil, pois permite ajustar a posição dos pontos para criar a curva desejada.

Durante a exploração, os estudantes conheceram as características dos diferentes tipos de pontos no GeoGebra: ponto livre, semilivre e dependente. O professor explicou que os pontos livres e semilivres, exibidos em azul, podem ser movidos facilmente com a ferramenta "Mover". Em contraste, os pontos dependentes, representados em preto, ajustam-se automaticamente com base em outras construções e não podem ser manipulados diretamente, promovendo uma compreensão mais profunda das relações geométricas.

Essa interação destaca o papel cooperativo da comunidade na aprendizagem, conforme a TA de Engeström (2016). Além do professor formador, que atua como guia, o monitor e os próprios estudantes desempenharam um papel ativo, auxiliando-se mutuamente e reforçando a construção social do conhecimento. A presença do monitor e a colaboração entre os estudantes não apenas beneficiaram aqueles que tinham dúvidas, mas também enriqueceram o ambiente cooperativo e fortaleceram o aprendizado coletivo.

Segundo Engeström (2016), o desenvolvimento da aprendizagem ocorre por meio de atividades coletivas e da resolução conjunta de problemas, com o professor atuando como mediador central. Nesse contexto, as interações e mediações durante as aulas revelaram-se fundamentais para a compreensão dos conceitos geométricos, reforçando a ideia de que o conhecimento é construído socialmente e se enriquece por meio de práticas discursivas e coletivamente interativas da comunidade educacional.

A etapa intermediária concentrou-se na introdução da plataforma GeoGebra em um contexto coletivo e interativo. Assim, o professor formador apresentou esse ambiente virtual e orientou os estudantes a criarem suas contas e explorarem suas funcionalidades. Em seguida, demonstrou algumas operações básicas, como a criação e o compartilhamento de materiais didáticos, enfatizando a capacidade de salvar todo o trabalho na conta do usuário. Nesse momento, foi ressaltado que a plataforma não é apenas um repositório robusto de recursos educacionais digitais, mas também possui características de rede social, permitindo o compartilhamento de atividades, o que promove interação e colaboração entre os participantes.

No último horário da aula, o professor formador apresentou o recurso inovador ggb-CB da plataforma mencionada, fornecendo a cada estudante o código de acesso para entrar na sala de aula virtual criada para a realização das atividades híbridas. Ele também explicou detalhadamente como seriam organizadas as tarefas e as avaliações dentro deste AVA, ressaltando a importância da participação ativa e do uso dos recursos disponíveis para maximizar o aprendizado.

Foi destacado que o ggb-CB funcionaria como um instrumento de mediação, permitindo o monitoramento contínuo do progresso dos estudantes e a oferta de suporte imediato às dificuldades, promovendo uma aprendizagem mais eficaz e personalizada. De acordo com a TA, conforme descrito por Vygotsky (2019), a mediação por ferramentas (digitais) é essencial para facilitar a interação dos estudantes com o conteúdo. Esse modelo de mediação possibilita uma supervisão detalhada e personalizada das atividades dos participantes, além de oferecer suporte imediato às dúvidas e desafios que surgem durante o processo de aprendizagem, permitindo ajustes e intervenções em tempo real.

A implementação do ggb-CB e a estrutura de monitoramento contínuo das atividades dos estudantes foram alinhadas à abordagem da avaliação formativa. Essa prática possibilitou a adaptação do ensino às necessidades individuais dos estudantes, proporcionando um *feedback* contínuo e ajustes no planejamento das aulas, conforme necessário, para maximizar a eficácia do processo de ensino e aprendizagem. Além disso, o suporte oferecido pelos professores e monitores refletiu o processo de mediação, permitindo que os estudantes superassem dificuldades tecnológicas e alcançassem um nível mais elevado de compreensão com a ajuda adequada.

Após se cadastrarem na plataforma, os estudantes foram orientados a acessar a Turma FME III no ggb-CB utilizando um código de acesso fornecido. É importante ressaltar que todas as atividades seriam validadas exclusivamente se realizadas no AVA. Essa estruturação das regras e das atividades está alinhada com a TA como descrito por Engeström (2016), que enfatiza a importância das normas e dos instrumentos para criar um ambiente de aprendizagem estruturado e organizado. Por conseguinte, buscou-se garantir a eficácia da proposta híbrida de ensino.

Por fim, foi disponibilizado um questionário *online*, criado no *Google Forms*, com o objetivo de traçar o perfil dos participantes. O questionário incluía perguntas sobre a experiência prévia dos estudantes com *softwares* matemáticos, especialmente o GeoGebra. Esse levantamento inicial foi fundamental para identificar o nível de familiaridade dos estudantes

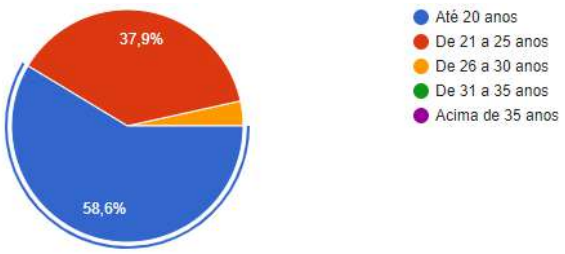
com a tecnologia e para adaptar o planejamento das atividades de maneira mais eficaz às suas necessidades. Com base nas respostas obtidas, as atividades e os métodos de ensino híbrido foram ajustados para potencializar a interação dos estudantes com o ggb-CB, que se consolidou como uma ferramenta central nessa proposta de ensino híbrido de Geometria.

Essas aulas iniciais representam o Sistema de Atividades I dentro do ciclo de aprendizagem expansiva proposto por Engeström (2016). Sob essa perspectiva, inicia-se a quinta ação do modelo teórico, que consiste na implementação e experimentação do modelo em um ambiente real de ensino, com o propósito de compreender sua dinâmica, desafios e potencialidades. De acordo com o autor mencionado, o desenvolvimento da aprendizagem ocorre em sistemas de atividade complexos, nos quais a mediação de ferramentas tecnológicas, como o ggb-CB, desempenha um papel medular ao estruturar as interações entre estudantes, equipe docente e conteúdo. Esse enfoque mediado facilitou a adaptação contínua do ensino, promovendo uma aprendizagem ativa e reflexiva, em consonância com os objetivos do ensino híbrido.

4.1.2 Caracterização dos participantes e adaptação para a aplicação das AOEA:

Para assegurar que o ensino esteja alinhado às necessidades dos estudantes, foi essencial realizar um diagnóstico inicial que possibilitasse uma caracterização precisa da turma. Nesse contexto, a utilização de um questionário *online* desempenhou um papel elementar, fornecendo dados valiosos sobre as características e experiências dos participantes. Entre as informações obtidas, a análise das respostas revelou a faixa etária dos participantes como um fator significativo. A maioria dos participantes (58,6%) têm até 20 anos, enquanto 37,9% estão na faixa etária de 21 a 25 anos. Apenas 3,4% pertencem à faixa etária de 26 a 30 anos, evidenciando uma predominância de participantes jovens (**Gráfico 1**).

Gráfico 1 – Faixa etária

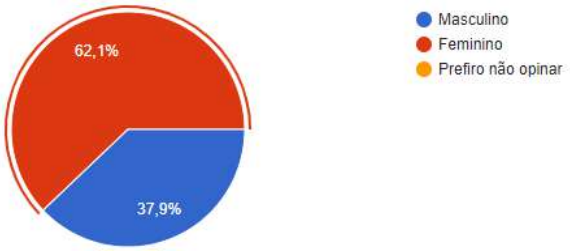


Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Essa predominância juvenil indicou a necessidade de ajustar o ensino para melhor alinhar-se às experiências e ao perfil dos estudantes. Segundo Leontiev (2018), o desenvolvimento é moldado pelo contexto histórico e cultural, e adaptar o ensino às características etárias dos participantes é essencial para garantir que o aprendizado seja eficaz e relevante. Assim, a integração dessas variáveis no planejamento das aulas assegurou uma abordagem mais adequada à turma. Desse modo, as AOEA foram repensadas e ajustadas, aula por aula, para maximizar as oportunidades de interação e o uso de ferramentas digitais culturais, promovendo uma maturação cognitiva mais sólida para esse grupo.

Observa-se uma predominância feminina na turma, com 62,1% das participantes do sexo feminino e 37,9% do sexo masculino (**Gráfico 2**). Diante dessa composição, foi fundamental destacar a voz ativa das mulheres, promovendo um ambiente inclusivo e equilibrado, onde todas as participantes pudessem expressar suas opiniões e contribuições de maneira significativa. Além disso, conforme Lévy (2021), a cibercultura e as TD transformam as interações sociais e culturais, criando novas oportunidades para participação e empoderamento.

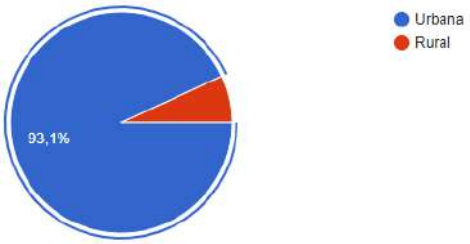
Gráfico 2 – Gênero



Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Quanto à localização dos participantes, observa-se que uma proporção considerável (93,1%) reside em áreas urbanas, enquanto apenas 6,9% vivem em áreas rurais (**Gráfico 3**). Conforme enfatizado por Kenski (2018), é relevante considerar as diferentes influências da tecnologia em diversos contextos. Em virtude disso, as aulas foram adaptadas para proporcionar uma experiência de aprendizado equitativa para todos, independentemente da localização. Para garantir que os participantes de áreas rurais fossem adequadamente atendidos, foram implementadas propostas alternativas, como materiais *offline* (*pendrive* com os *applets* do GeoGebra e os *slides* da aula) e suporte adicional.

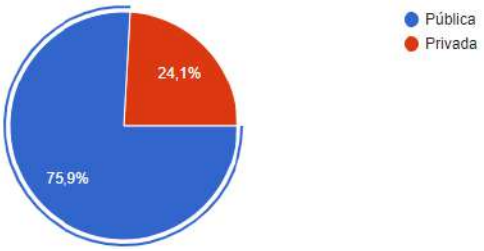
Gráfico 3 – Localização



Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Em relação à formação anterior dos participantes, 75,9% concluíram o ensino médio em escolas públicas, enquanto 24,1% provêm de instituições privadas. Embora a educação em escolas públicas possa oferecer uma base sólida, os estudantes podem enfrentar desafios na adaptação a recursos tecnológicos (**Gráfico 4**). Lévy (2021) ressalta a importância das tecnologias inteligentes na construção do conhecimento, indicando que diferentes trajetórias educacionais resultam em níveis variados de experiência com ferramentas digitais. Em razão disso, ao planejar as aulas do curso, foi importante considerar essas diferenças para garantir que o conteúdo fosse acessível e relevante para todos os participantes, independentemente de sua formação anterior.

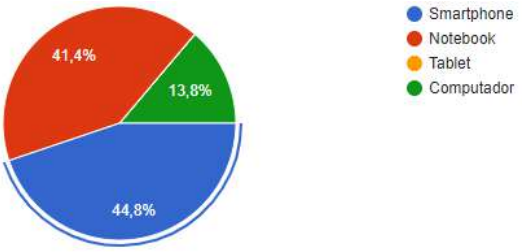
Gráfico 4 – Rede de ensino



Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Em relação aos equipamentos tecnológicos, destaca-se a posse de smartphones, que corresponde a 44,8% dos participantes, e *notebooks*, com 41,4%. Os computadores, com 13,8%, apresentaram uma menor representatividade, e nenhum participante indicou o uso de *tablets* neste processo formativo (**Gráfico 5**). Diante dessa realidade, as aulas foram estruturadas para serem acessíveis e funcionais em dispositivos móveis, aproveitando a conectividade e a portabilidade que os *smartphones* oferecem. Lévy (2021), ao discutir as transformações culturais ligadas ao ciberespaço, enfatiza que as TD devem ser utilizadas para facilitar o acesso ao conhecimento, independentemente do dispositivo. Essa perspectiva foi fundamental para garantir que todos os estudantes pudessem participar plenamente das atividades.

Gráfico 5 – Recursos tecnológicos disponíveis

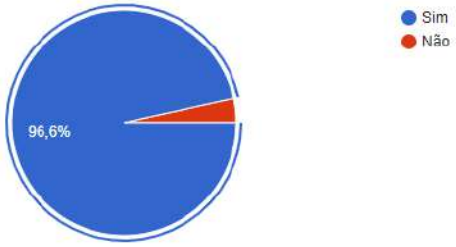


Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Quanto à conectividade, quase todos os participantes (96,6%) têm acesso à *Internet* em suas residências, o que indica uma ampla disponibilidade de recursos *online*. No entanto, os 3,4% restantes correspondem a um único estudante (**Gráfico 6**). Após a primeira aula, foi realizado um diálogo com esse estudante para compreender sua situação. Ele relatou que passaria o dia inteiro na instituição, mesmo nos períodos sem aula, e se comprometeu a utilizar o laboratório de informática de Matemática para executar as atividades virtuais durante esses horários, demonstrando determinação para superar a limitação de conectividade em casa.

De acordo com as ideias de Vygotsky (2019), que enfatizam a importância das interações sociais e das ferramentas na maturação cognitiva, as aulas foram elaboradas para garantir que todos os participantes, incluindo aqueles com restrições de conectividade, pudessem acessar os conteúdos e as atividades propostas. O uso do laboratório de informática foi primordial para proporcionar um ambiente de aprendizado equitativo, assegurando que todos os estudantes tivessem oportunidades iguais de interagir com os recursos digitais e desenvolver suas habilidades, independentemente das condições de acesso em suas residências.

Gráfico 6 – Conectividade residencial



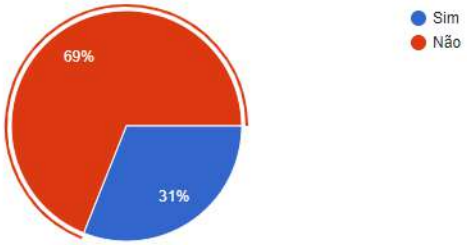
Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Em relação à familiaridade com o *software* GeoGebra, a maioria dos participantes (69%) não possuía conhecimento prévio do programa (**Gráfico 7**). Assim, seguindo o princípio de Vygotsky (2019), que destaca a importância da mediação por meio de ferramentas no processo

de aprendizagem, a introdução do GeoGebra foi planejada como uma ferramenta mediadora essencial para o desenvolvimento das habilidades matemáticas dos participantes.

Vale ressaltar que esta tese considera o GeoGebra um artefato digital cultural capaz de facilitar a construção do conhecimento matemático. Assim, sua inclusão nas aulas teve como objetivo oferecer aos participantes uma nova forma de interação com os conceitos matemáticos. Essa abordagem está alinhada ao princípio vygotskiano de que a aprendizagem é mediada social e culturalmente, proporcionando uma oportunidade para que os participantes, mesmo sem familiaridade prévia com o *software*, possam expandir suas habilidades matemáticas.

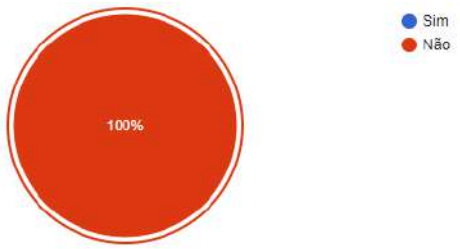
Gráfico 7 – Familiaridade com o *software* GeoGebra



Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Quanto à experiência como professores, observa-se que nenhum dos participantes está atualmente ministrando aulas de Matemática em escolas ou instituições, o que indica que o grupo é composto exclusivamente por estudantes sem experiência docente (**Gráfico 8**). Segundo Tardif (2014), é fundamental que a formação de professores articule teoria e prática de forma integrada, permitindo que os futuros profissionais da educação desenvolvam as habilidades necessárias para enfrentar os desafios da sala de aula. Com isso em mente, as atividades do curso foram projetadas para proporcionar experiências simuladas de ensino, nas quais os estudantes pudessem aplicar os conceitos aprendidos em situações que se aproximam da realidade escolar.

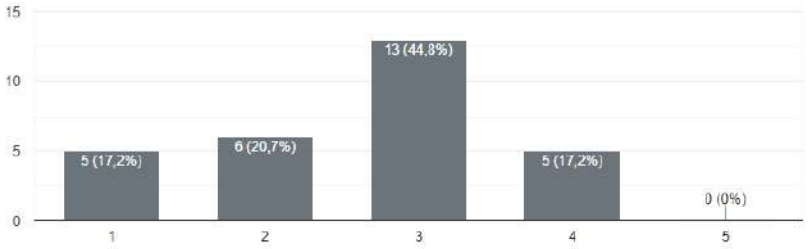
Gráfico 8 – Experiência docente



Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Com o intuito de realizar um diagnóstico do nível de aprendizagem em Geometria da turma, foi possível avaliar o grau de conhecimento dos participantes acerca dos conceitos geométricos. Os resultados obtidos revelaram uma distribuição variada em relação aos diferentes níveis de familiaridade com o tema. Constatou-se que a maioria dos respondentes (44,8%) assinalou o nível 3, caracterizando um conhecimento intermediário sobre os conceitos. O segundo nível mais escolhido foi o nível 2, com 20,7% dos participantes, indicando um entendimento um pouco mais superficial. Em contrapartida, 17,2% dos participantes optaram pelo nível 1, o que sugere um conhecimento inicial e menos aprofundado dos conceitos geométricos. É relevante notar que nenhum dos participantes selecionou o nível 5, que representaria um grau avançado de conhecimento, enquanto 17,2% escolheram o nível 4, indicando um conhecimento sólido (**Gráfico 9**).

Gráfico 9 – Nível de conhecimento geométrico



Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Esses resultados influenciaram o planejamento e a execução das aulas. Cabe destacar que, de acordo com Vygotsky (2019), a maturação cognitiva é mediada por ferramentas culturais e interações sociais, o que sugere a necessidade de adaptar as atividades às diferentes fases de conhecimento dos participantes, a fim de promover a zona de desenvolvimento proximal. Schön (2000) também reforça a importância de estratégias que incentivem a reflexão crítica e a adaptação dos métodos pedagógicos para uma aprendizagem mais eficaz. À luz disso, levando em conta os variados níveis de conhecimento e as perspectivas desses teóricos, as aulas foram planejadas para oferecer uma abordagem diferenciada, integrando tecnologias que atendam às diversas necessidades dos estudantes e favoreçam um enriquecimento progressivo do pensamento geométrico.

Essa diversidade na distribuição das respostas indica uma amplitude considerável na familiaridade dos estudantes com os conceitos geométricos, sendo mais proeminente o conhecimento intermediário. Essa variabilidade foi importante para replanejar a abordagem

educacional, permitindo uma adaptação do ensino que atenda às diferentes necessidades e compreensões dos estudantes.

Assim, essa análise diagnóstica possibilitou observar um perfil da turma que é predominantemente jovem e urbano. A maioria dos estudantes tem acesso a dispositivos tecnológicos e à *Internet*, embora apresente uma familiaridade limitada com o *software* GeoGebra. Essas informações foram fundamentais para compreender as características desse grupo e para moldar estratégias educacionais adequadas.

Desse modo, além de traçar o perfil demográfico, a análise das respostas do formulário I permitiu identificar diferentes níveis de familiaridade dos estudantes com a tecnologia e os conceitos geométricos. Essas percepções foram utilizadas para ajustar as práticas pedagógicas, proporcionando suporte adicional àqueles que enfrentavam maiores desafios tecnológicos ou conceituais. Essa abordagem diferenciada é essencial em um contexto de ensino híbrido, onde o sucesso depende da capacidade de atender às diversas necessidades dos participantes.

Vale ressaltar que, durante a utilização das tecnologias, muitos estudantes enfrentaram dúvidas iniciais sobre como navegar e usar efetivamente os recursos disponíveis. Observou-se que alguns apresentavam desafios na interação com os recursos virtuais, enquanto outros encontravam dificuldades em manusear o equipamento (computador). Notou-se também que um dos participantes optou por utilizar um *smartphone* para realizar construções geométricas, indicando uma preferência por um dispositivo que considerava mais acessível ou familiar para suas necessidades. Isso destaca a diversidade de habilidades e preferências entre os participantes na interação com as tecnologias educacionais. A adaptação do ensino a essas necessidades foi facilitada pela aplicação dos princípios da TA de Vygotsky (2019), que reconhece a importância da mediação por ferramentas e da colaboração entre pares e instrutores para superar desafios de aprendizagem.

Portanto, a primeira semana de atividades foi importante não apenas para estabelecer um ambiente de aprendizado cooperativo e interativo, mas também para implementar de forma eficaz um modelo de ensino híbrido que refletisse as teorias educacionais contemporâneas. A aplicação dessa proposta formativa resultou em um início de curso bem-sucedido, no qual a mediação, o conhecimento específico e a TDI foram integrados de maneira a maximizar o aprendizado e a participação dos estudantes. Esse momento representou um ponto de partida promissor para a jornada de aprendizado que se desdobraria ao longo do curso. Esses aspectos serão analisados nos próximos tópicos.

4.2 Explorando os Postulados Euclidianos

Na segunda semana, as aulas foram organizadas para explorar os ‘Postulados Euclidianos’, com o objetivo de promover uma compreensão dinâmica desse conteúdo curricular. Nesse contexto híbrido de ensino, as ações pedagógicas incluíram a construção e exploração do objeto de estudo, investigação, identificação e aplicação prática tanto do postulado da determinação quanto dos postulados de transporte do segmento e do ângulo, além de interações discursivas sobre as aplicabilidades discutidas.

Para isso, foi necessário expandir o repertório operacional dos estudantes por meio de tarefas teóricas e práticas. A aplicação das AOEA foi fundamental nesse processo, pois forneceu diretrizes para a criação, manipulação e personalização de pontos, retas, segmentos e outros objetos geométricos. Essas atividades foram planejadas para alcançar as metas Ciade, aproximando a turma dos recursos tecnológicos adotados, especialmente no incentivo à cultura digital com a utilização da ferramenta “Compasso”.

O **Quadro 14**, apresentado a seguir, ilustra a estrutura e a organização dessa abordagem no contexto do ensino aplicado nesta semana.

Quadro 14 – Planejamento da segunda semana de aula

<table>
<tr><td colspan="4">Artefatos
Computador e Smartphone.
GeoGebra: Plataforma; Classroom Beta; Classic; Geometria.
<u>Ferramentas Específicas</u>: Mover; Ponto; Interseção de Dois Objetos; Ponto Médio ou Centro; Reta; Segmento; Segmento com Comprimento Fixo; Semirreta; Bissetriz; Compasso; Ângulo; Distância, Comprimento ou Perímetro; Ampliar; Reduzir.
<u>Livro</u>: Fundamentos de Matemática Elementar 9: geometria plana (Cap. I, II e III).</td></tr>
<tr><td>Objeto
Postulados Euclidianos.</td><td>Motivo
Necessidade de promover uma compreensão dinâmica sobre os Postulados Euclidianos.</td><td colspan="2">Ação
❖ Construção e exploração dos Postulados Euclidianos de modo dinâmico;
❖ Aplicação prática dos postulados da determinação e do transporte de segmento e ângulo;
❖ Interação discursiva das aplicabilidades abordadas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Operações
Personalizações: configurar, renomear, exibir/ocultar, etc.;
Medições: medir comprimentos e amplitudes angulares;
Inquietações: expor dúvidas subjetivas e/ou coletivas;
Interlocuções: participar das discussões construtivas;
Construções: produzir pontos, retas, segmentos, etc.;
Identificações: localizar as interseções dos objetos;
Explorações: testar os recursos do GeoGebra;
Revisões: revisar os conteúdos curriculares;
Interações: interagir com as AOEA;
Administrações: gerenciar conta;
Aplicações: resolver problemas;
Manipulações: mover objetos.</td><td colspan="2">Metas
➢ Construir pontos, retas, segmentos, ângulos, etc. para explorar os Postulados Euclidianos com a mediação tecnológica das ferramentas do GeoGebra.
➢ Investigar e aplicar os postulados da determinação e do transporte de segmento e ângulo;
➢ Desenvolver habilidades práticas de reconstrução livre e interativa dos elementos geométricos com uso da ferramenta “Compasso”;</td></tr>
</table>

	➢ Estimular discussões e reflexões sobre abordagens teóricas e práticas relacionadas ao objeto de estudo.
Condições Ambiente de ensino híbrido com suporte contínuo da equipe docente para auxiliar na aprendizagem dos Postulados Euclidianos durante as atividades presenciais, oferecendo orientações e estímulos personalizados durante as observações *online* a distância.	

Fonte: Pesquisador (2024).

A partir da segunda semana de aula, o professor formador iniciou a exploração dos conteúdos curriculares, alinhando-os aos objetos geométricos planejados para a primeira unidade. Sob essa perspectiva, destacou-se a importância da construção desses objetos utilizando régua e compasso. O objetivo principal foi promover o aprendizado técnico, proporcionando aos estudantes uma compreensão formal dos conceitos de alinhamento.

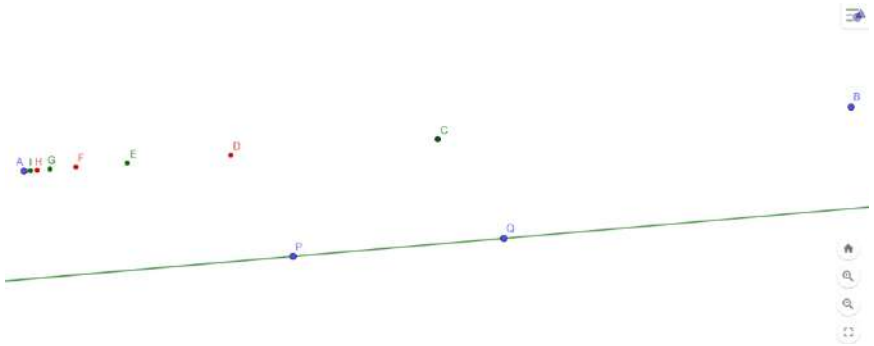
Neste momento, introduziu-se as AOEA por meio de roteiros que orientaram a construção de objetos geométricos no ggb-CB. Utilizando a mediação tecnológica das ferramentas “Ponto”, “Ponto Médio ou Centro”, “Ampliar”, “Reduzir” e “Reta” na Janela de Visualização do GeoGebra *Classic online*, na disposição de Geometria, ele iniciou uma explicação sobre a natureza adimensional dos pontos. Com o uso do efeito de *zoom*, o professor demonstrou que um ponto não possui extensão, largura ou profundidade, reforçando a ideia de que o ponto é uma entidade teórica sem dimensões.

Em seguida, o professor explorou a técnica de encontrar o ponto médio entre dois pontos. Por meio de uma sequência visual didática, ele demonstrou que, ao localizar um ponto médio, é possível utilizá-lo como referência para identificar outros pontos médios sucessivos. Essa abordagem permitiu que os estudantes compreendessem como continuar a encontrar novos pontos médios a partir de um ponto inicial. O efeito de *zoom* foi novamente empregado para facilitar a visualização detalhada desse processo, ressaltando a importância do ponto médio na construção e análise de objetos geométricos.

Na sequência, o professor apresentou o Postulado da Determinação, que afirma que dois pontos distintos determinam uma única reta. Ele demonstrou visualmente que, ao posicionar dois pontos, é possível traçar uma reta que passa exatamente por eles, reforçando a natureza unidimensional da reta. O efeito de *zoom* foi utilizado para ilustrar que, ao aumentar ou diminuir a visualização, a reta mantém sua espessura constante, enquanto os pontos que a definem se afastam ou se aproximam. Essa demonstração proporcionou uma compreensão da reta como um objeto infinito e unidimensional, concluindo o ensino da noção de reta para os estudantes.

A **Figura 4**, a seguir, ilustra essas construções, demonstrando a interatividade proporcionada pelo uso do GeoGebra.

Figura 4 – Efeito de *zoom* nos pontos médios e o postulado da determinação na reta



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/vbffpcsa. Acesso em: 14 ago. 2024.

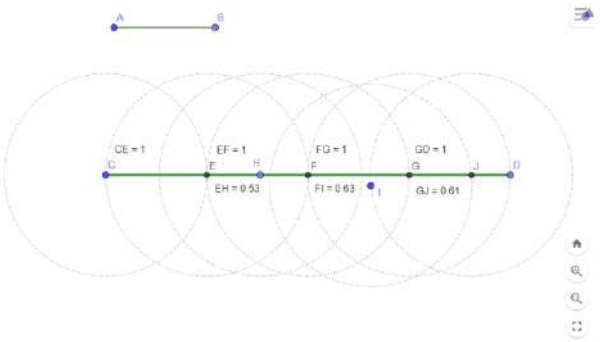
Na segunda etapa da aula, o professor formador abordou o postulado do transporte de segmentos, com a mediação tecnológica das ferramentas “Segmento com Comprimento Fixo”, “Segmento”, “Compasso”, “Interseção em Dois Objetos” e “Distância, Comprimento ou Perímetro”, para realizar construções geométricas digitais. Nesse momento, explicou que a medida de um segmento, como *AB*, é representada por *m(AB)*, indicando o comprimento do segmento como um número real positivo. Destacou também que a unidade de comprimento no GeoGebra segue um padrão específico, e que, ao aplicar o efeito de *zoom*, o tamanho na tela pode aumentar ou diminuir proporcionalmente. Ressaltou que, em atividades contextualizadas, geralmente se utiliza o metro e seus múltiplos e submúltiplos como unidades de medida padrão; no entanto, nas tarefas das AOEA foi adotado o termo unidade de comprimento (*u.c.*).

Na prática, o professor formador criou dois segmentos: *AB*, com 1 *u.c*, e *CD*, com 4 *u.c*. Utilizando um compasso, ele mediu o segmento *AB* e aplicou essa medida para dividir o segmento *CD*. Ao marcar os pontos de interseção *E*, *F* e *G*, o professor dividiu o segmento *CD* em intervalos iguais ao comprimento de *AB*. Nesse momento, ele enfatizou a importância de ajustar corretamente o compasso, pois, se não estiver bem calibrado, o uso pode gerar pontos incorretos no segmento *CD*. Para demonstrar isso, criou os pontos *H* e *I*, que apareceram em cores diferentes no GeoGebra, indicando que a distância entre eles não estava correta.

Para esclarecer melhor, o professor formador centrou o compasso no ponto *I* e encontrou o ponto de interseção *J* no segmento *CD*. Em seguida, mediu os segmentos *CE*, *EF*, *FG* e *GD*, verificando que todos tinham o mesmo valor (1 *u.c.*). Por outro lado, os segmentos *EH*, *FI* e *GD* apresentaram valores diferentes (0,63 *u.c.*, 0,53 *u.c.* e 0,61 *u.c.*), evidenciando que estavam posicionados incorretamente.

A **Figura 5**, a seguir, apresenta a ilustração dessa construção, na qual foi utilizada a ferramenta "Compasso" do GeoGebra.

Figura 5 – Postulado do transporte de segmento



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/ehuqm3ru. Acesso em: 14 ago. 2024.

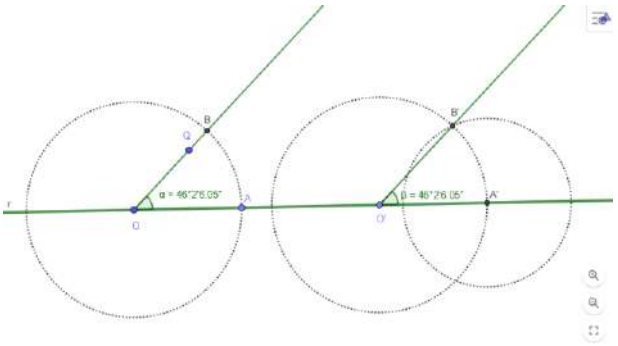
Na terceira etapa da aula, a abordagem concentrou-se na exploração dos conceitos de ângulos, abordando aspectos como análise, comparação, adição e congruência de ângulos, além de trabalhar com ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.) e ângulos notáveis. Nesse momento, o professor formador destacou que, geralmente, os ângulos são apresentados em graus, com precisão de até duas casas decimais quando não são exatos. No entanto, na barra de estilo da Janela de Álgebra, é possível alternar a unidade de medida dos ângulos entre graus (incluindo minutos e segundos) e radianos.

Nesta etapa, o professor formador apresentou o Postulado do Transporte de Ângulos. Com a mediação tecnológica das ferramentas “Ponto”, “Reta”, “Semirretas” e “Compasso”, ele iniciou traçando uma reta, denominada *r*, e adicionou os pontos *O*, *A* e *O’* sobre ela, além de uma semirreta *OQ* com origem no ponto *O*. Utilizando o compasso, ele determinou a distância entre os pontos *A* e *O*, localizando um ponto de interseção na semirreta *OQ*, que chamou de *B*. Em seguida, repetiu o processo para medir a distância *AO* a partir do ponto *O’*, encontrando um ponto de interseção na semirreta *OQ*, que denominou *A’*. Depois, usou o compasso novamente para medir a distância entre os pontos *A* e *B*.

Com essa medida, traçou uma nova circunferência com origem no ponto *A’*, localizando o ponto de interseção entre as duas circunferências, denominou *B’*. Em seguida, traçou a semirreta *O’B’* e mediu o ângulo, ajustando-o para graus, minutos e segundos. Isso permitiu demonstrar que os ângulos $\angle AOB$ e $\angle A'O'B'$ são congruentes. Na sequência, demonstrou que, mesmo manipulando os pontos, os ângulos permanecem congruentes, reforçando a propriedade de congruência dos ângulos.

A **Figura 6**, a seguir, ilustra essa construção, evidenciando a importância do uso da ferramenta “Compasso” para o transporte de ângulos.

Figura 6 – Postulado do transporte de ângulo



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/jcjyvzwh. Acesso em: 14 ago. 2024.

Em síntese, esta segunda semana de aula corresponde ao Sistema de Atividades II, no qual foram explorados os conhecimentos curriculares relacionados aos ‘Postulados Euclidianos’, conforme as abordagens realizadas pelo professor formador. No entanto, durante esse processo, caracterizado pela pluralidade e multivocalidade, foram observadas algumas tensões e inquietações, que serão analisadas no próximo subtópico.

4.2.1 Análise das contradições heteroformativas no sistema de atividades II

A análise das interações da aula do Sistema de Atividades II, fundamentada nas contradições primária, secundária e terciária de Engeström (2016), revelou as tensões e as possibilidades de aprendizagem que emergiram enquanto os estudantes se dedicavam tanto à construção de pontos, retas, segmentos, ângulos e outros objetos geométricos no ggb-CB, quanto à exploração dos conhecimentos curriculares relacionados aos ‘Postulados Euclidianos’, tema abordado pelo professor formador.

A contradição primária proposta por Engeström (2016) surgiu na dificuldade dos estudantes em equilibrar a aplicação prática dos conceitos geométricos no GeoGebra com a compreensão abstrata dos ‘Postulados Euclidianos’. Nesse cenário, a pergunta de Théo sobre o ponto, que “não tem tamanho”, evidenciou a dificuldade inicial dos estudantes em entender a natureza abstrata dos objetos geométricos e sua representação prática no GeoGebra. Essa tensão foi mediada pela explicação do professor, que utilizou a Janela de Visualização para tornar visível o conceito abstrato.

É importante ressaltar que o conceito de heteroformação se reflete na maneira como a aprendizagem dos estudantes é moldada pela influência do professor, pelos colegas e pelo uso de ferramentas digitais. Segundo Macedo (2010), a heteroformação ocorre quando há troca de

experiências e compartilhamento de saberes, o que facilita a construção do conhecimento. Essa interação transforma o conhecimento abstrato em algo mais prático e acessível. A mediação social desempenha um papel essencial, permitindo que os estudantes internalizem conceitos inicialmente contraditórios, como a ampliação do ponto, que, apesar de visualmente aumentada, continua sem dimensão. Em virtude disso, a combinação de diferentes fontes de aprendizado contribui para uma compreensão mais profunda e holística.

Foi possível observar que a contradição secundária proposta por Engeström (2016) surgiu entre os componentes do sistema, especialmente entre as ferramentas tecnológicas e os objetivos de aprendizagem. Isso ficou evidente quando Seth questionou a mudança perceptível de uma reta ampliada; o professor explicou que a ampliação afetava apenas a visualização e não a natureza geométrica da reta. Essa mediação exemplificou o processo de internalização do conhecimento descrito por Vygotsky (2019), no qual o estudante, com o suporte do professor e do GeoGebra, transformou a compreensão externa (percepção visual) em conhecimento interno (propriedades geométricas imutáveis). O uso da tecnologia, nesse contexto, não apenas facilitou a visualização, mas também intensificou a reflexão crítica sobre os conceitos teóricos, auxiliando os estudantes a internalizar o conhecimento por meio de interações sociais e ferramentas culturais.

A contradição terciária proposta por Engeström (2016) manifestou-se quando novas tecnologias, como o ggb-CB, introduziram um modelo inovador de ensino, gerando conflito com métodos convencionais. Lévy (2021) aponta como as tecnologias podem reconfigurar a forma como o conhecimento é produzido e partilhado. Isso foi observado na aula, quando Mary e Hend questionaram o uso do compasso digital (ferramenta “Compasso”) para reconstruir segmentos e ângulos. Percebeu-se uma adaptação ao novo modelo tecnológico, no qual os recursos digitais permitiam uma flexibilidade de construção que seria impossível com o compasso físico. O conflito entre a prática tradicional e o uso de tecnologias foi superado à medida que o conhecimento coletivo emergiu no ambiente de ensino, facilitando a colaboração e permitindo que o grupo explorasse conceitos de forma interativa e dinâmica.

Diante do exposto, a resolução dessas contradições ocorreu dentro desse movimento heteroformativo, inserido nesta formação híbrida (Horn; Staker, 2015), em que o ensino, mediado pela tecnologia, combinou práticas convencionais com inovações digitais. Sob essa perspectiva, a implementação do ggb-CB, uma ferramenta digital inovadora, exemplificou essa fusão entre o convencional e o digital. O uso dos recursos do GeoGebra, ao possibilitar a visualização, manipulação e internalização de conceitos geométricos, como o transporte de

ângulos e segmentos, ilustra como esse movimento, conduzido pelo professor e potencializado pelas ferramentas tecnológicas, favorece a aprendizagem dos ‘Postulados Euclidianos’. Além disso, as interações promovidas entre a turma e o professor resultaram na construção coletiva do conhecimento, evidenciando como o ensino híbrido estimula o aprendizado ativo, ao envolver os estudantes de forma mais reflexiva e coletivamente interativa.

4.2.2 Análise das contradições autoformativas no sistema de atividades II

Neste subtópico, apresenta-se a análise das proatividades de alguns participantes durante a realização das tarefas da segunda semana de aula. Essa análise revela não apenas a construção coletiva do conhecimento, mas também a postura proativa dos participantes na AOEA. A investigação foi conduzida à luz da quarta contradição de Engeström (2016), também conhecida como contradição quaternária, que oferece importantes percepções sobre as interações entre sistemas de atividade distintos.

A contradição quaternária surge quando diferentes sistemas de atividade, como o Ensino Curricular Formal de Geometria (ECFG) e a Exploração Construtiva da Geometria Dinâmica (ECGD), interagem. Essa interação gera tensões, mas também cria oportunidades para a expansão do objeto de aprendizagem. Esse processo decorre pelas diferenças nos objetivos, ferramentas e métodos de cada sistema, refletindo as abordagens pedagógicas distintas. No entanto, quando mediadas adequadamente, tais contradições podem levar à reformulação das práticas de ensino, permitindo que os estudantes conectem conceitos teóricos às aplicações práticas dinâmicas. Isso pode potencializar o desenvolvimento cognitivo e estimular a autonomia, à medida que os participantes se envolvem ativamente na resolução das tarefas.

No caso desta análise, o sistema de atividade central é o ECFG, que tem suas raízes nos ‘Postulados Euclidianos’ e se caracteriza por um conjunto de práticas, métodos e regras convencionais voltados para o ensino mais formal e estruturado da Geometria. Esse sistema, consolidado ao longo dos séculos, mantém uma forte ênfase na dedução lógica e na rigidez dos métodos de prova, com foco na construção de um conhecimento geométrico sistemático e apoiado em axiomas. As atividades de ensino são cuidadosamente planejadas para seguir uma sequência linear e hierárquica, na qual cada novo conceito ou teorema é introduzido a partir de uma fundamentação anterior, respeitando a sequência lógica da Geometria Euclidiana.

Por outro lado, o sistema vizinho é a ECGD, mediada pelo uso dos recursos do ggb-CB, que oferece um conjunto de recursos tecnológicos personalizados. Nesse contexto, foram

utilizadas as AOEA, apresentando apenas tarefas que incluem os recursos ‘Questão Aberta’ e o *applet* do GeoGebra *Classic online*, na disposição de Geometria. Este último é apresentado por meio de uma imagem relacionada ao pensamento geométrico de construção, enquanto a ‘Questão Aberta’ é representada por duas colunas: uma referente ao roteiro de ensino aberta e a outra correspondente ao pensamento geométrico de maturação, onde estão transcritas as respostas dos participantes da pesquisa. Vale destacar que, neste ambiente digital, foram incorporados materiais da aula exploratória, *feedbacks* personalizados e outros recursos digitais relevantes ao conteúdo, enriquecendo assim a experiência de aprendizagem.

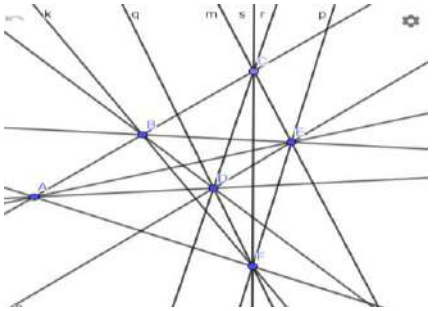
As interações desses dois sistemas produziram uma contradição que, ao mesmo tempo, resultou em tensões que ampliaram as possibilidades de aprendizado. Para analisar esse cenário no desenvolvimento do pensamento geométrico, foi necessário aplicar os diferentes níveis de aprendizagem propostos pelo modelo de Van Hiele (1986) e refletir sobre como os recursos do ggb-CB influenciaram o progresso e a compreensão geométrica dos participantes. Nesse sentido, cada uma das tarefas da AOEA foi analisada de acordo com a maturação do pensamento geométrico dos estudantes.

Devido à grande quantidade de dados, não foi viável realizar uma comparação direta entre as respostas dos participantes para a mesma tarefa. Em vez disso, optou-se por uma análise qualitativa que explorou como a evolução dos níveis de aprendizagem se refletiu nas respostas transcritas. Foram selecionadas as tarefas de quatro participantes que se destacaram nas interações da segunda semana de aula, com o propósito de ilustrar as dinâmicas do processo. Com base nessa análise, foi possível identificar o objeto de interação entre os sistemas envolvidos, ressaltando as dinâmicas que se estabeleceram ao longo do processo de aprendizagem.

A primeira tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 15**. A participante Mary é destacada nesta análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 15 – Tarefa 2.1 (Determinação do Número de Retas)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
a) Dado seis pontos distintos, sendo três deles colineares, quantas retas podem ser construídas? 1.1. Utilize a ferramenta “Ponto” para marcar os seis pontos distintos na *Janela de Visualização*. 1.2. Use a ferramenta “Reta” para traçar todas as retas possíveis.	***Transcrição das respostas de Mary:*** *Considerando que essas retas precisam passar por pelo menos 2 dos pontos dados (A, B, C, D, E e F, sendo A, B e C colineares), é possível traçar 13 retas distintas.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	



Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

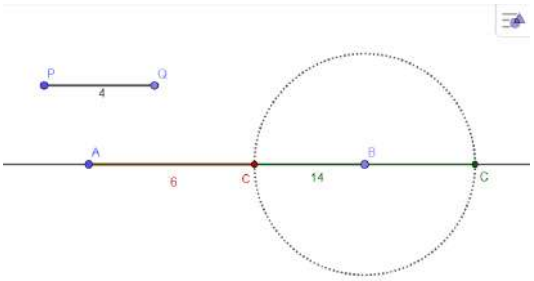
Na análise da Tarefa 2.1, a estudante Mary, ao identificar e construir as retas formadas por seis pontos, sendo três deles colineares, demonstra estar no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986). Após realizar uma análise informal dos atributos das figuras geométricas, ela avança para o Nível 1. Esse progresso se torna evidente pela forma como considerou a colinearidade dos pontos para determinar que seriam formadas 13 retas. No entanto, ela não aprofundou a análise para justificar esse resultado de maneira mais formal, o que indicaria um avanço para o Nível 2.

O uso dos recursos do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 1 (Análise), permitindo que Mary visualizasse de maneira prática as interações entre os pontos, especialmente no que diz respeito à colinearidade. Nesta análise, é possível notar que a ferramenta "Reta" facilitou a construção de todas as retas possíveis, promovendo a análise dos casos de colinearidade e não colinearidade. Assim, ao explorar essas visualizações, a estudante pôde compreender que, mesmo com três pontos colineares, poderiam ser formadas 13 retas distintas, aprofundando sua compreensão sobre as configurações das retas.

A segunda tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 16**. O participante Théo é destacado nessa análise, com base em suas nas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 16 – Tarefa 2.2 (Posição dos Segmentos em uma Reta)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
1.1. Selecione a ferramenta "Segmento de Comprimento Fixo" e clique em um ponto na Janela de Visualização para definir o ponto inicial. Digite 10 na Caixa de Comando e pressione "Enter" para definir o comprimento do segmento. Em seguida, clique em outro ponto na Janela de Visualização e digite 4 na Caixa de Comando. Renomeie o ponto C para P e o ponto D para Q. *1.2. Utilize a ferramenta "Reta" para traçar uma reta que passe pelos pontos A e B. Clique nos pontos A e B para definir a reta.* *1.3. Agora, use as ferramentas "Compasso" e "Interseção de Dois Objetos" para encontrar um ponto na reta AB tal que BC = 4 u.c.*	***Transcrição das respostas de Théo:*** *a) Depois de seguir os passos, vi que C pode estar em dois lugares diferentes na reta AB. Então, para o comprimento de AC:* *C estando à direita de B vai estar mais longe de A, daí o comprimento de AC vai ser 10+4=14.*

Ajuste a circunferência para o estilo pontuado, pinte os segmentos com cores diferentes para destacar, use a opção legenda em configurações para nomear o ponto C na reta AB. ***a) Verifique os possíveis comprimentos de AC.*** ***b) Por que podemos ter duas respostas distintas?***	*Agora, tendo C à esquerda de B, ele vai mais perto de A. O comprimento de AC vai ser 10-4= 6.* *b) Então, a resposta depende de onde C está na reta, podendo ser 14 ou 6.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	
	

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

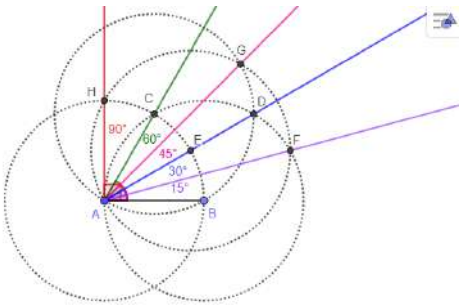
Na análise da Tarefa 2.2, pode-se observar que, ao afirmar que o ponto *C* pode estar em duas posições diferentes na reta *AB*, Théo demonstra um entendimento inicial dos conceitos de distância e posição, característica do Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986). No entanto, a capacidade de calcular os comprimentos de AC em duas situações distintas (14 e 6) indica uma progressão para o Nível 1, onde ele analisa informalmente as partes e atributos das figuras, discernindo como a posição de *C* afeta a medida dos segmentos.

O uso dos recursos do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 1 (Análise), permitindo que Théo explorasse as diferentes possibilidades de localização do ponto *C* na reta *AB*. As ferramentas "Compasso" e a "Interseção de Dois Objetos" proporcionaram uma análise prática e visual das duas soluções possíveis para o comprimento de *AC*. Nesta análise, é possível notar que o estudante pôde verificar que *C* poderia estar tanto à esquerda quanto à direita de B, resultando em duas respostas distintas para o comprimento de *AC* (10 + 4 = 14 ou 10 - 4 = 6). Essa visualização direta facilitou a análise das diferentes configurações e aprofundou a compreensão da relação entre os pontos na reta.

A terceira tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 17**. A participante Hend é destacada nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 17 – Tarefa 2.3 (Medição de Ângulos)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
1.1. Selecione a ferramenta "Segmento de Comprimento Fixo" e clique Janela de Visualização. Digite 5 na Caixa de Comando e pressione "Enter" para definir o comprimento do segmento.	***Transcrição das respostas de Hend:*** *a) 60°*

1.2. Com a ferramenta "Compasso", clique no ponto A e, em seguida, desenhe uma circunferência centrada em A. Depois, mantenha a ferramenta ativa e desenhe uma segunda circunferência com o centro em B. *1.3. Use a ferramenta "Interseção de Dois Objetos" para encontrar o primeiro ponto de interseção entre as duas circunferências no sentido anti-horário e marque esse ponto como C.* *1.4. Utilize a ferramenta "Semirreta" para traçar a semirreta AC.* *1.5. Com a ferramenta "Ângulo", meça o ∠BAC no sentido anti-horário.* ***a) Qual foi o ângulo formado?*** *1.6. Novamente com a ferramenta "Compasso", meça o comprimento AB e desenhe uma nova circunferência com centro no ponto C.* *1.7. Use a ferramenta "Interseção de Dois Objetos" para encontrar o primeiro ponto de interseção entre a segunda e a terceira circunferência no sentido anti-horário e marque esse ponto como D.* *1.8. Use a ferramenta "Semirreta" para traçar a semirreta AD.* *1.9. Com a ferramenta "Ângulo", meça o ∠BAD.* ***b) Qual foi o ângulo formado?*** *1.10. Utilize a ferramenta "Interseção de Dois Objetos" para encontrar o ponto de interseção entre a primeira circunferência e a semirreta AD. Marque esse ponto como E.* *1.11. Novamente com a ferramenta "Compasso", meça o comprimento AB e desenhe uma nova circunferência com centro no ponto E.* *1.12. Use a ferramenta "Interseção de Dois Objetos" para encontrar os três primeiros pontos de interseção dessa nova circunferência com as demais, e marque esses pontos como F, G e H.* *1.13. Com a ferramenta "Semirreta", trace as semirretas AF, AG e AH.* *1.14. Use a ferramenta "Ângulo" para medir os ângulos formados pelas novas semirretas. Ajuste todas as circunferências para o estilo pontuado e pinte os ângulos com cores diferentes, garantindo que cada ângulo tenha a mesma cor que a semirreta que define sua amplitude.* ***c) Quais foram os ângulos formados?*** ***d) Como o conhecimento desses ângulos pode ser útil para dividir uma circunferência em partes iguais?***	*b) 30°* *c) 15°, 45° e 90°* *d) Para dividir a circunferência em 6, 12, 24, 8 e 4 partes iguais.*
Pensamento Geométrico Construtivo	
	

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

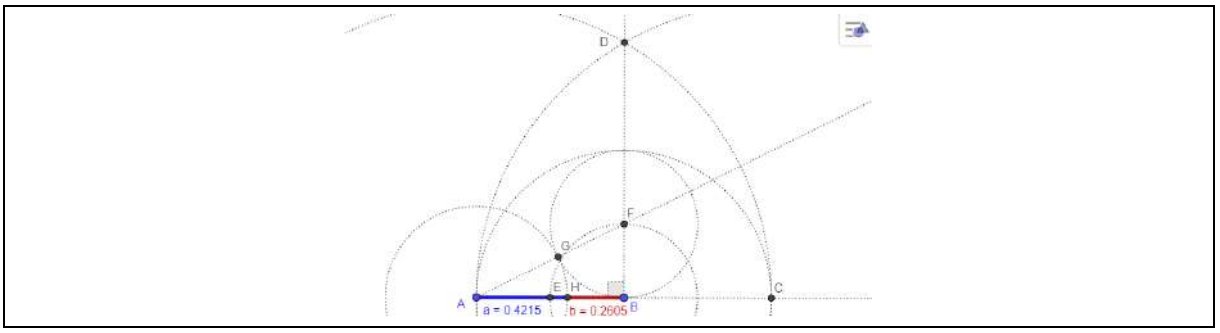
Na análise da Tarefa 2.3, é possível observar que, inicialmente, Hend operava no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), identificando ângulos e suas propriedades de maneira prática. No entanto, ao refletir sobre a utilidade desses ângulos para dividir a circunferência em partes iguais, ocorre uma progressão para o Nível 1, evidenciando uma capacidade de abstração e uma compreensão mais ampla das inter-relações entre os ângulos.

O uso dos recursos do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 1 (Análise), permitindo que a estudante explorasse, de forma interativa, as relações geométricas entre circunferências, semirretas e ângulos. Nesta análise, é possível observar que construção e a medição dinâmica dos ângulos formados proporcionaram uma análise detalhada da subdivisão da circunferência. Esse processo possibilitou a compreensão sobre como os ângulos influenciam a divisão da circunferência em partes iguais, facilitando a análise crítica das relações geométricas e suas propriedades.

A terceira tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 18**, com o tema segmento áureo. O participante Seth é destacado nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 18 – Tarefa 2.4 (Segmento Áureo)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturações**
1.1. Com a ferramentas "Segmento" e "Semirreta", trace primeiro o segmento AB e depois a semirreta AB. *1.2. Utilize as ferramentas "Compasso" e "Interseção de Dois Objetos" para encontrar um ângulo reto em B. Primeiro, uma circunferência de raio AB, uma centrada em B. Marque o ponto de interseção entre ela e a semirreta AB, ponto C. Em seguida, desenhe duas circunferências de raio AC, uma centrada no ponto A e outra no ponto C, e marque o primeiro ponto de interseção delas acima do ponto B, ponto D.* *1.3. Use a ferramenta "Semirreta", trace a semirreta BD.* *1.4. Use a ferramenta "Ângulo" para medir o ∠ABD.* *1.5. Encontre o ponto médio do segmento AB usando a ferramenta "Ponto Médio", ponto E.* *1.6. Novamente, use as ferramentas "Compasso" e "Interseção de Dois Objetos" para desenhar uma circunferência com centro em B e raio AE. Marque o ponto de interseção dessa circunferência com a semirreta BD, como F. Desenhe novamente uma circunferência de mesmo raio AF, centralizada no ponto F.* *1.7. Trace a semirreta AF e encontre o ponto de interseção entre ela e a circunferência centrada em E, use as ferramentas "Semirreta" e "Interseção de Dois Objetos", ponto G.* *1.8. Use as ferramentas "Compasso" e "Interseção de Dois Objetos" para desenhar uma circunferência com centro em A e raio AG. Marque o ponto de interseção dessa circunferência com o segmento AB, ponto H.* *1.9. Utilize a ferramenta "Segmento" para traçar os segmentos AH e HB. Denomina-os como a e b, respectivamente. Ajuste o segmento a para a cor azul e o segmento b para a cor vermelha, ambos com espessura 10. Ajuste os demais objetos construídos para estilo pontuado e espessura 3.* *1.10. Na Caixa de Entrada, digite r=b/a e tecle "Enter".* ***a) O que é uma razão?*** *1.11. Na Caixa de Entrada, digite r=b/a e tecle "Enter".* ***b) Qual o valor encontrado para r ao mover os pontos A ou B?*** *1.13. Na Caixa de Entrada, digite r'=(a+b)/b e tecle "Enter".* ***c) Qual o valor encontrado para r' ao mover os pontos A ou B?*** ***d) Qual a relação entre r e r'?*** ***e) Qual é o nome desse segmento?***	***Transcrição das respostas de Seth:*** *a) A razão é a comparação entre dois valores, expressa como uma fração ou proporção.* *b) É sempre o valor 1,618 aproximadamente.* *b) Também uma constante de valor aproximado 1,618.* *d) É que eles são iguais, assim, a/b=(a+b)/b* *e) É o segmento de razão áurea. Esse nome refere-se ao segmento que divide o comprimento de forma que a razão entre o comprimento total e a parte maior é igual à razão entre a parte maior e a parte menor, aproximadamente 1,618.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	



Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

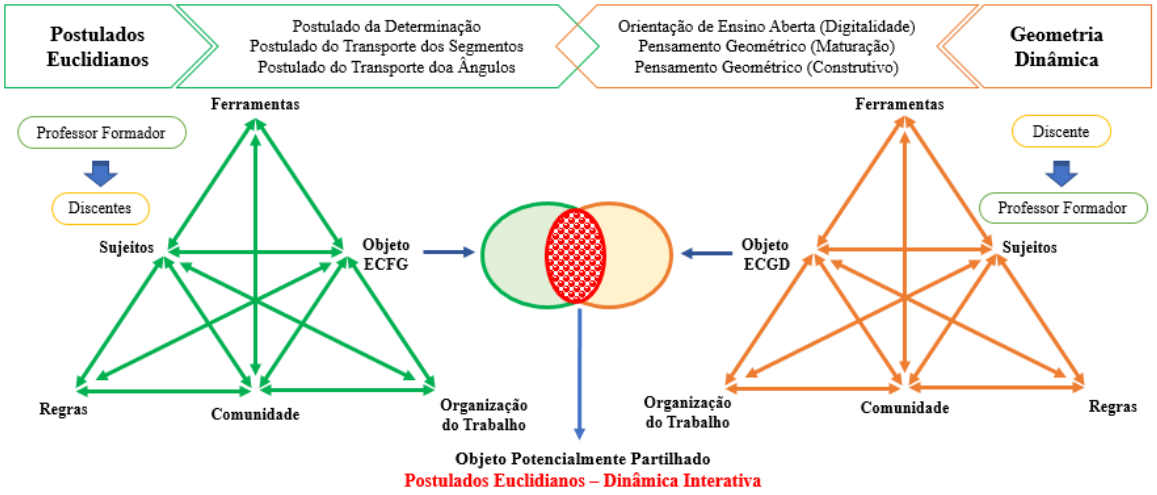
Na análise da Tarefa 2.4, infere-se que ao traçar segmentos e semirretas, Seth demonstra uma compreensão visual dos objetos geométricos, indicando um funcionamento no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986). No entanto, à medida que avança na construção e mede ângulos, seu raciocínio se aprofunda, refletindo características do Nível 1, onde analisa informalmente partes e atributos das figuras geométricas. Ao explorar a razão áurea, o estudante demonstrou uma compreensão que transcende a mera execução de instruções, passando a estabelecer relações formais entre os elementos geométricos. Além disso, ao responder sobre a razão e identificar que o valor encontrado é aproximadamente 1,618, Seth evidencia uma compreensão que vai além da simples realização de tarefas. Essa reflexão sobre a relação entre *r* e *r'* indica um entendimento do Nível 2, onde ele estabelece inter-relações das propriedades das figuras e reconhece a importância da razão áurea na divisão proporcional.

O uso dos recursos do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 2 (Dedução informal) ao permitir que Seth construísse e manipulasse segmentos e circunferências de forma virtual e dinâmica. Nesta análise, é possível notar que ao medir as razões entre os segmentos, o estudante pôde observar que, ao mover os pontos, a razão entre o segmento maior e o menor se mantinha constante, aproximando-se do valor da razão áurea. Essa interação prática facilitou a compreensão da relação entre os segmentos e a dedução de que essa razão é uma constante, sem a necessidade de formalismos rígidos.

As quatro tarefas analisadas evidenciam, por meio da interação entre o ECFG e a ECGD, a criação de um objeto potencialmente partilhado, conforme descrito na quarta contradição de Engeström (2016). Nesse contexto, o objeto partilhado foi a compreensão dinâmica interativa dos ‘Postulados Euclidianos’, com foco na maturação do pensamento geométrico dos estudantes.

O **Esquema 26**, a seguir, ilustra essa interação, destacando as diferenças entre os dois sistemas e o resultado de suas tensões.

Esquema 26 – Postulados Euclidianos – Dinâmica Interativa



Fonte: Pesquisador (2024).

No sistema ECFG, o professor formador teve uma atuação mais intensa, apresentando os conceitos relacionados aos postulados da determinação e do transporte de segmentos e ângulos de maneira estruturada e sequencial. O objetivo desse sistema foi ensinar os ‘Postulados Euclidianos’, estimulando a investigação de sua aplicação por meio de operações como a construção de pontos, retas, segmentos, ângulos e outros objetos geométricos. Para isso, o professor realizava revisões teóricas dos capítulos I ao III do volume 9, proporcionando aos estudantes uma compreensão formal dos conhecimentos curriculares abordados.

Simultaneamente, no sistema ECDG, os estudantes assumiram um papel mais proativo, explorando os conceitos de forma prática e interativa. Nesse ambiente, os estudantes puderam manipular objetos geométricos em um espaço digital dinâmico, alcançando um desempenho positivo na AOEA. Isso também favoreceu o desenvolvimento de habilidades digitais, destacando-se, nesse contexto, a reconstrução livre e interativa dos elementos geométricos com o uso da ferramenta “Compasso”. Por outro lado, o professor atuou como mediador parcial, oferecendo suporte e *feedback online*, assegurando que a exploração dos participantes fosse acompanhada virtualmente e direcionada para a aprendizagem dos ‘Postulados Euclidianos’.

Nesse sistema, o uso dos recursos do ggb-CB ofereceu uma forma inovadora de interagir com os ‘Postulados Euclidianos’, permitindo simulações que ampliam a compreensão dos conceitos geométricos de maneira intuitiva e prática. Essa articulação tecnológica favoreceu a maturação do pensamento geométrico ao tornar a experiência mais envolvente, possibilitando que os estudantes testassem hipóteses e explorassem múltiplas possibilidades de maneira virtual. Como destaca Kenski (2015b), “[...] a presença de uma determinada tecnologia pode induzir profundas mudanças na maneira de organizar o ensino” (p. 44). Assim, a tecnologia atua

como um catalisador, promovendo a socialização da inovação e transformando a forma como o conhecimento é construído e internalizado.

As operações realizadas nesse sistema podem estar relacionadas às personalizações na visualização, medições dos objetos, identificações de elementos, além de construções geométricas com diferentes possibilidades de manipulação, permitindo que os estudantes experimentem e testem as relações geométricas abordadas no ensino formal. Essas operações estão em conformidade com a TA de Leontiev (2018), pois representam ações que, uma vez internalizadas, se tornam automáticas, sendo executadas sem a necessidade de atenção consciente. Sob essa perspectiva, o foco foi medir e identificar os elementos fundamentais das estruturas, garantindo que suas propriedades essenciais fossem preservadas. Ao utilizar ferramentas digitais para interagir com os triângulos, os estudantes não apenas absorveram o conteúdo curricular, mas também o construíram ativamente por meio de uma prática dinâmica e interativa, consolidando o aprendizado por meio da experiência híbrida.

Essa abordagem reflete o conceito de autoformação proposto por Galvani (2002, p. 97), que caracteriza o processo como um "[...] imbricamento da reflexividade e da interação entre a pessoa e o meio ambiente". Ao explorar ativamente os conceitos geométricos e aplicar os 'Postulados Euclidianos', os estudantes não apenas adquirem conhecimento técnico, mas também desenvolvem sua autonomia intelectual. Esse processo transforma os estudantes em protagonistas de sua própria aprendizagem, estimulando a reflexão crítica sobre os conceitos e suas aplicações práticas. Ao utilizar o *applet* do GeoGebra nas AOEA de forma ativa e independente, eles deixam de ser meros receptores de conhecimento, passando a construir, testar e ajustar suas hipóteses. Assim, a autoformação se manifestou quando os estudantes exploraram livremente as ferramentas e elaboraram suas próprias conclusões, favorecendo o desenvolvimento de habilidades como o raciocínio lógico-geométrico e a capacidade de resolver problemas de maneira criativa e autônoma.

Nesse contexto, o progresso dos estudantes pelos diferentes níveis de pensamento geométrico, conforme o modelo de Van Hiele (1986), foi significativamente facilitado pelo uso dos recursos do ggb-CB dentro dessa proposta híbrida de ensino. Esse ambiente de aprendizagem dinâmico e interativo possibilitou a construção prática e virtual dos objetos geométricos, promovendo uma compreensão mais intuitiva dos conceitos.

Como resultado da análise, observa-se que nas Tarefas 2.1 (Determinação do Número de Retas), 2.2 (Posição dos Segmentos em uma Reta) e 2.3 (Medição de Ângulos), os estudantes Mary, Théo e Hend demonstraram avanço para o Nível 1 de aprendizagem, sendo capazes de

analisar figuras e identificar suas propriedades de maneira mais estruturada e reflexiva. Esse progresso reflete a importância da interação com a ferramenta, que possibilitou uma exploração mais compreensível dos conceitos, levando-os a perceber padrões e relações geométricas de forma mais organizada e sistemática. Por outro lado, na Tarefa 2.4 (Segmento Áureo), o estudante Seth progrediu para o Nível 2, evidenciando uma compreensão mais abstrata ao reconhecer relações geométricas e suas inter-relações. Essa transição para um nível de pensamento mais abstrato demonstra como o uso do GeoGebra não apenas facilitou a visualização de conceitos, mas também estimulou o raciocínio dedutivo e a capacidade de aplicar essas relações a novas situações, avançando na construção de uma compreensão mais profunda e formal da Geometria.

Dessa forma, a interação entre os dois sistemas (ECFG e ECGD) resultou no objeto partilhado mencionado anteriormente. Nesse processo de ensino, realizado nesta proposta híbrida, a combinação das ideias de autoformação, TDI e a TA desempenhou um papel essencial na ampliação da compreensão geométrica dos estudantes, especialmente em relação aos ‘Postulados Euclidianos’. Ao permitir que os estudantes se envolvam de maneira mais ativa e reflexiva no processo de aprendizagem, essas abordagens criaram um ambiente cooperativo, no qual o conhecimento é construído de forma prática e interativa. Isso promove o desenvolvimento de habilidades essenciais para a formação de pensadores autônomos, capazes de enfrentar e resolver desafios avançados.

4.3 Explorando os Triângulos

Na terceira semana, as aulas foram organizadas para explorar os ‘Triângulos’, com o objetivo de promover uma compreensão dinâmica desse conteúdo curricular. Nesse cenário híbrido de ensino, as ações pedagógicas envolveram a construção e a exploração do objeto de estudo, bem como a investigação, identificação e aplicação prática tanto dos elementos e tipos de triângulos quanto dos critérios de congruência e da desigualdade triangular. Além disso, houve interação discursiva sobre as aplicabilidades abordadas.

Para isso, foi necessário expandir o repertório operacional dos estudantes por meio de tarefas teóricas e práticas. A aplicação das AOEA foi fundamental nesse processo, pois forneceu diretrizes para a criação, manipulação e personalização de pontos, segmentos, bissetrizes e outros objetos geométricos. Essas atividades foram planejadas para alcançar as metas Ciade,

aproximando a turma dos recursos tecnológicos adotados, especialmente no incentivo à cultura digital com a utilização da ferramenta “Controle Deslizante”.

O **Quadro 19**, apresentado a seguir, ilustra a estrutura e a organização dessa abordagem no contexto do ensino aplicado nesta terceira semana.

Quadro 19 – Planejamento da terceira semana de aula

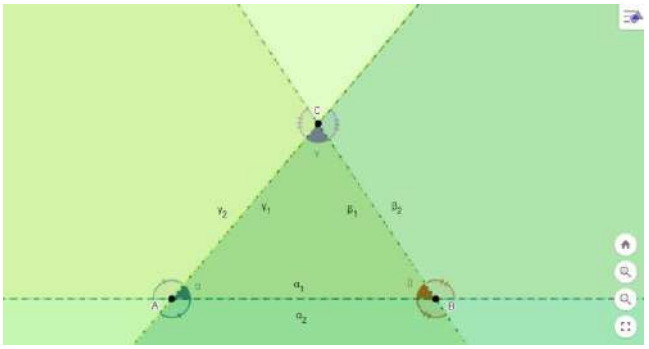
<table>
<tr><td colspan="4">Artefato
Computador e Smartphone.
GeoGebra: Plataforma; Classroom Beta; Classic; Geometria.
Ferramentas Específicas: Mover; Ponto; Interseção de Dois Objeto; Reta; Segmento; Segmento com Comprimento Fixo; Bissetriz; Compasso; Ângulo; Distância, Comprimento ou Perímetro; Controle Deslizante; Texto.
Livro: Fundamentos de Matemática Elementar 9: geometria plana (Cap. IV).</td></tr>
<tr><td>Objeto
Triângulos.</td><td>Motivo
Necessidade de promover a compreensão dinâmica dos conceitos fundamentais relacionados aos Triângulos.</td><td colspan="2">Ação
❖ Construção e exploração dos Triângulos de modo dinâmico;
❖ Investigação, identificação e aplicação dos elementos e tipos de triângulos, os critérios de congruência e da desigualdade triangular;
❖ Interação discursiva das aplicabilidades abordadas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Operações
Personalizações: configurar, renomear, ampliar/reduzir, etc.;
Construções: produzir pontos, segmentos, bissetrizes, etc.;
Medições: medir comprimentos e amplitudes angulares;
Inquietações: expor dúvidas subjetivas e/ou coletivas;
Interlocuções: participar das discussões construtivas;
Identificações: localizar as interseções dos objetos;
Explorações: testar os recursos do GeoGebra;
Revisões: revisar os conteúdos curriculares;
Administrações: gerenciar conta;
Aplicações: resolver problemas;
Conexões: conectar elementos;
Manipulações: mover objetos.</td><td colspan="2">Metas
➢ Construir ´pontos, segmentos, bissetrizes, etc. para explorar os Triângulos com a mediação tecnológica das ferramentas do GeoGebra;
➢ Investigar e aplicar os elementos e tipos de triângulos, os critérios de congruência e da desigualdade triangular;
➢ Desenvolver habilidades de conexão interativa dos elementos produzidos com o uso da ferramenta “Controle Deslizante”;
➢ Estimular discussões e reflexões sobre abordagens teóricas e práticas relacionadas ao objeto de estudo.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Condições
Ambiente de ensino híbrido com suporte contínuo da equipe docente para auxiliar na aprendizagem dos Triângulos durante as atividades presenciais, oferecendo orientações e estímulos personalizados durante as observações online a distância.</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisador (2024).

Durante essa aula, o professor formador iniciou a construção de um triângulo com três pontos não colineares (*A*, *B* e *C*) no GeoGebra *Classic online*, na disposição de Geometria, utilizando a mediação das ferramentas tecnológicas “Ponto”, “Reta” e “Mover”. Ele demonstrou como as retas criadas pelos pontos definem seis semiplanos no plano e utilizou a Janela de Álgebra para representar as inequações correspondentes. O professor explicou que a interseção desses semiplanos define o interior do triângulo, enquanto a união dos semiplanos

complementares representa o exterior do triângulo, criando uma distinção visual entre as regiões convexas e côncavas, conforme ilustrado na **Figura 7**.

Figura 7 – Identificação dos ângulos internos e externos de um triângulo

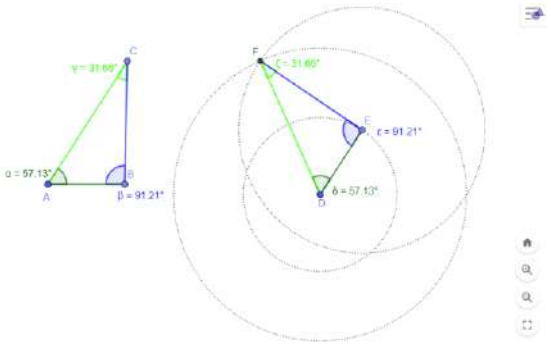


Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/nzgheaty. Acesso em: 14 ago. 2024.

Após essa definição, o professor formador utilizou o GeoGebra *Classic online*, na disposição de Geometria, para explorar a classificação dos triângulos, tanto em relação aos seus lados quanto aos ângulos internos. Em seguida, ele abordou os critérios de congruência de triângulos, explicando que dois triângulos são congruentes quando seus lados e ângulos correspondentes são iguais. Ele explorou os critérios Lado-Ângulo-Lado (LAL), Ângulo-Lado-Ângulo (ALA) e Lado-Lado-Lado (LLL). Desse modo, com a mediação tecnológica das ferramentas “Segmento com Comprimento Fixo”, “Segmento” e “Compasso”, ele construiu um triângulo com segmentos variáveis e mediu os ângulos para demonstrar a congruência entre os triângulos.

A **Figura 8** ilustra essa construção, destacando como a congruência dos triângulos foi demonstrada por meio das ferramentas do GeoGebra, que foram utilizadas para medir e comparar os ângulos.

Figura 8 – A Congruência lado-lado-lado (LLL)



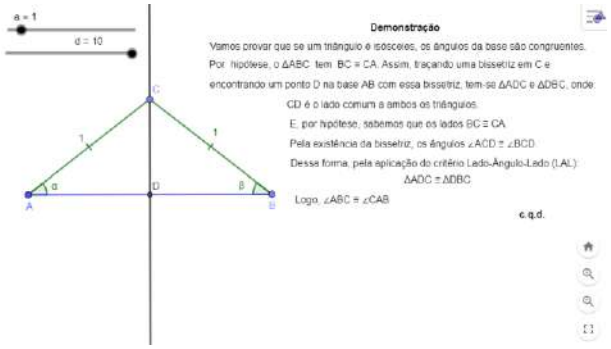
Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/jc2nxfjm. Acesso em: 14 ago. 2024.

Após explicar os conceitos de mediana e bissetriz, o professor formador iniciou a demonstração para provar que, em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes. Com a mediação tecnológica das ferramentas “Controle Deslizante”, “Segmento de Comprimento Fixo”, “Segmento”, “Bissetriz” e “Texto”, ele começou criando dois controles deslizantes, denominados “*a*” e “*d*”. Em seguida, desenhou dois segmentos de comprimento “*a*”, denominados *AC* e *CB*, e traçou o segmento *AB*, formando o triângulo ΔABC. Depois, traçou a bissetriz do ângulo em *C* e determinou o ponto de interseção dessa bissetriz com a base *AB*, denominado ponto *D*. Os ângulos nos vértices *A* e *B* foram identificados e chamados de α e β, respectivamente.

O professor formador prosseguiu com a construção ao criar três pontos não colineares, *E*, *F* e *G*, e traçou os segmentos *EF*, *FG* e *GE*, formando o triângulo ΔEFG. Esse triângulo foi, então, dividido em dois novos triângulos, ΔEFH e ΔHGE, ao aplicar uma bissetriz no ponto *E*, cuja interseção com a base foi denominada *H*. Em seguida, os ângulos $\angle FEH$ e $\angle HEG$ foram medidos. Para concluir a demonstração, ele utilizou as configurações de contexto, na interface avançada, especificamente a opção “Condição para Exibir Objeto(s)”, ajustando a exibição dos textos de acordo com a variável *d*. Em decorrência disso, configurou o texto 1 para ser exibido quando d > 0, o texto 2 quando $d \geq 1$, o texto 3 quando $d \geq 2$, e assim por diante, permitindo uma visualização gradual e dinâmica dos elementos conforme a variável.

A **Figura 9**, a seguir, ilustra de maneira dinâmica e visual, permitindo que a demonstração seja acompanhada passo a passo no *applet* de Geometria.

Figura 9 – Demonstração dos ângulos congruentes em um triângulo isósceles



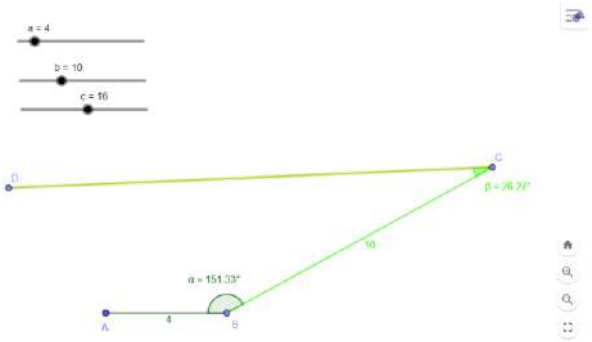
Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/mvx3pgag. Acesso em: 14 ago. 2024.

Na terceira etapa da aula, abordou-se a desigualdade triangular de forma investigativa, utilizando a mediação tecnológica das ferramentas “Controle Deslizante”, “Segmento com

Comprimento Fixo", "Distância, Comprimento ou Perímetro" e "Ângulo". Em decorrência disso, o professor formador criou três controles deslizantes (*a*, *b* e *c*) e ajustou os segmentos fixos *AO*, *OE* e *ED* para 4 *u.c.*, 10 *u.c.* e 16 *u.c.*, respectivamente. Em seguida, destacou os comprimentos desses segmentos e a amplitude dos ângulos, ∠*AOE* e ∠*OED*.

Na sequência, introduziu o conceito de desigualdade triangular, explicando que a soma de dois lados de um triângulo deve ser maior que o terceiro lado. Em termos algébricos, para os lados *a*, *b* e *c*, a desigualdade triangular pode ser expressa como: $|b-c| < a < |b+c|$. No caso dos segmentos ajustados, tem-se que a soma de 4 + 10 = 14, que é menor que 16, o que viola a condição da desigualdade. Isso demonstrou que não é possível formar um triângulo com esses segmentos, pois um lado é maior ou igual à soma dos outros dois, conforme ilustrado na **Figura 10**.

Figura 10 – Explorando a desigualdade triangular



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/cqqmwahm. Acesso em: 14 ago. 2024.

Em resumo, esta terceira semana de aula corresponde ao Sistema de Atividades III, no qual foram explorados os conhecimentos curriculares relacionados aos 'Triângulos', conforme as abordagens realizadas pelo professor formador. No entanto, durante esse processo, caracterizado pela pluralidade e multivocalidade, foram observadas algumas tensões e inquietações, que serão analisadas no próximo subtópico.

4.3.1 Análise das contradições heteroformativas no sistema de atividades III

A análise das interações na aula do Sistema de Atividades III, fundamentada nas contradições primária, secundária e terciária de Engeström (2016), revelou as tensões e as possibilidades de aprendizagem que emergiram enquanto os estudantes se dedicavam tanto à construção de pontos, segmentos, bissetrizes e outros objetos geométricos no ggb-CB, quanto

à exploração dos conhecimentos curriculares relacionados aos ‘Triângulos’, tema abordado pelo professor formador.

A contradição primária de Engeström (2016), que se manifestava dentro de cada componente do sistema de atividade, pôde ser observada na tensão entre o valor de uso e o valor de troca no conceito geométrico relacionado aos ‘Triângulos’. Esse fato ficou evidente na explicação do professor sobre a diferença entre os ângulos internos e externos dos triângulos, o que gerou dúvidas nos estudantes, como Hend, que inicialmente acreditava que o triângulo possuía apenas três ângulos externos.

É importante destacar que a heteroformação se manifestou nesse contexto, pois a aprendizagem dos estudantes foi influenciada pela orientação do professor formador e pela interação entre eles. Segundo Macedo (2010), a heteroformação se concretiza nos momentos de troca de experiências e compartilhamento de saberes. Nesse sentido, o professor utilizou o GeoGebra para ilustrar a quantidade correta de ângulos externos e a congruência entre ângulos externos adjacentes. Dessa forma, o processo formativo ocorreu por meio das trocas e reflexões entre o docente e os estudantes, evidenciando como a mediação social foi fundamental para a internalização dos conceitos.

Foi possível observar que a contradição secundária proposta por Engeström (2016) surgiu entre os componentes do sistema, especialmente entre as ferramentas utilizadas e os objetivos da atividade. Isso foi evidenciado quando Seth percebeu a confusão entre a bissetriz e um ângulo. O uso do GeoGebra foi essencial para demonstrar visualmente que a bissetriz é uma semirreta que divide o ângulo em dois ângulos congruentes. Outra situação interessante ocorreu quando Elen questionou o critério de congruência de triângulos e o caso de semelhança AAA (Ângulo-Ângulo-Ângulo). Esse questionamento foi exemplificado pelo professor com o uso da ferramenta “Controle Deslizante” no GeoGebra, o que permitiu à turma visualizar de maneira dinâmica e interativa a diferença entre triângulos semelhantes e congruentes.

Nesse cenário, a intervenção do professor, por meio da tecnologia, proporcionou um momento de internalização do conhecimento, conforme descrito por Vygotsky (2019). Sob essa perspectiva, o estudante, ao interagir com a ferramenta e com o professor, transformou o conhecimento exterior (percepção visual) em compreensão interna (definição rigorosa). Assim, a internalização ocorreu à medida que o estudante, com a mediação do professor e da tecnologia, construiu uma compreensão sólida dos conceitos. Por conseguinte, os problemas observados foram resolvidos quando os estudantes puderam, por meio das ferramentas digitais, explorar

diferentes configurações de triângulos, observar as relações entre os ângulos internos e externos e testar os critérios de congruência.

A contradição terciária de Engeström (2016) manifestou-se quando o uso de novas tecnologias, como o ggb-CB, entrou em conflito com os métodos convencionais de ensino, desafiando as práticas estabelecidas e promovendo uma transformação na abordagem pedagógica. Durante a aula, Ulan teve dúvidas sobre como utilizar o controle deslizante no GeoGebra para conectar os elementos da construção e da demonstração. Esse desafio foi superado com a ajuda dos colegas, o que possibilitou a exploração de diversas configurações de triângulos e suas propriedades.

A utilização de ferramentas digitais não apenas possibilitou a visualização de conceitos geométricos, mas também exigiu uma adaptação dos estudantes às novas formas de aprendizagem e colaboração, essenciais para o desenvolvimento de um conhecimento mais dinâmico e interconectado. Como afirma Lévy (2021, p. 159), "[...] qualquer reflexão sobre o futuro dos sistemas de educação e formação na cibercultura deve ser fundamentada em uma análise prévia da mutação contemporânea da relação com o saber". Esse movimento de adaptação e transformação, mediado pela tecnologia, ilustra como o ensino híbrido e a colaboração entre os estudantes se tornaram centrais na construção de conhecimentos mais profundos e reflexivos.

Desse modo, a ferramenta digital, longe de alterar os conceitos geométricos, funcionou como um meio para explorar suas implicações e testar suas condições de maneira mais interativa, contribuindo para o aprofundamento da compreensão da turma. Esse novo modelo de atividade, no qual a tecnologia facilitou o aprendizado interativo e virtual, contrastou com métodos mais estáticos e convencionais. No entanto, o uso do GeoGebra promoveu uma compreensão mais profunda e participativa, permitindo que os estudantes colaborassem e verificassem resultados de forma mais ágil e eficiente.

A resolução dessas contradições, nesse contexto, fez parte do processo de formação híbrida (Horn; Staker, 2015). Nesse modelo, a implementação do ggb-CB complementou a prática convencional de ensino, permitindo uma maior interação entre teoria e prática. Ao integrar a TD com interações presenciais, o ensino híbrido ofereceu aos estudantes a oportunidade de explorar conceitos geométricos sobre triângulo de maneira prática e virtual. Essa abordagem favoreceu uma aprendizagem mais dinâmica e coletivamente interativa, consolidada pela constante interação entre a turma e o professor formador.

O uso do GeoGebra não apenas facilitou a visualização das estruturas triangulares, mas também incentivou a exploração ativa dos elementos, tornando o processo de aprendizagem mais envolvente. Esse movimento heteroformativo, evidenciado pela mediação tecnológica e pela interação social, resultou na construção coletiva do conhecimento. Assim, os estudantes, com o apoio do professor formador e das ferramentas digitais, conseguiram transformar o conhecimento abstrato em uma compreensão mais reflexiva e prática.

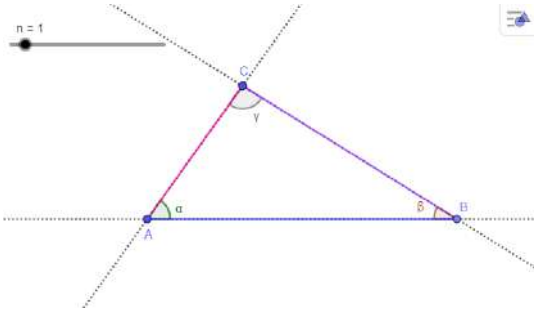
4.3.2 Análise das contradições autoformativas no sistema de atividades III

Com a base estabelecida no subtópico anterior, que tratou das dinâmicas heteroformativas e suas tensões, resultando na construção coletiva do conhecimento, a análise agora se volta para os aspectos autoformativas no Sistema de Atividades III, fundamentando-se nesse processo tecformativo digital e evidenciando como os estudantes adotaram uma postura mais autônoma e proativa no processo de aprendizagem dos 'Triângulos'. Em decorrência disso, nesta parte, discute-se a maneira como os níveis de aprendizagem (Van Hiele, 1986) se manifestaram nas tarefas dos quatro participantes que mais se destacaram durante as interações da terceira semana de aula. Após essa análise, é apresentada a interação geral entre os sistemas envolvidos à luz da contradição quaternária (Engeström, 2016).

A primeira tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 20**. A participante Hend é destacada nessa análise, com base em suas respostas transcritas no ggb-CB da turma.

Quadro 20 – Tarefa 3.1 (Triângulo)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	Pensamento Geométrico – Maturação
1.1. Utilize a ferramenta "Controle Deslizante" para definir o comprimento de um segmento n. Ajuste o deslizador para que a variação seja de 0,1 a 10. *1.2. Use a ferramenta "Segmento de Comprimento Fixo", clique na Janela de Visualização e digite n na Caixa de Comando para definir o comprimento do segmento.* *1.3. Utilize a ferramenta "Reta" para construir três retas: uma que passe pelos pontos A e B, uma que passe somente pelo ponto A, e uma terceira que passe somente pelo ponto B, mas que tenha um ponto em comum com a segunda reta. Ajuste o estilo das retas para pontuado para facilitar a visualização.* *1.4. Em seguida, selecione a ferramenta "Segmento" e conecte os pontos A, B e C, ajustando cada segmento para uma cor específica.* *1.5. Use a ferramenta "Ângulo" para identificar e rotular cada ângulo interno do triângulo ABC com letras gregas. Ajuste cada ângulo para uma cor diferente.* ***a) Que desenho você construiu?*** ***b) O que acontece quando você movimenta o controle deslizante?***	***Transcrição das respostas de Hend:*** *a) Eu construí um triângulo. As três retas se encontram nos vértices A, B e C, formando um triângulo.* *b) Um lado do tamanho do triângulo mudam* *c) Quando movo os vértices a forma do triângulo muda, mas ele continua sendo um triângulo.* *c) É um triângulo, que pode ser descrito como um objeto geométrico de três lados e três ângulos.*

c) O que acontece quando você movimenta os vértices A, B e C? ***d) Descreva o desenho resultante na linguagem matemática? Por que?***	
Pensamento Geométrico Construtivo	
	

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

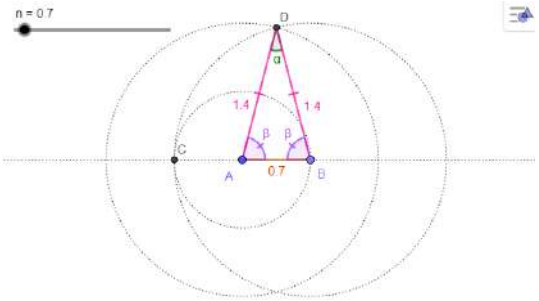
Na análise da Tarefa 3.1, observa-se que a estudante Hend está no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), ao reconhecer o triângulo pela sua aparência, utilizando ferramentas de visualização para desenhá-lo. Ao movimentar os vértices *A, B* e *C* e observar como o triângulo se transforma sem perder sua identidade, a estudante progrediu para o Nível 1, onde começou a analisar as partes e atributos da figura. Ao descrever o triângulo de maneira abstrata, caracterizando-o como um objeto com três lados e três ângulos, Hend demonstrou indícios de transição para o Nível 2, onde começou a estabelecer inter-relações entre as propriedades geométricas.

O uso dos recursos do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 2 (Dedução Informal) ao permitir que a estudante manipulasse visualmente as variáveis, como o comprimento do segmento e as posições dos vértices. Nesta análise, é possível notar que o controle deslizante e as ferramentas de construção de segmentos e ângulos possibilitaram a exploração de diversas configurações geométricas de um triângulo. Em razão disso, a interação prática com a variação dos lados e ângulos facilitou a dedução de propriedades do triângulo, como a relação entre seus lados e ângulos, de maneira mais intuitiva e acessível.

A segunda tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 21**. A participante Elen é destacada nessa análise, com base em suas respostas transcritas no ggb-CB da turma.

Quadro 21 – Tarefa 3.2 (Triângulo Isósceles)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	Pensamento Geométrico – Maturações
1.1. Realize os passos 1.1 e 1.2 da tarefa anterior. *1.2. Utilize as ferramentas "Reta", "Interseção de Dois Objetos", "Segmento" e "Compasso" para construir um triângulo isósceles com uma base definida como n. Certifique-se de que o triângulo construído não seja equilátero.*	***Transcrição das respostas de Elen:*** *a) Um triângulo com base zero não é um triângulo de fato. Em um triângulo, todos os lados devem ter comprimentos positivos e a base deve ter um comprimento positivo*

1.3. Ajuste os estilos dos objetos construídos, configurando os não essenciais para a visualização do triângulo isósceles com estilo pontuado e espessura 3, para melhorar a clareza visual. *1.4. Utilize as ferramentas "Comprimento, Distância ou Perímetro" e "Ângulos" para medir o comprimento dos lados do triângulo e identificar os ângulos internos. Nomeie os ângulos com letras gregas, sem exibir seus valores numéricos, e use a decoração apropriada para sinalizar os objetos congruentes.* ***a) Por que o valor inicial não pode ser zero?*** ***b) Como você pode garantir que o triângulo construído é isósceles e não equilátero?***	*para que existam dois lados não coincidentes que formem um triângulo com o terceiro lado.* *b) Eu medi os lados do triângulo com a ferramenta de comprimento no GeoGebra. Verifiquei que dois dos lados tinham o mesmo comprimento e o terceiro lado era diferente. Como isso confirma que é um triângulo isósceles, e não equilátero, já que todos os lados seriam iguais se fosse equilátero.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	
	

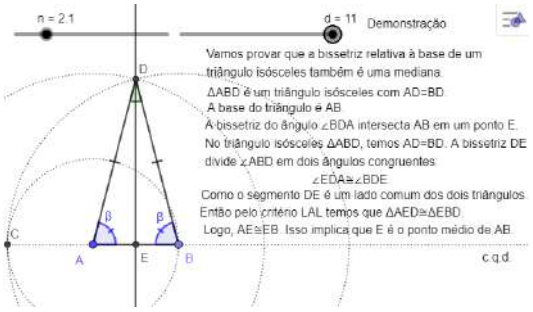
Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Na análise da Tarefa 3.2, a estudante Elen demonstrou um progresso significativo. Inicialmente, ela operou no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), reconhecendo a forma do triângulo e utilizando ferramentas geométricas básicas. Ao afirmar que um triângulo não pode ter base zero, Elen avançou para o Nível 1, onde começou a discernir as propriedades geométricas e refletir sobre a necessidade de comprimentos positivos para a formação de um triângulo. Ao medir os lados e verificar a congruência de dois lados do triângulo, Elen progrediu para o Nível 2, sendo capaz de identificar as relações entre os lados congruentes e a base, distinguindo claramente um triângulo isósceles de um triângulo equilátero.

O uso dos recursos do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 2 (Dedução Informal) ao possibilitar a construção virtual e a verificação dinâmica das propriedades de um triângulo isósceles. Nesta análise, é possível observar que a ferramenta "Comprimento, Distância ou Perímetro" permitiu que a estudante verificasse diretamente a congruência dos lados, assegurando que o triângulo não fosse equilátero. Essa manipulação virtual e a medição dos lados e ângulos auxiliaram a estudante a deduzir, de forma informal, as características geométricas do triângulo, compreendendo a diferença entre os triângulos isósceles e equiláteros.

A terceira tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 22**. O participante Seth é destacado nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 22 – Tarefa 3.3 (Prova da Bissetriz do Triângulo Isósceles)

<table>
<tr><th>Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade</th><th>Pensamento Geométrico – Maturações</th></tr>
<tr><td>Prove que a bissetriz relativa à base de um triângulo isósceles também é uma mediana.
1. Orientações construtivas:
1.1. Construa um triângulo isósceles, onde os dois lados são iguais e a base é definida pelo deslizador. Use os procedimentos da tarefa 3.2.
1.2. Adicione a bissetriz que divide o ângulo na base em dois ângulos iguais (use a ferramenta “Bissetriz”).
1.3. Essa bissetriz será desenhada de H até a base AB, cortando-a em um ponto I (use a ferramenta “Interseção de Dois Objetos” para encontrar esse ponto).
2. Orientações para a demonstração argumentativa:
2.1. Comece a demonstração com o termo: Demonstração.
2.2. Declare claramente o que você deseja provar.
2.3. Descreva detalhadamente os elementos importantes da construção geométrica necessários para sua demonstração.
2.4. Mostre que os triângulos formados pelos lados do triângulo isósceles e a bissetriz são congruentes.
a) Explique o motivo pelo qual esses triângulos são congruentes.
2.5. Conclua a demonstração com o termo: c.q.d.
3. Orientações para a demonstração dinâmica:
Utilize novamente a ferramenta “Controle Deslizante”, nomeando-o como “d”, e configure-o para variar de 0 até o número de etapas descritas na demonstração, com incremento de 1. Nas configurações avançadas, ajuste o deslizador para mostrar o texto da demonstração progressivamente: para o texto 1: d >=1, para o texto 2: d>=2 e assim por diante, para cada etapa da demonstração.</td><td>Transcrição das respostas de Seth:
a) São congruentes porque o lado AD e BD são congruentes, os ângulos formados pela bissetriz são congruentes, e a bissetriz DE um lado é comum dos triângulos.
Demonstração
Vamos provar que a bissetriz relativa à base de um triângulo isósceles também é uma mediana.
ΔABD é um triângulo isósceles com AD=BD.
A base do triângulo é AB.
A bissetriz do ângulo ∠BDA intersecta AB em um ponto E.
No triângulo isósceles ΔABD, temos AD=BD. A bissetriz DE divide ∠ABD em dois ângulos congruentes:
∠EDA≅∠BDE.
Como o segmento DE é um lado comum dos dois triângulos.
Então pelo critério LAL temos que ΔAED≅ΔEBD.
Logo, AE≅EB. Isso implica que E é o ponto médio de AB.
c.q.d.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Pensamento Geométrico – Construtivo</th></tr>
<tr><td colspan="2"> 
</td></tr>
</table>

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Na análise da Tarefa 3.3, nota-se que o estudante operou no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), reconhecendo a figura do triângulo isósceles. Ao avançar na demonstração, Seth identificou os triângulos formados pela bissetriz e analisou sua congruência, mostrando progresso para o Nível 1. Ao estruturar a demonstração formalmente, utilizando terminologia apropriada e critérios geométricos como o critério LAL (Lado-Ângulo-Lado), Seth alcançou o Nível 3, caracterizado pela dedução formal e a aplicação de uma sequência lógica de afirmações.

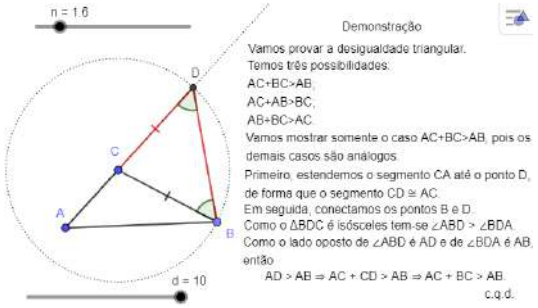
Na análise da Tarefa 3.3, observa-se que o estudante operou no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), reconhecendo a figura do triângulo isósceles. Ao avançar na demonstração, Seth identificou os triângulos formados pela bissetriz e analisou sua congruência, evidenciando progresso para o Nível 1. Ao estruturar a demonstração de maneira formal, utilizando terminologia adequada e critérios geométricos, como o critério LAL (Lado-Ângulo-Lado), Seth alcançou o Nível 3, caracterizado pela dedução formal e pela aplicação de uma sequência lógica de afirmações.

O uso dos recursos do ggb-CB facilitou a transição para o Nível 3 (Dedução Formal) ao permitir a construção virtual e interativa da prova geométrica. Nesta análise, é possível notar que a ferramenta "Controle Deslizante" possibilitou uma apresentação progressiva da demonstração, revelando cada etapa da argumentação de maneira clara e ordenada. Assim, a construção dinâmica do triângulo isósceles, a bissetriz e o ponto de interseção contribuíram para a visualização das relações de congruência entre os triângulos. Além disso, a interação com os elementos gráficos possibilitou ao estudante fundamentar formalmente a prova, utilizando critérios como LAL (Lado-Ângulo-Lado) para concluir a congruência e a mediana.

A última tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 23**. O participante Ulan é destacado nessa análise, com base em suas respostas transcritas no ggb-CB da turma.

Quadro 23 – Tarefa 3.4 (Prova da Desigualdade Triangular)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturações**
Prove a desigualdade triangular ***1. Orientações construtivas:*** *1.1. Crie um controle deslizante usando a ferramenta "Controle Deslizante". Configure o deslizador para variar o valor de n de 0,1 a 10.* *1.2. Utilize a ferramenta "Segmento de Comprimento Fixo" para construir o segmento AB. Defina o comprimento desse segmento como o valor do deslizador n.* *1.3. Use a ferramenta "Segmento" para desenhar o segmento BC e o segmento AC, conectando os pontos A, B e C para formar o triângulo.* *1.4 Utiliza a ferramenta "Compasso" com raio BC e centralize no ponto C.* *1.5. Use as ferramentas "Semirreta" e "Interseção em Dois Objetos", trace a semirreta AC e encontre o ponto de interseção dela com a circunferência criada, ponto D. Ajuste esses objetos para estilo pontuado e espessura 3.* *1.6. Trace os segmentos CD e BD com a ferramenta "Segmento". Ajuste esses segmentos para cor vermelha.* ***a) Qual é o nome do triângulo BDC? Por quê?*** *1.7. Identifique os ângulos congruentes sem nome e valor. Ajuste os lados congruentes para decoração um traço.*	***Transcrição das respostas de Ulan:*** *a) É um triângulo isósceles porque os segmentos BD e DC são congruentes.* *b) No triângulo ABD, o maior lado é AD e o maior ângulo é o ∠ABD. Isso ocorre porque, em um triângulo, o maior ângulo está sempre oposto ao maior lado.* *Demonstração* *Vamos provar a desigualdade triangular. Temos três possibilidades:* *AC+BC>AB;* *AC+AB>BC;* *AB+BC>AC.* *Vamos mostrar o caso AC+BC>AB, pois os demais casos são análogos.* *Primeiro, estendemos o segmento CA até o ponto D, de forma que o segmento CD ≅ AC.* *Em seguida, conectamos os pontos B e D. Como o ΔBDC é isósceles tem-se*

b) No triângulo ABD qual é o maior lado e maior ângulo, qual a relação entre eles? ***2. Aplique os passos das orientações para a demonstração argumentativa (2.4. Use a relação que o maior ângulo se opõe ao a maior lado).*** ***3. Use as orientações para a demonstração dinâmica.***	*∠ABD > ∠BDA. Como o lado oposto de ∠ABD é AD e de ∠BDA é AB, então* *AD > AB ⇒* *AC + CD > AB ⇒* *AC + BC > AB.* *c.q.d.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	
	

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

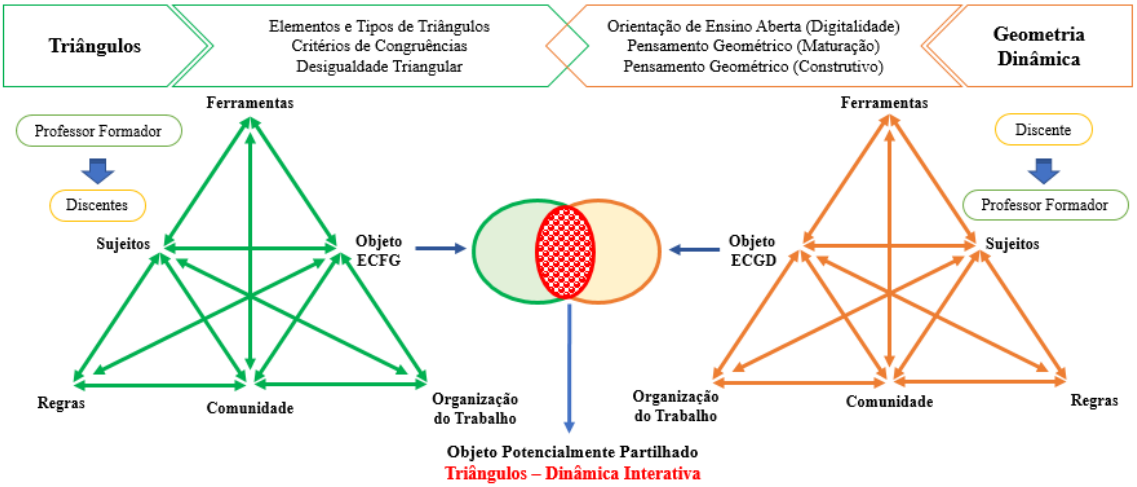
Na análise da Tarefa 3.4, Ulan demonstrou um progresso semelhante. Pode-se inferir que, inicialmente, ele reconheceu o triângulo pela sua aparência e utilizou o vocabulário geométrico básico, operando no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986). À medida que avança na construção da prova, o estudante entra no Nível 1, onde começa a analisar informalmente as partes e atributos do triângulo. Além disso, ao responder sobre as relações entre os ângulos e os lados do triângulo, ele demonstra uma compreensão mais profunda das propriedades geométricas, embora ainda sem formalizar essa análise em deduções rigorosas, características do Nível 2. Ao estruturar a demonstração da desigualdade triangular, ele atinge o Nível 3, pois apresenta uma sequência lógica de afirmações, evidenciando a relação entre os lados e os ângulos, e fundamenta sua prova com base no princípio de que o maior ângulo opõe-se ao maior lado.

O uso dos recursos do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 3 (Dedução Formal) ao permitir que o estudante construísse e manipulasse dinamicamente os elementos geométricos, facilitando a visualização das relações e propriedades envolvidas na desigualdade triangular. Nesta análise, é possível notar que a ferramenta “Controle Deslizante’ possibilitou a exploração de diferentes comprimentos dos lados do triângulo, enquanto a construção interativa do triângulo isósceles e o uso do compasso ajudaram a ilustrar a congruência dos lados e ângulos. A demonstração foi fortalecida ao conectar visualmente os conceitos, levando o estudante a aplicar a relação entre o maior lado e o maior ângulo para concluir formalmente a desigualdade triangular.

As quatro tarefas analisadas evidenciam, por meio da interação entre o ECFG e a ECGD, a criação de um objeto potencialmente partilhado, conforme descrito na quarta contradição de

Engeström (2016). Nesse contexto, o objeto partilhado foi a compreensão dinâmica interativa dos ‘Triângulos’, com foco na maturação do pensamento geométrico dos estudantes (**Esquema 27**).

Esquema 27 – Triângulos – Dinâmica Interativa



Fonte: Pesquisador (2024).

No sistema ECFG, o professor formador teve uma atuação mais intensa, apresentando de forma estruturada e sequencial os conceitos relacionados aos elementos e tipos de triângulos, bem como os critérios de congruência e a desigualdade triangular. O objetivo desse sistema foi ensinar sobre ‘Triângulos’, estimulando a investigação de sua aplicação por meio de operações como a construção de pontos, segmentos, bissetrizes e outros objetos geométricos. Para isso, o professor realizava revisões teóricas do capítulo IV do volume 9, proporcionando aos estudantes uma compreensão formal dos conhecimentos curriculares abordados.

Ao mesmo tempo, no sistema ECDG, os estudantes assumiram um papel mais proativo em seu processo de aprendizagem. Nesse ambiente, tiveram a oportunidade de explorar os conceitos de maneira prática e interativa, manipulando objetos geométricos em um espaço digital dinâmico, o que resultou em um bom desempenho nas AOEA. Esse processo favoreceu o desenvolvimento de habilidades digitais, destacando-se, nesse cenário, a prática de conexão interativa dos elementos produzidos com o uso da ferramenta “Controle Deslizante”. Por outro lado, o professor atuou como mediador, oferecendo suporte e *feedback online* para garantir que a exploração dos estudantes fosse acompanhada virtualmente e direcionada para a aprendizagem dos ‘Triângulos’.

Nesse sistema, com o uso dos recursos do ggb-CB, os estudantes tiveram a oportunidade de testar, manipular e visualizar diferentes aspectos dos ‘Triângulos’ de maneira imediata, o

que facilita a compreensão e a internalização dos conceitos geométricos. A utilização das TD como ferramentas mediadoras do conhecimento promoveu a maturação do pensamento geométrico, proporcionando uma experiência de aprendizagem mais interativa e envolvente, potencializando, assim, o desenvolvimento cognitivo dos estudantes. Como destaca Kenski (2015b), a formação de qualidade dos futuros professores deve incluir o uso adequado das tecnologias, pois estas ampliam as possibilidades de interação com os conteúdos e favorecem a reflexão sobre as melhores formas de abordar temas pedagógicos. Nesse contexto, a tecnologia contribui para a construção de um aprendizado culturalmente digital.

As operações realizadas nesse sistema podem estar relacionadas às personalizações na visualização, medições dos objetos, identificações e conexões de elementos, além de construções geométricas com diferentes possibilidades de manipulação, permitindo que os usuários experimentem e testem as relações geométricas abordadas no ensino formal. Essas operações estão alinhadas com a TA de Leontiev (2018), pois envolvem ações que, uma vez assimiladas, se tornam automáticas, sendo executadas sem a necessidade de atenção consciente.

Sob essa perspectiva, o foco foi conectar os elementos fundamentais das estruturas, garantindo que suas propriedades essenciais fossem preservadas. Ao utilizar as ferramentas digitais para interagir com os triângulos, os estudantes não apenas absorveram o conteúdo curricular, mas também o construíram ativamente por meio de práticas dinâmicas e interativas, consolidando o aprendizado por meio de uma experiência híbrida.

Esse processo reflete o conceito de autoformação proposto por Macedo (2010), pois, ao explorar e manipular os conceitos geométricos de maneira autônoma e prática, os estudantes desenvolveram uma capacidade reflexiva e proativa. Nas AOEA, foi possível inferir que a autoformação não apenas facilita a aquisição de conhecimento, mas também fortalece a autonomia intelectual e aprimora a habilidade de resolução de problemas. Nesse sentido, ao serem incentivados a investigar os ‘Triângulos’ em um ambiente dinâmico e interativo, os estudantes tornaram-se protagonistas de sua própria aprendizagem, estabelecendo conexões entre os conceitos e aplicando-os em contextos práticos, o que aprofundou sua compreensão e fortaleceu suas habilidades cognitivas.

A integração dos recursos do ggb-CB na proposta híbrida de ensino facilitou o progresso dos estudantes nos níveis de pensamento geométrico, conforme o modelo de Van Hiele (1986). Esse ambiente de aprendizagem interativo e dinâmico possibilitou uma construção mais intuitiva e visual dos conceitos geométricos. Como resultado, nas Tarefas 3.1 (Triângulo) e 3.2 (Triângulo Isósceles), as estudantes Hend e Elen avançaram para o Nível 2 de aprendizagem,

evidenciado pela capacidade de compreender de forma mais abstrata as relações geométricas e de utilizar deduções informais. Esse progresso tornou-se evidente quando as alunas foram capazes de aplicar o conhecimento adquirido de maneira mais estruturada e reflexiva.

Nas Tarefas 3.3 (Prova da Bissetriz do Triângulo Isósceles) e 3.4 (Prova da Desigualdade Triangular), os estudantes Seth e Ulan avançaram para o Nível 3, onde conseguiram desenvolver sequências de afirmações dedutivas e construir provas geométricas. Esse progresso para o Nível 3 foi notável, pois indicou uma compreensão mais profunda e uma maior capacidade de formalizar o raciocínio geométrico. Em decorrência disso, o uso da ferramenta não apenas facilitou a visualização dos conceitos, mas também foi essencial para o desenvolvimento da autonomia dos estudantes, permitindo-lhes explorar as relações e propriedades geométricas de maneira mais avançada e estruturada.

Assim, a interação entre os dois sistemas (ECFG e ECGD) resultou na criação do objeto partilhado mencionado anteriormente. Nesse processo de ensino, desenvolvido nesta proposta híbrida, a combinação das ideias de autoformação, TDI e a TA possibilitou uma expansão significativa da compreensão geométrica dos estudantes, especialmente no estudo dos ‘Triângulos’. Ao promover uma aprendizagem ativa e reflexiva, essas abordagens criaram um ambiente no qual os estudantes puderam desenvolver suas habilidades cognitivas de maneira integrada e contextualizada. Como resultado, observou-se um avanço cognitivo em suas capacidades de dedução e raciocínio geométrico.

4.4 Explorando o Paralelismo e a Perpendicularidade

Na quarta semana, as aulas foram estruturadas para explorar o ‘Paralelismo e a Perpendicularidade’, com o objetivo de promover uma compreensão dinâmica sobre esse conteúdo curricular. Nesse cenário híbrido de ensino, as ações pedagógicas envolveram a construção e a exploração do objeto de estudo, bem como a investigação, identificação e aplicação das relações entre os ângulos formados por feixes de retas paralelas cortadas por uma transversal, além dos ângulos internos e externos dos triângulos e das projeções ortogonais. De forma complementar, as aulas enfatizaram a interação discursiva, possibilitando uma reflexão sobre as aplicações desses conceitos no estudo da Geometria.

Para isso, foi necessário expandir o repertório operacional dos estudantes por meio de tarefas teóricas e práticas. A aplicação das AOEA foi fundamental nesse processo, pois forneceu diretrizes para a criação, manipulação e personalização de pontos, retas, mediatrizes e outros

objetos geométricos. Essas atividades foram planejadas para alcançar as metas Ciade, aproximando a turma dos recursos tecnológicos adotados, especialmente no incentivo à cultura digital com a utilização da ferramenta “Ponto em Objeto”.

O **Quadro 24**, apresentado a seguir, ilustra a estrutura e a organização dessa abordagem no contexto do ensino aplicado nesta quarta semana.

Quadro 24 – Planejamento da quarta semana de aula

<table>
<tr><td colspan="3">Artefatos
Computador e Smartphone.
GeoGebra: Plataforma; Classroom Beta; Classic; Geometria.
Ferramentas Específicas: Mover; Ponto; Vincular/Desvincular Ponto; Ponto em Objeto; Interseção de Dois Objeto; Reta; Segmento; Segmento com Comprimento Fixo; Reta Perpendicular; Reta Paralela; Mediatriz; Ângulo; Distância, Comprimento ou Perímetro; Controle Deslizante; Texto.
Livro: Fundamentos de Matemática Elementar 9: geometria plana (Cap. V e VI).</td></tr>
<tr><td>Objeto
Paralelismo e a Perpendicularidade.</td><td>Motivo
Necessidade de promover a compreensão dinâmica dos conceitos fundamentais relacionados aos Paralelismo e Perpendicularidade.</td><td>Ação
❖ Construção e exploração de Paralelismo e a Perpendicularidade de modo dinâmico;
❖ Investigação, identificação e aplicação das relações dos ângulos formados por feixe de retas paralelas interceptados por uma transversal, entre ângulos externos e internos do triângulo e as projeções ortogonais;
❖ Interação discursiva das aplicabilidades abordadas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Operações
Personalizações: configurar, renomear, exibir/ocultar, etc.;
Medições: medir comprimentos e amplitudes angulares;
Inquietações: expor dúvidas subjetivas e/ou coletivas;
Construções: produzir pontos, retas, mediatrizes, etc.;
Interlocuções: participar das discussões construtivas;
Identificações: localizar as interseções dos objetos;
Explorações: testar os recursos do GeoGebra;
Revisões: revisar os conteúdos curriculares;
Implantações: inserir elementos adaptáveis;
Interações: interagir com as AOEA;
Administrações: gerenciar conta;
Aplicações: resolver problemas;
Conexões: conectar elementos;
Manipulações: mover objetos.</td><td>Metas
➢ Construir pontos, retas, mediatrizes, etc. para explorar a definição de Paralelismo e a Perpendicularidade com a mediação tecnológica das ferramentas do GeoGebra;
➢ Investigar e aplicar as relações dos ângulos formados por feixe de retas paralelas interceptados por uma transversal, entre ângulos externos e internos do triângulo e as projeções ortogonais;
➢ Desenvolver habilidades práticas para a manipulação semilivre e interativa dos elementos geométricos com o uso da ferramenta “Ponto em Objeto”;
➢ Estimular discussões e reflexões sobre abordagens teóricas e práticas relacionadas ao objeto de estudo.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Condições
Ambiente de ensino híbrido com suporte contínuo da equipe docente para auxiliar na aprendizagem de Paralelismo e a Perpendicularidade durante as atividades presenciais, oferecendo orientações e estímulos personalizados durante as observações online a distância.</td></tr>
</table>

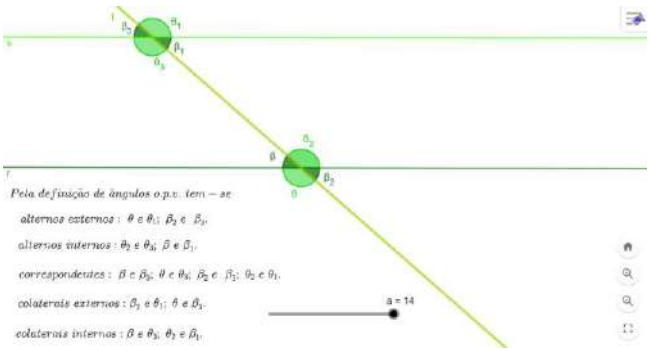
Fonte: Pesquisador (2024).

O professor formador iniciou a aula explicando o conceito de paralelismo entre retas, aplicando o postulado das paralelas. Em seguida, abordou as relações entre ângulos em feixes

de retas paralelas cortadas por uma transversal. Para isso, utilizou a mediação das ferramentas tecnológicas “Controle Deslizante”, “Reta”, “Reta Paralela”, “Ponto em Objeto”, “Ângulo” e “Texto”. Nesse contexto, começou traçando duas retas paralelas, *r* e *s*, e uma transversal *t*. Depois, adicionou os pontos de interseção dessas retas com a transversal, além de outros pontos nas retas, marcando os ângulos internos e externos formados. Dessa forma, o professor demonstrou as relações entre ângulos alternos internos, alternos externos e correspondentes, destacando suas propriedades de congruência com um texto conectado ao controle deslizante.

A **Figura 11** ilustra essa abordagem, na qual o professor formador destacou a importância de utilizar a ferramenta “Ponto em Objeto” para localizar todos os pontos necessários à medição dos ângulos.

Figura 11 – Ângulos formados por feixes de retas paralelas cortados por uma transversal



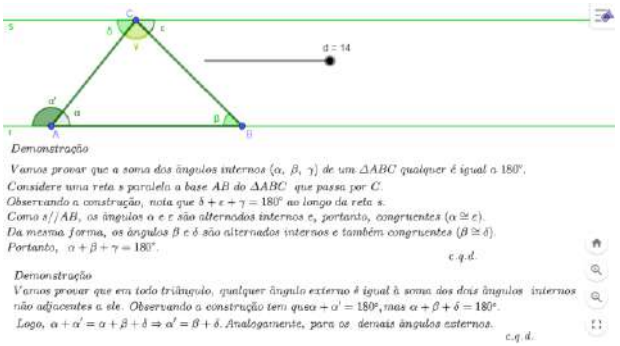
Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/wrj2cf6m. Acesso em: 16 ago. 2024.

Na segunda etapa da aula, o professor formador abordou a relação entre os ângulos externos e internos de um triângulo. Para isso, utilizou a mediação tecnológica das ferramentas “Controle Deslizante”, “Ponto”, “Segmento”, “Reta”, “Reta Paralela”, “Ângulo”, “Ponto em Objeto” e “Texto”. Nesse momento, ele iniciou a demonstração criando três pontos não colineares (*A*, *B* e *C*) e traçando os segmentos que os conectam, formando o triângulo ΔABC. Em seguida, ele desenhou duas retas paralelas, *r* e *s*, que passam, respectivamente, pelo segmento *AB* e pelo ponto *C*. Os ângulos internos do triângulo foram identificados como α, β e γ, enquanto os ângulos externos ao vértice *C* foram denominados δ e ε.

Com essa construção, o professor explicou a relação entre os ângulos internos e externos de um triângulo. Aproveitando a mesma construção, ele também demonstrou o Teorema do Ângulo Externo de um Triângulo, gerando o ângulo α', que é suplementar ao ângulo α, e detalhou o processo de prova. Na sequência, ele conectou o texto ao controle deslizante, esse método permitiu que a apresentação da demonstração fosse progressiva e interativa, facilitando

a compreensão dos conceitos à medida que o controle deslizante é ajustado, conforme ilustrado na **Figura 12**.

Figura 12 – Demonstração dos ângulos internos e externos de um triângulo



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/ye9wfeau. Acesso em: 16 ago. 2024.

Na última etapa da aula, o professor formador explorou de maneira abrangente os conceitos principais relacionados à perpendicularidade. Ele discutiu a existência e a unicidade da perpendicular, demonstrando que, a partir de um ponto dado em uma reta, passa uma única reta perpendicular a ela. Além disso, abordou as projeções, enfatizando a projeção perpendicular de um ponto sobre uma reta como o ponto de interseção da reta com a perpendicular traçada a partir do ponto. Também foram discutidas as propriedades dos pontos da mediatriz, ampliando a compreensão dos estudantes sobre a Geometria das retas e suas propriedades fundamentais.

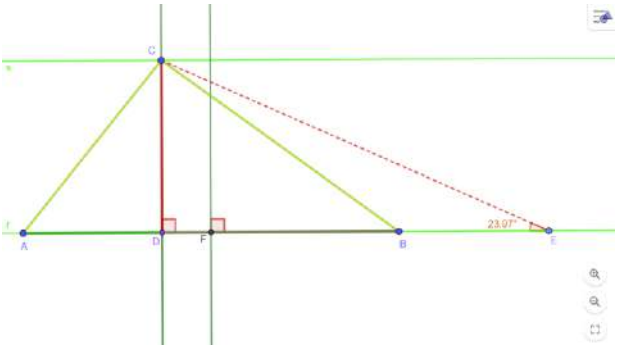
Na aplicação prática, o professor formador, utilizando a mediação tecnológica das ferramentas “Reta Perpendicular”, “Interseção de Dois Objetos”, “Segmento”, “Ângulo”, “Ponto em Objeto” e “Distância, Comprimento ou Perímetro”, aproveitou a construção anterior para explorar os conceitos de perpendicularidade e projeção. Ele iniciou a abordagem traçando uma reta perpendicular ao ponto *C* do triângulo ΔABC. Em seguida, ele identificou o ponto de interseção dessa reta com o segmento *AB*, denominado *D*, e traçou o segmento *CD*. O professor formador demonstrou visualmente que o ângulo $\angle BDC$ é reto, explicando que, com isso, os ângulos adjacentes e opostos pelo vértice também são retos. A seguir, localizou um ponto *E* na reta *r*, que passa por *AB*, e traçou o segmento *CE*.

O professor formador também identificou o ângulo $\angle AEC$ e mediu os segmentos *AC*, *CD*, *CE* e *CB*, demonstrando que a menor distância entre o ponto *C* e a reta *r*, assim como entre as retas paralelas *r* e *s*, ocorre quando o segmento forma um ângulo reto. Em seguida, ele

também destacou que o segmento *ED* representa a altura do triângulo *ΔABC* em relação à base *BC*, e que o ponto *D* é a projeção do ponto *C* sobre o segmento *AB*.

O triângulo *ΔABC* foi dividido em dois triângulos menores, *ΔADC* e *ΔBCD*, sendo *AD* a projeção do lado *AC* e *DB* a projeção do lado *BC* do triângulo *ΔABC*. Além disso, foi traçada a mediatriz nos pontos *A* e *B* para encontrar o ponto *F*, demonstrando que todo ponto na mediatriz de um segmento é equidistante das extremidades desse segmento. Ele explicou que, embora a mediatriz forme os ângulos retos, não deve ser confundida com a altura, a menos que o segmento *FC* forme um ângulo de 90º com *BC*, conforme ilustrado na **Figura 13**.

Figura 13 – Reta perpendicular e mediatriz



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/z5v7kyjm. Acesso em: 16 ago. 2024.

Sucintamente, esta terceira semana de aula representa o Sistema de Atividades IV, no qual foram explorados os conhecimentos curriculares relacionados ao ‘Paralelismo e a Perpendicularidade’, conforme as abordagens realizadas pelo professor formador. No entanto, durante esse processo, caracterizado pela pluralidade e multivocalidade, foram observadas algumas tensões e inquietações, que serão analisadas no próximo subtópico.

4.4.1 Análise das contradições heteroformativas no sistema de atividades IV

A análise das interações na aula do Sistema de Atividades IV, fundamentada nas contradições primária, secundária e terciária de Engeström (2016), revelou as tensões e as possibilidades de aprendizagem que emergiram enquanto os estudantes se dedicavam tanto à construção de pontos, retas, mediatrizes e outros objetos geométricos no ggb-CB, quanto à exploração dos conhecimentos curriculares relacionados ao ‘Paralelismo e a Perpendicularidade’, temas abordados pelo professor formador.

Foi possível observar que a contradição secundária proposta por Engeström (2016) surgiu da tensão entre o valor de uso e o valor de troca dos conceitos de ‘Paralelismo e a Perpendicularidade’. Essa tensão foi evidenciada quando Aden questionou a verificação do paralelismo entre as retas *r* e *s*, bem como a congruência dos ângulos correspondentes. Considerando essa circunstância, o professor formador utilizou o GeoGebra como ferramenta mediadora, permitindo uma visualização dinâmica e auxiliando os estudantes na internalização dos conceitos abordados na aula.

Aqui, a heteroformação sinalizada por Macedo (2010) se fez presente, pois os estudantes aprenderam por meio da interação com o professor, seus colegas e a ferramenta digital, fortalecendo sua compreensão geométrica através de um processo cooperativo de construção do conhecimento. Dessa forma, o uso dos recursos do ggb-CB, em vez de ser apenas um meio técnico, transformou a própria compreensão dos estudantes sobre a construção de ângulos e paralelismo, gerando um processo de co-formação de conceitos e ferramentas. Essa abordagem dinâmica representou um elemento de transição entre o valor de uso (o propósito funcional da ferramenta) e o valor de troca (as diversas aplicações que ela pode oferecer).

A contradição secundária de Engeström (2016) surgiu entre os componentes do sistema de atividade, especificamente entre as ferramentas utilizadas e os objetivos de aprendizagem, que envolviam a compreensão de conceitos como ângulos colaterais e alternados. Nesse contexto, observou-se que, durante a aula, Théo e Elen expressaram dúvidas sobre a relação entre esses ângulos, questionando como a ferramenta poderia auxiliar na visualização da soma dos ângulos colaterais (180º) e na congruência dos ângulos alternos internos e externos. A utilização da ferramenta “Ponto em Objeto” permitiu que esses estudantes visualizassem essas relações, possibilitando a formação dos ângulos de maneira precisa e facilitando a compreensão desses conceitos. Nesse momento, o professor explicou que essa ferramenta era essencial para garantir que os pontos permanecessem fixos na reta ou no objeto desejado, o que facilitava a manipulação semilivre dos elementos geométricos de forma controlada, permitindo ajustes sem perder a referência da construção.

Esse uso da tecnologia, aliado à mediação do professor, facilitou a internalização do conhecimento, conforme a teoria de Vygotsky (2019), que enfatiza o papel da interação social e das ferramentas na construção do saber. Ao manipularem ativamente os elementos no GeoGebra, os estudantes conseguiram transformar o conhecimento abstrato sobre ângulos e paralelismo em uma compreensão mais prática e visual. O professor, ao explicar as funções do dessa TD e orientar a turma na exploração dos ângulos, atuou como mediador, promovendo a

construção de uma base sólida para o entendimento das propriedades geométricas. Isso ilustra como a ferramenta digital pode ser um recurso poderoso para auxiliar na aprendizagem ativa, tornando os conceitos geométricos mais compreensíveis.

A contradição terciária de Engeström (2016) manifestou-se quando o uso de novas tecnologias, como o ggb-CB, entrou em conflito com os métodos tradicionais de ensino, gerando uma tensão entre as práticas estabelecidas e as novas formas de aprendizagem. Durante a aula, Ulan teve dúvidas sobre como utilizar a ferramenta “Controle Deslizante” para conectar os elementos da construção e da demonstração. Essa dificuldade gerou uma leve tensão, mas foi resolvida com a ajuda dos colegas, permitindo a exploração de diversas configurações de triângulos e suas propriedades. A tecnologia, portanto, não apenas facilitou a visualização dos conceitos, mas também promoveu a colaboração entre os estudantes para superar os desafios.

Esse cenário reforça a ideia de Lévy (2003, p. 121), que afirma: “Cada vez que um ser humano organiza ou reorganiza sua relação consigo mesmo, com seus semelhantes, com as coisas, com os signos, com o cosmo, ele se envolve em uma atividade de conhecimento, de aprendizado”. Nesse contexto, a interação entre estudantes e tecnologia não apenas possibilitou a construção de conhecimentos matemáticos, mas também promoveu uma reorganização na forma como os estudantes se relacionam com o conteúdo, com seus pares e com as ferramentas digitais. Esse processo de reorganização, facilitado pela tecnologia, reflete como a aprendizagem ativa e coletivamente interativa se alinha às transformações contemporâneas na educação.

A resolução dessas contradições, nesse âmbito, fez parte desta proposta de formação híbrida (Horn; Staker, 2015), que enfatizou a integração de TD no ensino. Nesse cenário, a implantação do ggb-CB facilitou uma aprendizagem mais reflexiva e visual, promovendo a interação entre a turma e o professor. A tecnologia, ao mediar o ambiente de ensino híbrido, permitiu que os estudantes explorassem e esclarecessem conceitos geométricos, como perpendicularidade e projeção ortogonal, de maneira mais dinâmica. Essa abordagem, que combinou o uso da tecnologia com atividades presenciais, favoreceu a complementaridade entre teoria e prática, tornando o processo de aprendizagem mais interativo e cooperativo. Esse processo híbrido foi motivado pela heteroformação, na qual o conhecimento foi construído coletivamente, com a mediação do professor e a interação entre os estudantes. Como resultado, o desenvolvimento cognitivo dos estudantes foi ampliado.

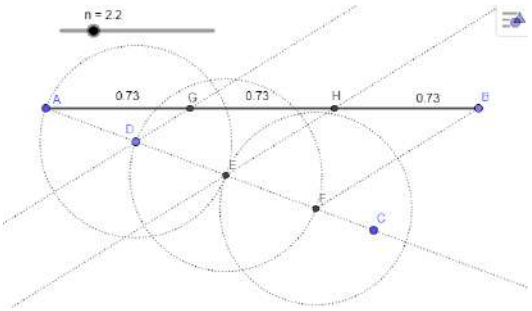
4.4.2 Análise das contradições autoformativas no sistema de atividades IV

Com a base estabelecida no subtópico anterior, que tratou das dinâmicas heteroformativas e suas tensões, resultando na construção coletiva do conhecimento, a análise agora se volta para os aspectos autoformativas no Sistema de Atividades IV, fundamentando-se nesse processo tecformativo digital e evidenciando como os estudantes adotaram uma postura mais autônoma e proativa no processo de aprendizagem de 'Paralelismo e a Perpendicularidade'. Assim, nesta parte, discute-se a maneira como os níveis de aprendizagem (Van Hiele, 1986) se manifestaram nas tarefas dos quatro participantes que mais se destacaram durante as interações da quarta semana de aula. Após essa análise, é apresentada a interação geral entre os sistemas envolvidos à luz da contradição quaternária (Engeström, 2016).

A primeira tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 25**. O participante Aden é destacado nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 25 – Tarefa 4.1 (Repartindo um Segmento)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
1. Orientações construtivas: *1.1. Use a ferramenta "Controle Deslizante" para produzir um controle n que varia 0,1 a 10.* *1.2. Utilize a ferramenta "Segmento de Comprimento Fixo" para produzir um segmento de tamanho n, sendo assim, digite n na Caixa de Comando desse recurso.* *1.3. Use a ferramenta "Semirreta" e produza uma semirreta que tem início em A e forme com o segmento AB ângulo agudo.* ***a) O que é ângulo agudo?*** *1.4. Use a ferramenta "Ponto em Objeto" e encontre um ponto na semirreta AD.* *1.5. Use as ferramentas "Compasso" e "Interseção em Dois Objetos" e construa uma circunferência de raio AD e centro em C, marque o ponto de interseção desses dois objetos, ponto E.* *1.6. Usando as mesmas do item anterior e raio AD produza a circunferência de centro em E e encontre o ponto de interseção desses dois objetos, ponto F.* *1.7. Usando a ferramenta "Segmento" trace o segmento FB.* *1.8. Usando a ferramenta "Reta Paralela", trace as retas paralelas ao segmento FB que passe pelos pontos D e E.* *b) O que houve com o segmento AB?* *1,9. Encontre os pontos de interseção dessas retas com o segmento AB e meça as distâncias entre os pontos, use as ferramentas "Interseção em Dois Objetos" e "Distância, Comprimento e Perímetro". Ajuste todas as construções para estilo pontuado, exceto o segmento AB.* *c) Mova o controle deslizante, o que vê?* *d) Mova o ponto semilivre, o que vê?* *e) Mova o ponto C, o que vê?* *f) Como esse método é possível dividir o segmento em n partes iguais? Justifique sua resposta.*	***Transcrição das respostas de Aden:*** *a) É um ângulo positivo menor que 90°.* *b) Ele foi repartido em três partes.* *c) Que o segmento foi dividido em três valores iguais, independentemente do valor do segmento. Então, à medida que o valor do segmento aumenta, cada parte aumenta também de forma proporcional.* *d) Que independente da distância do raio escolhido na circunferência a divisão no segmento será a mesma.* *e) Praticamente acontece o mesmo aqui, independe da amplitude entre o segmento e a semirreta a divisão será a mesma, exceto quando elas tiverem de forma alinhada.* *f) Sim, por que eu posso construir n pontos sobre a semirreta de mesmo raio.*

Pensamento Geométrico – Construtivo


Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

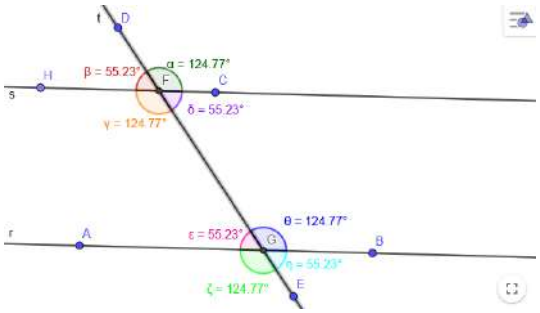
Na análise da Tarefa 4.1, deduz-se que, inicialmente, ao responder à pergunta sobre o ângulo agudo, o estudante demonstra características do Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986). À medida que avança, ele transita para o Nível 1 ao analisar informalmente as partes do segmento e as propriedades geométricas envolvidas, começando a examinar os atributos do segmento e a proporcionalidade. Ao justificar como o método divide o segmento em partes iguais, Aden atinge o Nível 2, pois começa a formular definições abstratas e a reconhecer relações geométricas, como o uso de uma semirreta e a constância do raio para realizar a divisão do segmento.

O uso dos recursos do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 2 (Dedução Informal) ao permitir que o estudante observe dinamicamente como a variação do controle deslizante e os pontos de interseção das circunferências dividem o segmento em partes iguais. Nesta análise, é possível notar que as ferramentas “Compasso” e “Interseção de Dois Objetos” possibilitaram a construção e análise de múltiplas circunferências, o que auxiliou Aden a deduzir, de forma informal, que o método de construção com retas paralelas e circunferências permite dividir um segmento em partes iguais.

A segunda tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 26**. O participante Théo é destacado nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 26 – Tarefa 4.2 (Ângulos em Retas Paralelas Cortadas por uma Transversal)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	Pensamento Geométrico – Maturidade
1. Com a ferramenta “Reta”, clique em dois pontos diferentes Janela de Visualização para desenhar uma reta. ***a) O que é necessário para construir uma reta paralela a partir de uma reta de suporte?*** ***b) Como você define retas paralelas?***	***Transcrição das respostas de Théo:*** *a) mantenha as distâncias iguais.* *b) retas que não tem pontos em comum.* *c) essas retas parecem ser iguais.*

2. Usando a ferramenta "Ponto", clique em um local Janela de Visualização que não esteja sobre a reta de suporte. *3. Agora, selecione a ferramenta "Reta Paralela" e clique no ponto que você acabou de criar.* ***c) Qual a relação que você observa entre essas retas criadas?*** ***d) Essas retas são paralelas? Por quê?*** *4. Crie uma terceira reta que não seja paralela às outras duas e que intercepte ambas. Os pontos de definição dessa nova reta não podem pertencer às demais.* ***e) Qual é o nome dessa reta que você criou?*** *5. Com a ferramenta "Interseção de Dois Objetos", marque os pontos de interseção entre as retas.* *6. Selecione a ferramenta "Mover" e ajuste os pontos dessa construção.* ***f) Quais pontos você consegue mover?*** ***g) Por que você acha que isso acontece?*** ***h) O que você observa ao realizar esses movimentos?*** *7. Em seguida, use a ferramenta "Ângulo" para construir todos os ângulos nas interseções criadas, para tanto, use também a ferramenta "Ponto em Objeto" para possibilitar medida colocando sobre a reta que for preciso.* ***i) Você consegue identificar os nomes desses ângulos?*** ***j) O que você consegue observar em relação aos ângulos de cada ponto de intersecção?*** *8. Selecione a ferramenta "Mover" novamente e mova a reta criada no passo 4 dessa construção.* ***k) O que você observa?*** ***l) Por que você acha que isso ocorre?***	*d) sim, ambas não possuem nenhum ponto em comum, porém são iguais.* *e) reta transversal.* *f) não consigo mexer os dois pontos selecionados onde a transversal corta, os demais podem ser movimentados.* *g) pois as retas são paralelas então se pudesse movimentá-las elas poderiam deixar de ser paralelas.* *h) ao movimentar o ponto da segunda reta criada a primeira reta criada não se movimenta, porém, ao movimentar o ponto desta reta ambas se movimentam proporcionalmente, acho que isso se dá devido a segunda reta ser paralela a primeira.* *i) alternos, correspondentes e colaterais.* *j) os ângulos opostos possuem o mesmo valor.* *k) quer alguns ângulos mantêm o mesmo valor.* *l) acho que por serem opostos em retas paralelas, possuem as mesmas propriedades.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	
	

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

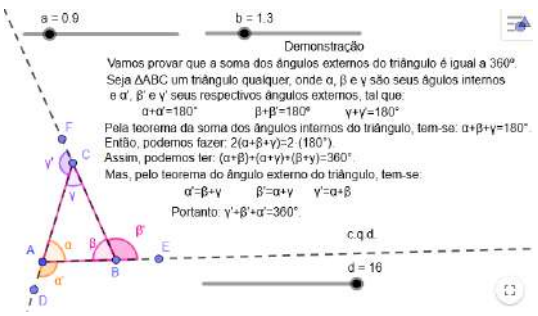
Na análise da Tarefa 4.2, infere-se que, ao responder sobre a construção de retas paralelas, Théo demonstra um entendimento básico no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), reconhecendo que retas paralelas são aquelas que mantêm distâncias iguais e não possuem pontos em comum. Quando ele avança para a análise dos ângulos formados pela transversal, como ângulos alternados, correspondentes e colaterais, o estudante começa a operar no Nível 1, onde identifica e analisa informalmente os atributos geométricos. Ao perceber que certos ângulos opostos mantêm seus valores mesmo ao mover a transversal, ele atinge o Nível 2, reconhecendo propriedades geométricas e inter-relacionando ângulos em retas paralelas.

O uso dos recursos do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 2 (Dedução Informal) ao permitir que a estudante explorasse interativamente as relações entre retas

paralelas e transversais, observando como os ângulos se comportam em suas interseções. Nesta análise, é possível notar que a ferramenta “Reta Paralela” facilitou a construção de retas paralelas e a visualização das propriedades dos ângulos alternados, correspondentes e colaterais. Essa experimentação auxiliou a estudante a deduzir informalmente as relações de igualdade entre ângulos opostos e a compreender o comportamento geométrico das retas paralelas.

A terceira tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 27**. A participante Elen é destacada nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 27 – Tarefa 4.3 (Prova da Soma dos Ângulos Internos do Triângulo)

<table>
<tr><th>Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade</th><th>Pensamento Geométrico – Maturação</th></tr>
<tr><td>Prove que a soma dos ângulos externos de qualquer triângulo é igual a 360º.
1. Orientações construtivas:
1.1. Use a ferramenta “Controle Deslizante” para definir os comprimentos dos lados do triângulo. Configure um deslizador para a base do triângulo AB (nomeie-o como “a”) e outro para o segmento BC (nomeie-o como “b”). Ajuste cada deslizador para que os comprimentos variem de 1 a 10, com incremento de 1.
1.2. Utilize a ferramenta “Segmento de Comprimento Fixo” para desenhar os lados do triângulo. Clique na Janela de Visualização e insira “a” para o comprimento da base AB, e depois, com a ferramenta ativada, clique no ponto B e insira “b” para o comprimento do segmento BC.
1.3. Use a ferramenta “Mover” e mova o ponto C para não ficar de forma colinear e trace o segmento CA usando a ferramenta “Segmento”.
1.4. Trace as semirretas AB, BC e AC com a ferramenta “Semirretas” e coloque um ponto sobre cada uma delas com a ferramenta “Ponto em Objeto” para formar os ângulos externos.
1.5. Use a ferramenta “Ângulo” para medir os ângulos internos e externos desse triângulo.
a) Qual é a relação entre as mudanças nos comprimentos dos lados e na posição dos vértices de um triângulo?
2. Aplique os passos das orientações para a demonstração argumentativa (2.4. Use as propriedades da soma dos ângulos internos e externos do triângulo).
3. Use as orientações para a demonstração dinâmica.</td><td>Transcrição das respostas de Elen:
a) As mudanças nos comprimentos dos lados e na posição dos vértices do triângulo não afetam a soma dos ângulos externos porque a soma desses ângulos é uma regra geral dos triângulos, não importa como eles sejam ajustados. É como se a soma dos ângulos externos fosse uma constante para todos os triângulos.
Demonstração
Vamos provar que a soma dos ângulos externos do triângulo é igual a 360º.
Seja ΔABC um triângulo qualquer, onde α, β e γ são seus ângulos internos
e α’, β’ e γ’ seus respectivos ângulos externos, tal que:
α+α’=180° β+β’=180° γ+γ’=180°
Pela teorema da soma dos ângulos internos do triângulo, tem-se: α+β+γ=180°.
Então, podemos fazer: 2(α+β+γ)=2·(180°).
Assim, podemos ter:
(α+β)+(α+γ)+(β+γ)=360°.
Mas, pelo teorema do ângulo externo do triângulo, tem-se:
α’=β+γ β’=α+γ’ γ’=α+β
Portanto: γ’+β’+α’=360°.
c.q.d.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Pensamento Geométrico – Construtivo</th></tr>
<tr><td colspan="2"> 
</td></tr>
</table>

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

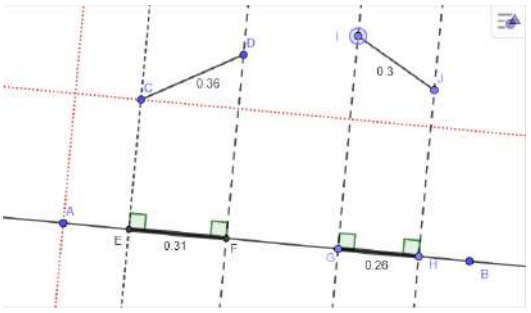
Na análise da Tarefa 4.3, observa-se que, ao descrever a relação entre os comprimentos dos lados e a posição dos vértices do triângulo, Elen opera no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), reconhecendo visualmente que a soma dos ângulos externos permanece inalterada, independentemente da forma do triângulo. Ao longo da tarefa, quando Elen começa a medir e analisar os ângulos internos e externos do triângulo, sua abordagem torna-se mais analítica, refletindo uma capacidade de Nível 1. Quando ela compreende que a soma dos ângulos externos de qualquer triângulo é sempre igual a 360°, independentemente das variações nas medidas dos lados, ela está construindo uma definição abstrata e começando a estabelecer inter-relações entre as propriedades do triângulo, demonstrando sinais do Nível 2. Ao realizar a demonstração formal da soma dos ângulos externos, utilizando equações e relacionando ângulos internos e externos de maneira dedutiva, a estudante atinge o Nível 3. Ela desenvolve uma sequência lógica de afirmações, estabelecendo relações entre os ângulos e demonstrando uma compreensão das deduções envolvidas na prova.

O uso dos recursos do ggb-CB facilitou a transição para o Nível 3 (Dedução Formal) ao permitir a construção dinâmica e manipulativa do triângulo. Nesta análise, é possível observar que a utilização do controle deslizante possibilitou ajustar os comprimentos dos lados e acompanhar a variação das medidas dos ângulos internos e externos de forma interativa. Em virtude disso, a construção das semirretas e a medição dos ângulos externos reforçaram a ideia de que, independentemente das mudanças na forma do triângulo, a soma dos ângulos externos permanece constante. Esse processo visual e interativo auxiliou a estudante na formulação de uma prova formal e no entendimento dos conceitos subjacentes.

A quarta tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 28**. O participante Seth é destacado nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 28 – Tarefa 4.4 (Projeção Ortogonal)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
1. Use a ferramenta "Reta" para desenhar uma reta suporte, que chamaremos de reta AB. Em seguida, com a ferramenta "Segmento", desenhe um segmento chamado CD que esteja posicionado acima da reta AB. *2. Utilize a ferramenta "Reta Perpendicular" para criar duas retas perpendiculares à reta AB. Uma dessas retas deve passar pelo ponto C e a outra pelo ponto D. (Ajuste o estilo dessas retas para pontuado).* *3. Com a ferramenta "Interseção de Dois Objetos", encontre e marque os pontos onde essas retas perpendiculares cortam a reta AB.*	***Transcrição das respostas de Seth:*** *a) EF é a "sombra" que o segmento CD faz na reta AB;* *b) O segmento EF é congruente ao segmento CD quando o segmento CD está sobre uma reta paralela a reta AB;*

4. Use a ferramenta "Segmento" para traçar o segmento EF conectando os pontos de interseção E e F. (Ajuste o estilo do segmento EF para que ele tenha uma espessura igual a 13). ***a) O que o segmento EF representa em relação ao segmento CD?*** *5. Use a ferramenta "Ângulo" para medir um ângulo formado nos vértices E e outro em F pelo segmento EF. Use a ferramenta "Distância, Comprimento ou Perímetro" para medir os segmentos CD e EF.* *6. Selecione a ferramenta "Mover" e mova a posição dos pontos C e D.* *7. Use a ferramenta "Reta Perpendicular" e trace uma reta perpendicular no ponto e outra no ponto e use ela como recurso auxiliar para responder as perguntas abaixo. (Ajuste o estilo dessas retas para pontuado, cor vermelha).* ***b) Quando o segmento EF é congruente ao segmento CD?*** ***c) Quando o segmento EF é menor que o segmento CD?*** ***d) O que acontece quando o segmento CD tem comprimento diferente de zero e o segmento EF tem comprimento zero?*** ***e) O segmento EF pode ser maior que o segmento CD? Justifique sua resposta.*** *8. Use a ferramenta "Ponto em Objeto" para inserir dois pontos na reta AB, chamados de G e H.* *9. Com a ferramenta "Reta Perpendicular", trace as retas perpendiculares à reta AB passando pelos pontos G e H. (Ajuste o estilo dessas retas para pontuado).* *10. Use a ferramenta "Ponto em Objeto" para adicionar pontos na reta perpendicular que passa por G e na reta perpendicular que passa por H.* *11. Use a ferramenta "Segmento" para conectar esses IJ e GH. (Ajuste o estilo do segmento GH para que ele tenha uma espessura igual a 13).* *12. Repita os passos 6, 7 e 8 para encontrar os ângulos retos em G e H, o comprimento dos segmentos (IJ e GH) e mover esses elementos.* ***f) Qual a relação entre os segmentos IJ e GH?*** ***g) O que mudou nessa nova construção em relação à construção anterior?***	*c) quando CD está inclinado, a projeção EF será menor.* *d) isso acontece quando os pontos CD estão sobre uma reta perpendicular a reta AB;* *e) O segmento EF não pode ser maior que o segmento CD;* *f) GH é a projeção ortogonal do segmento IJ;* *g) É que os pontos I e J só se movimentam sobre as retas perpendiculares, também é possível mover a distância dos segmentos movendo os pontos G e H.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	
	

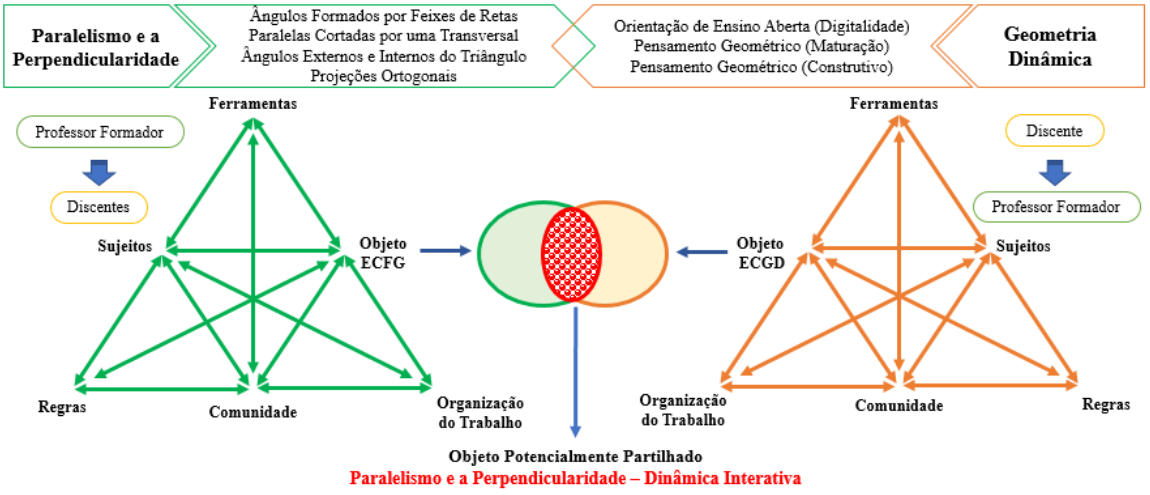
Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Na análise da Tarefa 4.4, infere-se que, ao reconhecer que o segmento *EF* representa a "sombra" do segmento *CD* na reta *AB*, Seth opera no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), identificando visualmente a projeção sem se aprofundar nas propriedades geométricas. Ao examinar as condições que tornam o segmento *EF* menor ou igual ao segmento *CD*, Seth avança para o Nível 1. Quando ele afirma que o segmento *EF* não pode ser maior que o segmento *CD* e estabelece a relação entre os segmentos *IJ* e *GH* como projeções ortogonais, ele atinge o Nível 2, formulando definições abstratas e relacionando as propriedades geométricas de maneira mais sistemática.

O uso dos recursos do ggb-CB facilitou a transição para o Nível 2 (Dedução Informal) ao permitir que o estudante visualizasse de forma dinâmica as relações entre os segmentos e ângulos na construção. Nesta análise, é possível notar que, ao mover os pontos *C* e *D*, ele observou como as mudanças na inclinação e na posição dos segmentos impactam a congruência e o comprimento do segmento *EF* em relação ao *CD*. Assim, a interação com as ferramentas de projeção, como as retas perpendiculares, contribuiu para o desenvolvimento de uma compreensão intuitiva sobre as propriedades dos segmentos e as condições de congruência. Isso possibilitou uma argumentação informal antes da formalização da dedução.

As quatro tarefas analisadas evidenciam, por meio da interação entre o ECFG e a ECGD, a criação de um objeto potencialmente partilhado, conforme descrito na quarta contradição de Engeström (2016). Nesse contexto, o objeto partilhado foi a compreensão dinâmica interativa de ‘Paralelismo e a Perpendicularidade’, com foco na maturação do pensamento geométrico dos estudantes (**Esquema 28**).

Esquema 28 – Paralelismo e a Perpendicularidade – Dinâmica Interativa



Fonte: Pesquisador (2024).

No sistema ECFG, o professor desempenhou um papel mais ativo e estruturado, apresentando de forma sequencial os conceitos relacionados aos ângulos formados por feixes de retas paralelas cortadas por uma transversal, aos ângulos externos e internos do triângulo e às projeções ortogonais. O objetivo principal desse sistema foi ensinar os conceitos de ‘Paralelismo e a Perpendicularidade’, estimulando a investigação de suas aplicações por meio de operações como a construção de pontos, retas, mediatrizes e outros objetos geométricos. Para isso, o professor realizava revisões teóricas dos capítulos V e VI do volume 9, proporcionando aos estudantes uma compreensão formal dos conhecimentos curriculares abordados.

Concomitantemente, no sistema ECDG, os estudantes assumiram um papel proativo no processo de aprendizagem. Nesse ambiente, tiveram a oportunidade de explorar os conceitos de forma prática e interativa, manipulando objetos geométricos em um espaço digital dinâmico, o que resultou em um bom desempenho nas AOEA. Esse processo favoreceu o desenvolvimento de habilidades digitais essenciais, como a manipulação semilivre e interativa dos elementos geométricos, utilizando a ferramenta “Ponto em Objeto”. Com essa ferramenta, os estudantes puderam testar e ajustar suas ideias, promovendo um aprendizado mais experimental e flexível. Por outro lado, o professor atuou como mediador, oferecendo suporte e *feedback online* para garantir que a exploração dos estudantes fosse acompanhada virtualmente e direcionada para a compreensão dos conceitos de ‘Paralelismo e a Perpendicularidade’.

Nesse sistema, os recursos do ggb-CB proporcionaram uma maneira inovadora de explorar conceitos geométricos, permitindo a simulação e a visualização imediata das propriedades envolvidas. Esse uso favoreceu a maturação do pensamento geométrico, especialmente no que diz respeito à compreensão dos conceitos de ‘Paralelismo e a Perpendicularidade’ de forma envolvente. Assim, os estudantes puderam manipular os elementos geométricos e observar diretamente os efeitos dessas alterações, o que promoveu uma construção de conhecimento culturalmente digital. Como destaca Kenski (2015b), o desafio da educação é adaptar-se aos avanços tecnológicos e, ao mesmo tempo, orientar todos os envolvidos para o “[...] domínio e apropriação crítica desses novos meios” (p. 18). Isso ressalta a importância de uma abordagem reflexiva no uso das ferramentas digitais no processo de aprendizagem.

As operações realizadas neste sistema envolveram personalizações na visualização, medições dos objetos, identificações, implantações e conexões de elementos, além de construções geométricas com diversas possibilidades de manipulação. Essas operações estão alinhadas com a TA de Leontiev (2018), pois consistem em ações que, uma vez assimiladas, tornam-se automáticas e são executadas sem a necessidade de atenção consciente. Sob essa perspectiva, o foco foi analisar as características fundamentais das estruturas, assegurando que suas propriedades essenciais fossem preservadas. Ao utilizar ferramentas digitais para interagir com o ‘Paralelismo e a Perpendicularidade’, os estudantes não apenas absorveram o conteúdo curricular, mas também o construíram ativamente por meio de práticas dinâmicas e interativas, consolidando o aprendizado por meio da experiência híbrida.

Na AOEA desta semana, observou-se a presença das características da autoformação, conforme proposto por Pineau (2023), que a define como um processo essencial para a

construção do conhecimento, no qual o indivíduo assume um papel ativo em sua aprendizagem. Nesse contexto, o estudante, atuando no centro do processo, teve a oportunidade de desenvolver sua autonomia e assumir a responsabilidade pelo próprio aprendizado. Ao explorar os conceitos de ‘Paralelismo e a Perpendicularidade’ de maneira prática e interativa, o estudante foi capaz de construir conhecimento de forma reflexiva, estabelecendo conexões significativas entre o conteúdo teórico e suas aplicações práticas. Em razão disso, percebeu-se que a autoformação favoreceu o desenvolvimento de habilidades analíticas e dedutivas, promovendo uma aprendizagem que ultrapassou a simples memorização e estimulou o raciocínio geométrico.

Nesse cenário, o progresso dos estudantes ao longo dos diferentes níveis de pensamento geométrico, conforme o modelo de Van Hiele (1986), foi amplamente facilitado e potencializado pelo uso do ggb-CB dentro de uma proposta híbrida de ensino. Esse ambiente formativo propiciou a construção dinâmica e interativa de objetos geométricos, o que, por sua vez, favoreceu um aprendizado mais intuitivo e visual. Ao utilizar a tecnologia, os estudantes puderam explorar conceitos de maneira mais prática e envolvente, superando desafios e ampliando sua compreensão geométrica.

Como resultado das análises, foi possível observar que nas Tarefas 4.1 (Repartindo um Segmento), 4.2 (Ângulos Formados por Feixe de Retas Paralelas Interceptados por uma Transversal) e 4.4 (Projeção Ortogonal), os estudantes Aden, Théo e Seth, respectivamente, demonstraram avanço para o Nível 2, caracterizado por uma compreensão mais abstrata das relações e inter-relações geométricas. Esse progresso foi evidenciado pela habilidade dos estudantes em realizar deduções informais, conectando os conceitos de maneira mais profunda e reflexiva.

Na análise da Tarefa 4.3 (Prova da Soma dos Ângulos Internos do Triângulo), a estudante Elen progrediu para o Nível 3, demonstrando uma maior sofisticação em sua habilidade de elaborar sequências dedutivas e compreender a relevância dessas deduções na construção de provas geométricas. Este avanço não apenas reflete o domínio do conteúdo, mas também indica o desenvolvimento de habilidades críticas e reflexivas, que são essenciais para o raciocínio formal na Matemática.

Portanto, a interação entre os dois sistemas (ECFG e ECGD) resultou no objeto partilhado mencionado anteriormente. Esse processo de ensino, realizado nesta proposta híbrida e fundamentado nas abordagens de autoformação, nas TDI e na TA, culminou em um avanço cognitivo na compreensão dos estudantes sobre conceitos essenciais relacionados ao ‘Paralelismo e a Perpendicularidade’. Ao proporcionar à turma a oportunidade de se envolver

ativamente na construção de seu próprio conhecimento, essas abordagens criaram um ambiente de aprendizagem dinâmico e reflexivo. Esse ambiente formativo, por sua vez, favoreceu o desenvolvimento de habilidades cognitivas superiores, permitindo uma internalização mais significativa dos conceitos geométricos.

4.5 Explorando os Quadriláteros Notáveis

Na quinta semana, as aulas foram organizadas para explorar os 'Quadriláteros Notáveis', com o objetivo de promover uma compreensão dinâmica desse conteúdo curricular. Nesse cenário híbrido de ensino, as ações pedagógicas envolveram a construção e a exploração do objeto de estudo, bem como a investigação, identificação e aplicação prática tanto dos elementos dos quadriláteros quanto dos conceitos relacionados aos trapézios e paralelogramos, além da interação discursiva sobre as aplicabilidades discutidas.

Para isso, foi necessário expandir o repertório operacional dos estudantes por meio de tarefas teóricas e práticas. A aplicação das AOEA foi fundamental nesse processo, pois forneceu diretrizes para a criação, manipulação e personalização de pontos, segmentos, caminhos poligonais e outros objetos geométricos. Essas atividades foram planejadas para alcançar as metas Ciade, aproximando a turma dos recursos tecnológicos adotados, especialmente no incentivo à cultura digital com a utilização das ferramentas "Reta Perpendicular", "Reta Paralela" e "Ângulo de Amplitude Fixa".

O **Quadro 29**, apresentado a seguir, ilustra a estrutura e a organização dessa abordagem no contexto do ensino aplicado nesta quinta semana.

Quadro 29 – Planejamento da quarta semana de aula

<table>
<tr><td colspan="3">Artefatos
Computador e Smartphone.
GeoGebra: Plataforma; Classroom Beta; Classic; Geometria.
Ferramentas Específicas: Mover; Ponto; Ponto em Objeto; Interseção de Dois Objetos; Reta; Segmento; Segmento com Comprimento Fixo; Semirreta; Caminho Poligonal; Reta Perpendicular; Reta Paralela; Compasso; Ângulo; Ângulo com Amplitude Fixa; Distância, Comprimento ou Perímetro; Controle Deslizante; Texto.
Livro: Fundamentos de Matemática Elementar 9: geometria plana (Cap. VII).</td></tr>
<tr><td>Objeto
Quadriláteros Notáveis.</td><td>Motivo
Necessidade de promover a compreensão dinâmica dos conceitos fundamentais relacionados aos Quadriláteros Notáveis.</td><td>Ação
❖ Construção e exploração dos Quadriláteros Notáveis de modo dinâmico.
❖ Investigação, identificação e aplicação dos elementos dos quadriláteros, conceitos de trapézios e paralelogramos;
❖ Interação discursiva das aplicabilidades abordadas.</td></tr>
</table>

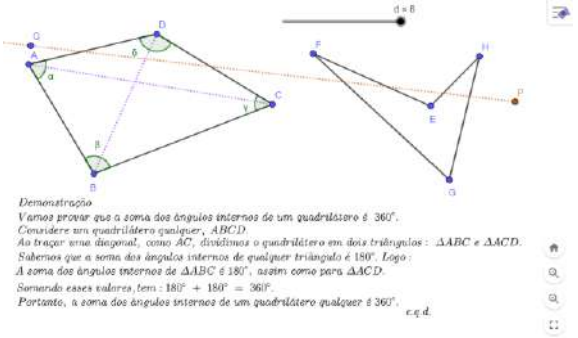
Operações	**Metas**
Construções: produzir pontos, segmentos, caminhos poligonais, etc.; Personalizações: configurar, renomear, exibir/ocultar, etc.; Conformidações: preservar as subsistências das estruturas; Medições: medir comprimentos e amplitudes angulares; Inquietações: expor dúvidas subjetivas e/ou coletivas; Interlocuções: participar das discussões construtivas; Identificações: localizar as interseções dos objetos; Explorações: testar os recursos do GeoGebra; Revisões: revisar os conteúdos curriculares; Implantações: inserir elementos adaptáveis; Interações: interagir com as AOEA; Administrações: gerenciar conta; Aplicações: resolver problemas; Conexões: conectar elementos; Manipulações: mover objetos.	➢ Construir pontos, segmentos, caminhos poligonais, etc. para explorar os Quadriláteros Notáveis com a mediação tecnológica das ferramentas do GeoGebra; ➢ Investigar e aplicar os elementos dos quadriláteros, os conceitos de trapézios e paralelogramos; ➢ Desenvolver habilidades práticas de subsistência da estrutura geométrica com uso das ferramentas "Reta Paralela", "Reta Perpendicular" e "Ângulo de Amplitude Fixa"; ➢ Estimular discussões e reflexões sobre abordagens teóricas e práticas relacionadas ao objeto de estudo.
Condições	
Ambiente de ensino híbrido com suporte contínuo da equipe docente para auxiliar na aprendizagem dos Quadriláteros Notáveis durante as atividades presenciais, oferecendo orientações e estímulos personalizados durante as observações *online* a distância.	

Fonte: Pesquisador (2024).

Na quinta semana de aula, o professor formador introduziu a exploração dos quadriláteros como objetos poligonais, ressaltando que o conceito de polígono seria abordado de forma mais aprofundada na próxima unidade. Nesse primeiro momento, ele concentrou-se nos elementos de um quadrilátero, enfatizando a importância das diagonais para a compreensão de suas propriedades. Para a aplicação prática no GeoGebra *Classic online*, na disposição de Geometria, o professor, com a mediação tecnológica das ferramentas "Controle Deslizante", "Caminho Poligonal", "Segmento", "Semirreta", "Ângulo" e "Texto", construiu um quadrilátero *ABCD* e demonstrou como traçar suas diagonais, conectando os pontos opostos. Ele destacou que a interseção dessas diagonais pode revelar características importantes sobre a simetria e a congruência dos lados.

Além disso, o professor formador explicou que, ao contrário dos triângulos, que são sempre figuras geométricas convexas, os quadriláteros podem ser tanto convexos quanto côncavos. Para ilustrar essa diferença, ele traçou uma semirreta *PQ*, mostrando que, quando a semirreta toca mais de dois lados do quadrilátero, este é côncavo. Por outro lado, se tocar no máximo dois lados, o quadrilátero é convexo. O professor ainda destacou que o foco deste curso será o estudo dos quadriláteros convexos. Dando continuidade a essa exploração, ele demonstrou que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é sempre 360°, conforme ilustrado na **Figura 14**.

Figura 14 – Demonstração dos ângulos internos do quadrilátero



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/uwpn3egk. Acesso em: 16 ago. 2024.

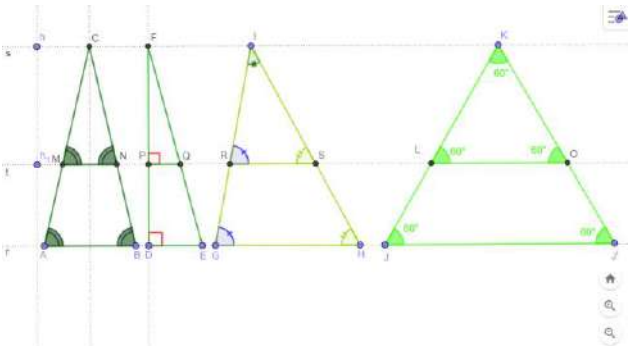
Na segunda etapa da aula, o professor formador mencionou que existem quadriláteros amplamente utilizados, conhecidos como ‘Quadriláteros Notáveis’. Esses quadriláteros se subdividem em categorias específicas: trapézios e paralelogramos. Ele demonstrou visualmente como diferentes tipos de triângulos — triângulo equilátero, triângulo isósceles e triângulo escaleno — geram trapézios correspondentes: um triângulo equilátero ou isósceles produz um trapézio isósceles, um triângulo retângulo forma um trapézio retângulo, e um triângulo escaleno resulta em um trapézio escaleno, justificando assim seus nomes. Para isso, utilizou a mediação tecnológica das ferramentas “Reta”, “Reta Perpendicular”, “Ponto em Objeto”, “Mediatriz”, “Interseção de Dois Objetos”, “Reta Paralela”, “Segmento”, “Ângulo” e “Ângulo de Amplitude Fixa”.

Em virtude disso, o professor formador começou desenhando uma reta *r* e traçando uma perpendicular a ela. Em seguida, inseriu dois pontos nessa reta perpendicular, que representavam as alturas dos triângulos maiores e dos trapézios. A partir desses pontos, ele desenhou retas paralelas a *r*, formando *r//t//s*. Depois, adicionou os pontos *A* e *B* na reta *r* e traçou a mediatriz do segmento *AB*, encontrando o ponto *C* na interseção com a reta *s*. Com isso, formou-se o triângulo isósceles *ΔABC* e, ao conectar os pontos *M* e *N*, que surgiram na interseção com a reta *t*, o triângulo isósceles foi dividido em um triângulo menor *ΔMNC* e em um trapézio isósceles *ABNM*.

Em seguida, o professor inseriu dois pontos adicionais, *D* e *E*, à direita de *B* na reta *r*. Traçou uma perpendicular ao ponto *D*, localizou o ponto de interseção com a reta *s*, denominado *F*, e formou o triângulo retângulo *ΔDEF*. Depois, identificou os pontos *M* e *N* na interseção desse triângulo com a reta *t*, dividindo-o em um triângulo retângulo menor, *ΔMNF*, e um trapézio retângulo, *DENM*. Por fim, inseriu dois pontos, *G* e *H*, à direita de *D*, e formou o

triângulo escaleno maior *ΔGHI*, que foi dividido, ao conectar os pontos *R* e *S*, em um triângulo escaleno menor, *ΔRSI*, e no trapézio escaleno *GHSR*. Com um ângulo fixo de 60º, ele ainda traçou o triângulo equilátero *ΔJJ'K* e, na sequência, o trapézio equilátero *JJ'OL*, conforme ilustrado na **Figura 15**.

Figura 15 – Demonstração dos ângulos internos do quadrilátero



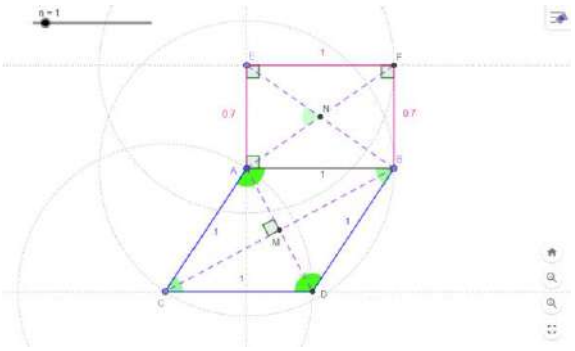
Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/nfyampt8. Acesso em: 16 ago. 2024.

Na terceira etapa da aula, o professor formador explorou o conceito de paralelogramo, explicando que esse tipo de quadrilátero se caracteriza por ter lados opostos paralelos e congruentes. Nesse contexto, ele afirmou que um quadrilátero é classificado como paralelogramo se, e somente se, seus lados opostos forem paralelos. Dentro dessa categoria, estão incluídos o retângulo, o quadrado e o losango, cada um com suas características específicas: o retângulo possui quatro ângulos congruentes, o losango tem quatro lados congruentes e o quadrado reúne as propriedades de ambos. O professor também destacou que uma diagonal do retângulo divide a figura em dois triângulos retângulos, esclarecendo a origem do termo 'triângulo retângulo' em vez de 'triângulo reto'.

Para construir esses quadriláteros, o professor formador utilizou a mediação tecnológica das ferramentas "Controle Deslizante", "Segmento com Comprimento Fixo", "Compasso", "Ponto em Objeto", "Reta Paralela", "Interseção de Dois Objetos", "Segmento", "Ângulo", "Interseção de Dois Objetos", "Distância, Comprimento ou Perímetro", "Reta Perpendicular", "Reta Paralela" e "Compasso". Nesse âmbito, ele criou um controle deslizante, denominado "*n*", e um segmento fixo *AB* com comprimento "*n*". Utilizando o compasso, traçou uma circunferência com centro em *A* e raio igual ao comprimento de *AB*. O ponto *C* foi inserido na circunferência e, em seguida, ele traçou uma reta paralela a *AB*. Com o compasso, localizou o ponto *D* nessa reta, assegurando que *CD* fosse congruente a *AB*. Assim, formou o quadrilátero *ABCD*, que, juntamente com os segmentos *AD* e *BC*, demonstrou ser um losango.

Depois, o professor formador traçou uma reta perpendicular ao segmento *AB* no ponto *A*, inseriu o ponto *E* nessa reta e desenhou uma reta paralela a *AB* que passava por *E*. Com o compasso, localizou o ponto *F* na interseção da circunferência com essa reta. Em decorrência disso, formou o quadrilátero *ABFE* e os segmentos *AF* e *BE*. Ele demonstrou que esse paralelogramo era um retângulo, pois todos os ângulos internos eram retos e as distâncias *AB* e *FE*, assim como *BF* e *EA*, eram iguais. Também encontrou o ponto N, onde as diagonais se cruzam, e explicou que as diagonais só são perpendiculares apenas quando o retângulo é um quadrado. Na sequência, o professor manipulou os dois paralelogramos (*ABCD* e *ABFE*) para mostrar como eles poderiam se transformar em um quadrado, conforme ilustrado na **Figura 16**.

Figura 16 – Formação de paralelogramos especiais



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/httfuyxv. Acesso em: 16 ago. 2024.

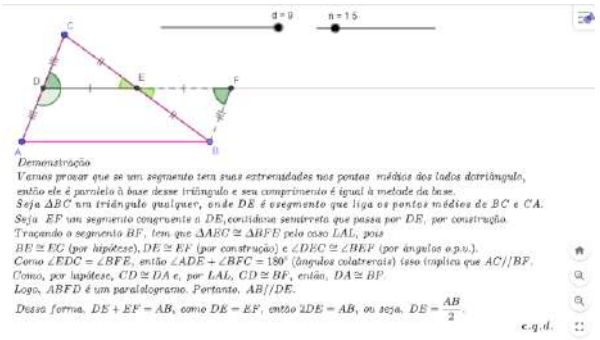
Antes do final da aula, para abordar os conceitos relacionados às bases médias dos triângulos e sua aplicação nos trapézios, o professor formador iniciou uma explanação teórica sobre a propriedade das bases médias em triângulos. Ele explicou que, quando um segmento é traçado entre os pontos médios de dois lados de um triângulo, esse segmento será paralelo ao terceiro lado e terá metade do seu comprimento. Essa propriedade foi demonstrada por meio de argumentos de paralelismo e proporção, sustentados por uma construção geométrica.

Com a mediação tecnológica das ferramentas “Controle Deslizante”, “Segmento com Comprimento Fixo”, “Ponto”, “Reta Paralela”, “Distância, Comprimento ou Perímetro”, “Segmento”, “Ponto Médio ou Centro”, “Semirreta”, “Compasso”, “Interseção de Dois Objetos”, “Ângulo” e “Texto”, o professor iniciou a demonstração visual da propriedade dos segmentos médios em um trapézio. Para isso, começou construindo um segmento fixo e posicionando um ponto *C*, que não é colinear com o segmento *AB*. Em seguida, ele formou o triângulo ΔABC, criando os segmentos *BC* e *CA*. Marcou os pontos médios *D* e *E* dos segmentos *AC* e *BC*, respectivamente, e traçou o segmento *DE*. O professor explicou que, visualmente, era

possível verificar que o segmento *DE* é paralelo a *BC* e que seu comprimento é sempre a metade do comprimento de *BC*.

Para dar continuidade à demonstração, ele criou a semirreta *DE*, mediu esse segmento e construiu uma circunferência com centro em *E*. Em seguida, localizou o ponto de interseção da circunferência com a semirreta, identificou o ponto *F* e traçou o segmento *EF*, que é congruente a *DE*, além do segmento *BF*. O professor explicou a demonstração dessa propriedade, destacando os ângulos e segmentos relevantes. Na sequência, ele configurou um controle deslizante e ajustou a exibição dos objetos e textos, conforme ilustrado na **Figura 17**.

Figura 17 – Base média de um triângulo qualquer



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/y9gthax2. Acesso em: 16 ago. 2024.

Resumidamente, esta quarta semana de aula representa o Sistema de Atividades V, no qual foram explorados os conhecimentos curriculares relacionados aos ‘Quadriláteros Notáveis’, conforme as abordagens realizadas pelo professor formador. No entanto, durante esse processo, caracterizado pela pluralidade e multivocalidade, foram observadas algumas tensões e inquietações, que serão analisadas no próximo subtópico.

4.5.1 Análise das contradições heteroformativas no sistema de atividades V

A análise das interações na aula do Sistema de Atividades V, fundamentada nas contradições primária, secundária e terciária de Engeström (2016), revelou as tensões e as possibilidades de aprendizagem que emergiram enquanto os estudantes se dedicavam tanto à construção de pontos, segmentos, caminhos poligonais e outros objetos geométricos no ggb-CB, quanto à exploração dos conhecimentos curriculares relacionados aos ‘Quadriláteros Notáveis’, tema abordado pelo professor formador.

A contradição primária de Engeström (2016) manifestou-se na tensão entre o valor de uso e o valor de troca dos conceitos geométricos relacionados aos ‘Quadriláteros Notáveis’, como foi observado na dúvida de Elen sobre o funcionamento da Janela de Álgebra no GeoGebra. A integração entre os nomes dos objetos e suas medidas, exemplificada pelo caminho poligonal “f”, evidenciou essa tensão. Essa discrepância entre o uso da ferramenta (GeoGebra) e sua aplicação formal (a nomenclatura e as medidas algébricas) refletiu a ideia de heteroformação, conforme Macedo (2010). No contexto formativo, o uso da ferramenta digital não apenas facilitou a aprendizagem individual da Geometria, mas também transformou a compreensão coletiva dos estudantes sobre os conceitos envolvidos.

A manipulação dinâmica das figuras e a atualização automática das medidas na Janela de Álgebra permitiram que os estudantes percebessem os objetos geométricos como entidades dinâmicas, cuja identidade estava intimamente ligada às suas propriedades matemáticas. Esse processo de aprendizagem resultou em uma transformação na maneira como os estudantes, em conjunto, se apropriaram do conhecimento. O valor de troca (informações algébricas) e o valor de uso (compreensão da figura geométrica) se entrelaçaram, promovendo uma reflexão conjunta que ultrapassou a resolução individual de problemas. Esse entrelaçamento alterou a forma como a turma compreendeu os conceitos de “caminho” e “figura geométrica”, favorecendo uma construção coletiva do conhecimento matemático, na qual a ferramenta digital se tornou um meio de reorganização do pensamento geométrico coletivo.

Foi possível observar que a contradição secundária proposta por Engeström (2016) manifestou-se na tensão entre os componentes do sistema de atividade, como as ferramentas e os objetivos da aprendizagem. A dinâmica entre a manipulação dos quadriláteros e o uso das ferramentas do GeoGebra evidenciou essa tensão. Quando Aden questionou sobre a alteração da posição dos pontos e como isso poderia afetar a propriedade de ser um paralelogramo, o professor explicou que a manipulação da estrutura alterava a configuração geométrica, ressaltando que ferramentas como “Reta Paralela”, “Reta Perpendicular” e “Ângulo com Amplitude Fixa” eram essenciais para preservar as propriedades da figura. Esse exemplo ilustra como as ferramentas do GeoGebra, ao serem utilizadas, possibilitaram a internalização do conhecimento, conforme Vygotsky (2019), pois os estudantes foram levados a compreender ativamente as propriedades dos quadriláteros, como o paralelogramo, por meio da exploração interativa. Nesse sentido, o uso das ferramentas não foi apenas mecânico, mas tornou-se uma mediação entre o conceito teórico e sua aplicação prática, permitindo que os estudantes internalizassem o conhecimento de maneira mais reflexiva.

A contradição terciária de Engeström (2016) surge quando novas tecnologias, como o ggb-CB, entram em conflito com os métodos tradicionais de ensino, gerando uma tensão entre as práticas pedagógicas estabelecidas e as novas possibilidades oferecidas pela tecnologia. Essa tensão foi observada, por exemplo, quando Mary e Hend questionaram como os trapézios estavam relacionados aos triângulos equiláteros, evidenciando o desafio de integrar conceitos geométricos em um ambiente que combinava o uso da ferramenta digital com o conhecimento pré-existente. Essa tensão foi superada quando o uso do GeoGebra permitiu que os estudantes visualizassem as relações entre as figuras geométricas de maneira dinâmica e interativa. A ferramenta facilitou a exploração de múltiplas propriedades geométricas, como paralelismo e congruência, possibilitando uma compreensão coletivamente interativa dos conceitos. Nesse processo, o GeoGebra não apenas solucionou as dúvidas individuais de Mary e Hend, mas também favoreceu uma exploração coletiva, onde os estudantes puderam discutir e ajustar suas hipóteses em tempo real, aprimorando a compreensão coletiva.

Desse modo, ao permitir o compartilhamento dinâmico de informações e a interação entre os estudantes, o GeoGebra se tornou uma ferramenta que não apenas media o conhecimento individual, mas também potencializa a construção coletiva de saberes. As memórias dinâmicas mencionadas por Lévy (2003, p. 157), ao serem incorporadas aos recursos digitais, contribuem para a transferência e replicação de conhecimento entre os estudantes, ao mesmo tempo, em que ampliam as possibilidades de aprendizado cooperativo. Dessa forma, a ferramenta digital não só facilita a visualização de conceitos, mas também desenvolve a inteligência coletiva da turma, permitindo uma reflexão conjunta que transforma o conhecimento de cada estudante em um entendimento mais integrado, resultado de uma troca constante e de uma apropriação coletiva da aprendizagem.

A resolução dessas contradições fez parte deste processo de formação híbrida (Horn; Staker, 2015). Nesse contexto, a integração do ggb-CB como uma ferramenta inovadora no ensino de Geometria proporcionou aos estudantes a oportunidade de manipular e explorar conceitos de maneira interativa e visual. Esse modelo de ensino híbrido, que combinou atividades presenciais com o uso de TD, favoreceu uma compreensão mais profunda das propriedades geométricas, como a soma dos ângulos internos dos quadriláteros e a construção de trapézios a partir de triângulos. Ao utilizar os *applets* do GeoGebra, os estudantes forma ativa e coletivamente interativa, promovendo um aprendizado que ultrapassou a simples exposição teórica. A interação constante entre a turma e o professor, mediada pela tecnologia, foi fundamental para esse processo, resultando em um aprendizado mais envolvente.

Esse movimento heteroformativo, evidenciado pela mediação do professor e pela interação constante com as ferramentas digitais, favoreceu a troca de saberes e a construção conjunta de conceitos, refletindo a importância da colaboração e do aprendizado ativo nesse ambiente híbrido. Como resultado, a utilização do GeoGebra não apenas facilitou a internalização dos conceitos geométricos pelos estudantes, mas também gerou um espaço de aprendizado dinâmico, no qual cada estudante contribuiu para a construção coletiva do conhecimento.

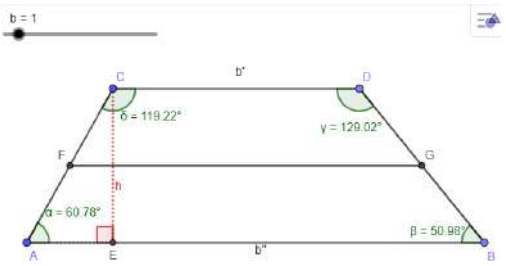
4.5.2 Análise das contradições autoformativas no sistema de atividades V

Com a base estabelecida no subtópico anterior, que tratou das dinâmicas heteroformativas e suas tensões, resultando na construção coletiva do conhecimento, a análise agora se volta para os aspectos autoformativas no Sistema de Atividades V, fundamentando-se nesse processo tecformativo digital e evidenciando como os estudantes adotaram uma postura mais autônoma e proativa no processo de aprendizagem dos Quadriláteros Notáveis. Assim, nesta parte, discute-se a maneira como os níveis de aprendizagem (Van Hiele, 1986) se manifestaram nas tarefas dos quatro participantes que mais se destacaram durante as interações da quinta semana de aula. Após essa análise, é apresentada a interação geral entre os sistemas envolvidos à luz da contradição quaternária (Engeström, 2016).

A primeira tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 30**. A participante Hend é destacada nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 30 – Tarefa 5.1 (Trapézio)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
1. Use a ferramenta "Controle Deslizante" para criar um controle deslizante nomeado como b, variando de 0 a 10. *2. Com a ferramenta "Segmento de Comprimento Fixo", desenhe um segmento com comprimento b, digitando b na Caixa de Comando da ferramenta.* *3. Utilize as ferramentas "Ponto" e "Reta Paralela" para criar um ponto acima do segmento AB e desenhar uma reta paralela ao segmento AB que passe pelo ponto C.* *4. Com a ferramenta "Ponto em Objeto", adicione um ponto D à direita do ponto C na reta paralela ao segmento AB.* *5. Use a ferramenta "Segmento" para traçar os segmentos BD, CD e AC. Antes de realizar essa construção, selecione a opção para não exibir a reta paralela.* *6. Utilize as ferramentas "Reta" e "Reta Perpendicular" para traçar a reta que passa pelos pontos A e B, e desenhar uma reta perpendicular ao segmento AB que também passe pelo ponto C.*	***Transcrição das respostas de Hend:*** *a) A figura construída é um trapézio, isso acontece porque temos dois pares de lados opostos que são paralelos.* *b) É um trapézio retângulo, nesse momento o ponto A coincide com o ponto E formando mais um ângulo reto.*

7. Com a ferramenta "Interseção de Dois Objetos", encontre o ponto de interseção entre a reta AB e a perpendicular passando pelo ponto C. Nomeia esse ponto como E. *8. Use a ferramenta "Segmento" para traçar os segmentos AE e EC, configurando o estilo pontuado para o segmento EC e a cor vermelha para o mesmo. Antes dessa construção, selecione a opção para não exibir a reta perpendicular.* *9. Com a ferramenta "Ângulo", meça os seguintes ângulos: ∠BAC, ∠DBA, ∠CDB, ∠ACD e ∠CEA.* ***a) Qual figura foi construída? Justifique sua resposta com base nas propriedades da figura.*** ***b) Quando o ∠ACD=90°, qual é o nome da figura formada?*** ***c) Quando o ∠BAC≅∠DBA, qual é o nome da figura?*** ***d) Quando todos os ângulos internos da figura são diferentes, qual é o nome dessa figura?*** *10. Use a ferramenta "Ponto Médio ou Centro" para encontrar os pontos médios dos segmentos AC e BD.* *11. Utilize a ferramenta "Segmento" para conectar os pontos médios encontrados.* ***e) Esse segmento divide a figura original em duas novas figuras. Identifique essas figuras e explique como você determinou isso.***	*c) É um trapézio isósceles, pois os ângulos adjacentes às bases são congruentes.* *d) Trapézio escaleno, pois todos os ângulos são diferentes.* *e) Forma dois trapézio, isso porque ao usar a ferramenta reta paralela e tocar no segmento AB e um dos pontos médios tem se que essa reta passa também pela outra, então temos três segmentos paralelos, daí as figuras são trapézios por definição.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	
	

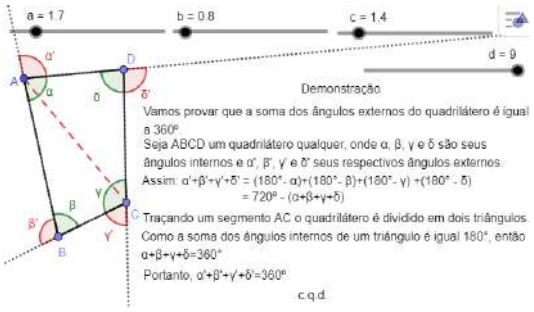
Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Na análise da Tarefa 5.1, observa-se que, ao identificar a figura como um trapézio, Hend operava no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986). No entanto, ao responder a questões sobre as propriedades dos ângulos e dos lados, além de identificar diferentes tipos de trapézios, ela progrediu para o Nível 1, onde começou a analisar as partes da figura e suas características. Ao discutir como o segmento que conecta os pontos médios divide a figura em dois trapézios, a estudante atingiu o Nível 2, demonstrando uma compreensão mais abstrata e a habilidade de identificar inter-relações geométricas.

O uso dos recursos do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 2 (Dedução Informal) ao permitir que a estudante explorasse interativamente as propriedades de figuras geométricas, como trapézios, por meio da construção e manipulação de segmentos e retas paralelas e perpendiculares. Nesta análise, é possível observar que Hend pôde verificar, de forma prática, como os ângulos e as relações entre os lados das figuras mudam conforme os parâmetros são ajustados, facilitando a dedução informal das propriedades geométricas dos diferentes tipos de trapézios, como retângulo, isósceles e escaleno.

A segunda tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 31**. A participante Elen é destacada nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 31 – Tarefa 5.2 (Prova da Soma dos Ângulos Externos do Quadrilátero)

<table>
<tr><th>Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade</th><th>Pensamento Geométrico – Maturação</th></tr>
<tr><td>Prove que a soma dos ângulos externos de qualquer quadrilátero é igual a 360º.
1. Orientações construtivas:
1.1. Use a ferramenta “Controle Deslizante” para definir os comprimentos dos lados do quadrilátero. Configure um deslizador para a base do triângulo AB (nomeie-o como “a”), outro para o segmento BC (nomeie-o como “b”) e outro para o segmento CD (nomeie-o como “c”). Ajuste cada deslizador para que os comprimentos variem de 0.1 a 10.
1.2. Utilize a ferramenta “Segmento de Comprimento Fixo” para desenhar os lados do quadrilátero. Clique na Janela de Visualização e insira “a” para o comprimento da base AB, e depois, com a ferramenta ativada, clique no ponto B e insira “b” para o comprimento do segmento BC e clique no ponto C e insira “b” para o comprimento do segmento CD.
1.3. Use a ferramenta “Mover” e mova os pontos B, C e D para não ficarem de forma colinear e trace o segmento DA usando a ferramenta “Segmento”.
1.4. Trace as semirretas AB, BC, CD e DA com a ferramenta “Semirreta” e coloque um ponto sobre cada uma delas com a ferramenta “Ponto em Objeto” para formar os ângulos externos.
1.5. Use a ferramenta “Ângulo” para medir os ângulos internos e externos desse quadrilátero.
1.6. Faça os ajustes de cores e estilos para diferenciar esses elementos.
a) Por que a soma dos ângulos externos de um quadrilátero é sempre 360º, assim como a de um triângulo?
2. Aplique os passos das orientações para a demonstração argumentativa (2.3. Use a propriedade da soma dos ângulos externos do triângulo).
3. Use as orientações para a demonstração dinâmica.</td><td>Transcrição das respostas de Elen:
a) Pelo que entendi, no triângulo, a soma dos ângulos externos é 360º porque, ao redor de cada vértice, você está fazendo uma volta completa. No quadrilátero, é um pouco similar.
Demonstração
Seja ABCD um quadrilátero qualquer, onde α, β, γ e δ são seus ângulos internos e α’, β’, γ’ e δ’ seus respectivos ângulos externos.
Assim: α’+β’+γ’+δ’ = (180°- α)+(180°- β)+(180°- γ) +(180° - δ)
Traçando um segmento AC o quadrilátero é dividido em dois triângulos. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual 180°, então α+β+γ+δ=360°
Portanto, α’+β’+γ’+δ’=360º c.q.d..</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pensamento Geométrico – Construtivo</td></tr>
<tr><td colspan="2"> 
</td></tr>
</table>

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Na análise da Tarefa 5.2, observa-se que Elen operava no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), ao reconhecer visualmente que a soma dos ângulos externos é constante, fazendo uma comparação intuitiva com a soma dos ângulos externos de um triângulo. À medida que avançou na análise da soma dos ângulos externos, estabelecendo uma relação com a soma dos

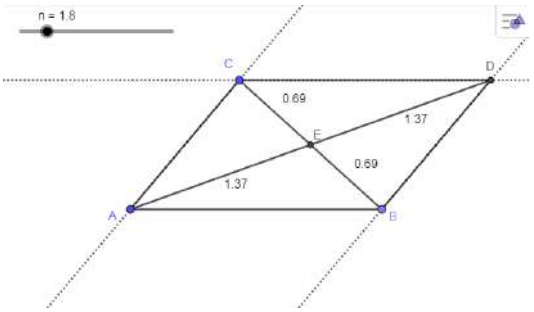
ângulos internos, a estudante progrediu para o Nível 1, iniciando uma análise das partes do quadrilátero. A evolução para o Nível 2 é evidente quando a estudante estabelece relações mais abstratas, utilizando a propriedade dos ângulos internos para concluir que a soma dos ângulos externos é 360º. Ao construir a demonstração formal da soma dos ângulos, empregando propriedades geométricas e deduções lógicas, Elen alcançou o Nível 3, caracterizado pela habilidade de dedução formal.

O uso dos recursos do ggb-CB facilitou a transição para o Nível 3 (Dedução Formal) ao permitir uma exploração visual interativa do quadrilátero e de seus ângulos. Nesta análise, é possível notar que, ao ajustar os comprimentos e movimentar os pontos, a estudante pôde observar como os ângulos externos se comportam ao redor dos vértices, levando a uma compreensão intuitiva da relação entre eles. Em razão disso, a construção dinâmica e a medição dos ângulos internos e externos reforçaram a ideia de que, assim como no triângulo, a soma dos ângulos externos do quadrilátero é de 360º, possibilitando uma formalização do raciocínio.

A terceira tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 32**. O participante Aden é destacado nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 32 – Tarefa 5.3 (Paralelogramo)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	Pensamento Geométrico – Maturação
1. Utilize a ferramenta "Controle Deslizante" para criar um controle deslizante com valores variando de 1 a 10, nomeando-o como "n". *2. Use a ferramenta "Segmento de Comprimento Fixo" para desenhar um segmento de reta com comprimento igual ao valor do controle deslizante "n".* *3. Crie um ponto C em qualquer posição acima do segmento AB utilizando a ferramenta "Ponto".* *4. Conecte o ponto A ao ponto C com uma reta, utilizando a ferramenta "Reta".* *5. Desenhe uma reta paralela ao segmento AB que passe pelo ponto C, usando a ferramenta "Reta Paralela".* *6. Desenhe outra reta paralela ao segmento AC que passe pelo ponto B, novamente utilizando a ferramenta "Reta Paralela".* *7. Determine o ponto D, localizado na interseção das duas retas paralelas (uma paralela ao segmento AB e a outra ao segmento AC), utilizando a ferramenta "Ponto de Interseção".* *8. Desenhe as diagonais do paralelogramo, conectando os pontos A a D e B a C, usando a ferramenta "Segmentos".* *9. Encontre o ponto E, que é a interseção das diagonais do paralelogramo, usando a ferramenta "Interseção de Dois Objetos".* *10. Ligue os segmentos BD, DC e AC, usando a ferramenta "Segmentos".*	***Transcrição das respostas de Aden:*** *a) Quando a gente constrói um paralelogramo usando GeoGebra, fica mais fácil ver como tudo se encaixa. As retas paralelas ajudam a entender que os ângulos opostos são iguais e que os lados opostos também são iguais. E quando desenhamos as diagonais, percebemos que elas se cortam no meio e criam dois triângulos congruentes em cada metade do paralelogramo. Isso mostra que as diagonais dividem o paralelogramo de forma simétrica e que os ângulos e lados estão todos conectados de maneira que faz sentido, o que ajuda a entender melhor as propriedades da figura.* *b) Em vez de tentar desenhar as linhas paralelas à mão, o geogebra faz isso automaticamente, o que ajuda a garantir que tudo fique exatamente onde deve estar. Além disso, o geogebra deixa a gente ajustar as figuras rapidamente e ver como diferentes mudanças afetam o desenho. Isso é ótimo para explorar e entender conceitos geométricos sem ficar preso em erros de desenho, tornando o processo de aprendizado menos frustrante.*

11. Meça os segmentos AE, BE, CE e DE para verificar as propriedades do paralelogramo, use as ferramentas "Segmento" e "Distância, Comprimento ou Perímetro". *12. Ajuste as retas criadas para o estilo pontuado para revelar o paralelogramo finalizado.* ***a) Como a construção de um paralelogramo usando segmentos paralelos e diagonais ajuda a compreender a relação entre os ângulos e os lados do paralelogramo?*** ***b) Quais são as implicações do uso da ferramenta digital, como "Reta Paralela", para a construção e análise de figuras geométricas?*** ***c) De que maneira a medição dos segmentos AE, BE, CE e DE pode revelar propriedades específicas dos paralelogramos, como a igualdade das diagonais e a simetria das medidas****?*	*c) Medir os segmentos AE, BE, CE e DE ajuda a ver algumas das propriedades legais dos paralelogramos. Quando a gente mede esses segmentos e vê que, por exemplo, AE e CE congruentes e BE e DE também são, isso confirma que as diagonais do paralelogramo se cortam no meio. É como se a gente estivesse conferindo se tudo está funcionando como deveria e se as propriedades geométricas do paralelogramo estão lá. Isso ajuda a confirmar que o que estamos desenhando realmente é um paralelogramo e não outra coisa.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	
	

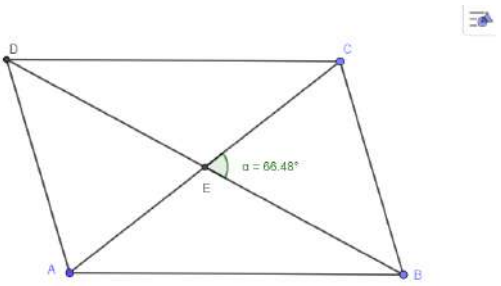
Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Na análise da Tarefa 5.3, observa-se que, inicialmente, Aden se encontrava no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), ao reconhecer a forma do paralelogramo com base em sua aparência. À medida que avançava, começou a analisar as propriedades geométricas, como a congruência dos lados opostos e a simetria gerada pelas diagonais, progredindo para o Nível 1, onde examinou as características e as relações entre os lados e ângulos. Ao medir os segmentos e confirmar propriedades, como a divisão das diagonais em segmentos congruentes, Aden demonstrou uma evolução para o Nível 2, reconhecendo as inter-relações entre as propriedades geométricas.

O uso dos recursos do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 2 (Dedução Informal) ao permitir que o estudante explore dinamicamente as propriedades do paralelogramo, como a igualdade dos lados e a interseção das diagonais. Nesta análise, é possível notar que a construção virtual de retas paralelas e a medição das diagonais proporcionaram uma compreensão intuitiva das relações entre ângulos e lados. Além disso, o ajuste interativo possibilitou a dedução informal de propriedades, como a simetria das diagonais e a congruência dos lados opostos. Essa exploração prática facilita a internalização das propriedades geométricas, incentivando a dedução a partir da observação.

A última tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 33**. A participante Mary é destacada nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 33 – Tarefa 5.4 (Propriedades dos Paralelogramos)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
1. Use a ferramenta "Segmento de Comprimento Fixo" para marcar o ponto A na Janela de Visualização e digite 6 na Caixa de Comando, criando o segmento AB com comprimento fixo de 6 u.c. *2. Com a mesma ferramenta, construa o segmento BC a partir da extremidade direita de AB, com comprimento fixo de 4 u.c.* *3. Mova o ponto C para formar um ângulo não nulo e não reto entre B e C.* *4. Com base no ponto C, desenhe uma reta paralela ao segmento AB usando a ferramenta "Reta Paralela".* *5. Usando a ferramenta "Reta Paralela" com base no ponto A, trace uma reta paralela ao segmento BC.* *6. Marque o ponto D utilizando a ferramenta "Interseção de Objetos".* *7. Use a ferramenta "Segmento" para formar o quadrilátero ABCD e construa os segmentos AD e DC.* *8. Clique em cada uma das retas e escolha a opção para não exibi-las.* ***a) Qual é o nome dessa figura geométrica?*** ***b) Ao mover os pontos, o que você observa?*** ***c) É possível mover todos os pontos?*** ***d) Quais pontos podem ser movidos? Justifique a sua resposta.*** ***e) A construção é única?*** *9. Utilize as ferramentas "Interseção de Dois Objetos" e "Ângulo" para determinar pelo menos um dos ângulos formados pela interseção das diagonais.* ***f) Por que não é possível formar um losango nessa construção?*** ***g)* As diagonais da figura construída podem se cruzar de forma perpendicular?**	***Transcrição das respostas de Mary:*** *a) Paralelogramo;* *b) Observo que quando movemos um ponto do paralelogramo a figura move-se de tal maneira que a nova figura formada também é um paralelogramo, em outras palavras o paralelismo característico de um paralelogramo se mantém.* *c) Não.* *d) Após concluir a construção do paralelogramo seguindo o roteiro, podemos perceber que clicando diretamente o ponto D não se movimenta, porém é possível mover os demais pontos e através destes moverá também o ponto D, de interseção entre as duas retas criadas.* *e) Não, a construção não é única.* *f) Não é possível formar um losango porque, na construção, os segmentos AB e BC têm comprimentos diferentes, e para formar um losango, todos os lados precisam ser iguais.* *g) Não, porque eles não são nem quadrados e nem losangos.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	
	

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

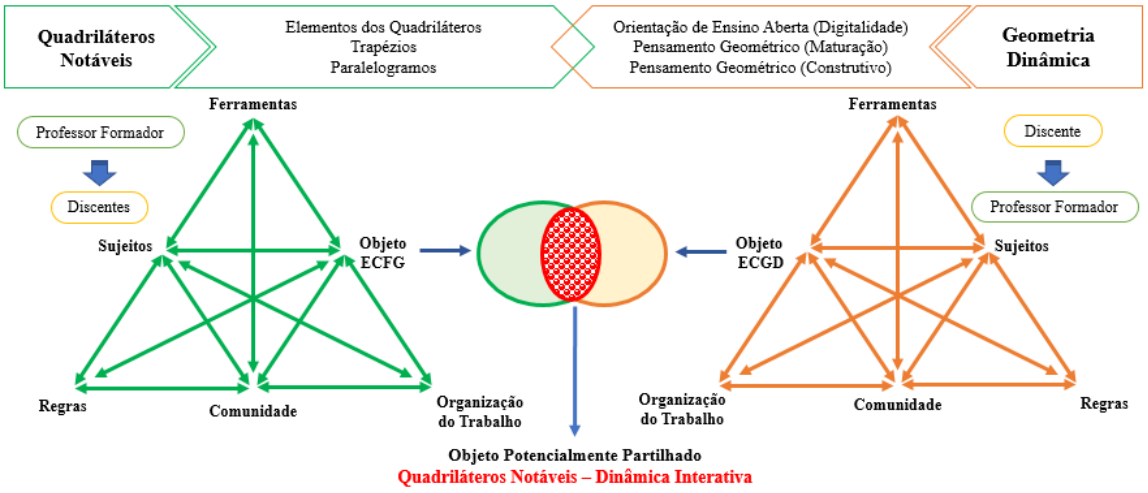
Na análise da Tarefa 5.4, observa-se que a estudante Mary operava no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), reconhecendo visualmente a figura sem explorar suas propriedades de forma aprofundada. À medida que começou a mover os pontos e a observar como o paralelismo se mantinha, a estudante progrediu para o Nível 1, analisando as características da figura, como

a preservação do paralelismo ao mover os pontos. Ao explicar por que não era possível formar um losango, ao reconhecer que os lados não eram congruentes, Mary demonstrou uma compreensão mais profunda, característica do Nível 2.

O uso dos recursos do ggb-CB facilitou a transição para o Nível 2 (Dedução Informal), pois permitiu que a estudante experimentasse a construção de um paralelogramo de forma dinâmica, observando a relação entre os segmentos, as retas paralelas e os ângulos formados. Nesta análise, é possível notar que a visualização interativa das mudanças nas medidas e a fixação das condições de paralelismo proporcionaram uma compreensão intuitiva da figura. Isso possibilitou a dedução informal das propriedades do paralelogramo, como o fato de suas diagonais não se cruzarem perpendicularmente e de os lados não serem iguais.

As quatro tarefas analisadas evidenciam, por meio da interação entre o ECFG e a ECGD, a criação de um objeto potencialmente partilhado, conforme descrito na quarta contradição de Engeström (2016). Nesse contexto, o objeto partilhado foi a compreensão dinâmica interativa dos ‘Quadriláteros Notáveis’, com foco na maturação do pensamento geométrico dos estudantes (**Esquema 29**).

Esquema 29 – Quadriláteros Notáveis – Dinâmica Interativa



Fonte: Pesquisador (2024).

No sistema ECFG, o papel do professor formador foi mais ativo e direcionado, conduzindo os estudantes na apresentação dos conceitos fundamentais relacionados aos elementos dos quadriláteros, como trapézios e paralelogramos, de maneira estruturada e sequencial. O objetivo desse sistema foi ensinar os ‘Quadriláteros Notáveis’, ao mesmo tempo, em que incentivava a investigação sobre suas aplicações, por meio de operações como a construção de pontos, segmentos, caminhos poligonais e outros objetos geométricos. Para isso,

o professor realizava revisões teóricas do capítulo VII do volume 9, proporcionando aos estudantes uma compreensão formal dos conhecimentos curriculares abordados.

Em paralelo, no sistema ECDG, os estudantes adotaram uma postura proativa. Nesse ambiente, tiveram a oportunidade de explorar os conceitos de maneira prática e interativa, manipulando objetos geométricos em um espaço digital dinâmico, o que resultou em um bom desempenho nas AOEA. Esse processo não apenas facilitou a compreensão dos conceitos geométricos, mas também contribuiu para o desenvolvimento de habilidades digitais essenciais. Entre essas habilidades, destacou-se, naquele momento, a capacidade de manter a estrutura geométrica por meio das ferramentas "Reta Paralela", "Reta Perpendicular" e "Ângulo de Amplitude Fixa". Por outro lado, o professor atuou como mediador, oferecendo suporte e *feedback online*, garantindo que a exploração dos estudantes fosse acompanhada virtualmente e direcionada para a aprendizagem dos 'Quadriláteros Notáveis'.

O uso dos recursos do ggb-CB, nesse sistema, promoveu um aprendizado interativo, permitindo que os participantes percebessem como pequenas variações nas construções afetam a estrutura geométrica dos quadriláteros. Desse modo, pode-se afirmar que as TDI atuam como mediadoras essenciais, não apenas facilitando a compreensão dos conceitos, mas também possibilitando uma construção dinâmica. Como ressalta Kenski (2015b), "[...] utilizando-se de uma nova sensibilidade, através da imagem eletrônica, que envolve um pensar dinâmico, onde tempo, velocidade e movimento passam a ser os novos aliados no processo de aprendizagem" (p. 45). Nesse sentido, esse ambiente digital não apenas amplia as formas de interação com os conteúdos, mas também estimula o amadurecimento do pensamento geométrico por meio do desenvolvimento da curiosidade, da criatividade e da capacidade crítica dos estudantes.

As operações realizadas nesse sistema envolveram personalizações na visualização, medições dos objetos, identificações, implantações e conexões de elementos, conformidações da estrutura, além de construções geométricas com diversas possibilidades de manipulação. Essas operações estão alinhadas com a TA de Leontiev (2018), pois envolvem ações que, após serem dominadas, tornam-se automáticas, empregadas sem a necessidade de atenção consciente. Neste contexto, o foco foi preservar as características das estruturas. Ao utilizar ferramentas digitais para interagir com os 'Quadriláteros Notáveis', os estudantes não apenas absorveram o conteúdo curricular, mas também o construíram ativamente por meio de práticas dinâmicas e interativas, consolidando o aprendizado por meio de uma experiência híbrida.

Foi possível identificar aspectos autoformativos, conforme descrito por Sommerman (2002), nas AOEA desta semana. O autor enfatiza a importância da apropriação do saber pelo

próprio sujeito, destacando que esse processo envolve uma busca ativa e reflexiva pelo conhecimento. Nesse contexto, o estudante demonstrou uma crescente capacidade de reflexão e autonomia intelectual ao explorar, manipular e testar as propriedades dos diferentes tipos de quadriláteros de forma independente. Ao assumir essa responsabilidade, deixou de ser um receptor passivo, tornando-se um agente ativo na construção de seu próprio conhecimento. Nesse processo, observou-se um avanço nas habilidades cognitivas superiores, como o raciocínio geométrico.

Nesse ambiente, a utilização dos recursos do ggb-CB nesta proposta híbrida de ensino facilitou o progresso dos estudantes pelos diferentes níveis de pensamento geométrico, conforme o modelo de Van Hiele (1986). A combinação da tecnologia com o ensino tradicional possibilitou uma construção dinâmica e interativa dos objetos geométricos, tornando o aprendizado mais visual e intuitivo. Esse processo formativo proporcionou aos estudantes a oportunidade de explorar conceitos de maneira mais ativa, permitindo a visualização e manipulação de figuras geométricas em tempo real.

Como resultado das análises, observa-se que nas tarefas 5.1 (Trapézio), 5.3 (Paralelogramo) e 5.4 (Propriedades dos Paralelogramos), os estudantes Hend, Aden e Mary, respectivamente, demonstraram um avanço significativo no Nível 2 de aprendizagem, caracterizado pelo desenvolvimento de uma compreensão mais abstrata. Esse progresso foi evidenciado pela capacidade de reconhecer relações e inter-relações geométricas por meio de deduções informais. A exploração interativa proporcionada pelo GeoGebra permitiu que os estudantes fossem além da simples observação, aprofundando-se na análise das propriedades geométricas e testando suas próprias hipóteses.

Por outro lado, a análise da Tarefa 5.2 (Prova da Soma dos Ângulos Externos do Quadrilátero) revelou que a estudante Elen avançou para o Nível 3, demonstrando uma maior capacidade de elaborar sequências de afirmações dedutivas. Esse progresso reflete a importância do uso de ferramentas digitais, como o GeoGebra, não apenas para a visualização, mas também para a construção ativa do conhecimento, onde a elaboração de provas e a compreensão das deduções são fundamentais. O desenvolvimento das habilidades de raciocínio lógico e dedutivo, evidenciado por Elen, mostra que a aprendizagem em um ambiente híbrido não apenas facilita a compreensão dos conceitos, mas também prepara os estudantes para desafios cognitivos mais avançados.

Diante disso, a interação entre os dois sistemas (ECFG e ECGD) gerou o objeto partilhado mencionado anteriormente. Esse processo de ensino, realizado nesta proposta

híbrida, que se baseia na autoformação, nas TDI e na TA, resultou em um avanço cognitivo na compreensão dos estudantes sobre os conceitos de ‘Quadriláteros Notáveis’. Ao proporcionar à turma uma participação ativa e reflexiva no processo de aprendizagem, essas abordagens possibilitaram um entendimento mais profundo e autônomo, ao mesmo tempo, em que fortaleceram suas habilidades de raciocínio geométrico e dedutivo.

4.6 Explorando os Pontos Notáveis do Triângulo

Na sexta semana, as aulas foram organizadas para explorar os ‘Pontos Notáveis do Triângulo’, com o objetivo de promover uma compreensão dinâmica desse conteúdo curricular. Nesse cenário híbrido de ensino, as ações pedagógicas envolveram a construção e a exploração do objeto de estudo, bem como a investigação, identificação e aplicação prática dos conceitos relacionados à circunferência inscrita e circunscrita no triângulo, além da reta de Euler. Também houve interação discursiva sobre as aplicabilidades discutidas.

Para isso, foi necessário expandir o repertório operacional dos estudantes por meio de tarefas teóricas e práticas. A aplicação das AOEA foi fundamental nesse processo, pois forneceu diretrizes para a criação, manipulação e personalização de pontos, bissetrizes, circunferências e outros objetos geométricos. Essas atividades foram planejadas para alcançar as metas Ciade, aproximando a turma dos recursos tecnológicos adotados, especialmente no incentivo à cultura digital com a utilização da ferramenta “Relação”.

O **Quadro 34**, apresentado a seguir, ilustra a estrutura e a organização dessa abordagem no contexto do ensino aplicado nesta sexta semana.

Quadro 34 – Planejamento da sexta semana de aula

<table>
<tr><td colspan="3">Artefato
Computador e Smartphone.
GeoGebra: Plataforma; Classroom Beta; Classic; Geometria.
<u>Ferramentas Específicas</u>: Mover; Interseção de Dois Objetos; Ponto Médio ou Centro; Segmento; Segmento com Comprimento Fixo; Reta Perpendicular; Mediatriz; Bissetriz; Círculo dados Centro e Um dos seus Pontos; Compasso; Círculo definido por Três Pontos; Ângulo; Distância, Comprimento ou Perímetro; Relação; Controle Deslizante; Texto.
<u>Livro</u>: Fundamentos de Matemática Elementar 9: geometria plana (Cap. VIII).</td></tr>
<tr><td>Objeto
Pontos Notáveis do Triângulo.</td><td>Motivo
Necessidade de promover a compreensão dinâmica dos conceitos relacionados aos Pontos Notáveis do Triângulo.</td><td>Ação
❖ Construção e exploração dos Pontos Notáveis do Triângulo de modo dinâmico;
❖ Investigação, identificação e aplicação dos conceitos de circunferência circunscrita e inscrita no triângulo e reta de Euler;
❖ Interação discursiva das aplicabilidades abordadas.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Operações
Construções: produzir pontos, bissetrizes, circunferências, etc.;
Comparações: aferir semelhanças e diferenças dos elementos;
Personalizações: configurar, renomear, exibir/ocultar, etc.;
Conformidações: preservar as subsistências das estruturas;
Medições: medir comprimentos e amplitudes angulares;
Inquietações: expor dúvidas subjetivas e/ou coletivas;
Interlocuções: participar das discussões construtivas;
Identificações: localizar as interseções dos objetos;
Explorações: testar os recursos do GeoGebra;
Revisões: revisar os conteúdos curriculares;
Implantações: inserir elementos adaptáveis;
Interações: interagir com as AOEA;
Administrações: gerenciar conta;
Aplicações: resolver problemas;
Conexões: conectar elementos;
Manipulações: mover objetos.</td><td>Metas
➢ Construir pontos, bissetrizes, circunferências, etc. para explorar os Pontos Notáveis do Triângulo com a mediação tecnológica das ferramentas do GeoGebra;
➢ Investigar e aplicar os conceitos de circunferência circunscrita e inscrita no triângulo e reta de Euler;
➢ Desenvolver habilidades práticas de apuração da configuração elementar geométrica com uso da ferramenta “Relação”;
➢ Estimular discussões e reflexões sobre abordagens teóricas e práticas relacionadas ao objeto de estudo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Condições
Ambiente de ensino híbrido com suporte contínuo da equipe docente para auxiliar na aprendizagem dos Pontos Notáveis do Triângulo durante as atividades presenciais, oferecendo orientações e estímulos personalizados durante as observações online a distância.</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisador (2024).

O professor formador iniciou a abordagem dos ‘Pontos Notáveis do Triângulo’, concentrando-se nas construções geométricas no GeoGebra *Classic online*, na disposição Geometria, para explorar as propriedades da circunferência circunscrita, da circunferência inscrita e da reta de Euler. Ao longo da aula, o professor alternou entre explanações teóricas e práticas, utilizando as ferramentas dessa TD para proporcionar aos estudantes uma compreensão mais clara e interativa dos conceitos. Cada construção geométrica foi apresentada de forma sequencial, conectando as orientações aos princípios fundamentais da construção geométrica e destacando a importância das ferramentas digitais no ensino e na aprendizagem.

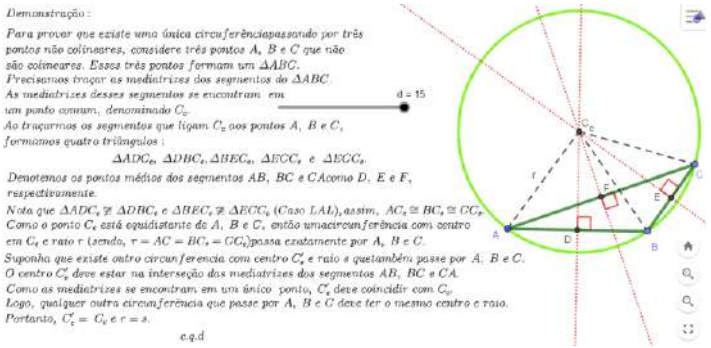
No início da aula, o foco foi a circunferência circunscrita, introduzindo as mediatrizes do triângulo como a chave para encontrar o circuncentro. O professor, utilizando a mediação tecnológica das ferramentas “Controle Deslizante”, “Ponto”, “Mover”, “Segmento com Comprimento Fixo”, “Segmento”, “Mediatriz”, “Bissetriz”, “Reta Paralela”, “Interseção de Dois Objetos”, “Reta”, “Círculo definido por Três Pontos”, “Círculo: Dados Centro e um dos seus Pontos”, “Ângulo”, “Relação” e “Texto”, explorou esse conteúdo de forma prática e teórica.

Primeiramente, ele criou dois controles deslizantes, denominados “*m*” e “*n*”, e, em seguida, dois segmentos fixos, *AB* e *BC*, com valores correspondentes a *n* e *m*, respectivamente. O ponto *C* foi posicionado de forma não colinear em relação a *A* e *B*, e o segmento *AC* foi traçado, formando o triângulo ΔABC. O professor, então, construiu as mediatrizes dos lados do triângulo e localizou os pontos de interseção delas com os lados, ressaltando que esses pontos

de interseção correspondem aos pontos médios de cada segmento. A partir desses pontos, o professor explicou que o ponto onde as mediatrizes se encontram é o circuncentro, que é equidistante dos três vértices do triângulo e também representa o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Antes de prosseguir, o professor demonstrou algebricamente que existe uma única circunferência que passa por três pontos não colineares. Para isso, ele traçou segmentos desde os vértices do triângulo ΔABC até o circuncentro e mostrou que as mediatrizes formam retas perpendiculares aos lados do triângulo, funcionando como alturas nos novos triângulos criados. Utilizando o critério de congruência triangular, ele, então, provou a unicidade da circunferência. Esse processo foi conectado ao controle deslizante, permitindo uma visualização progressiva da construção, conforme ilustrado na **Figura 18**.

Figura 18 – Demonstração da circunferência definida por três pontos



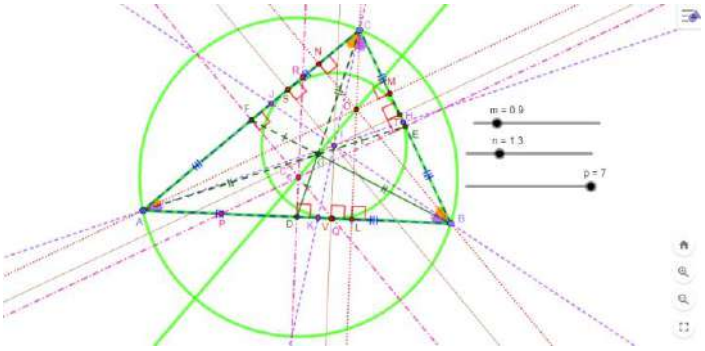
Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/nfnumgjn. Acesso em: 16 ago. 2024.

A seguir, o professor abordou a circunferência inscrita, utilizando as bissetrizes internas do triângulo para localizar o incentro. Ele traçou as bissetrizes de cada ângulo interno, e o ponto de interseção dessas bissetrizes, denominado incentro, foi identificado como o centro da circunferência inscrita, que tangencia os três lados do triângulo. O professor destacou a importância de utilizar a ferramenta corretamente para evitar erros comuns. Nesse momento, ele enfatizou a relevância da ferramenta “Relação” para identificar possíveis falhas na construção da circunferência inscrita, observando a posição dos pontos que, aparentemente, formavam essa circunferência. Antes de apresentar o procedimento correto, o professor incentivou a turma a refletir sobre o caminho adequado para encontrar essa circunferência de maneira válida. Após essa reflexão, ele explicou que, além de localizar o incentro, é necessário traçar as retas perpendiculares a cada lado do triângulo que passam por esse ponto. Somente

então é possível desenhar a circunferência com base nos três pontos de interseção entre essas retas e os lados do triângulo.

Em seguida, o professor formador abordou a reta de Euler, explicando a relação entre o baricentro, o circuncentro e o ortocentro de um triângulo. Vale ressaltar que, primeiramente, o baricentro foi encontrado ao traçar as medianas do triângulo, ligando os pontos médios dos lados aos vértices e identificando o ponto de interseção dessas medianas. Em seguida, o ortocentro foi localizado ao desenhar as alturas perpendiculares aos lados do triângulo e encontrar o ponto de interseção dessas alturas. Assim, o professor demonstrou visualmente como esses três pontos estão sempre alinhados em uma única reta, conhecida como reta de Euler, conforme ilustrado na **Figura 19**.

Figura 19 – Os pontos notáveis do triângulo e a reta de Euler



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/jcw9ezxm. Acesso em: 16 ago. 2024.

Basicamente, esta sexta semana de aula representa o Sistema de Atividades VI, no qual foram explorados os conhecimentos curriculares relacionados aos ‘Pontos Notáveis do Triângulo’, conforme as abordagens realizadas pelo professor formador. No entanto, durante esse processo, caracterizado pela pluralidade e multivocalidade, foram observadas algumas tensões e inquietações, que serão analisadas no próximo subtópico.

4.6.1 Análise das contradições heteroformativas no sistema de atividades VI

A análise das interações na aula do Sistema de Atividades VI, fundamentada nas contradições primária, secundária e terciária de Engeström (2016), revelou as tensões e as possibilidades de aprendizagem que emergiram enquanto os estudantes se dedicavam tanto à construção de pontos, bissetrizes, circunferências e outros objetos geométricos no ggb-CB,

quanto à exploração dos conhecimentos curriculares relacionados aos ‘Pontos Notáveis do Triângulo’, tema abordado pelo professor formador.

A contradição primária de Engeström (2016) manifestou-se na tensão entre o valor de uso e o valor de troca dos conceitos geométricos relacionados aos ‘Pontos Notáveis do Triângulo’. Isso foi evidenciado na dificuldade inicial de Théo em compreender a interseção das mediatrizes no circuncentro, mesmo quando este se encontrava fora do triângulo. A mediação do professor, juntamente com a utilização do GeoGebra para ajustar e manipular os pontos, possibilitou que os estudantes internalizassem a ideia de que o circuncentro é sempre o ponto equidistante dos vértices, independentemente de sua localização.

Uma outra situação foi a discussão sobre as propriedades do ortocentro e da reta de Euler, na qual a tensão entre o uso da ferramenta (visualização dos pontos notáveis) e o conhecimento teórico foi evidenciada, especialmente quando a turma questionou a localização do circuncentro em diferentes tipos de triângulos. Esse diálogo aproximou-se da ideia de heteroformação sinalizada por Macedo (2010), pois o uso do GeoGebra não se limitou à mera reprodução de um conteúdo pré-determinado, mas transformou o entendimento do conceito de centro de uma circunferência, desafiando as concepções estáticas da Geometria.

Foi possível observar que a contradição secundária proposta por Engeström (2016) manifestou-se entre as ferramentas utilizadas e os objetivos da atividade, especialmente na dificuldade de Aden em construir corretamente a circunferência inscrita. O professor esclareceu que é necessário utilizar as retas perpendiculares aos lados do triângulo a partir do incentro para garantir que a circunferência toque adequadamente os três lados. Esse processo exemplifica a internalização do conhecimento segundo Vygotsky (2019), onde a ferramenta GeoGebra possibilita que os estudantes transformem conceitos abstratos em compreensões práticas e visuais. É importante ressaltar que o uso interativo da ferramenta “Relação” auxiliou os estudantes a perceberem como os elementos geométricos se inter-relacionam, permitindo que corrigissem e ajustassem suas construções, promovendo um aprendizado dinâmico e contínuo.

A contradição terciária de Engeström (2016) surgiu com o uso dos recursos do ggb-CB, que desafiou os métodos tradicionais de ensino ao possibilitar a manipulação interativa de conceitos complexos, como a reta de Euler. Essa tensão manifestou-se na dificuldade de integrar práticas pedagógicas tradicionais com as novas oportunidades oferecidas pelas TDI. Lévy (2023) ressalta como essas tecnologias podem ampliar a capacidade de colaboração e aprendizado, promovendo uma experiência educacional mais dinâmica e coletivamente interativa.

Nessa circunstância, a interação entre Hend e Ulan ao explorar a reta de Euler no applet do GeoGebra ilustrou como essa tensão foi resolvida. Ao visualizar, em tempo real, como o circuncentro, ortocentro e baricentro de diferentes triângulos estavam sempre alinhados na reta de Euler, os estudantes conseguiram superar as limitações do ensino tradicional. A tecnologia não apenas facilitou a visualização desse conceito geométrico complexo, mas também permitiu que os estudantes participassem ativamente da construção do conhecimento, explorando diferentes tipos de triângulos e suas propriedades. Esse processo de exploração prática e coletivamente interativa promoveu uma integração entre teoria e prática, resolvendo a tensão entre os métodos convencionais e a abordagem interativa digital.

A resolução dessas contradições fez parte do processo de formação híbrida (Horn; Staker, 2015), no qual a tecnologia complementou a prática pedagógica convencional, criando um ambiente de ensino mais dinâmico e interativo. A implementação do ggb-CB permitiu que os estudantes interagissem diretamente com conceitos geométricos, como circuncentro, incentro e a reta de Euler, promovendo uma compreensão mais profunda e visual desses conceitos. As interações entre o professor e a turma, mediadas pelos applets do GeoGebra, não apenas corrigiram equívocos, mas também estimularam o aprendizado ativo, no qual os estudantes testavam, ajustavam e internalizavam os conceitos.

Essa abordagem híbrida, que combinava TDI com métodos tradicionais de ensino, facilitou a construção coletiva do conhecimento, ao mesmo tempo, em que aumentou a autonomia dos estudantes na exploração dos conceitos geométricos. Dessa forma, a utilização do GeoGebra não apenas ampliou o entendimento dos estudantes, mas também reforçou a ideia de que a tecnologia pode ser um poderoso mediador no processo de ensino e aprendizagem. Esse movimento heteroformativo, mediado pela interação constante entre os estudantes, o professor e a ferramenta digital, favoreceu a troca de saberes e a construção coletiva do conhecimento. A tecnologia, longe de ser uma mera adição, tornou-se um agente central nesse processo, permitindo que os estudantes participassem ativamente da construção de conceitos geométricos e consolidassem seu aprendizado de forma coletivamente interativa.

4.6.2 Análise das contradições autoformativas no sistema de atividades VI

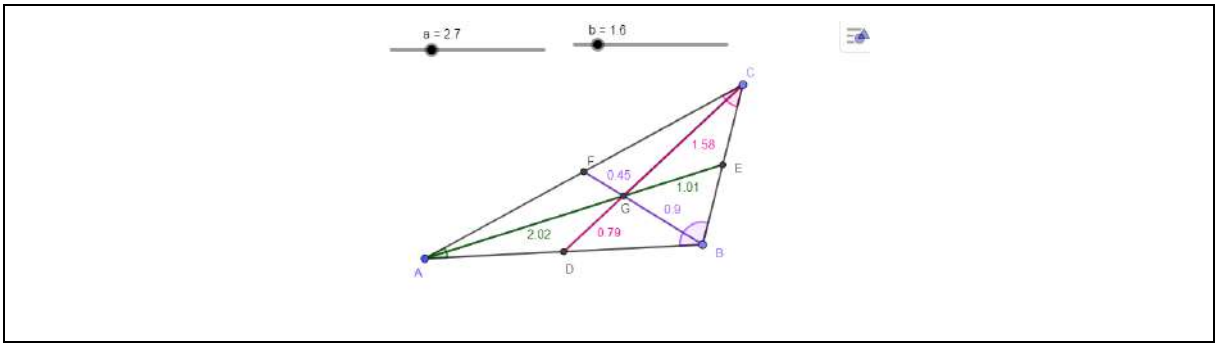
Com a base estabelecida no subtópico anterior, que tratou das dinâmicas heteroformativas e suas tensões e suas tensões, resultando na construção coletiva do conhecimento, a análise agora se volta para os aspectos autoformativas no Sistema de

Atividades VI, fundamentando-se nesse processo tecformativo digital e evidenciando como os estudantes adotaram uma postura mais autônoma e proativa no processo de aprendizagem dos 'Pontos Notáveis do Triângulo'. Assim, nesta parte, discute-se a maneira como os níveis de aprendizagem (Van Hiele, 1986) se manifestaram nas tarefas dos quatro participantes que mais se destacaram durante as interações da sexta semana de aula. Após essa análise, é apresentada a interação geral entre os sistemas envolvidos à luz da contradição quaternária (Engeström, 2016).

A primeira tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 35**. A participante Hend é destacada nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 35 – Tarefa 6.1 (Baricentro)

<table>
<tr><th>Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade</th><th>Pensamento Geométrico – Maturação</th></tr>
<tr><td>1. Utilize a ferramenta "Controle Deslizante" para criar dois controles, chamados a e b, variando seus valores de 0,1 a 1.
2. Use a ferramenta "Segmento Fixo" para construir dois segmentos, AB e BC, com comprimentos a e b, respectivamente.
3. Construa um triângulo qualquer ABC utilizando a ferramenta "Segmento", ligando o ponto A ao ponto C.
a) Para completar essa construção, o que mais é necessário fazer?
4. Movimente os controles deslizantes e ajuste os pontos para formar um triângulo escaleno.
b) O que caracteriza um triângulo escaleno?
5. Meça os três ângulos internos do triângulo para verificar se ele é de fato escaleno, sem exibir os rótulos dos ângulos, para isso use a ferramenta "Relação".
6. No triângulo ABC, trace as medianas.
c) O que são medianas e como são denominadas matematicamente?
7. Use as ferramentas "Ponto Médio" e "Segmento" para traçar as medianas e nomeá-las.
8. Identifique o ponto de interseção das medianas e dê-lhe o nome matemático apropriado, utilizando a ferramenta "Interseção de Dois Objetos".
d) Quantos triângulos são formados quando as medianas são traçadas?
e) Verifique a propriedade das medianas do triângulo e escreva-a simbolicamente:
PROPRIEDADE: As três medianas de um triângulo se interceptam em um único ponto G que divide cada mediana em duas partes, sendo que a parte que contém o vértice é o dobro da outra.
f)Qual o nome de encontro das mediana de um triângulo?</td><td>Transcrição das respostas de Hend:
a) É preciso que os pontos A, B e C não sejam colineares.
b) Que seus lados sejam diferentes e assim como seus ângulos internos.
c) São segmentos que conecta um vértice de um triângulo ao ponto médio do lado oposto. Cada mediana é nomeada com base no vértice de onde se origina, assim, na construção temos AE, BF e CD.
d) 6 triângulos menores.
e) AG=2GE
BG=2GF
CG=2GD
f) As três medianas de um triângulo se encontram em um único ponto, chamado de baricentro</td></tr>
<tr><th colspan="2">Pensamento Geométrico – Construtivo</th></tr>
</table>



Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

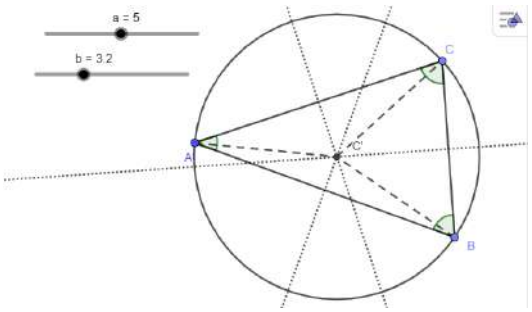
Na análise da Tarefa 6.1, observa-se que, inicialmente, Hend operava no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), reconhecendo visualmente os segmentos e a figura do triângulo, sem realizar uma análise aprofundada de suas propriedades. À medida que avançava, ao construir o triângulo escaleno e discutir suas características, como a não colinearidade dos pontos e a desigualdade dos lados e ângulos, a estudante começou a operar no Nível 1, onde se inicia a análise das propriedades geométricas. O progresso para o Nível 2 torna-se evidente quando ela descreve as medianas do triângulo e sua interseção no baricentro, além de articular a propriedade que estabelece a relação de proporção entre os segmentos das medianas.

O uso dos recursos do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 2 (Dedução Informal), pois permitiu que a estudante explorasse dinamicamente a construção de um triângulo escaleno e suas medianas. Nesta análise, é possível observar que a manipulação dos controles deslizantes e a visualização das medianas em tempo real possibilitaram a dedução intuitiva das propriedades geométricas, como o fato de que as medianas se interceptam em um único ponto, o baricentro, e que esse ponto divide cada mediana em uma proporção específica. Isso facilitou a compreensão e a formulação da propriedade das medianas de maneira informal.

A segunda tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 36**. O participante Ulan é destacado nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 36 – Tarefa 6.2 (Circuncentro)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
1. Complete os cinco primeiros passos da Tarefa 6.1. *2. No triângulo ABC, trace as mediatrizes de cada lado usando a ferramenta "Mediatriz". Ajuste o estilo dessas mediatrizes para um pontuado.* *3. Encontre o ponto de interseção das mediatrizes com a ferramenta "Interseção de Dois Objetos" e nomeie este ponto de C'.* ***a) Qual é o nome desse ponto?*** ***b) Verifique a propriedade a seguir, seguindo cada passo simbolicamente:***	***Transcrição das respostas de Ulan:*** *a) É o circuncentro, por definição.* *b) Ao traçar os segmentos AC', BC' e CC' tem-se que AC'≅ BC'≅CC'.*

PROPRIEDADE: As mediatrizes dos lados de um triângulo se encontram em um ponto C' que está equidistante dos vértices do triângulo. *4. Responda à pergunta acima usando as ferramentas "Segmentos" e "Relação. Ajuste o estilo desses segmentos para um tracejado.* *5. Use a ferramenta "Círculo dado Centro e Um dos Seus Pontos" e selecione o ponto C' como centro e um dos vértices do triângulo como ponto na circunferência.* ***c) O que você observa?*** *5.Verifique se os outros vértices do triângulo estão localizados na circunferência criada, usando a ferramenta "Relação".* ***d) Qual é o nome dessa circunferência?*** ***e) Defina o que é uma ceviana.*** ***f) É possível ter ceviana nessa construção que passe pelo ponto C'? Justifique sua resposta.***	*c) Que foi criada uma circunferência com centro no ponto C' e passa pelos três vértices do triângulo.* *d) Que a circunferência criada é a circunferência circunscrita ao triângulo ABC.* *e) É um segmento de linha que se estende de um vértice de um triângulo até o lado oposto, ou até a extensão do lado oposto.* *f) Sim, basta movimentar ponto do triângulo fazendo com que a mediatriz passe por ele.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	
	

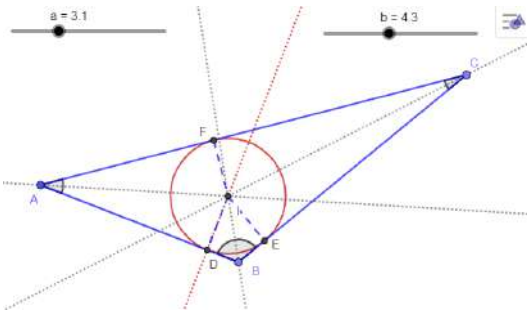
Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Na análise da Tarefa 6.2, observa-se que Ulan, inicialmente, operava no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), reconhecendo visualmente o triângulo e suas partes, sem explorar profundamente suas propriedades. Ele avança para o Nível 1 ao começar a analisar informalmente as mediatrizes e a definição do circuncentro, identificando-o como o ponto equidistante dos vértices do triângulo. Ao progredir para o Nível 2, Ulan estabelece relações mais abstratas, como a definição da circunferência circunscrita e da ceviana. A capacidade de reconhecer que as mediatrizes sempre se encontram no circuncentro, equidistante dos vértices, indica um raciocínio mais dedutivo e estruturado, sinalizando um progresso significativo no pensamento geométrico.

O uso dos recursos do ggb-CB facilitou a transição para o Nível 2 (Dedução Informal) ao permitir que o estudante visualizasse a construção das mediatrizes e a interseção delas no ponto *C'*, que é o circuncentro. Nesta análise, é possível notar que a ferramenta possibilitou a verificação empírica da propriedade de que as mediatrizes são equidistantes dos vértices do triângulo. Em decorrência disso, a manipulação dinâmica e a visualização da circunferência circunscrita contribuíram para a dedução informal, confirmando a equidistância e a relação entre o circuncentro e os vértices do triângulo.

A terceira tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 37**, com o tema incentro. O participante Théo é destacado nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 37 – Tarefa 6.3 (Incentro)

<table>
<tr><th>Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade</th><th>Pensamento Geométrico – Maturação</th></tr>
<tr><td>1. Complete os cinco primeiros passos da Tarefa 6.1.
2. No triângulo ABC, trace as bissetrizes de cada ângulo usando a ferramenta “Bissetriz”. Ajuste o estilo dessas bissetrizes para um pontuado.
3. Encontre o ponto de interseção das bissetrizes com a ferramenta “Interseção de Dois Objetos” e nomeie este ponto como I.
a) Qual é o nome desse ponto?
4. Trace uma reta perpendicular aos lados do triângulo a partir do ponto I e encontre o ponto de interseção entre essas retas usando as ferramentas “Reta Perpendicular” e “Interseção de Dois Objetos”. Ajuste o estilo dessa reta para um pontuado de cor vermelha.
5. Use a ferramenta “Círculo dado Centro e Um dos Seus Pontos” e selecione o ponto I como centro e o ponto encontrado no item anterior como ponto na circunferência.
b) O que você observa?
c) Qual é o nome dessa circunferência?
6. Encontre os pontos de interseção dessa circunferência com os lados do triângulo usando a ferramenta “Interseção de Dois Objetos”.
d) Quais pontos você encontrou além do que já tinha? É possível encontrar mais pontos? Por quê?
7. Conecte os pontos encontrados ao ponto I, usando a ferramenta “Segmentos”.
e) Verifique a propriedade a seguir, seguindo cada passo simbolicamente: Propriedade: As três bissetrizes de um triângulo se encontram em um ponto que está a igual distância dos lados do triângulo.
8. Use as ferramentas “Segmentos” e “Relação” para verificar a propriedade mencionada e ajuste o estilo desses segmentos para um tracejado.
f) Qual é o nome dado a esses segmentos?</td><td>Transcrição das respostas de Théo:
a) Esse ponto onde todas as bissetrizes se encontram é o incentro.
b) que foi criada uma circunferência dentro triângulo ABC.
c) Essa circunferência é a circunferência inscrita.
d) Encontrei um ponto para cada lado, totalizando três pontos comuns entre a circunferência e o triângulo ABC. Não é possível ter mais pontos ou menos pontos que essa quantidade, pois a circunferência inscrita toca cada lado do triângulo exatamente uma vez.
e) Traçando os segmentos dos vértices do triângulo ao ponto I, vamos ter que AI, BI e IC são congruentes.
f) Esses segmentos são os raios da circunferência inscrita no triângulo ABC.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Pensamento Geométrico – Construtivo</th></tr>
<tr><td colspan="2"> 
</td></tr>
</table>

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Na análise da Tarefa 6.3, infere-se que, inicialmente, Théo operava no Nível 0 do modelo de van Hiele (1986), reconhecendo a figura do triângulo e suas partes sem se aprofundar nas propriedades. Ao traçar as bissetrizes e identificar o incentro, o estudante avançou para o

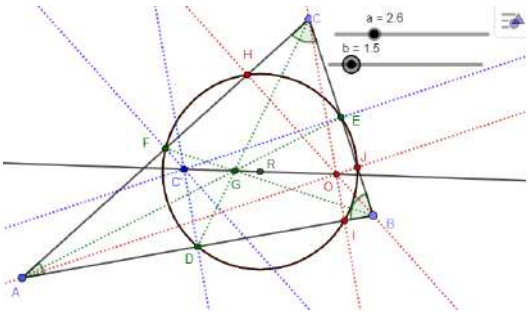
Nível 1, onde começou a discernir informalmente as propriedades geométricas, como a equidistância do incentro em relação aos lados do triângulo. Ao descrever que os segmentos que ligam o incentro aos lados são os raios da circunferência inscrita, Théo demonstrou progresso para o Nível 2, articulando as relações geométricas de forma mais estruturada.

O uso dos recursos do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 2 (Dedução Informal) ao permitir a exploração visual das propriedades geométricas das bissetrizes e do incentro. Nesta análise, é possível notar que as ferramentas de construção dinâmica possibilitaram ao estudante verificar a equidistância do incentro em relação aos lados do triângulo, além de compreender intuitivamente a formação da circunferência inscrita. A medição dos segmentos e a interatividade com a construção fortaleceram a dedução informal das propriedades dos raios da circunferência, facilitando a compreensão das relações geométricas envolvidas.

A terceira tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 38**, com o tema circunferência de Euler. O participante Aden é destacado nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 38 – Tarefa 6.4 (Circunferência de Euler)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
1. Complete os cinco primeiros passos da Tarefa 6.1. *2. No triângulo ABC, trace as medianas, usando as ferramentas "Ponto Médio ou Centro" e "Segmentos", nomeie este ponto de G. Ajuste o estilo dessas medianas para um pontuado, cor verde, deixe esses quatros pontos dessa cor também.* *3. No triângulo ABC, trace também as mediatrizes de cada lado usando a ferramenta "Mediatriz". Ajuste o estilo dessas mediatrizes para um pontuado de cor azul.* *4. Encontre o ponto de interseção das mediatrizes com a ferramenta "Interseção de Dois Objetos" e nomeie este ponto de C'.* *5. Ainda no triângulo ABC, trace as alturas de cada lado usando a ferramenta "Reta Perpendicular". Ajuste o estilo dessas mediatrizes para um pontuado de cor vermelha.* *6. Encontre o ponto de interseção dessas alturas com a ferramenta "Interseção de Dois Objetos" e nomeie este ponto de O. Ajuste a cor azul desses pontos para cor vermelha.* ***a) Qual é o nome desse ponto?*** ***b) Você consegue traçar uma reta que passe por esses três pontos?*** *7.Verifique se o terceiro ponto pertence a reta criada, usando a ferramenta "Relação".* ***c) Como é o nome da reta que satisfaz essa propriedade?*** *8. Nessa reta citada, encontre o ponto de médio entre o ponto O e o circuncentro usando a ferramenta "Ponto Médio ou Centro" e nomeie este ponto de R.* *9. Desenhe a circunferências que passa pelos pontos médios, na cor verde, usando a ferramenta "Círculo definido por Três Pontos".* *11. De forma análoga, desenhe a circunferência que passa pelos pontos de interseção entre o triângulo ABC e as alturas, na cor vermelha. Para isso mova os pontos do triângulo para que o ponto O fique dentro dele.*	***Transcrição das respostas de Aden:*** *a) Esse é o ponto onde as alturas se encontram, chamado de ortocentro.* *b) Sim.* *c) Reta de Euler.* *d) Que as três circunferências são idênticas, tem o mesmo raio e mesma origem.* *e) Ela é conhecida também como circunferência de Euler, ou dos 7 pontos ou 9 pontos.* *f) Encontrei 6 pontos..*

10. Desenhe agora a circunferência que tem origem em R e ponto em desses citados no passo acima. ***d) Qual conclusão você tem sobre essas circunferências?*** ***e) Qual o nome dessa circunferências?*** ***f) Quantos pontos você achou na interseção dessa circunferência e o triângulo ABC?***	
Pensamento Geométrico – Construtivo	
	

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

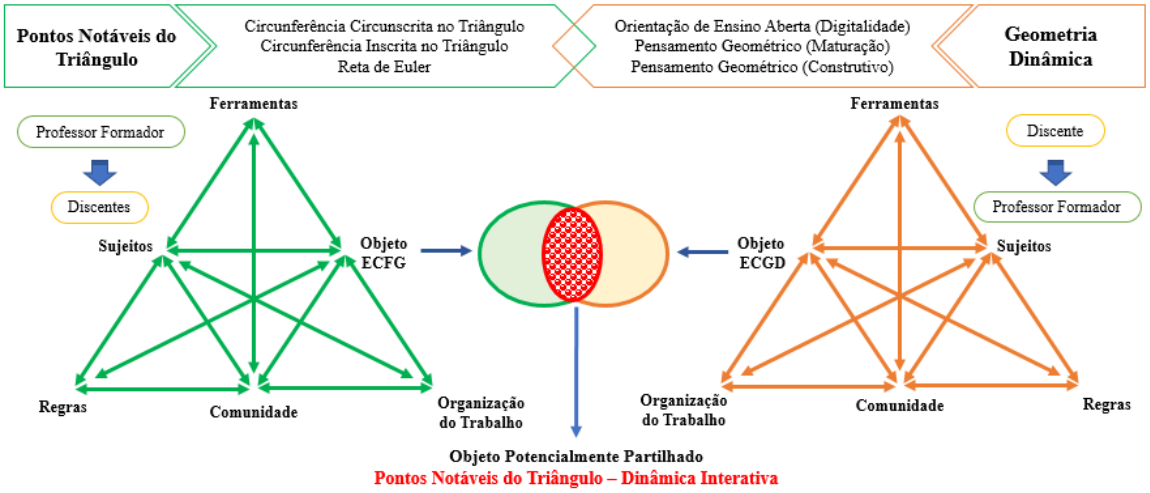
Na análise da Tarefa 6.4, observa-se que, inicialmente, Aden estava no Nível 0 do modelo de van Hiele (1986), reconhecendo visualmente as figuras e suas propriedades. Ao prosseguir com a tarefa, ao traçar a reta que passa pelos pontos de interseção das medianas (baricentro), mediatrizes (circuncentro) e alturas (ortocentro), Aden começou a analisar informalmente os atributos e propriedades desses objetos geométricos. Essa transição marca seu avanço para o Nível 1. O estudante avança para o Nível 2 ao refletir sobre as propriedades da circunferência de Euler, observando que as circunferências desenhadas são idênticas, com o mesmo raio e a mesma origem, e que essa circunferência é conhecida como circunferência de Euler.

O uso dos recursos do ggb-CB facilitou a transição para o Nível 2 (Dedução Informal) ao possibilitar a construção dinâmica e a visualização de múltiplas propriedades geométricas, como medianas, mediatrizes e alturas de um triângulo. Nesta análise, é possível notar que a interatividade com as construções e a verificação das interseções dos pontos-chave, como ortocentro e circuncentro, permitiram ao estudante deduzir informalmente a existência da reta de Euler e das circunferências associadas. Essa abordagem visual e exploratória contribuiu para a confirmação de conceitos como a equidistância dos pontos e a simetria presente nas circunferências de Euler.

As quatro tarefas analisadas evidenciam, por meio da interação entre o ECFG e a ECGD, a criação de um objeto potencialmente partilhado, conforme descrito na quarta contradição de Engeström (2016). Nesse contexto, o objeto partilhado foi a compreensão dinâmica interativa

dos ‘Pontos Notáveis do Triângulo’, com foco na maturação do pensamento geométrico dos estudantes (**Esquema 30**).

Esquema 30 – Pontos Notáveis do Triângulo – Dinâmica Interativa



Fonte: Pesquisador (2024).

No sistema ECFG, o professor formador desempenhou um papel mais ativo e estruturado, apresentando de forma sequencial os conceitos relacionados à circunferência circunscrita e à circunferência inscrita no triângulo, assim como à reta de Euler. O objetivo desse sistema foi ensinar os ‘Pontos Notáveis do Triângulo’, incentivando os estudantes a investigar suas aplicações por meio de atividades práticas, como a construção de pontos, bissetrizes, circunferências e outros objetos geométricos. Para isso, o professor realizava revisões teóricas do capítulo VIII do volume 9, proporcionando aos estudantes uma compreensão formal dos conhecimentos curriculares abordados.

Simultaneamente, no sistema ECDG, os estudantes assumiram um papel proativo em seu processo de aprendizagem. Nesse ambiente, tiveram a oportunidade de explorar os conceitos de forma prática e interativa, manipulando objetos geométricos em um espaço digital dinâmico. Esse contexto favoreceu o desenvolvimento de habilidades digitais, com ênfase na prática voltada para a certificação da configuração geométrica elementar por meio da ferramenta “Relação”. Por outro lado, o professor atuou como mediador, oferecendo suporte e *feedback online*, garantindo que a exploração dos estudantes fosse acompanhada e direcionada para a compreensão dos ‘Pontos Notáveis do Triângulo’.

O uso dos recursos do ggb-CB nesse sistema proporcionou uma experiência de aprendizagem mais interativa, na qual os estudantes puderam verificar algumas relações geométricas. Essa abordagem favoreceu a maturação do pensamento geométrico, permitindo a

compreensão de conceitos abstratos e complexos relacionados aos ‘Pontos Notáveis do Triângulo’, além de contribuir para uma construção mais sólida e dinâmica desse conhecimento. As TDI, portanto, atuaram como mediadoras, potencializando o aprendizado ao criar um ambiente onde os estudantes puderam explorar, testar e validar suas hipóteses em tempo real. Como aponta Kenski (2015b), as TD, “[...] quando adequadamente integradas ao ensino, ampliam a capacidade dos educandos de aprender de forma mais autônoma”, promovendo a experimentação e a descoberta por meio da interação e reflexão contínuas.

As operações realizadas nesse sistema envolveram personalizações na visualização, medições dos objetos, identificações, implantações e conexões de elementos, conformidações da estrutura, além de construções geométricas com diversas possibilidades de manipulação. Essas operações estão em consonância com a TA de Leontiev (2018), pois são compostas por ações que, uma vez dominadas, se tornam automáticas, sendo executadas sem a necessidade de atenção consciente. Neste contexto, o objetivo foi aferir as semelhanças e diferenças entre os elementos. Ao utilizar as ferramentas digitais para interagir com os ‘Pontos Notáveis do Triângulo’, os estudantes não apenas absorveram o conteúdo curricular, mas também o construíram ativamente por meio de uma prática dinâmica e interativa, consolidando o aprendizado por meio da experiência híbrida.

Na AOEA desta semana, observou-se a presença da autoformação, conforme proposto por Pineau (2023), que considera a autoformação um processo fundamental para o desenvolvimento integral do indivíduo. Nesse contexto, os estudantes foram incentivados a explorar ativamente o conhecimento, assumindo um papel de protagonismo na construção de seu saber. Ao manipular e investigar os ‘Pontos Notáveis do Triângulo’ de forma interativa, os estudantes desenvolveram habilidades reflexivas e aumentaram sua independência intelectual. Esse processo permitiu que aprimorassem a capacidade de buscar soluções para problemas geométricos, ampliando sua competência para aplicar deduções e raciocínios em diferentes contextos.

Nesse cenário, o avanço dos estudantes pelos diferentes níveis de pensamento geométrico, conforme o modelo de Van Hiele (1986), foi favorecido e potencializado pelo uso do ggb-CB nesta proposta híbrida de ensino. Esse processo formativo possibilitou a construção dinâmica e interativa dos objetos geométricos, promovendo um aprendizado mais intuitivo e visual. Como resultado, ficou evidente que, nas tarefas 6.1 (Baricentro), 6.2 (Circuncentro), 6.3 (Incentro) e 6.4 (Circunferência de Euler), os estudantes Hend, Ulan, Théo e Aden, respectivamente, demonstraram avanços significativos no Nível 2 de aprendizagem. Esse

progresso reflete uma mudança importante no nível de compreensão dos conceitos geométricos, transitando da percepção mais simples para uma compreensão abstrata das relações e inter-relações envolvidas, por meio de deduções informais.

Dessa forma, a integração dos dois sistemas (ECFG e ECGD) resultou na criação do objeto partilhado mencionado anteriormente. Assim, nesse processo de ensino, realizado nesta proposta híbrida, fundamentada nas ideias de autoformação, no uso de TDI e na TA, foi decisiva para o avanço na compreensão dos estudantes sobre os 'Pontos Notáveis do Triângulo'. Ao incentivar uma aprendizagem ativa e reflexiva, essas abordagens integradas possibilitaram uma construção de conhecimento mais profunda, dinâmica e autônoma, permitindo que os estudantes desenvolvessem suas habilidades geométricas de forma engajada.

4.7 Explorando os Polígonos

Na sétima semana, as aulas foram estruturadas para explorar os 'Polígonos', com o objetivo de promover uma compreensão dinâmica sobre esse conteúdo curricular. Nesse cenário híbrido de ensino, as ações pedagógicas envolveram a construção e a exploração do objeto de estudo, bem como a investigação, identificação e aplicação prática dos diferentes tipos de polígonos, da área poligonal e dos elementos poligonais. Além disso, houve interação discursiva sobre as aplicabilidades discutidas.

Para isso, foi necessário expandir o repertório operacional dos estudantes por meio de tarefas teóricas e práticas. A aplicação das AOEA foi essencial nesse processo, pois forneceu diretrizes para a criação, manipulação e personalização de pontos, segmentos, polígonos e outros objetos geométricos. Essas atividades foram planejadas para alcançar as metas Ciade, aproximando a turma dos recursos tecnológicos adotados, especialmente no incentivo à cultura digital com a utilização da ferramenta "Polígono Regular".

O **Quadro 39**, apresentado a seguir, ilustra a estrutura e a organização dessa abordagem no contexto do ensino aplicado nesta sétima semana.

Quadro 39 – Planejamento da sétima semana de aula

Artefatos
Computador e *Smartphone*.
GeoGebra: Plataforma; *Classroom Beta*; *Classic*; Geometria.
Ferramentas Específicas: Mover; Interseção de Dois Objetos; Reta; Segmento; Segmento com Comprimento Fixo; Reta Paralela; Polígono; Polígono Regular; Polígono Rígido; Polígono Semideformável; Ângulo; Distância, Comprimento ou Perímetro; Área; Controle Deslizante; Texto.

<table>
<tr><td colspan="4">Comandos: ÂngulosInternos(...); Ângulo(...); Concatenar(...); Elementar(...); Girar(...); Polígono(...); RemoverIndefinidos(...); Sequência(...).
Livro: Fundamentos de Matemática Elementar 9: geometria plana (Cap. IX, XVI e XIX).</td></tr>
<tr><td>Objeto
Polígonos</td><td>Motivo
Necessidade de promover a compreensão dinâmica dos conceitos relacionados aos Polígonos.</td><td colspan="2">Ação
❖ Construção e exploração dos Polígonos de modo dinâmico;
❖ Investigação, identificação e aplicação dos conceitos relacionados aos tipos de polígono, área e elementos poligonais;
❖ Interação discursiva das aplicabilidades abordadas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Operações
Comparações: aferir semelhanças e diferenças dos elementos;
Personalizações: configurar, renomear, exibir/ocultar, etc.;
Conformidações: preservar as subsistências das estruturas;
Construções: produzir pontos, segmentos, polígonos, etc.;
Medições: medir comprimentos e amplitudes angulares;
Inquietações: expor dúvidas subjetivas e/ou coletivas;
Interlocuções: participar das discussões construtivas;
Identificações: localizar as interseções dos objetos;
Programações: programar comandos de construção;
Explorações: testar os recursos do GeoGebra;
Revisões: revisar os conteúdos curriculares;
Implantações: inserir elementos adaptáveis;
Apurações: calcular áreas das figuras;
Interações: interagir com as AOEA;
Administrações: gerenciar conta;
Aplicações: resolver problemas;
Conexões: conectar elementos;
Manipulações: mover objetos.</td><td colspan="2">Metas
➢ Construir pontos, segmentos, polígonos, etc. para explorar os Polígonos com a mediação tecnológica das ferramentas e comandos do GeoGebra;
❖ Investigar e aplicar os conceitos relacionados aos tipos do polígono, área poligonal e elementos poligonais;
➢ Desenvolver habilidades práticas de consistência bilateral interativa da estrutura geométrica com uso da ferramenta polígono regular;
➢ Estimular discussões e reflexões sobre abordagens teóricas e práticas relacionadas ao objeto de estudo.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Condições
Ambiente de ensino híbrido com suporte contínuo da equipe docente para auxiliar na aprendizagem dos Polígonos durante as atividades presenciais, oferecendo orientações e estímulos personalizados durante as observações online a distância.</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisador (2024).

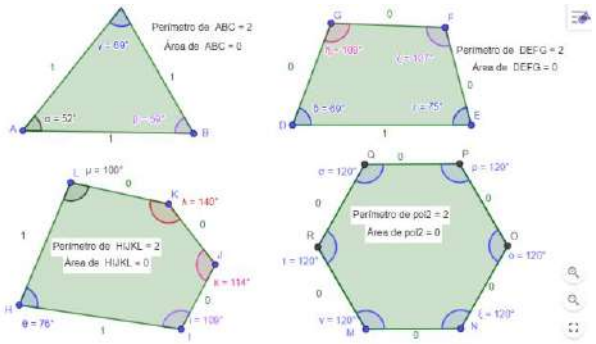
Na sétima semana de aula, teve início a II Unidade do curso, na qual foram abordados de forma detalhada os conceitos fundamentais dos ‘Polígonos’. Um aspecto significativo dessa aula foi a introdução de comandos para criar construções geométricas de maneira dinâmica, o que ampliou as habilidades tecnológicas dos estudantes e ofereceu novas formas práticas de interagir com os conceitos geométricos.

O professor formador iniciou a aula com uma explicação sobre as diferentes formas de linhas que delimitam regiões no plano. Ele apresentou o conceito de linhas poligonais fechadas, também conhecidas como curvas poligonais fechadas simples, que formam polígonos. Em contraste, as linhas não poligonais fechadas podem criar curvas suaves ou complexas. Para ilustrar esses conceitos, o professor explicou que, de acordo com o Teorema de Jordan, uma curva fechada simples divide o plano em duas regiões distintas: uma região limitada, que está dentro da curva, e uma região ilimitada, que se encontra fora dela.

A fronteira comum entre essas duas regiões é a própria curva. O professor responsável pela formação detalhou que a definição de curva simples não está relacionada à complexidade do traçado, mas sim ao fato de ser uma linha contínua que retorna ao ponto inicial sem cruzamentos. De forma complementar, ele esclareceu que, com a introdução da ferramenta polígono, é possível construir uma região triangular, ressaltando que essa região é composta por todos os pontos no plano que estão contidos nos segmentos que conectam os vértices de um triângulo. Assim, o triângulo define a fronteira da região triangular, enquanto todos os demais pontos dentro dessa borda são considerados pontos interiores. Ele também acrescentou que uma região poligonal é uma figura plana que pode ser representada como a união de um número finito de regiões triangulares, nas quais cada par de regiões triangulares não compartilha pontos interiores.

Com esses conceitos em mente, o professor formador introduziu a construção prática no GeoGebra. Em decorrência disso, ele construiu quatro tipos de polígonos: um triângulo ΔABC (representado visualmente com a identificação dos pontos *A* e *B*), um quadrado *DEFG*, um pentágono *HIJKL* e um hexágono *MNOPQR* (denominado geogebricamente como *pol2*). Para isso, utilizou a mediação tecnológica das ferramentas “Polígono Rígido”, “Polígono Semideformável”, “Polígono Regular”, “Polígono”, “Ângulo”, “Distância, Comprimento ou Perímetro” e “Área”, além da ferramenta “Mover”. Demonstrou que, ao clicar sobre esses objetos geométricos bidimensionais, é possível realizar translações. Em seguida, calculou sequencialmente os ângulos internos, o comprimento dos lados, o perímetro e a área de cada polígono criado, conforme ilustrado na **Figura 20**.

Figura 20 – Construção de polígonos



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/gbwpb6yh. Acesso em: 14 ago. 2024.

Na segunda etapa da aula, o professor formador também demonstrou a classificação dos polígonos com base na quantidade de lados, utilizando a mediação tecnológica das ferramentas

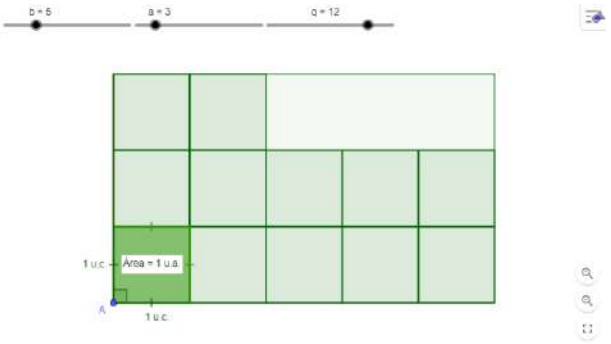
“Polígono Regular” e “Controle Deslizante”. Ele criou diferentes tipos de polígonos para ilustrar a variação no número de lados. Em seguida, apresentou a definição formal de área para uma região delimitada por uma ou várias curvas, destacando que a área de uma região é um número real positivo que satisfaz algumas condições específicas. Por exemplo, se duas regiões são congruentes, elas possuem a mesma área. Além disso, se duas regiões se intersectam apenas na fronteira, a área da união dessas regiões é a soma das áreas individuais. Em razão disso, enfatizou que a noção de área para regiões poligonais é introduzida na Geometria por meio de axiomas específicos.

O professor também explicou que a área de um quadrado com lado de comprimento 1 unidade é igual a 1 unidade de área (*u.a.*) e que a área de uma figura é sempre maior do que a área de qualquer figura contida em seu interior. Ele abordou a propriedade aditiva da área, demonstrando que a área total de uma figura complexa pode ser obtida ao decompô-la em figuras mais simples e somar suas áreas parciais.

Para consolidar esses conceitos, o professor utilizou o GeoGebra para realizar uma demonstração prática. Primeiramente, ele traçou um polígono e mostrou como calcular sua área diretamente, utilizando as ferramentas dessa TD, que são ilustradas por ícones, além de aplicar comandos específicos que exigem o uso correto da sintaxe de programação. Com a mediação das potencialidades tecnológicas do GeoGebra, ele utilizou os comandos “Sequência(...)”, “Polígono(...)” e “Concatenar(...)”, explicando como decompor figuras complexas em formas mais simples, calcular as áreas dessas formas e somar os resultados para obter a área total.

Esses processos estão ilustrados na **Figura 21**, que demonstra a criação de um retângulo preenchido com quadrados, conforme a quantidade especificada pelo controle deslizante.

Figura 21 – Demonstração intuitiva da área do retângulo



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/ywnkpyvm. Acesso em: 14 ago. 2024.

Em decorrência disto, o professor formador explicou que, para encontrar a área de um retângulo, basta multiplicar a medida da base pela altura ($b \times a$). Ele ainda enfatizou que esse método é aplicável a qualquer retângulo, independentemente de suas dimensões. Além disso, como todo quadrado é um caso específico de retângulo em que a base e a altura são congruentes (ou seja, têm o mesmo comprimento), a fórmula para calcular a área de um quadrado é uma particularização da fórmula do retângulo.

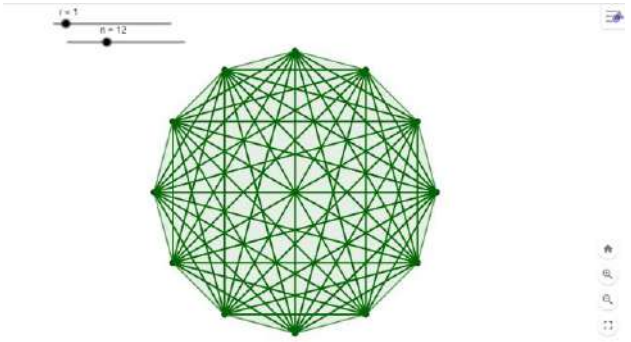
Consequentemente, o professor formador explicou que a área de um quadrado pode ser calculada elevando a medida do lado ao quadrado. Nesse momento, ele indicou que, ao utilizarmos l para representar o comprimento do lado do quadrado, a fórmula para a área é l^2. De forma complementar, ressaltou que, no GeoGebra, é comum empregar uma unidade padrão para medir áreas. Contudo, em atividades contextualizadas e aplicadas, é habitual utilizar o metro quadrado e seus múltiplos ou submúltiplos para executar essas medições em contextos específicos.

Na terceira etapa da aula, o professor formador abordou a definição e o teorema sobre as diagonais de um polígono. Ele explicou que uma diagonal de um polígono é um segmento de linha que conecta dois vértices não adjacentes. Nesse momento, ressaltou que um triângulo não possui diagonais, uma vez que todos os seus vértices são adjacentes. Assim, o teorema apresentado por ele afirma que um polígono com n lados possui um número de diagonais dado por $n(n - 3)/2$. O raciocínio é o seguinte: cada vértice de um polígono possui $(n - 3)$ vértices que não são adjacentes a ele, resultando em um total de n vezes $(n - 3)$ diagonais contabilizadas. Como cada diagonal é contada duas vezes (uma vez para cada vértice), o número real de diagonais é obtido dividindo esse total por dois.

Para demonstrar esses conceitos de forma prática e dinâmica, o professor formador, com a mediação das potencialidades tecnológicas do GeoGebra, gerou primeiramente uma lista de pontos utilizando a combinação dos comandos “Sequência(...)” e “Girar(...)”. Em seguida, empregou os comandos “Concatenar(...)”, “Elemento(...)”, “RemoverIndefinidos(...)”, “Segmento(...)” e “Polígono(...)”, combinando-os de maneira estratégica para calcular todas as diagonais possíveis entre os vértices.

Na **Figura 22**, é possível observar a aplicação dessa abordagem, na qual os estudantes puderam manipular o número de lados e observar a geração automática de diagonais, o que facilitou a internalização do teorema.

Figura 22 – Triângulos que geram trapézios



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/atdwksqj. Acesso em: 14 ago. 2024.

Depois, o professor formador abordou a definição e o teorema sobre a soma dos ângulos internos de um polígono. Ele explicou que a soma dos ângulos internos de um polígono é a soma dos ângulos formados por todos os vértices do polígono. Para um polígono com *n* lados, a soma dos ângulos internos pode ser calculada pela fórmula $(n - 2) \times 180°$. O raciocínio é o seguinte: um polígono com *n* lados pode ser dividido em (*n – 2*) triângulos, e cada triângulo possui uma soma de ângulos internos igual a 180°. Assim, multiplicando o número de triângulos por 180°, obtemos a soma total dos ângulos internos do polígono. Ele também explicou que, para visualizar e verificar os ângulos internos no GeoGebra, é possível utilizar a mediação tecnológica dos comandos "ÂngulosInternos(...)" e "Ângulo(...)". Esses comandos mostram os ângulos internos do polígono criado, substituindo o nome entre parênteses pelo nome do polígono definido inicialmente.

Em suma, esta sétima semana de aula representa o Sistema de Atividades VII, no qual foram explorados os conhecimentos curriculares relacionados aos 'Polígonos', conforme as abordagens realizadas pelo professor formador. No entanto, durante esse processo, caracterizado pela pluralidade e multivocalidade, foram observadas algumas tensões e inquietações, que serão analisadas no próximo subtópico.

4.7.1 Análise das contradições heteroformativas no sistema de atividades VII

A análise das interações na aula do Sistema de Atividades VII, fundamentada nas contradições primária, secundária e terciária de Engeström (2016), revelou as tensões e as possibilidades de aprendizagem que emergiram enquanto os estudantes se dedicavam tanto à construção de pontos, segmentos, polígonos e outros objetos geométricos no ggb-CB, quanto à

exploração dos conhecimentos curriculares relacionados aos ‘Polígonos’, tema abordado pelo professor formador.

A contradição primária de Engeström (2016) surgiu da tensão entre o valor de uso e o valor de troca no aprendizado dos conceitos de ‘Polígonos’ por meio do GeoGebra. Um exemplo dessa tensão ocorreu quando Hend teve dificuldade em perceber a diferença entre a funcionalidade de traçar o caminho poligonal e a forma poligonal em si. No contexto do GeoGebra, o caminho poligonal é uma sequência de segmentos conectados que o usuário manipula, enquanto o polígono é a figura fechada formada por esses segmentos. No entanto, essa distinção nem sempre foi intuitiva para os estudantes, uma vez que ambos começam e terminam no mesmo ponto, resultando na mesma descrição algébrica.

Esse momento se revelou heteroformativo, uma vez que o conhecimento de Hend sobre essa distinção emergiu da interação com o professor e os colegas. Essa colaboração foi fundamental para esclarecer a diferença entre o uso da ferramenta (traçar o caminho poligonal) e a compreensão do polígono como uma figura geométrica completa. Nesse ambiente cooperativo, a troca de experiências foi essencial para superar a tensão entre o valor de uso (a manipulação do caminho poligonal) e o valor de troca (a compreensão geométrica da figura do polígono). A resolução dessa tensão ocorreu por meio da integração entre teoria e prática, mediada pela interação com a ferramenta digital e pelo apoio coletivo.

Assim, Hend conseguiu perceber que, embora o GeoGebra facilitasse a visualização e a manipulação do caminho poligonal, a compreensão do conceito de polígono como uma entidade geométrica fechada também dependia da reflexão geométrica sobre o objeto. A aprendizagem se consolidou por meio da exploração prática e do apoio do grupo, promovendo uma compreensão mais completa e precisa do conteúdo. Como resultado, pode-se deduzir que a heteroformação já estava ocorrendo durante a interação do grupo, conforme proposto por Macedo (2010).

Foi possível observar que a contradição secundária proposta por Engeström (2016) manifestou-se na relação entre os componentes do sistema de atividade, como as ferramentas do GeoGebra e os objetivos da aula. Théo, por exemplo, expressou dificuldade em entender o comando “Sequência” para preencher o retângulo com quadrados. A explicação do professor e o uso da ferramenta ilustraram como o comando gerava uma matriz de quadrados, facilitando a visualização e a compreensão do processo. Nesse momento, a internalização do conhecimento, segundo Vygotsky (2019), ocorreu à medida que Théo, por meio da mediação da tecnologia e da orientação do professor, conseguiu transformar esse conhecimento externo em algo

compreensível e aplicável. A interação entre a ferramenta, o professor e o estudante possibilitou a internalização de conceitos abstratos de forma prática e visual.

Outro exemplo dessa tensão surgiu com a ferramenta “Polígono Regular”, quando os estudantes perceberam suas vantagens e questionaram por que ela não havia sido utilizada anteriormente. O professor, então, explicou que o uso dessa ferramenta havia sido deliberadamente adiado para permitir uma compreensão mais profunda dos conceitos anteriores, reforçando a ideia de que a exploração de recursos digitais deve ser planejada de acordo com o desenvolvimento progressivo da aprendizagem.

A contradição terciária de Engeström (2016) manifestou-se com a introdução do GeoGebra no processo de ensino, desafiando os métodos tradicionais de construção geométrica. Isso se refletiu na interação entre Hend e Elen, que enfrentaram dificuldades em relação à quantidade de comandos necessários para a construção de polígonos e diagonais. A dinâmica das ferramentas do GeoGebra, que possibilitavam a visualização interativa das propriedades dos polígonos, como o cálculo da área e a construção das diagonais, entrou em conflito com o modo tradicional de ensino, que se baseia em cálculos manuais e abordagens estáticas.

Isso está alinhado com a teoria da inteligência coletiva de Lévy (2003), pois o professor e os estudantes colaboraram ativamente na exploração desses novos recursos, compartilhando observações e compreendendo como cada comando poderia ser manipulado para gerar diferentes resultados. Essa dinâmica transformou o ambiente de aprendizagem em um espaço colaborativo, onde o conhecimento foi produzido e compartilhado coletivamente, promovendo uma nova forma de interação e aprendizado.

A resolução dessas contradições insere-se nesse modelo de ensino híbrido (Horn; Staker, 2015), no qual a tecnologia complementa o ensino convencional, promovendo uma aprendizagem mais ativa e visual. O uso do GeoGebra possibilitou que os estudantes manipulassem conceitos de área, diagonais e elementos dos polígonos de forma interativa, enquanto o professor mediava e ajustava as construções. Esse movimento heteroformativo, fundamentado na interação entre professor, turma e ferramentas digitais, favoreceu a construção coletiva do conhecimento, indo além da aprendizagem individual e estimulando a troca constante de ideias. Assim, a integração da mediação docente com recursos tecnológicos não apenas facilitou a compreensão dos conceitos geométricos, mas também promoveu a autonomia dos estudantes na exploração e descoberta, reafirmando o valor do ensino cooperativo em ambientes educacionais mediados pela TDI.

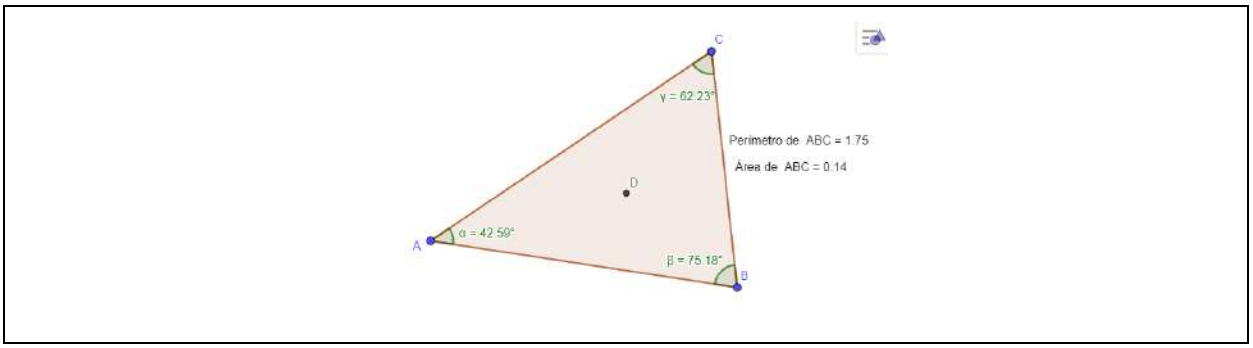
4.7.2 Análise das contradições autoformativas no sistema de atividades VII

Com a base estabelecida no subtópico anterior, que tratou das dinâmicas heteroformativas e suas tensões, resultando na construção coletiva do conhecimento, a análise agora se volta para os aspectos autoformativas no Sistema de Atividades VII, fundamentando-se nesse processo tecformativo digital e evidenciando como os estudantes adotaram uma postura mais autônoma e proativa no processo de aprendizagem dos 'Polígonos'. Em decorrência disso, nesta parte, discute-se a maneira como os níveis de aprendizagem (Van Hiele, 1986) se manifestaram nas tarefas dos quatro participantes que mais se destacaram durante as interações da sétima semana de aula. Após essa análise, é apresentada a interação geral entre os sistemas envolvidos à luz da contradição quaternária (Engeström, 2016).

A primeira tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 40**. A participante Hend é destacada nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 40 – Tarefa 7.1 (Área e Perímetro do Triângulo)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
1. Utilize a ferramenta "Polígono" para desenhar um ∆ABC. ***a) O que você observa sobre o triângulo construído?*** *2. Usando a ferramenta "Ângulo" clique na região interna do triângulo.* ***b) O que aparece quando você faz isso?*** *3. Usando a ferramenta "Ponto Médio ou Centro" clique novamente na região interna do triângulo.* ***c) O que esse ponto representa em relação ao triângulo?*** *4. Usando a ferramenta "Distância, Comprimento ou Perímetro" clique novamente na região interna do triângulo.* ***d) O que aparece quando você faz isso?*** *5. Utilize a ferramenta "Área" para calcular a área do ∆ABC.* ***e) Na sua opinião, qual é a principal vantagem de utilizar a ferramenta "Polígono" em comparação com as outras ferramentas que você usou?*** ***f) Como ela contribui para a compreensão das propriedades do triângulo?***	***Transcrição das respostas de Hend:*** *a) Eu observei que foi criando um triângulo com uma região interna pintada de rosa.* *b) Apareceu os três ângulos de uma vez só, com nome e valores e cor verde.* *c) Esse ponto representa o baricentro desse triângulo, pois a ferramenta tem função centro também.* *d) A ferramenta mostrou o perímetro do triângulo.* *e) A principal vantagem da ferramenta "Polígono" é sua capacidade de criar e definir a forma básica da figura geométrica, estabelecendo a estrutura que queremos criar de forma rápida.* *f) Ela adianta sua construção, possibilitando encontrar seus elementos de forma rápida.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	



Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

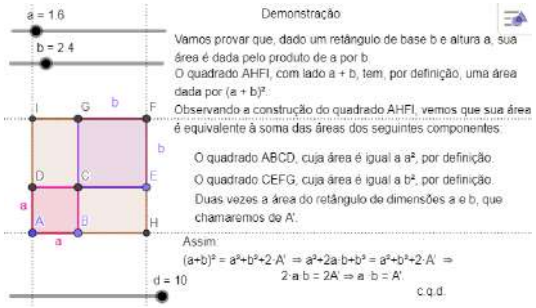
Na análise da Tarefa 7.1, observa-se que, inicialmente, a estudante operou no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), onde o foco estava no reconhecimento visual do triângulo, observando a construção com a área preenchida. Ao avançar, ao medir os ângulos e identificar o baricentro, a estudante progrediu para o Nível 1, começando a analisar os atributos e características do triângulo, reconhecendo suas propriedades geométricas. A capacidade de Hend de reconhecer as vantagens da ferramenta "Polígono" e como ela contribui para a compreensão das propriedades do triângulo reflete um avanço para o Nível 2, onde a estudante começou a estabelecer relações entre diferentes propriedades geométricas, como a relação entre o perímetro, os ângulos e o baricentro.

O uso dos recursos do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 2 (Dedução Informal) ao permitir a exploração interativa das propriedades do triângulo de forma visual e imediata. Nesta análise, é possível notar que a ferramenta "Polígono" facilitou a construção do triângulo, enquanto outras ferramentas, como "Ângulo", "Ponto Médio", "Área" e "Distância", possibilitaram a análise das relações entre seus elementos. Esse ambiente dinâmico permitiu que a estudante deduzisse informalmente propriedades como o baricentro e a área, conectando aspectos geométricos a dados numéricos de maneira intuitiva.

A segunda tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 41**. A participante Mary é destacada nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 41 – Tarefa 7.2 (Prova da Área do Retângulo)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
Prove que área do retângulo é o produto da base pela altura. ***1. Orientações construtivas:*** *1.1. Use a ferramenta "Controle Deslizante" para criar dois controles deslizantes, chamados a e b, variando de 0,1 a 10.*	***Transcrição das respostas de Mary:*** *a) É um quadrado de lado (a+b).* *Demonstração*

1.2. Utilize a ferramenta "Segmento de Comprimento Fixo" para criar um segmento com comprimento "a". Clique na Janela de Visualização e digite "a" na Caixa de Comando desse recurso. *1.3. Use a ferramenta "Polígono Regular" para criar um quadrado. Clique no ponto A e depois no ponto B, e digite 4 na Caixa de Comando para definir o quadrado.* *1.4. Utilize a ferramenta "Segmento de Comprimento Fixo" para criar um segmento com comprimento "b". Clique no ponto C e digite "b" na Caixa de Comando desse recurso.* *1.5. Use a ferramenta "Polígono Regular" para criar um quadrado. Clique no ponto C e depois no ponto E, e digite 4 na Caixa de Comando para definir o quadrado.* *1.6. Use a ferramenta "Reta Paralela" para traçar as retas paralelas ao segmento AB passando pelo ponto A, e paralelas ao segmento EF passando pelo ponto F. Trace as retas paralelas a AB no ponto F e a EF no ponto A. Encontre os pontos de interseção dessas retas usando a ferramenta "Interseção em Dois Objetos", nomeando os pontos de interseção como H e I. Ajuste as retas para estilo pontuado e espessura 3.* *1.7. Construa o quadrilátero AHFI usando a ferramenta "Polígono".* *a) Qual é o nome específico do quadrilátero AHFI, mesmo diferenciando os valores de a e b?* *1.8. Nomeie os segmentos AB e AD como "a" e EF e FG como "b" usando a opção de legendas nas configurações de contexto.* ***2. Aplique os passos das orientações para a demonstração argumentativa (2.4.** Note que a área do quadrilátero AHFI é equivalente à soma das áreas dos outros objetos geométricos**).*** ***3. Use as orientações para a demonstração dinâmica.***	*Vamos provar que, dado um retângulo de base b e altura a, sua área é dada pelo produto de a por b.* *O quadrado AHFI, com lado a + b, tem, por definição, uma área dada por $(a + b)^2$.* *Observando a construção do quadrado AHFI, vemos que sua área é equivalente à soma das áreas dos seguintes componentes:* *O quadrado ABCD, cuja área é igual a a^2, por definição.* *O quadrado CECFG, cuja área é igual a b^2, por definição.* *Duas vezes a área do retângulo de dimensões a e b, que chamaremos de A'.* *Assim:* *$(a+b)^2 = a^2+b^2+2\cdot A' \Rightarrow a^2+2a\cdot b+b^2 = a^2+b^2+2\cdot A' \Rightarrow 2\cdot a\cdot b = 2A' \Rightarrow a\cdot b = A'$.* *c.q.d.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	
	

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Na análise da Tarefa 7.2, infere-se que a estudante operou no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), reconhecendo a figura pela sua aparência global. À medida que a tarefa avança, Mary analisa informalmente os atributos e partes do retângulo, comparando as áreas dos quadrados e do retângulo envolvido. Nesse ponto, a estudante já demonstra características do Nível 1, ao discernir as propriedades dos quadriláteros e estabelecer relações entre as áreas, embora sem formalizar as inter-relações de maneira mais profunda. Quando a estudante utiliza a propriedade da soma das áreas e a relação entre as áreas dos quadrados e do retângulo, aplicando deduções informais, Mary progride para o Nível 2. Ao completar a demonstração de que a área do retângulo é o produto da base pela altura e elaborar uma justificativa matemática formal para essa relação, a estudante atinge o Nível 3. Ela desenvolve uma sequência lógica de

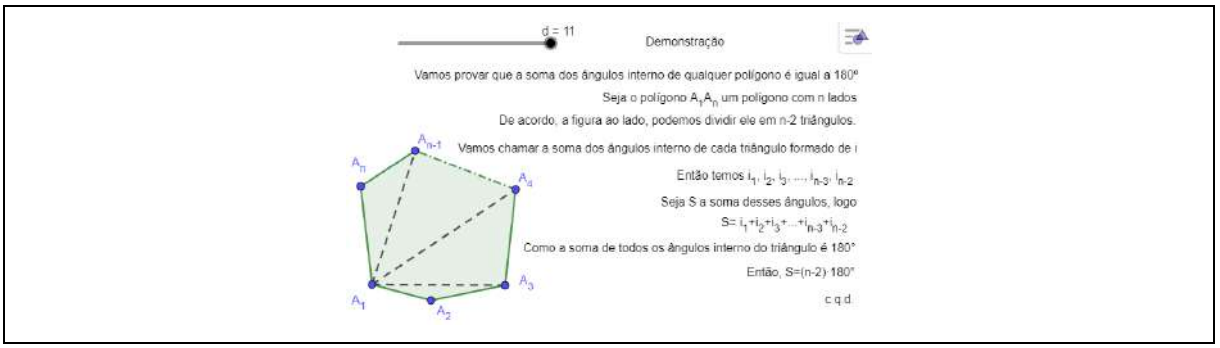
afirmações dedutivas para provar que a área do retângulo é, de fato, $a \cdot b$, utilizando o teorema da área dos quadrados e do retângulo.

O uso dos recursos do ggb-CB facilitou a transição para o Nível 3 (Dedução Formal) ao permitir que a estudante experimentasse a construção geométrica do retângulo e suas partes componentes. Nesta análise, é possível notar que a manipulação dinâmica dos controles deslizantes para ajustar as dimensões do retângulo proporcionou uma visualização compreensível da relação entre base, altura e área. Assim, a construção do quadrado *AHFI*, juntamente com a soma das áreas dos quadrados e do retângulo, contribuiu para a formalização da dedução da fórmula da área como o produto da base pela altura, conectando a experiência visual à formulação algébrica.

A terceira tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 42**. O participante Théo é destacado nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 42 – Tarefa 7.3 (Prova da Soma dos Ângulos Internos de um Polígono)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
Prove que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo é igual a 180°. ***1. Orientações construtivas:*** *1.1. Construa um heptágono com a ferramenta "Polígono", Nomeie os vértices do polígono como: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_{n-1}, A_n, no sentido anti-horário.* ***Definição do segmento dedutivo:*** ***1.2.** Clique no segmento A_5A_{n-1} e ajuste ele para estilo pontuado.* ***Divisão do polígono de n lados em (n-2) triângulos:*** *1.3. Use a ferramenta "Segmento" para traçar todos os segmentos internos do polígono que conectam vértices não adjacentes ao ponto A_. Estes segmentos irão dividir o polígono em triângulos.* ***Por que um polígono com n lados pode ser dividido em (n−2) triângulos?*** ***2. Aplique os passos das orientações para a demonstração argumentativa (2.3. Use a propriedade da soma dos ângulos internos do triângulo).*** ***3. Use as orientações para a demonstração dinâmica.***	***Transcrição das respostas de Théo:*** *a) Para um triângulo, que é o polígono mais simples, há exatamente 1 triângulo. Para um quadrado (4 lados), é possível dividir em 2 triângulos. Para um pentágono (5 lados), é possível dividir em 3 triângulos, e assim por diante. Geralmente, um polígono com n lados pode ser dividido em n−2 triângulos.* *Demonstração* *Vamos provar que a soma dos ângulos internos de qualquer polígono é igual a 180º. Seja o polígono A_1A_n um polígono com n lados. De acordo com a figura ao lado, podemos dividir ele em n-2 triângulos. Vamos chamar a soma dos ângulos internos de cada triângulo formado de i.* *Então temos i_1, i_2, i_3, ..., i_{n-3}, i_{n-2}* *Seja S a soma desses ângulos, logo* *S= i_1+i_2+i_3+...+i_{n-3}+i_{n-2}* *Como a soma de todos os ângulos internos do triângulo é 180°. Então, S=(n-2)·180°* *c.q.d.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	



Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

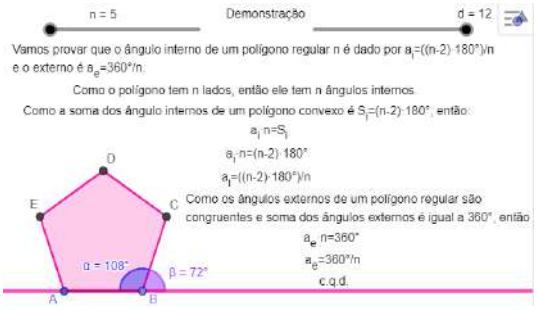
Na análise da Tarefa 7.3, observa-se que, ao construir o polígono e dividi-lo em triângulos, o estudante iniciou no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), ao reconhecer visualmente o polígono e suas divisões. Ao descrever como um polígono de *n* lados pode ser dividido em $(n-2)$ triângulos, Théo avançou para o Nível 1, analisando as características dos polígonos e as relações entre o número de lados e a divisão em triângulos. A formulação da demonstração, na qual o estudante aplica a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo, indica uma progressão para o nível de dedução informal ou ordenação (Nível 2). A conclusão de que a soma dos ângulos internos de um polígono é igual a $(n-2)\cdot 180°$ representa um avanço para o nível de dedução formal (Nível 3). A estrutura lógica da prova, que relaciona a soma dos ângulos de cada triângulo a soma total dos ângulos internos do polígono, demonstra uma capacidade de raciocínio matemático e a compreensão da relevância das deduções.

O uso dos recursos do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 3 (Dedução Formal) ao possibilitar a visualização e manipulação dinâmica da divisão de um polígono em triângulos. Nesta análise, é possível notar que a ferramenta "Segmento" permitiu que o estudante conectasse os vértices do polígono, dividindo-o em $(n-2)$ triângulos, o que facilitou a compreensão de que a soma dos ângulos internos de um polígono corresponde à soma dos ângulos internos desses triângulos. Essa abordagem tornou a dedução formal mais acessível, conectando a experiência prática à formulação algébrica da soma dos ângulos internos.

A última tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 43**. A participante Elen é destacada nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 43 – Tarefa 7.4 (Prova da Soma dos Ângulos de um Polígono Regular)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**

Prove que um ângulo interno de um polígono regular de n lados é dado por S_i=(n-2)180°/n e o externo é S_e=360°. ***1. Orientações construtivas:*** *1.1. Use a ferramenta "Controle Deslizante" para criar um controle deslizante que varia de 3 a 100, com incremento de 1.* ***a) Por que o valor mínimo do controle deslizante é três?*** *1.2. Use a ferramenta "Segmento de Comprimento Fixo" para criar um segmento de comprimento fixo n.* *1.3. Utilize a ferramenta "Polígono Regular" para desenhar um polígono com n lados. Selecione os pontos A e B na janela de Visualização e digite o valor n na Caixa de Comando da ferramenta.* ***b) Mova o controle deslizante e observe as mudanças. O que você nota sobre o polígono quando n varia?*** *1.4) Usando as ferramentas "Reta" e "Ângulo", trace a reta AB e meça o ângulo interno e o ângulo externo no vértice B do polígono.* ***c) O que você pode concluir sobre a relação entre o ângulo interno e o ângulo externo do polígono?*** ***2. Aplique os passos das orientações para a demonstração argumentativa (2.3. Use a propriedade da soma dos ângulos externos de qualquer polígono).*** ***3. Use as orientações para a demonstração dinâmica.***	***Transcrição das respostas de Elen:*** *a) O mínimo é três porque um polígono com menos de três lados não faz sentido. O triângulo é o polígono mais simples que existe, e é o menor polígono que podemos desenhar.* *b) Quando eu mudo o valor de n, o polígono vai se transformando. Se n aumenta, o polígono fica com mais lados.* *c) Eu percebi que os ângulos internos e externos têm uma relação bem legal. Para cada vértice do polígono, o ângulo interno e o ângulo externo somam sempre 180°. Isso faz sentido porque eles formam uma linha reta no vértice, sendo portanto suplementares.* *Demonstração* *Vamos provar que o ângulo interno de um polígono regular n é dado por a_i=((n-2)·180°)/n e o externo é a_e=360°/n. Como o polígono tem n lados, então ele tem n ângulos internos. Como a soma dos ângulo internos de um polígono convexo é S_i=(n-2)·180°, então:* *a_i·n=S_i* *a_i·n=(n-2)·180°* *a_i=((n-2)·180°)/n* *Como os ângulos externos de um polígono regular são congruentes e soma dos ângulos externos é igual a 360°, então* *a_e·n=360°* *a_e=360°/n* *c.q.d.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	
	

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

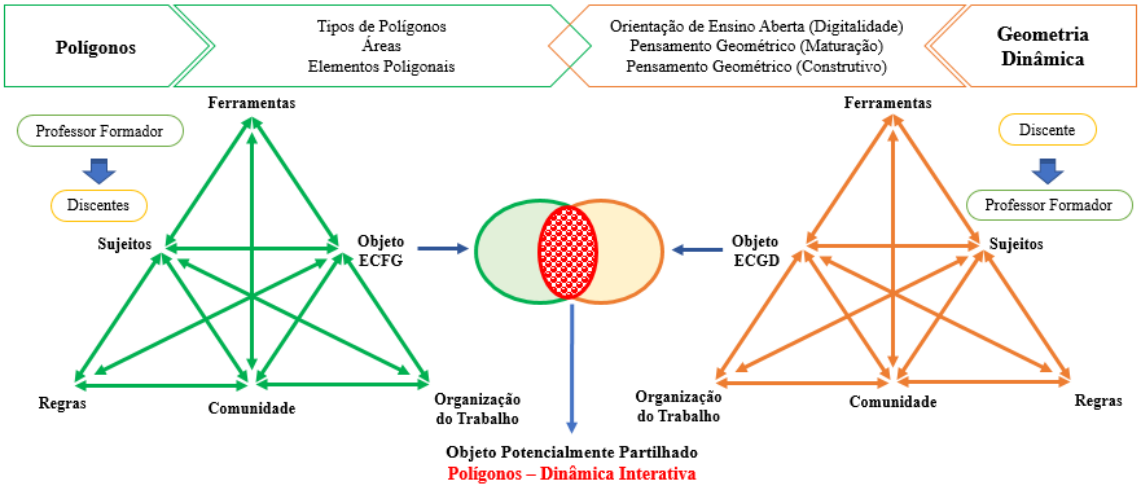
Na análise da Tarefa 7.4, observa-se que Elen inicia no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), ao afirmar que o valor mínimo do controle deslizante era três, o que demonstra um entendimento básico do conceito de polígono. À medida que a tarefa avançava, e ela observava as mudanças nos ângulos internos e externos conforme o número de lados do polígono aumentava, a estudante começou a operar no Nível 1, discernindo as propriedades dos ângulos. Quando a estudante percebe que os ângulos internos e externos são suplementares, ela demonstra uma compreensão mais profunda, sugerindo um avanço para o Nível 2. Ao desenvolver a demonstração formal das fórmulas e apresentar a relação entre a soma dos ângulos internos e externos do polígono, Elen evidencia um entendimento correspondente ao

Nível 3. Assim, ela apresenta uma sequência lógica de afirmações, utilizando a soma dos ângulos internos e a natureza congruente dos ângulos externos.

O uso dos recursos do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 3 (Dedução Formal) ao permitir a manipulação visual dinâmica do polígono regular, facilitando a compreensão da variação dos ângulos internos e externos à medida que o número de lados (*n*) aumenta. Nesta análise, é possível observar que o controle deslizante proporcionou uma exploração interativa, revelando como a soma dos ângulos internos e a relação entre ângulos internos e externos se mantêm consistentes, independentemente do valor de *n*. Isso ofereceu uma base sólida para a formulação da dedução algébrica, conectando a experiência empírica à formalização do saber matemático.

As quatro tarefas analisadas evidenciam, por meio da interação entre o ECFG e a ECGD, a criação de um objeto potencialmente partilhado, conforme descrito na quarta contradição de Engeström (2016). Nesse contexto, o objeto partilhado foi a compreensão dinâmica interativa dos ‘Polígonos’, com foco na maturação do pensamento geométrico dos estudantes (**Esquema 31**).

Esquema 31 – Polígonos – Dinâmica Interativa



Fonte: Pesquisador (2024).

No sistema ECFG, o professor formador teve uma atuação mais intensa, apresentando de maneira estruturada e sequencial os conceitos relacionados aos tipos de polígonos, áreas e elementos poligonais. O objetivo desse sistema foi ensinar sobre os ‘Polígonos’, estimulando a investigação de suas aplicações por meio de operações como a construção de pontos, segmentos e polígonos e outros objetos geométricos. Para isso, o professor realizava revisões teóricas dos

capítulos IX, XVI e XIX do volume 9, proporcionando aos estudantes uma compreensão formal dos conhecimentos curriculares abordados.

Paralelamente, no sistema ECDG, os estudantes assumiram um papel mais proativo, interagindo de forma mais intensa com o conteúdo. Nesse ambiente, tiveram a oportunidade de explorar os conceitos de maneira prática e interativa, manipulando objetos geométricos em um espaço digital dinâmico, o que resultou em um desempenho positivo nas AOEA. Esse processo possibilitou o desenvolvimento de habilidades digitais, como a prática de garantir a consistência bilateral da estrutura geométrica, especialmente ao utilizar a ferramenta "Polígono Regular". Além disso, o professor atuou como mediador nesse sistema, oferecendo suporte e *feedback online*, auxiliando os estudantes na consolidação do aprendizado por meio de atividades práticas.

Nesse sistema, os recursos digitais, ao possibilitarem a programação sintática de comandos para a experimentação de conceitos matemáticos, exemplificam como as inovações tecnológicas criam cenários qualitativamente diferenciados para a investigação matemática, conforme destacam Borba, Silva e Gadanidis (2014). Nesse contexto, os recursos do ggb-CB permitiram que os estudantes ajustassem parâmetros, observassem mudanças e testassem hipóteses, transformando o aprendizado em uma experiência mais interativa. Assim, as tecnologias não apenas facilitam a compreensão das propriedades e relações dos polígonos, mas também atuam como mediadoras no processo de construção do conhecimento, promovendo a maturação do pensamento geométrico por meio de uma aprendizagem dinâmica e coletivamente interativa. Isso está alinhado à ideia de que o uso pedagógico de novos recursos tecnológicos introduz originalidade ao processo de "pensar-com-tecnologias" (idem, p. 37).

As operações realizadas nesse sistema envolveram personalizações na visualização, apurações da área das figuras, medições dos objetos, identificações, implantações, comparações e conexões de elementos, conformidações da estrutura e programações da estrutura, além de construções geométricas com diversas possibilidades de manipulação. Essas operações estão em consonância com a TA de Leontiev (2018), que aponta que os objetivos se transformam em tarefas simples, moldadas pelo contexto e empregadas por meio da ação prática. Neste caso, o foco foi programar comandos de construção e calcular áreas dos polígonos. Ao utilizar as ferramentas digitais para interagir com os polígonos, os estudantes não apenas absorveram o conteúdo curricular, mas também o construíram ativamente por meio de uma prática dinâmica e interativa, consolidando o aprendizado através da experiência híbrida.

Nas AOEA desta semana, foi possível observar características da autoformação (Macedo, 2010) quando o estudante demonstrou autonomia e uma postura crítica ao explorar os conceitos geométricos de maneira prática e reflexiva, assumindo o protagonismo em sua própria aprendizagem. Ao se envolver diretamente na construção de polígonos e na análise de suas propriedades, o estudante não apenas recebeu o conhecimento de forma passiva, mas o construiu ativamente, explorando, experimentando e aplicando-o em diferentes contextos. Essa autonomia intelectual estimulou a capacidade de resolver tarefas com maior eficácia e criatividade, permitindo o desenvolvimento de um raciocínio geométrico mais interativo.

Nesse cenário, o progresso dos estudantes nos diferentes níveis de pensamento geométrico, conforme o modelo de Van Hiele (1986), foi facilitado e potencializado pelo uso dos recursos do ggb-CB nessa proposta híbrida de ensino. Esse ambiente tecnológico permitiu que os estudantes não apenas visualizassem, mas também construíssem dinamicamente os objetos geométricos, proporcionando uma experiência de aprendizado mais intuitiva e prática. A interação com as ferramentas digitais possibilitou uma exploração mais profunda e ativa dos conceitos geométricos. Como resultado, na análise da Tarefa 7.1 (Área e Perímetro do Triângulo), observou-se que a estudante Hend demonstrou um avanço significativo no Nível 2 de aprendizagem, desenvolvendo uma compreensão mais abstrata das relações geométricas por meio de deduções informais. Esse processo evidencia que, ao manipular as construções e deduções, os estudantes não apenas reproduzem conceitos, mas também são desafiados a criar conexões mais profundas, estabelecendo uma compreensão mais refinada e autônoma.

Além disso, nas tarefas 7.2 (Prova da Área do Retângulo), 7.3 (Prova da Soma dos Ângulos Internos de um Polígono) e 7.4 (Prova das Fórmulas da Soma dos Ângulos de um Polígono Regular), observou-se que os estudantes Mary, Théo e Elen avançaram para o Nível 3 de aprendizagem. Ao desenvolverem sequências dedutivas e compreenderem o papel essencial das provas, conseguiram construir uma compreensão mais lógica e estruturada dos conceitos matemáticos. Esses avanços indicam que o uso das TDI não apenas facilita o entendimento superficial, mas também possibilita a internalização e aplicação dos conhecimentos, criando uma base sólida para a resolução de problemas mais complexos.

Nesse sentido, a integração desses dois sistemas (ECFG e ECGD) resultou no objeto compartilhado mencionado anteriormente. Assim, no processo de ensino proposto, que adota uma abordagem híbrida, o uso conjunto das ideias de autoformação, TDI e TA foi essencial para o avanço na compreensão dos estudantes sobre os ‘Polígonos’. Esse método de ensino

promoveu uma aprendizagem ativa, reflexiva e coletivamente interativa, permitindo que os estudantes desenvolvessem suas habilidades geométricas de maneira mais eficaz e envolvente.

4.8 Explorando as Transformações Geométricas

Na oitava semana, as aulas foram estruturadas para explorar as 'Transformações Geométricas', com o objetivo de promover uma compreensão dinâmica sobre esse conteúdo curricular. Nesse cenário híbrido de ensino, as ações pedagógicas envolveram a construção e a exploração do objeto de estudo, bem como a investigação, identificação e aplicação prática dos conceitos de isometria positiva e negativa, além de homotetia. Também houve interação discursiva sobre as aplicabilidades discutidas.

Para isso, foi necessário expandir o repertório operacional dos estudantes por meio de tarefas teóricas e práticas. A aplicação das AOEA foi fundamental nesse processo, pois forneceu diretrizes para a criação, manipulação e personalização de pontos, vetores, polígonos e outros objetos geométricos. Essas atividades foram planejadas para alcançar as metas Ciade, aproximando a turma dos recursos tecnológicos adotados, especialmente no incentivo à cultura digital com a utilização da ferramenta "Transladar por um Vetor".

O **Quadro 44**, apresentado a seguir, ilustra a estrutura e organização dessa abordagem no contexto de ensino da oitava semana.

Quadro 44 – Planejamento da oitava semana de aula

<table>
<tr><td colspan="4">Artefato
Computador e Smartphone.
GeoGebra: Plataforma; Classroom Beta; Classic; Geometria.
Ferramentas Específicas: Mover; Ponto; Ponto em Objeto; Interseção de Dois Objetos; Ponto Médio ou Centro; Reta; Segmento com Comprimento Fixo; Vetor; Reta Paralela; Polígono; Polígono Regular; Círculo: Centro & Raio; Ângulo; Reflexão em Relação a uma Reta; Reflexão em Relação a um Ponto; Inversão; Rotação em Torno de um Ponto; Translação por um Vetor; Homotetia; Controle Deslizante; Texto;
Comandos: Ângulo(...); Centro(...); Homotetia(...); Girar(...); Polígono(...); Reflexão(...), Sequência(...); Transladar(...); Vetor(...).
Livro: Fundamentos de Matemática Elementar 9: geometria plana (Cap. XIII).</td></tr>
<tr><td>Objeto
Transformações Geométricas</td><td>Motivo
Necessidade de promover a compreensão dinâmica dos conceitos relacionados as Transformações Geométricas.</td><td colspan="2">Ação
❖ Construção e exploração das Transformações Geométricas de modo dinâmico;
❖ Investigação, identificação e aplicação dos conceitos relacionados a isometria positiva e negativa e a homotetia;
❖ Interação discursiva das aplicabilidades abordadas.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Operações
Comparações: aferir semelhanças e diferenças dos elementos;
Personalizações: configurar, renomear, exibir/ocultar, etc.;
Conformidações: preservar as subsistências das estruturas;</td><td>Metas
➢ Construir pontos, vetores, polígonos, etc. para explorar as Transformações Geométricas com a</td></tr>
</table>

Medições: medir comprimentos e amplitudes angulares; Construções: produzir pontos, vetores, polígonos, etc.; Inquietações: expor dúvidas subjetivas e/ou coletivas; Interlocuções: participar das discussões construtivas; Identificações: localizar as interseções dos objetos; Programações: processar comandos de construção; Explorações: testar os recursos do GeoGebra; Revisões: revisar os conteúdos curriculares; Implantações: inserir elementos adaptáveis; Variações: ampliar/reduzir os objetos; Transformações: deslocar os objetos; Apurações: calcular áreas das figuras; Interações: interagir com as AOEA; Administrações: gerenciar conta; Aplicações: resolver problemas; Conexões: conectar elementos; Manipulações: mover objetos.	mediação tecnológica das ferramentas e comandos do GeoGebra; ➢ Investigar e aplicar conceitos relacionados isometria positiva e negativa e a homotetia; ➢ Desenvolver habilidades práticas de mobilidade interativa das configurações geométrica com uso da ferramenta "Transladar por Vetor"; ➢ Estimular discussões e reflexões sobre abordagens teóricas e práticas relacionadas ao objeto de estudo.
Condições Ambiente de ensino híbrido com suporte contínuo da equipe docente para auxiliar na aprendizagem das Transformações Geométricas durante as atividades presenciais, oferecendo orientações e estímulos personalizados durante as observações *online* a distância.	

Fonte: Pesquisador (2024).

Durante as aulas da oitava semana, o professor formador explorou detalhadamente as definições de 'Transformações Geométricas', abordando os diferentes tipos e suas propriedades. Foi apresentado que uma transformação geométrica é uma aplicação bijetiva entre duas figuras geométricas, no mesmo plano ou em planos distintos, de modo que uma figura original gera outra geometricamente igual ou semelhante. Nesse contexto, foi introduzido o conceito de translação, definida como a transformação associada a um vetor, que desloca cada ponto *P* para um ponto *P'*, mantendo a direção e o comprimento dos segmentos de reta, assim como as amplitudes dos ângulos. Consequentemente, o professor enfatizou que as figuras transformadas por translação permanecem geometricamente idênticas à figura original.

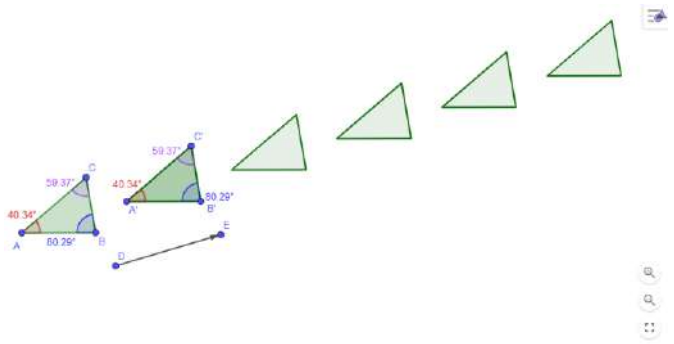
Na aplicação prática com a mediação tecnológica das ferramentas "Ponto", "Vetor", "Translação por um Vetor" e "Ângulos", assim como dos comandos "Polígono(...)", "Transladar(...)" e "Sequência(...)", o professor formador buscou explorar o processo de translação. Ele iniciou a atividade no GeoGebra *Classic online*, na disposição de Geometria, criando cinco pontos não colineares (*A*, *B*, *C*, *D* e *E*) e, com esses pontos, construiu um polígono denominado *t1*.

Em seguida, criou um vetor de translação, utilizando os pontos *D* e *E* como referência, e transladou o polígono para gerar uma nova figura chamada *t2*. Para confirmar a semelhança dos triângulos resultantes, o professor utilizou o comando "Transladar(...)" na Caixa de Entrada. Após isso, mediu os ângulos internos de cada triângulo, demonstrando visualmente a

congruência dos ângulos. Para ilustrar múltiplas translações, ele utilizou o comando "Sequência(...)" em conjunto com "Transladar(...)", gerando uma sequência de polígonos.

A **Figura 23** ilustra esse processo construtivo. Entretanto, é importante ressaltar que, para garantir que o estudante compreendesse completamente, o professor formador utilizou analogias simples e exemplos visuais adicionais. Ele explicou que, enquanto o comando transladar é útil para mover uma figura uma única vez, porém a combinação com a sequência permite observar o efeito de múltiplas translações de forma organizada e dinâmica. O professor também enfatizou que essa abordagem ajuda a visualizar padrões e relações entre as figuras geradas, facilitando a compreensão de conceitos mais complexos, como simetria e transformação geométrica.

Figura 23 – Translações de triângulos

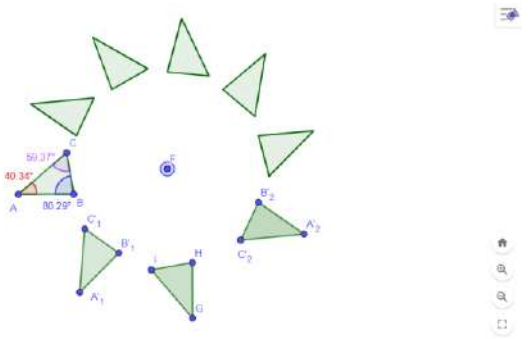


Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/nt3yj3hc. Acesso em: 14 ago. 2024.

Em seguida, foi apresentada a definição de rotação, explicando que se trata de uma transformação com centro D e amplitude α, que associa a cada ponto B um ponto B'. Essa transformação pode ocorrer no sentido positivo (anti-horário) ou negativo (horário). A amplitude dos ângulos é preservada, e o formador destacou que as rotações mantêm a forma e o tamanho da figura original. O professor formador utilizou o triângulo ΔABC criado e definiu um ponto fixo para ser o centro da rotação.

Por conseguinte, com a mediação tecnológica das ferramentas "Rotação em Torno de um Ponto" e "Ponto", a figura foi girada em torno do ponto fixo F. Ou seja, o professor clicou na figura e no ponto central, especificando o sentido da rotação em graus. Assim, foi criada uma nova imagem rotacionada, exibida de acordo com o ângulo e o ponto selecionado. O professor também utilizou os comandos "Girar(...)" e "Sequência(...)" para realizar rotações diretamente ao redor do ponto F, gerando figuras rotacionadas, conforme ilustrado na **Figura 24**.

Figura 24 – Rotações de triângulos



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/ddaysh7v. Acesso em: 14 ago. 2024.

Na segunda etapa da aula, o professor formado afirmou que a isometria é uma transformação geométrica que preserva as distâncias entre os pontos e as amplitudes dos ângulos, o que significa que a figura original e sua imagem transformada são congruentes. Em virtude disso, destacou que tanto a translação quanto a rotação são exemplos de isometrias positivas, pois conservam a orientação da figura original. Por outro lado, a reflexão, que será explorada a partir de agora, é uma isometria negativa, pois, embora mantenha as distâncias e as amplitudes dos ângulos, inverte a orientação da figura.

Dentro desse contexto, foi discutido que uma reflexão em um plano, em relação a um eixo *r*, é uma transformação que associa a cada ponto *C* um ponto *C'*, de modo que as distâncias de *C* e *C'* ao eixo são iguais, e a linha que os une é perpendicular ao eixo. Além disso, o formador destacou que a reflexão conserva a congruência entre a figura e sua imagem, de forma que, se dobrarmos uma folha sobre o eixo, as figuras se sobrepõem ponto a ponto.

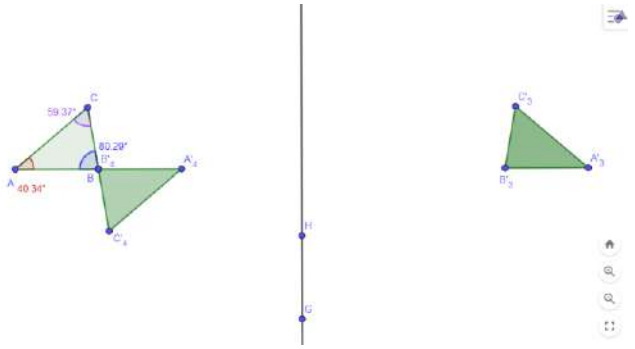
Dando continuidade, o professor formador iniciou demonstrando como criar e utilizar ferramentas no GeoGebra para gerar imagens refletidas de figuras geométricas. Ressaltou que a simetria de reflexão é uma transformação que utiliza um segmento, denominado eixo de simetria, que atua como um espelho, refletindo a imagem desenhada. Em razão disso, explicou que, na simetria de reflexão, a figura original e sua imagem refletida estão à mesma distância do eixo de simetria, resultando em duas partes congruentes.

Na aplicação prática, com a mediação tecnológica das ferramentas “Ponto”, “Reta”, “Reflexão em Relação a uma Reta” e “Reflexão em Relação a um Ponto”, assim como com o comando “Reflexão(...)”, o professor formador buscou explorar esses conceitos. Ele começou selecionando dois pontos, *G* e *H*, que definiriam a reta de reflexão, a qual fazia parte de uma das construções rotacionadas. Esses pontos formaram o eixo de simetria para a reflexão. Utilizando o polígono inicial como figura a ser refletida, ele aplicou a reflexão clicando no

polígono *t1* e na reta de simetria. Em seguida, demonstrou como realizar a reflexão utilizando o comando "Reflexão(...)". Para apresentar uma abordagem alternativa, ele também efetuou uma reflexão em relação a um ponto, clicando primeiro no polígono *t1* e, em seguida, no ponto *B*, que funcionaria como o centro de reflexão.

A **Figura 25** ilustra essa abordagem, demonstrando como o professor formador utilizou o GeoGebra para facilitar a visualização da reflexão.

Figura 25 – Reflexão de triângulos



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/epxutxac. Acesso em: 14 ago. 2024.

Na terceira etapa da aula, o professor abordou o conceito de homotetia, uma transformação que altera o tamanho de uma figura geométrica, mantendo suas proporções. Ele explorou a homotetia como uma transformação afim, definida por um centro *O* e uma razão *k*, que gera uma figura semelhante à original. Dependendo do valor de *k*, se $|k|>1$, ocorre uma ampliação; se $|k|<1$, ocorre uma redução. As propriedades dessa transformação incluem a conservação da direção, do paralelismo e da amplitude dos ângulos orientados.

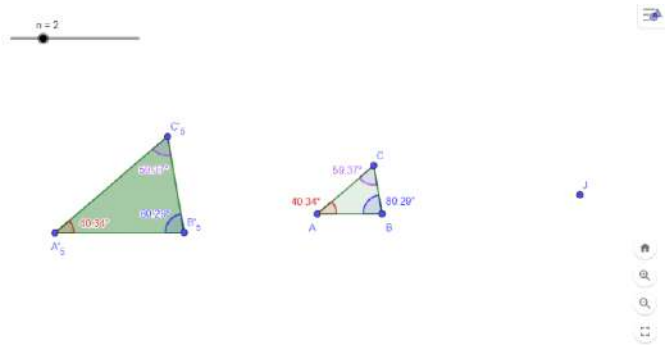
Diante disso, o professor formador definiu que dois triângulos são semelhantes quando possuem os três ângulos congruentes e os lados homólogos proporcionais. A razão de semelhança é expressa por $k=a/a'=b/b'=c/c'$, onde *k* representa a razão entre os lados homólogos dos triângulos. Se k = 1, os triângulos são congruentes. Nesse caso, aplica-se o critério de semelhança AAA. O professor também explorou o teorema fundamental da semelhança de triângulos, que afirma que, se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois em pontos distintos, o triângulo formado é semelhante ao triângulo original.

A mediação tecnológica das ferramentas "Controle Deslizante", "Mover", "Homotetia" e "Ponto" foi utilizada pelo professor formador para explorar esse conceito. Assim, utilizando o triângulo *t1*, que já havia sido criado em atividades anteriores, ele adicionou um novo ponto

J, que serviria como centro de homotetia. Em seguida, aplicou a homotetia, selecionando o triângulo *t1* e o ponto *J* como centro. O GeoGebra solicitou o fator de escala, e o professor inseriu a variável *n*. Como consequência, foi gerada a imagem homotética do triângulo, denominada *t'15*.

A **Figura 26** demonstra a imagem homotética do polígono, permitindo uma compreensão visual da transformação.

Figura 26 – Aplicando a homotetia para encontrar a semelhança de triângulos



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/nxkfw3av. Acesso em: 14 ago. 2024.

O professor formador explicou que a homotetia altera o tamanho do triângulo de forma proporcional ao fator de escala escolhido: se o fator de escala for maior que 1, o triângulo aumenta; se for menor que 1, o triângulo diminui. Ressaltou ainda que o centro de homotetia permanece fixo e que todas as linhas que conectam esse centro aos vértices do triângulo original e ao triângulo homotético são colineares.

Concisamente, esta oitava semana de aula representa o Sistema de Atividades VIII, no qual foram explorados os conhecimentos curriculares relacionados às 'Transformações Geométricas', conforme as abordagens realizadas pelo professor formador. No entanto, durante esse processo, caracterizado pela pluralidade e multivocalidade, foram observadas algumas tensões e inquietações, que serão analisadas no próximo subtópico.

4.8.1 Análise das contradições heteroformativas no sistema de atividades VIII

A análise das interações da aula do Sistema de Atividades VIII, fundamentada nas contradições primária, secundária e terciária de Engeström (2016), revelou as tensões e as possibilidades de aprendizagem que emergiram enquanto os estudantes se dedicavam tanto à construção de pontos, vetores, polígonos e outros objetos geométricos no ggb-CB, quanto à

exploração dos conhecimentos curriculares relacionados às ‘Transformações Geométricas’, tema abordado pelo professor formador.

A contradição primária de Engeström (2016) se manifestou na tensão entre o valor de uso e o valor de troca das ‘Transformações Geométricas’. Nesse contexto, observou-se que Théo, ao questionar o funcionamento da translação, revelou a dificuldade de compreender que, embora a figura fosse deslocada, suas propriedades geométricas permaneciam inalteradas. O processo de heteroformação, conforme Macedo (2010), se evidenciou quando o professor, utilizando o GeoGebra, explicou e demonstrou como o vetor de translação preservava a forma e o tamanho do polígono. Nesse ambiente cooperativo, os estudantes internalizaram o conceito de isometria por meio da troca de conhecimentos com o professor e seus colegas, refletindo como a aprendizagem era relacional e interativa.

Em relação a contradição secundária de Engeström (2016), surgiu uma tensão entre as ferramentas tecnológicas e os objetivos da atividade, como evidenciado nas indagações de Ulan e Aden sobre as diferenças entre o uso da ferramenta ui pelo GeoGebra, facilitou a visualização dessas transformações, permitindo que os estudantes comparassem os resultados em tempo real. Essa interação exemplificou a internalização do conhecimento, conforme proposto por Vygotsky (2019), à medida que os estudantes, com o apoio do professor e das ferramentas, transformaram o conhecimento abstrato sobre as ‘Transformações Geométricas’ em uma compreensão prática. A ferramenta tecnológica atuou como mediadora do processo de internalização, auxiliando os estudantes a consolidar seu entendimento.

A contradição terciária de Engeström (2016) manifestou-se quando novas tecnologias, como o ggb-CB, desafiaram os métodos tradicionais de ensino ao introduzirem novas formas de compreender conceitos, como a homotetia. Esse desafio foi notável porque, enquanto as ferramentas digitais facilitavam a visualização de conceitos geométricos complexos, também impuseram aos estudantes a necessidade de reconfigurar seu entendimento prévio sobre as ‘Transformações Geométricas’. Lévy (2023) discute o impacto das TDI na ampliação da capacidade de promover novas formas de aprendizagem, o que se refletiu nas interações de Seth e Ulan ao explorarem a homotetia no GeoGebra para formar triângulos semelhantes. Embora a ferramenta permitisse ajustar dinamicamente o fator de escala e o centro da transformação, essa funcionalidade exigiu dos estudantes uma adaptação ao novo modo de experimentar e visualizar o conceito de semelhança poligonal, gerando tensão, pois se distanciava dos métodos tradicionais de ensino.

A resolução dessas contradições se insere nesse modelo de formação híbrida (Horn; Staker, 2015), no qual o uso do ggb-CB criou um ambiente de aprendizagem que integrava teoria e prática de maneira interativa. Essa abordagem permitiu que os estudantes explorassem conceitos como homotetia e isometrias de forma dinâmica e visual, facilitando a compreensão. O professor, atuando como mediador, orientou os estudantes durante o processo de descoberta, promovendo um ambiente no qual as TDI potencializaram o ensino e a aprendizagem. Esse movimento heteroformativo, mediado pela interação entre o professor, a turma e as ferramentas digitais, resultou na construção coletiva do conhecimento, permitindo que os estudantes não apenas compreendessem os conceitos geométricos de forma mais reflexiva, mas também desenvolvessem autonomia ao serem estimulados a explorar e aprender de maneira mais independente. Esse processo de aprendizagem coletivamente interativa e tecnológica fortaleceu a dinâmica do ensino híbrido, evidenciando o papel transformador da mediação digital na educação.

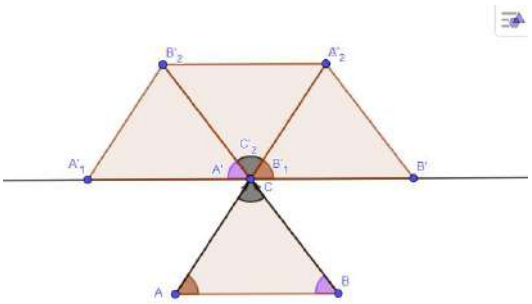
4.8.2 Análise das contradições autoformativas no sistema de atividades VIII

Com a base estabelecida no subtópico anterior, que tratou das dinâmicas heteroformativas e suas tensões, resultando na construção coletiva do conhecimento, a análise agora se volta para os aspectos autoformativas no Sistema de Atividades VIII, fundamentando-se nesse processo tecformativo digital e evidenciando como os estudantes adotaram uma postura mais autônoma e proativa no processo de aprendizagem das ‘Transformações Geométricas’. Assim, nesta parte, discute-se a maneira como os níveis de aprendizagem (Van Hiele, 1986) se manifestaram nas tarefas dos quatro participantes que mais se destacaram durante as interações da oitava semana de aula. Após essa análise, é apresentada a interação geral entre os sistemas envolvidos à luz da contradição quaternária (Engeström, 2016).

A primeira tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 45**. O participante Ulan é destacado nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 45 – Tarefa 8.1 (Prova Intuitiva da Soma dos Ângulos Internos do Triângulo)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	Pensamento Geométrico – Maturação
Prove visualmente que a soma dos ângulos internos do triângulo é igual a 180º. *1.1. Use a ferramenta “Polígono” para desenhar um ΔABC.*	**Transcrição das respostas de Ulan:** *a) Um vetor é uma seta que indica direção e comprimento.*

1.2. Use a ferramenta "Ângulo" para medir os ângulos internos do triângulo. Ajuste a cor de cada ângulo e desative os rótulos. *1.3. Use a ferramenta "Reta Paralela" para traçar uma reta paralela ao segmento AB que passe pelo ponto C.* *1.4. Use a ferramenta "Vetor" para criar o vetor AC e o vetor BC.* ***a) O que é um vetor?*** ***b) Qual a função dele nessa construção?*** *1.5. Use a ferramenta "Transladar por um Vetor" para transladar o vetor AC pelo ponto C, e depois o vetor BC pelo ponto C.* *O que você observa após a translação dos vetores?* *1.6. Use a ferramenta "Reflexão em Relação a um Ponto" para refletir o ΔABC sobre o ponto C.* ***c) O que o processo de translação fez?*** ***d) O que o processo de reflexão fez?*** *1.7. Identifique os ângulos no vértice C nos novos triângulos criados e ajuste a cor de acordo a congruência dos ângulos internos do ΔABC.* ***e) O que você conclui com a construção e a visualização dos ângulos internos?***	*b) . Ele ajuda a mover ou criar os segmentos de linha AC e BC.* *c) Após a translação dos vetores, os segmentos AC e BC são deslocados para criar uma nova dois novos triângulos que são a imagem do triângulo ABC.* *d) A reflexão do triângulo sobre o ponto C cria um espelho do triângulo original, criando um novo triângulo que é a imagem do triângulo ABC.* *e) A junção dos três ângulos internos do triângulo no ponto C, após a reflexão e translação, demonstra que eles formam um ângulo raso de 180°. Isso ocorre porque, ao refletir o triângulo e observar os ângulos formados no ponto C, vemos que eles se alinham perfeitamente para preencher uma linha reta. Esse alinhamento visual comprova que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre igual a 180°.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	
	

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

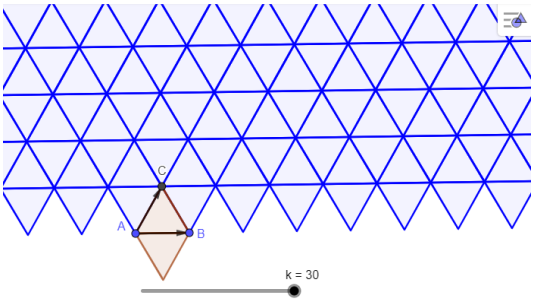
Na análise da Tarefa 8.1, nota-se que, inicialmente, Ulan operou no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), reconhecendo o triângulo e seus ângulos apenas por sua aparência. À medida que o estudante começou a utilizar vetores e translações, ele progrediu para o Nível 1, ao observar e analisar a função dos vetores e como eles formam triângulos congruentes. Ao empregar a reflexão para alinhar os ângulos e concluir que a soma deles resulta em um ângulo raso (180º), ele demonstrou características do Nível 2, ao reconhecer as inter-relações entre os ângulos e o conceito de soma. A conclusão de que a soma dos ângulos internos é 180º, fundamentada em observações visuais após a reflexão, evidencia uma transição para o Nível 3, onde o estudante utiliza deduções visuais para comprovar a propriedade geométrica.

O uso dos recursos do ggb-CB facilitou a transição para o Nível 3 (Dedução Formal) ao envolver o estudante de maneira ativa e visual na construção da prova. Nesta análise, é possível notar que a ferramenta de translação e reflexão dos vetores proporcionou uma experimentação direta, permitindo ao estudante observar a relação entre os ângulos do triângulo e sua soma.

Assim, a interação dinâmica com os elementos geométricos, como a reflexão e a translação, possibilitou que o estudante desenvolvesse uma intuição visual sobre a propriedade dos ângulos internos. Esse processo visual e prático gerou uma base intuitiva para a formalização da dedução de que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180º.

A segunda tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 46**. O participante Théo é destacado nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 46 – Tarefa 8.2 (Ladrilhamento Triangular)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
1.1. Utilize a ferramenta "Controle Deslizante" para criar um controle, chamado k, variando de 1 a 100. *1.2. Use a ferramenta "Polígono Regular" para construir um ΔABC.* ***a) Vimos que todo triângulo é convexo e que todo triângulo equilátero é equiângulo. Então, para mostrar visualmente que este polígono é regular, basta demonstrar que?*** *1.3. Use a ferramenta "Reflexão em Relação a uma Reta" e clique dentro da região interna do triângulo e depois no seu segmento AB.* ***b) O que apareceu na Janela de Visualização?*** *1.4. Construa o vetor AC e AB usando a ferramenta "Vetor".* *1.5. Na Caixa de Entrada digite o seguinte comando "T=Sequência(Transladar({pol1,pol1'},Vetor(i u)),i,1,k)"* ***c) Mova o controle deslizante k e descreva o que está acontecendo?*** *1.6. Na Caixa de Entrada digite o seguinte comando "T_1=Sequência(Transladar({T},Vetor(j v)),j,0,k)"* ***d) Mova o controle deslizante k e descreva o que está acontecendo?*** *1.7. Desative o modo de exibição do comando T.* ***e) O que aconteceu?*** *1.8. Na Caixa de Entrada digite o seguinte comando "T_2=Sequência(Transladar({T},Vetor(-j v)),j,1,k)"* ***f) Mova o controle deslizante k e descreva o que está acontecendo?***	**Transcrição das respostas de Théo:** *a) Para mostrar que o polígono é regular, a gente precisa verificar que todos os ângulos são iguais e todos os lados têm o mesmo comprimento. Então, se o triângulo que a gente construiu é equilátero, isso quer dizer que todos os ângulos são iguais a 60° e todos os lados têm o mesmo comprimento.* *b) Quando fiz a reflexão em relação ao segmento AB, apareceu uma cópia do triângulo em que o lado AB foi refletido. O triângulo refletido aparece do outro lado do segmento AB, como se tivesse sido espelhado.* *c) Quando eu movo o controle, o que acontece é que o triângulo original vai sendo movido ao longo da direção do vetor AC.* *d) Ao mover o controle, cria-se uma série de cópias do triângulo ao longo na direção dos vetores AC e AB, criando área de triângulos congruentes ao triângulo ABC.* *e) Quando eu desative o modo de exibição do comando, as cópias do triângulo que foram criadas usando o comando T desaparecem da visualização. Notei também que a dimensão da malha da série de triângulos não mudou, só a cor na direção do vetor AC, sendo assim, a sobreposição dos triângulos foi retirada.* *f) Ao mover o controle o triângulo é novamente movido, mas desta vez também na direção oposta àquela praticada anteriormente.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	
	

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

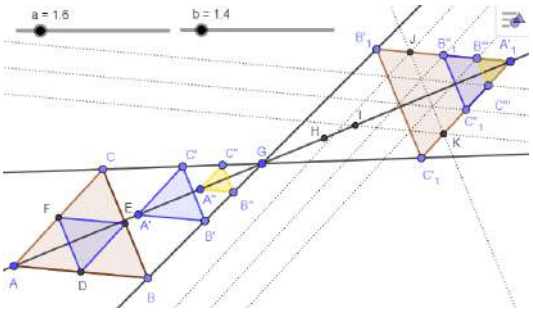
Na análise da Tarefa 8.2, infere-se que Théo iniciou no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), identificando as características do triângulo equilátero. À medida que utilizou reflexão e translação para criar cópias do triângulo, ele progrediu para o Nível 1, onde descreveu as propriedades do triângulo refletido e os efeitos das transformações. Com o uso de comandos avançados, como a criação de uma série de cópias do triângulo, Théo avançou para o Nível 2, onde foi capaz de reconhecer padrões geométricos e inter-relações entre as figuras geradas.

O uso dos recursos do ggb-CB facilitou a transição para o Nível 2 (Dedução Informal) ao possibilitar uma exploração interativa e visual das propriedades do triângulo regular. Nesta análise, é possível observar que o controle deslizante permitiu a manipulação dinâmica das translações e reflexões, o que facilitou a análise da simetria e da congruência dos triângulos. Assim, ao manipular o controle, o estudante pôde deduzir informalmente que, para que o triângulo seja regular, os lados e os ângulos devem ser iguais, experimentando essas propriedades de maneira prática e intuitiva.

A terceira tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 47**. O participante Seth é destacado nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 47 – Tarefa 8.3 (Semelhança de Triângulos)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
1.1: Utilize a ferramenta "Controle Deslizante" para criar dois controles deslizantes, variando ambos de 0,1 a 10. *1.2: Use a ferramenta "Segmento de Comprimento Fixo" para construir um segmento com comprimento a, digitando a na Caixa de Comando. Em seguida, com a ferramenta ainda ativa, clique no ponto B e digite b na Caixa de Entrada para criar um segmento com comprimento b.* *1.3: Use as ferramentas "Mover" e "Polígono" para deslocar o ponto C de modo que ele não fique colinear com os pontos A e B, formando assim o ∆ABC.* ***a) Encontre a fórmula genérica do perímetro dos triângulos ABC e ECFG, considere o terceiro lado do ∆ABC com medida c.*** ***b) Qual é a relação entre os perímetros dos triângulos ABC e ECF?*** ***c) Suponha que a área do ∆ABC é S. Qual é a área do triângulo ECF? Qual é a relação entre as áreas dos triângulos ABC e ECF?*** *1.5: Use a ferramenta "Ponto" para criar um ponto G fora da região triangular ABC. Em seguida, trace as retas AG, BG e CG.* *1.6: Use a ferramenta "Homotetia" para aplicar uma homotetia ao ∆ABC com centro em G e fator de escala 1/2. Em seguida, aplique a homotetia ao ∆A'B'C' com o mesmo ponto G e fator 1/2.* ***d) O que você observa sobre a relação entre o ∆A'B'C' e o ∆ABC?*** *1.7: Use a ferramenta "Reflexão em Relação a Ponto" para refletir o ∆ABC em torno do ponto G.*	**Transcrição das respostas de Seth:** *a) Seja a, b e c os lados do triângulo ABC então seu perímetro será 2P=a+b+c. Como os segmentos que passam pelos pontos médios vale a metade do comprimento da base, então no triângulo EDF o perímetro é dado 2P' = a/2+b/2+c/2 = (1/2)(a+b+c).* *b) A relação entre os perímetros dos triângulos ABC e ECF é 2:1. O perímetro do triângulo ECF é a metade do perímetro do triângulo ABC.* *c) A área do triângulo ECF é um quarto da área do triângulo ABC. Se a área de ABC é S, a área de ECF será S/4. Isso ocorre porque o triângulo ECF é semelhante ao triângulo ABC com fator de semelhança 1/2. A área é proporcional ao quadrado do fator de semelhança.*

1.8: Use a ferramenta "Ponto Médio ou Centro" para encontrar os pontos médios de A' e A'_1, e depois de A'' e A'_1. Pontos como H e I. *1.9: Use a ferramenta "Reflexão em Relação a Ponto" para refletir o triângulo A'B'C' em relação ao ponto H e depois com essa ferramenta ativa faça o mesmo processo para refletir o triângulo A''B''C'' em relação ao ponto I. Ajuste as cores desses triângulos para mesma cor quando forem congruentes.* ***e) O que você observa?*** *1.10: Novamente, use a ferramenta "Ponto Médio ou Centro" para encontrar os pontos médios entre B'_1 e B''_2, e entre C'_1 e C''_1. Nomeie esses pontos como J e K.* *1.11: Use a ferramenta "Reta Paralela" para traçar as retas paralelas ao segmento A'_1B'_1 que passam, respectivamente, por C''', C''_1 e K. Em seguida, trace as retas paralelas ao segmento A'_1C'_1 que passam, respectivamente, por B''', B''_1 e J, e depois trace a reta paralela a B'_1C'_1 que passa por K. Ajuste todas essas retas para estilo pontuado e espessura 3.* ***f) Quantas regiões triangulares de mesma área do triângulo A''B''C'' podem ser encontradas no triângulo ABC? Explique sua resposta.***	*d) Após a homotetia com fator 1/2, o triângulo A'B'C' é semelhante ao triângulo ABC e tem a metade do tamanho dos lados. A nova figura é uma versão reduzida e proporcional do triângulo ABC com um fator 1/4.* *e) As reflexões mostram como esses três triângulos se encaixam, possibilitando uma visão da congruência dos ângulos internos.* *f) Observando a retas paralelas é possível afirmar que será 16 regiões triangulares equivalente a região A''B''C'', aplicando a razão de proporcionalidade é possível certificar isso, já que k=1/4 para o comprimento, então para área será $k^2=1/16$.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	
	

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

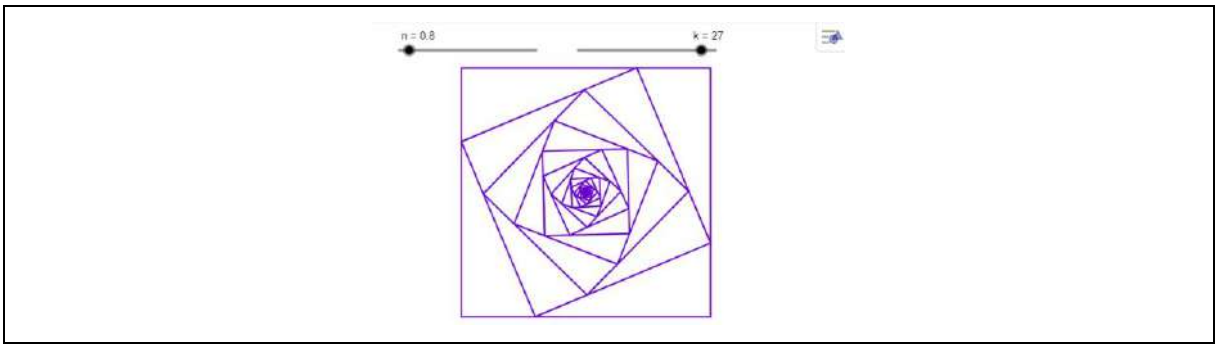
Na análise da Tarefa 8.3, é possível observar que Seth inicia sua operação no Nível 0, conforme o modelo de Van Hiele (1986). Isso se torna evidente quando ele reconhece os triângulos com base em considerações visuais. Em seguida, ele avança para o Nível 1 ao analisar informalmente as propriedades dos triângulos e as relações entre seus lados e áreas. À medida que avança na análise da tarefa, especialmente ao realizar a homotetia no triângulo ΔABC, o estudante demonstra um raciocínio de Nível 2, no qual começa a formular definições abstratas e a compreender as inter-relações entre as propriedades das figuras geométricas. Durante o desenvolvimento da tarefa, ele também atinge o Nível 3 ao deduzir formalmente as relações entre os triângulos homotéticos e ao utilizar reflexões para verificar a congruência dos ângulos. Ao final, ao determinar que a área do triângulo ΔABC pode ser dividida em 16 regiões triangulares equivalentes, Seth demonstrou um entendimento mais sofisticado de proporcionalidade e transformação geométrica, empregando raciocínio dedutivo para explorar as relações entre as áreas dos triângulos.

O uso dos recursos do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 3 (Dedução Formal) ao permitir que o estudante explorasse dinamicamente as propriedades geométricas e as relações entre os triângulos. Nesta análise, é possível notar que as ferramentas de homotetia, reflexão e ponto médio proporcionaram uma visualização clara dos fatores de escala e semelhança, facilitando a formulação da relação entre os perímetros e as áreas dos triângulos. Em decorrência disso, a transição da observação visual para a dedução formal foi favorecida pela construção interativa, na qual o estudante pôde constatar que a área do triângulo ΔECF é um quarto da área do triângulo ΔABC, por meio da relação de semelhança entre os triângulos e do fator de escala aplicado.

A última tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 48**. O participante Aden é destacado nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 48 – Tarefa 8.4 (Quadrados Infinitos)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
1. Utilize a ferramenta "Controle Deslizante" para criar dois controles, chamado um de n e outro de k, variando o primeiro de 0,1 a 10 e o outro de 0 a 30, este com incremento de 1. *2. Use a ferramenta "Segmento de Comprimento Fixo" e construa um segmento de medida n, digitando n na sua Caixa de Comando* *3. Use a ferramenta "Ponto em Objeto" e marque um ponto C no segmento AB.* *4. Use a ferramenta "Polígono Regular" para construir um quadrado ABDE, clicando em A e B e depois digitando 4 na sua Caixa de Comando.* *5. Use as ferramentas "Compasso" e "Interseção em Dois Objetos", meça a medida AC com o compasso e encontre essa medida no segmento BD com o centro em B, encontre o ponto de interseção desses dois elementos (Ponto F).* *6. Use a ferramenta "Polígono Regular" novamente e clique nos pontos C e F e digite 4 na sua Caixa de Comando.* ***a) O que você vê?*** *7. Encontre a razão dos segmentos CF com AB, para isso digite na Caixa de Entrada "r=Distância(C, F)/Distância(A, B).* ***b) Esse valor representa o que nessa construção?*** *8. Meça o valor do ∠BCF, use a ferramenta "Ângulo".* *9. Use a ferramenta "Ponto Médio ou Centro" e encontre o ponto I. Esconda os objetos geométricos criados até aqui.* ***c) Esse ponto representa o que?*** *10. Digite o seguinte comando na Caixa de Entrada: "l1=ListaDeIteração(Girar(Homotetia(i, r ,I), α, I), i, {pol1}, k-1).* ***d) O que você vê ao mover o controle deslizante k?*** ***e) Qual é a função do comando Hometetia(Objeto, Razão, Centro) integrado nessa construção?*** ***f) Qual é a função do comando Girar(Objeto, Ângulo, Ponto) integrado nessa construção?***	**Transcrição das respostas de Aden:** *a) Que foi formado um quadrado CFGH inscrito no quadrado ABDE, formando também mais 4 triângulos retos: ACH, CBF, FDG, GEH.* *b) Isso mostra como CF é proporcional a AB na construção.* *c) ele pode representar o centro de rotação para uma transformação geométrica.* *d) eu vejo que as figuras desenhadas giram e mudam conforme o valor de k. Isso cria uma série de figuras giradas ao redor do ponto I, mostrando uma transformação geométrica ao longo do controle deslizante.* *e) nessa construção é reduzir o objeto ao redor do ponto I, usando a razão k. Isso ajusta o tamanho da figura em relação ao centro I, criando uma série de figuras em tamanhos diferentes.* *f) Ele faz rotação do objeto ao redor do ponto I pelo ângulo especificado. Isso cria uma série de figuras giradas em torno de I, ajudando a visualizar como o objeto se transforma com a rotação.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	



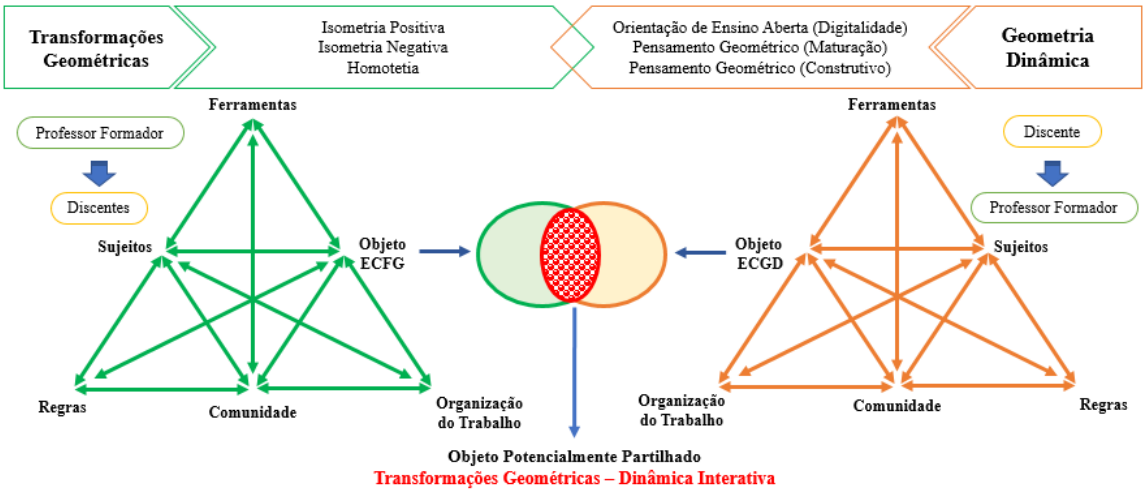
Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Na análise da Tarefa 8.4, observa-se que Aden operou, inicialmente, no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), identificando as figuras com base em sua aparência. Ao medir a razão entre os segmentos e identificar o ponto I como o centro de rotação, ele progrediu para o Nível 1, onde discerniu propriedades geométricas mais específicas. Ao utilizar os comandos de "Homotetia" e "Girar", o estudante avançou para o Nível 2, compreendendo as inter-relações entre as transformações geométricas e aplicando esses conceitos para explorar as transformações do quadrado.

O uso dos recursos do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 2 (Dedução Informal) ao permitir a exploração visual e interativa das transformações geométricas. Nesta análise, é possível observar que o controle deslizante, juntamente com as ferramentas de homotetia e rotação, possibilitou a visualização prática de como o quadrado é escalado e rotacionado em torno de um ponto fixo, facilitando a dedução informal das propriedades de proporcionalidade e simetria. Esse processo auxiliou os estudantes a identificar relações geométricas e a compreender conceitos de maneira mais intuitiva e dinâmica.

As quatro tarefas analisadas evidenciam, por meio da interação entre o ECFG e a ECGD, a criação de um objeto potencialmente partilhado, conforme descrito na quarta contradição de Engeström (2016). Nesse contexto, o objeto partilhado foi a compreensão dinâmica interativa das transformações geométricas, com foco na maturação do pensamento geométrico dos estudantes (**Esquema 32**).

Esquema 32 – Transformações Geométricas – Dinâmica Interativa



Fonte: Pesquisador (2024).

No sistema ECFG, o professor formador teve uma atuação mais intensa, apresentando os conceitos relacionados à isometria positiva e negativa, bem como à homotetia, de maneira estruturada e sequencial. O objetivo desse sistema foi ensinar as ‘Transformações Geométricas’ e estimular a investigação de suas aplicações por meio de operações como a construção de pontos, vetores, polígonos e outros objetos geométricos. Para isso, o professor realizava revisões teóricas do capítulo XIII do volume 9, proporcionando aos estudantes uma compreensão formal dos conhecimentos curriculares abordados.

De forma concomitante, no sistema ECDG, os estudantes assumiram um papel mais ativo e proativo. Nesse ambiente, eles tiveram a oportunidade de explorar os conceitos de maneira prática e interativa, manipulando objetos geométricos em um espaço digital dinâmico, o que resultou em um bom desempenho nas AOEA. Esse processo favoreceu o desenvolvimento de habilidades digitais, especialmente a mobilidade interativa das configurações geométricas por meio da ferramenta “Transladar por Vetor”. Por outro lado, o professor formador atuou como mediador nesse sistema, oferecendo suporte e *feedback online*, garantindo que a exploração dos estudantes fosse acompanhada de forma virtual e direcionada para a consolidação do aprendizado prático.

Neste sistema, a ideia de Kenski (2015b, p. 31) de que as TD são utilizadas para “[...] informar, comunicar, interagir e aprender” pode ser diretamente relacionada ao uso de recursos digitais empregados nas aulas. Essas tecnologias possibilitaram que os futuros professores interagissem de maneira prática e dinâmica com conceitos geométricos, ampliando suas capacidades cognitivas. Ao explorar as ‘Transformações Geométricas’ como translação, rotação e reflexão, os estudantes não apenas tiveram acesso à informação, mas também se

envolveram ativamente no processo de construção do conhecimento, promovendo a maturação do pensamento geométrico. Assim, o ggb-CB facilitou a conexão entre o conteúdo teórico e a prática, promovendo uma aprendizagem mais interativa e expandindo as fronteiras do saber.

As operações realizadas nesse sistema envolveram personalizações na visualização, apurações da área das figuras, medições, transformações e variações dos objetos, identificações, implantações, comparações e conexões de elementos, conformidações e programações da estrutura, além de construções geométricas com diversas possibilidades de manipulação. Essas operações estão em sintonia com a TA de Leontiev (2018), que sugere que os objetivos se transformam em tarefas específicas, ajustadas ao contexto e executadas por meio da ação prática. Ao utilizar ferramentas digitais para interagir com as 'Transformações Geométricas', os estudantes não apenas absorveram o conteúdo curricular, mas também o construíram ativamente por meio de uma prática dinâmica e interativa, consolidando o aprendizado por meio da experiência híbrida.

Na AOEA desta semana, os estudantes assumiram o protagonismo de sua própria formação, ampliando seu conhecimento de maneira autônoma. Por meio das interações e explorações propostas, desenvolveram sua autonomia intelectual, especialmente ao se depararem com desafios que exigiam reflexão e análise contínuas. Esse processo, caracterizado pelo aprendizado autoformativo, permitiu que aprofundassem sua compreensão sobre as 'Transformações Geométricas', estabelecendo conexões significativas entre os conceitos e suas aplicações práticas. Como afirma Galvani (2002, p. 97), "Não é possível pensar a autoformação sem articular o acoplamento interativo pessoa/meio ambiente e a tomada de consciência reflexiva". Essa perspectiva ressalta a importância da interação entre os estudantes e o ambiente de aprendizagem, que favoreceu a reflexão crítica e a construção do conhecimento geométrico.

Nesse ambiente, o progresso dos estudantes através dos diferentes níveis de pensamento geométrico, conforme o modelo de Van Hiele (1986), foi significativamente facilitado e ampliado pelo uso dos recursos do ggb-CB nessa proposta híbrida de ensino. Essa abordagem permitiu que os estudantes construíssem objetos geométricos de forma dinâmica e interativa, favorecendo um aprendizado mais visual e intuitivo. Ao trabalhar com essas ferramentas digitais, os estudantes não apenas visualizaram, mas também interagiram com os conceitos de maneira prática, o que, por sua vez, contribuiu para o desenvolvimento de uma compreensão mais profunda e abstrata.

Como resultado da análise, foi possível observar que nas tarefas 8.2 (Ladrilhamento Triangular) e 8.4 (Quadrados Infinitos), os estudantes Théo e Aden demonstraram avanços

significativos no Nível 2 de aprendizagem, ao conseguirem deduzir, de forma mais abstrata, as relações geométricas envolvidas, ainda que de maneira informal. Esses estudantes passaram a identificar padrões e conexões que os auxiliaram a compreender melhor as inter-relações entre os elementos geométricos.

Por outro lado, nas tarefas 8.1 (Demonstração Intuitiva da Soma dos Ângulos Internos do Triângulo) e 8.3 (Semelhança de Triângulos), os estudantes Ulan e Seth avançaram para o Nível 3, onde conseguiram desenvolver sequências de afirmações dedutivas e compreender a importância dessas deduções. Esses estudantes passaram a construir e interpretar provas, evidenciando a transição de um conhecimento mais compreensível para um entendimento mais abstrato e lógico das propriedades geométricas.

Em virtude dos fatos apresentados, a integração dos dois sistemas (ECFG e ECGD) resultou no objeto partilhado mencionado anteriormente. Em virtude disso, neste processo de ensino, realizado por meio desta proposta híbrida, a combinação de uma abordagem pedagógica sustentada pela autoformação e pelo uso de TDI, em conformidade com a TA, contribuiu significativamente para o avanço da compreensão dos estudantes sobre as ‘Transformações Geométricas’. Essa análise permitiu uma reflexão mais profunda sobre o impacto desse método, destacando não apenas a importância da mediação pedagógica e tecnológica, mas também o desenvolvimento autônomo e cooperativo dos estudantes ao longo do processo de aprendizagem.

4.9 Explorando as Circunferências e Círculos

Na nona semana, as aulas foram estruturadas para explorar as ‘Circunferências e Círculos’, com o objetivo de promover uma compreensão dinâmica desse conteúdo curricular. Nesse cenário híbrido de ensino, as ações pedagógicas envolveram a construção e exploração do objeto de estudo, investigação, identificação e aplicação prática, tanto em relação à posição da circunferência em relação a outra circunferência ou a uma reta, quanto à área circular e ao comprimento da circunferência. Além disso, houve interação discursiva sobre as aplicabilidades abordadas.

Para isso, foi necessário expandir o repertório operacional dos estudantes por meio de tarefas teóricas e práticas. A aplicação das AOEA foi essencial nesse processo, pois forneceu diretrizes para a criação, manipulação e personalização de pontos, segmentos, círculos e outros objetos geométricos. Essas atividades foram planejadas para alcançar as metas Ciade,

aproximando a turma dos recursos tecnológicos adotados, especialmente no incentivo à cultura digital com a utilização da ferramenta “Círculo: Centro & Raio”.

O **Quadro 49**, apresentado a seguir, ilustra a estrutura e organização dessa abordagem no contexto de ensino da nona semana.

Quadro 49 – Planejamento da nona semana de aula

<table>
<tr><td colspan="4">Artefatos
Computador e Smartphone.
GeoGebra: Plataforma; Classroom Beta; Classic; Geometria.
<u>Ferramentas Específicas</u>: Mover; Ponto; Ponto em Objeto; Interseção de Dois Objetos; Ponto Médio ou Centro; Reta; Segmento; Segmento de Comprimento Fixo; Reta Perpendicular; Reta Paralela; Bissetriz; Reta Tangente; Polígono; Polígono Regular; Círculo dados o Centro e um dos seus Pontos; Círculo: Centro & Raio; Compasso; Círculo definido por Três Pontos; Ângulo; Distância, Comprimento e Perímetro Controle Deslizante; Texto; Apagar.
Comandos: ArcoCircular(...); Área(...); Centro(...); Distância(...); Elemento(...); Interseção(...); Girar(...); SegmentoFixo(...); Sequência(...); SetorCircular(...).
<u>Livro</u>: Fundamentos de Matemática Elementar 9: geometria plana (Cap. X, XVII e XIX).</td></tr>
<tr><td>Objeto
Circunferências e Círculos</td><td>Motivo
Necessidade de promover a compreensão dinâmica dos conceitos relacionados às Circunferências e Círculos.</td><td colspan="2">Ação
❖ Construção e exploração das Circunferências e Círculos de modo dinâmico;
❖ Investigação, identificação e aplicação a posição da circunferência com outra circunferência ou objeto geométrico, área circular e comprimento da circunferência;
❖ Interação discursiva das aplicabilidades abordadas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Operações
Comparações: aferir semelhanças e diferenças dos elementos;
Personalizações: configurar, renomear, exibir/ocultar, etc.;
Conformidações: preservar as subsistências das estruturas;
Medições: medir comprimentos e amplitudes angulares;
Construções: produzir pontos, segmentos, círculos, etc.;
Inquietações: expor dúvidas subjetivas e/ou coletivas;
Interlocuções: participar das discussões construtivas;
Identificações: localizar as interseções dos objetos;
Programações: processar comandos de construção;
Sincronizações: encontrar os pontos tangenciais;
Explorações: testar os recursos do GeoGebra;
Revisões: revisar os conteúdos curriculares;
Implantações: inserir elementos adaptáveis;
Execuções: resolver roteiros das AOEA;
Variações: ampliar/reduzir os objetos;
Transformações: deslocar os objetos;
Apurações: calcular área das figuras;
Interações: interagir com as AOEA;
Administrações: gerenciar conta;
Aplicações: resolver problemas;
Conexões: conectar elementos;
Manipulações: mover objetos.</td><td colspan="2">Metas
➢ Construir pontos, segmentos, círculos, etc. para explorar as transformações geométricas com a mediação tecnológica das ferramentas e comandos do GeoGebra;
➢ Investigar e aplicar conceitos relacionados a posição da circunferência com outra circunferência ou objeto geométrico, área circular e comprimento da circunferência;
➢ Desenvolver habilidades práticas de consistência radial interativa da estrutura geométrica com uso da ferramenta “Círculo: Centro & Raio”;
➢ Estimular discussões e reflexões sobre abordagens teóricas e práticas relacionadas ao objeto de estudo.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Condições
Ambiente de ensino híbrido com suporte contínuo da equipe docente para auxiliar na aprendizagem das Circunferências e Círculos durante as atividades presenciais, oferecendo orientações e estímulos personalizados durante as observações online a distância.</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisador (2024).

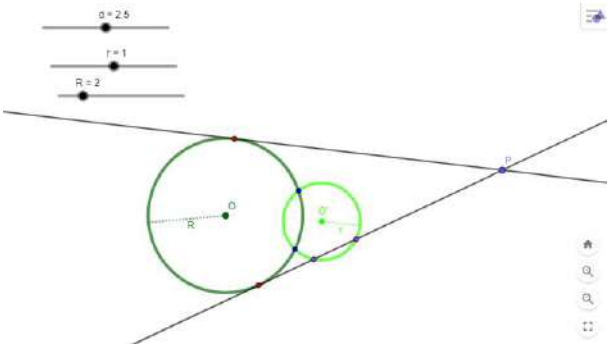
Na primeira etapa da aula da nona semana, o professor formador iniciou a discussão definindo o conceito fundamental de circunferência como o conjunto de pontos em um plano que estão a uma mesma distância de um ponto fixo, denominado centro. Ele destacou a importância do raio, que é a distância constante entre o centro e qualquer ponto da circunferência. De forma interativa, utilizando o GeoGebra *Classic online*, na disposição de Geometria, o professor demonstrou aos estudantes as diferentes posições relativas entre duas circunferências por meio da movimentação dos objetos geométricos, utilizando a mediação tecnológicas das ferramentas “Centro: Centro & Raio”, “Controle Deslizante”, “Interseção em Dois Objetos”, “Segmento”, “Ponto” e “Reta Tangente”.

O professor formador criou três controles deslizantes (*R*, *r* e *n*). Dois deles ajustavam os raios das circunferências, enquanto o terceiro controlava o comprimento do segmento n que as separava. Em seguida, ele desenhou uma circunferência em cada extremidade do segmento mencionado. O professor demonstrou como as alterações nos valores dos controles deslizantes influenciam a relação entre as duas circunferências.

Nesse cenário, com a circunferência menor posicionada dentro da maior, ele observou a configuração de circunferência interna. Em seguida, ao sobrepor os centros, configurou as circunferências como concêntricas. Ajustando a distância entre os centros, ele alcançou a tangência interna, na qual as circunferências se tocavam em um único ponto. Posteriormente, ao aumentar a distância, chegou à configuração de circunferências secantes, que apresentavam dois pontos de interseção. Ao realizar novos ajustes, observou a tangência externa e, por fim, a configuração em que a circunferência externa não se tocava com a interna.

O professor formador aproveitou a construção para explorar os conceitos de reta secante, tangente e exterior a uma circunferência, utilizando ferramentas apropriadas. Dessa forma, ele demonstrou que uma reta é secante quando intercepta a circunferência em dois pontos distintos, cruzando-a por dentro, o que foi evidenciado por meio de uma figura que destacava os pontos de interseção. Em seguida, explicou que uma reta é tangente quando toca a circunferência em um único ponto, sem cruzá-la, ressaltando o ponto de tangência na construção de uma reta tangente à circunferência. Ele também abordou a situação em que uma reta é exterior à circunferência, mostrando que, nesse caso, a reta não toca nem cruza a circunferência, o que foi demonstrado com a construção de uma reta que permanece fora da circunferência, sem interseção, conforme ilustrado na **Figura 27**.

Figura 27 – Posição das circunferências em relação a outros elementos



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/sgesshxs. Acesso em: 14 ago. 2024.

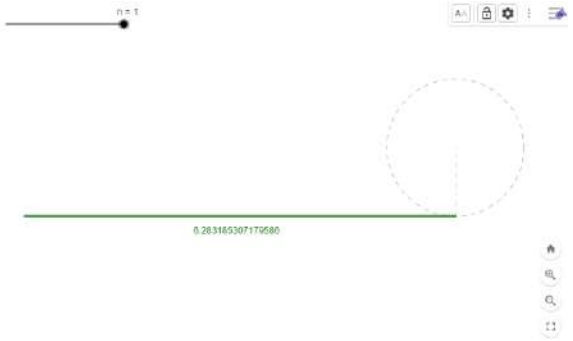
Na segunda etapa da aula, o professor formador abordou conceitos e propriedades relacionados ao cálculo do perímetro do círculo e ao comprimento da circunferência. Ele apresentou algumas propriedades essenciais que serviram de base para a compreensão do problema. Embora não tenha sido realizada uma demonstração rigorosa dessas propriedades, o professor enfatizou a importância da compreensão das conclusões e a sequência lógica a ser seguida. Uma delas é a propriedade que estabelece que o perímetro de qualquer polígono convexo inscrito em uma circunferência é menor do que o perímetro de qualquer polígono circunscrito à mesma circunferência. Outra propriedade mencionada foi a que afirma que a razão entre o perímetro do círculo e seu diâmetro é uma constante, representada por π, fundamental para o cálculo do comprimento da circunferência.

Para demonstrar intuitivamente o comprimento da circunferência, o professor formador utilizou a mediação tecnológica de diversas ferramentas, como “Controle Deslizante”, “Segmento”, “Segmento de Comprimento Fixo”, “Reta Perpendicular”, “Centro: Centro & Raio”, “Interseção de Dois Objetos” e “Distância, Comprimento ou Perímetro”, além dos comandos “Girar(...)” e “ArcoCircular(...)”. Ele explorou esses conteúdos de maneira prática e teórica.

O professor formador iniciou a atividade criando um controle deslizante denominado *n*. Em seguida, traçou um segmento *AB* com comprimento 2π e uma circunferência *c* com centro em *A* e raio 1. A partir desse ponto, ele criou uma reta perpendicular ao segmento *AB* em *B* e determinou um ponto *C* como a interseção entre essa reta perpendicular e a circunferência. Utilizando a fórmula “$C_1 = (x(C) + 2\pi n, y(C))$” na Caixa de Entrada, ele gerou um ponto na reta perpendicular, que passou a ser o centro da nova circunferência *d*, também com raio 1. Posteriormente, encontrou o ponto *D*, que é a interseção entre a circunferência *d* e o segmento *AB*, e traçou os segmentos *AD* e *C_1D*.

O próximo passo foi utilizar o comando “Girar(...)” para criar um ponto *D’* que gira no sentido oposto ao ponto *D*, e o comando “ArcoCircular(...)” para desenhar o arco *DD’*. Para evitar confusões, a circunferência d foi ajustada para o estilo pontilhado. O professor destacou como a posição do ponto *D’* variava com o controle deslizante n, demonstrando a relação entre o comprimento do arco e a configuração de *n*. Para concluir a construção, ele adicionou uma circunferência *k* com centro em *C* e raio *r*, que deveria aparecer apenas quando $n = 0$. Essa condição foi configurada utilizando a opção “Condições para Exibir Objeto(s)” no GeoGebra, garantindo que a circunferência *k* fosse visível somente nesse caso. Após ocultar alguns objetos e ajustar a precisão da visualização para 15 casas decimais, o professor exibiu o comprimento da circunferência *d*, utilizando a máxima precisão suportada pelo GeoGebra, conforme ilustrado na **Figura 28**.

Figura 28 – Comprimento da circunferência



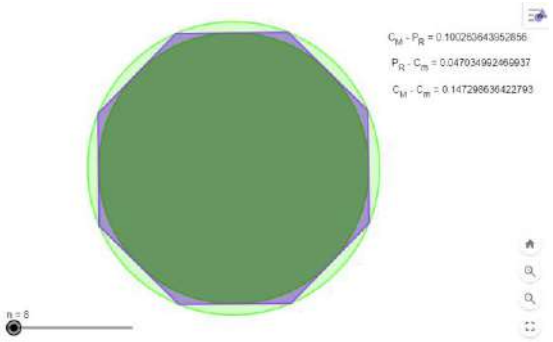
Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/t7nhvunh. Acesso em: 14 ago. 2024.

Na terceira etapa da aula, o professor formador introduziu a questão da área circular, destacando que todo polígono regular possui um círculo circunscrito e outro inscrito. Utilizando mediação tecnológica, ele fez uso das ferramentas “Controle Deslizante”, “Mover”, “Círculo definido por Três Pontos”, “Polígono Regular”, “Área” e “Texto”, além dos comandos “Centro(...)” e “Área(...)”, para explorar esse conteúdo de forma teórica e prática.

Nesse contexto, o professor criou um controle deslizante inteiro, denominado *n*, e gerou um polígono regular de *n* lados. Inicialmente, o polígono criado foi o triângulo ΔABC. Com os três vértices desse triângulo, ele construiu o círculo circunscrito. Utilizando o comando Centro(...), localizou o centro da circunferência e, em seguida, determinou o ponto médio do lado *AB*. Posteriormente, construiu a circunferência inscrita, nomeando os três objetos geométricos como C_M, P_R e C_m.

Dessa forma, à medida que o número de lados aumentava, o polígono tornava-se quase indistinguível da circunferência. Nesse momento, o professor formador destacou que, conforme aumentamos o número de lados de um polígono regular, ele se aproxima cada vez mais da forma de um círculo. Além disso, utilizou a "Janela de Álgebra" para comparar os valores, calculando as seguintes diferenças: $C_M - P_R$, $P_R - C_m$ e $C_M - C_m$, tanto para os perímetros quanto para as áreas. Ele utilizou os comandos "Área(Cônica)" e "Área(Polígono)" para evidenciar essas diferenças com até 15 casas decimais, ajustadas na barra de menu. Nessa linha de pensamento, o professor demonstrou que, à medida que o controle deslizante aumentava o número de lados do polígono regular, o espaço entre o polígono e a circunferência diminuía, fazendo com que as diferenças nos valores convergissem para zero, conforme ilustrado na **Figura 29**.

Figura 29 – A diferença entre as áreas do polígono de n lados e dos círculos



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/dngantmr. Acesso em: 14 ago. 2024.

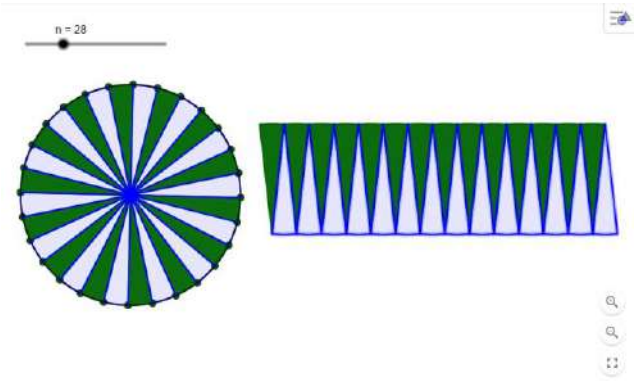
De um modo geral, o professor formador explicou que, à medida que o número de lados aumenta, os perímetros dos polígonos se aproximam do comprimento da circunferência, e os apótemas tornam-se cada vez mais próximos ao raio do círculo. A partir disso, ele demonstrou que a área do círculo pode ser calculada como o produto do semiperímetro pelo raio. Com base nessa explicação, o professor destacou que a área do círculo pode ser expressa como o produto do semiperímetro pelo raio. Em decorrência disso, ele apresentou a fórmula $A_C = \pi r^2$, onde r representa o raio, demonstrando a equivalência da área do círculo com a expressão $A_C = \pi d^2/4$, sendo d o diâmetro. Essa abordagem conectou os conceitos de perímetro, apótema e área dos polígonos ao cálculo da área do círculo, proporcionando uma compreensão mais clara da fórmula.

Ainda na terceira etapa da aula, o professor formador, utilizando a mediação tecnológica das ferramentas "Círculo: Centro & Raio", "Ponto em Objeto", "Ponto Médio ou Centro" e "Segmento", assim como dos comandos "Girar(...)", "Sequência(...)", "SetorCircular(...)" e

“Elemento(...)”, abordou esse conceito de forma teórica e prática, explorando a subdivisão de um círculo em setores.

Ele criou dois controles deslizantes: um para ajustar o raio e outro para definir o número de setores, e desenhou o círculo. Em seguida, inseriu um ponto na circunferência e, utilizando os comandos “Girar(...)” e “Sequência(...)”, fez o ponto girar em múltiplos de um ângulo específico, gerando uma sequência de pontos ao longo da circunferência. Com esses pontos, utilizou o comando “Elemento(...)” para selecionar pontos específicos e, em seguida, encontrou os pontos médios entre pares consecutivos, traçando os segmentos entre eles. Para gerar os setores circulares, combinou os comandos “Sequência(...)”, “SetorCircular(...)” e “Elemento(...)”, criando várias listas que subdividiam o círculo em partes iguais, ajustando e combinando as listas para proporcionar diferentes visualizações detalhadas da divisão do círculo, conforme ilustrado na **Figura 30**.

Figura 30 – Área do círculo



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/fk9jzqbx. Acesso em: 14 ago. 2024.

Com essa abordagem, foi possível demonstrar de forma intuitiva que a área total do círculo se aproxima cada vez mais da área de um retângulo com comprimento $\pi \times r$ e altura r, à medida que o número de setores n aumenta. Consequentemente, o método evidencia a relação entre a área do círculo e a área do retângulo, destacando a convergência da área do círculo para a área do retângulo à medida que os setores se tornam mais finos.

Em síntese, esta nona semana de aula representa o Sistema de Atividades IX, no qual foram explorados os conhecimentos curriculares relacionados às ‘Circunferências e Círculos’, conforme as abordagens realizadas pelo professor formador. No entanto, durante esse processo, caracterizado pela pluralidade e multivocalidade, foram observadas algumas tensões e inquietações, que serão analisadas no próximo subtópico.

4.9.1 Análise das contradições heteroformativas no sistema de atividades IX

A análise das interações da aula do Sistema de Atividades IX, fundamentada nas contradições primária, secundária e terciária de Engeström (2016), revelou as tensões e as possibilidades de aprendizagem que emergiram enquanto os estudantes se dedicavam tanto à construção de pontos, segmentos, círculos e outros objetos geométricos no ggb-CB, quanto à exploração dos conhecimentos curriculares relacionados às ‘Circunferências e Círculos’, temas abordados pelo professor formador.

A contradição primária de Engeström (2016) emergiu da tensão entre o valor de uso e o valor de troca ao abordar a relação entre conceitos teóricos (circunferência e círculos) e sua aplicação prática no GeoGebra. Um exemplo disso ocorreu quando Ulan questionou se um polígono com muitos lados poderia se transformar em um círculo. Essa pergunta revelou a tensão entre o valor teórico do círculo, entendido como uma curva contínua, e a solução prática de aproximá-lo por meio de polígonos de múltiplos lados. A resposta do professor, ao explicar e demonstrar essa diferença na mencionada TD, evidenciou a ideia de heteroformação, conforme Macedo (2010), na qual o aprendizado se dá pela interação com os outros, tanto com o professor quanto com os colegas. Esse momento destacou como o conhecimento foi construído de maneira coletivamente interativa e gradual, à medida que os estudantes, por meio do diálogo e da exploração prática, aprofundavam sua compreensão dos conceitos geométricos.

Foi possível observar que a contradição secundária proposta por Engeström (2016) manifestou-se entre os componentes do sistema de atividade, como a utilização das ferramentas do GeoGebra para alcançar os objetivos da aula. Quando Elen questionou sobre o uso do comando “Girar” para subdividir o círculo em setores, isso evidenciou uma tensão entre a complexidade das ferramentas e o propósito de compreender o conceito de divisão de uma circunferência. Nesse momento, o processo de internalização do conhecimento descrito por Vygotsky (2019) ocorreu à medida que o professor orientou os estudantes a transformar o conhecimento teórico (como a fórmula do comprimento da circunferência) em algo que pudessem visualizar e manipular.

O GeoGebra possibilitou que os estudantes internalizassem a relação entre ângulos, setores e a área de uma circunferência de maneira compreensível e interativa, com ênfase especial na ferramenta “Círculo: Centro & Raio”. Esse processo formativo mediou uma integração entre a teoria abstrata e a prática visual, ressaltando a importância da mediação

tecnológica no aprendizado. A resolução da tensão entre a complexidade das ferramentas e o objetivo de compreensão demonstrou como as TDI podem enriquecer o processo de ensino, promovendo não apenas uma aprendizagem mais autônoma e reflexiva, mas também coletivamente interativa.

A contradição terciária de Engeström (2016) se manifestou quando o uso do GeoGebra desafiou as abordagens tradicionais de ensino. A introdução das TD, conforme discutido por Lévy (2023), ampliou as possibilidades de exploração educacional (geométrica) ao proporcionar uma interação dinâmica e visual com conceitos anteriormente considerados abstratos. Théo, ao expressar surpresa com a visualização do comprimento da circunferência utilizando o controle deslizante, exemplificou como o uso dessas ferramentas facilitou a compreensão de conceitos que seriam muito mais difíceis de entender sem o suporte digital.

O impacto das TDI, como as observadas no uso do GeoGebra, dialoga com a concepção de Lévy (2003) sobre "saber-fluxo" e o trabalho-transação do conhecimento. Ao integrar ferramentas digitais ao ensino, a educação torna-se mais fluida e adaptável, refletindo a singularidade dos percursos de aprendizagem. No caso de Théo, a surpresa ao visualizar o comprimento da circunferência de forma dinâmica evidencia como essa experiência personalizada favoreceu uma compreensão individualizada, corroborando a ideia de que os percursos de competência não podem ser restringidos a métodos tradicionais ou cursos padronizados.

Essa transformação no ensino, facilitada pela tecnologia, reconfigura as formas de aprendizagem, alinhando-se ao pensamento de Lévy (2021), que defende que os processos de formação e conhecimento devem adaptar-se às singularidades de cada estudante, em vez de seguir um caminho linear e uniforme. A aprendizagem não é mais estática ou individualizada apenas dentro dos limites da sala de aula tradicional; ela se torna um processo interativo, no qual a ferramenta digital expande e acelera o entendimento por meio da visualização, colaboração e exploração ativa. Assim, quando a tecnologia é mediada de maneira adequada, promove-se uma inteligência coletiva, permitindo que a sala de aula se transforme em um espaço de construção coletiva de conhecimento, alterando a forma como os estudantes se relacionam com os conteúdos.

A resolução dessas contradições, apresentada nesta proposta de ensino híbrido (Horn; Staker, 2015), reflete um movimento de integração entre as ferramentas digitais e o processo de aprendizagem, no qual o GeoGebra desempenha um papel essencial ao complementar e enriquecer a prática pedagógica. A interação entre o professor e os estudantes, mediada pela

TD, não apenas possibilitou a visualização e manipulação direta dos conceitos geométricos, mas também gerou um ambiente de aprendizagem ativa e coletivamente interativa. Nesse contexto, os estudantes não estavam apenas recebendo o conteúdo de forma passiva; ao contrário, estavam explorando, ajustando e reconfigurando suas compreensões sobre conceitos como área circular, comprimento da circunferência e as relações entre circunferências e outros elementos geométricos.

Esse movimento foi, sem dúvida, um exemplo de heteroformação (Macedo, 2010), no qual o conhecimento não foi transmitido de forma isolada, mas sim co-construído em um processo contínuo de interação entre estudantes, professor e tecnologia. A utilização do GeoGebra como ferramenta mediadora não apenas facilitou a visualização dos conceitos, mas também estimulou a construção coletiva do conhecimento, onde o aprendizado resultou da troca de ideias, da exploração prática e da reflexão conjunta. Nesse processo, a tecnologia tornou-se um meio para reorganizar e aprofundar a compreensão coletiva, desafiando o modelo tradicional de aprendizagem e promovendo uma experiência mais dinâmica e interativa.

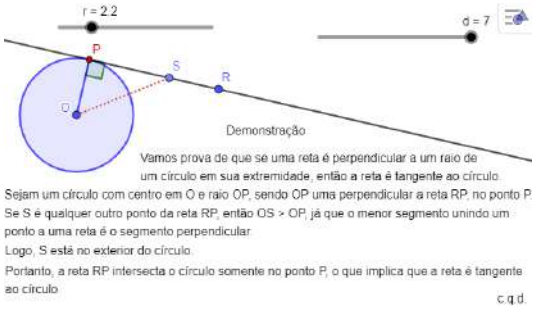
4.9.2 Análise das contradições autoformativas no sistema de atividades IX

Com a base estabelecida no subtópico anterior, que tratou das dinâmicas heteroformativas e suas tensões, resultando na construção coletiva do conhecimento, a análise agora se volta para os aspectos autoformativas no Sistema de Atividades IX, fundamentando-se nesse processo tecformativo digital e evidenciando como os estudantes adotaram uma postura mais autônoma e proativa no processo de aprendizagem das ‘Circunferências e Círculos’. Assim, nesta parte, discute-se a maneira como os níveis de aprendizagem (Van Hiele, 1986) se manifestaram nas tarefas dos quatro participantes que mais se destacaram durante as interações da nona semana de aula. Após essa análise, é apresentada a interação geral entre os sistemas envolvidos à luz da contradição quaternária (Engeström, 2016).

A primeira tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 50**. A participante Mary é destacada nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 50 – Tarefa 9.1 (Prova da Reta Tangente ao Círculo)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
Prova que se uma reta é perpendicular a um raio de um círculo em sua extremidade, então a reta é tangente ao círculo.	***Transcrição das respostas de Mary:***

1. Orientações construtivas: *1.1. Utilize a ferramenta "Controle Deslizante" para criar um controle deslizante chamado r, variando seus valores de 0,1 a 10.* *1.2. Use a ferramenta "Círculo: Raio & Centro" para construir um círculo com raio n. Com essa ferramenta ativada, clique na Janela de Visualização e digite n na Caixa de Comando. Ajuste a cor para a visualização de círculo.* *1.3. Use a ferramenta "Ponto" para adicionar um ponto R fora do círculo.* *1.4. Use a ferramenta "Reta Tangente" e clique no ponto R e no círculo.* ***a) O que você vê? Por que aparecem duas retas?*** *1.5. Use a ferramenta "Interseção em Dois Objetos" para encontrar os pontos de tangência das retas com o círculo, e nomeie esses pontos como P e Q.* *1.6. Use a ferramenta "Ponto em Objeto" para determinar um ponto S na reta RP.* *1.7. Use a ferramenta "Segmento" para traçar os segmentos OP e OS, e ajuste o segmento OS para a cor verde e estilo pontuado.* *1.8. Esconda a reta RQ, o raio OQ e o ponto Q e meça o ∠POR, usando a ferramenta "Ângulo".* ***b) O que você pode dizer sobre os segmentos OP e OS?*** ***2. Aplique os passos das orientações para a demonstração argumentativa*** *(Use a propriedade da menor distância entre uma reta e um ponto fora dela).* ***3. Use as orientações para a demonstração dinâmica.***	*a) Vejo duas retas tangentes ao círculo a partir do ponto R. Isso acontece porque, a partir de um ponto externo a um círculo, pode-se traçar duas tangentes distintas que tocam o círculo em pontos diferentes.* *b) O segmento OP sempre é menor igual ao OS.* *Demonstração* *Sejam um círculo com centro em O e raio OP, sendo OP perpendicular a reta RP, no ponto P. Se S é qualquer outro ponto da reta RP, então OS > OP, já que o menor segmento unindo um ponto a uma reta é o segmento perpendicular. Portanto, S está no exterior do círculo. Logo, a reta RP intersecta o círculo somente no ponto P, o que implica que a reta é tangente ao círculo.* *c.q.d.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	
	

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Na análise da Tarefa 9.1, observa-se que, ao identificar visualmente as duas tangentes traçadas a partir de um ponto externo ao círculo, Hend demonstrou um pensamento geométrico no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), reconhecendo figuras e elementos geométricos básicos. Ao avançar na análise da tarefa e descrever as relações entre os segmentos *OP* (raio) e *OS* (segmento adicional), a estudante transitou para o Nível 1, identificando informalmente as propriedades dos segmentos, embora sem estabelecer inter-relações complexas. Em seguida, ao utilizar a propriedade da menor distância entre um ponto e uma reta para demonstrar a perpendicularidade da tangente ao raio no ponto de tangência, Hend progrediu para o Nível 2. Nesse processo, ela não apenas reconhece as propriedades das figuras, mas também desenvolve uma sequência lógica de afirmações dedutivas. Em virtude disso, a estudante utiliza conceitos

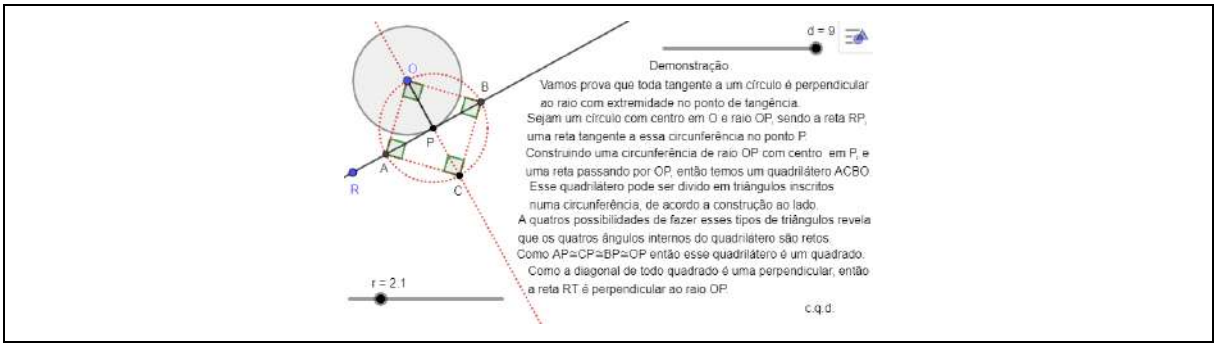
de distância e perpendicularidade de forma formal, o que sugere que ela está raciocinando dentro de um sistema matemático, características do Nível 3.

O uso dos recursos do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 3 (Dedução Formal) ao proporcionar uma visualização dinâmica da prova. Nesta análise, é possível notar que as ferramentas de tangência, interseção e medição de ângulos permitiram que a estudante observasse diretamente as relações entre os segmentos e os ângulos formados, levando-a a perceber que o segmento perpendicular ao raio no ponto de tangência é o menor possível. Isso facilitou a formulação da conclusão formal, demonstrando que a reta é tangente ao círculo. A interação com a construção dinâmica e os ajustes visuais reforçaram a dedução lógica e a compreensão dos conceitos envolvidos.

A segunda tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 51**. O participante Théo é destacado nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 51 – Tarefa 9.2 (Prova da Reta Perpendicular ao Raio do Círculo)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
Prove que toda tangente a um círculo é perpendicular ao raio com extremidade no ponto de tangência. ***1. Orientações construtivas:*** *1.1. Refaça os passos 1.1 até o 1.9 da tarefa 9.2.* *1.2. Use a ferramenta "Compasso" e meça o raio OP e construa uma circunferência centrada em P, ajuste para estilo fino vermelho* *1.3. Use a ferramenta "Reta" e trace a reta OP, ajuste para estilo fino vermelho.* *1.4. Use as ferramentas "Interseção em Dois Objetos" e "Segmentos", encontre os pontos de interseção dessa circunferência com as retas e conecte esses pontos formando um caminho poligonal fechado simples.* ***a) Que figura você afirma que formou, sem medir os ângulos e os lados, com esses quatros pontos contido na circunferência?*** ***b) Dentro dessa figura, quais outras você consegue ver?*** ***2. Aplique os passos das orientações para a demonstração argumentativa** (Use a propriedade da perpendicularidade das diagonais de um quadrado).* ***3. Use as orientações para a demonstração dinâmica.***	***Transcrição das respostas de Théo:*** *a) Formei um quadrilátero.* *b)Consigo vê 4 triângulos grandes, ACB, CBO, BCO e COA e mais 4 triângulos isósceles pequenos, APC, CPB, BPO e OPA.* *Demonstração:* *Vamos mostrar que toda tangente a um círculo é perpendicular ao raio com extremidade no ponto de tangência. Sejam um círculo com centro em O e raio OP, sendo a reta RP, uma reta tangente a essa circunferência no ponto P. Construindo uma circunferência de raio OP com centro em P, e uma reta passando por OP, então temos um quadrilátero ACBO. Esse quadrilátero pode ser dividido em triângulos inscritos numa circunferência, de acordo com a construção ao lado. A quatro possibilidades de fazer esses tipos de triângulos revela que os quatros ângulos internos do quadrilátero são retos. Como AP≅ CP≅ BP≅ OP então esse quadrilátero é um quadrado. Como a diagonal de todo quadrado é uma perpendicular, então a reta RT é perpendicular ao raio OP.* *c.q.d.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	



Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

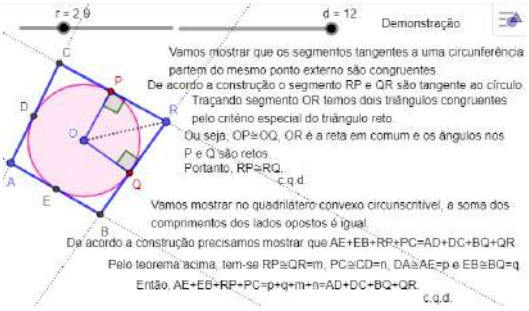
Na análise da Tarefa 9.2, infere-se que Théo operou, inicialmente, no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), reconhecendo visualmente as figuras sem formalizar suas propriedades. À medida que avançava, começou a discernir características e relações entre as figuras, como a congruência dos triângulos formados, sugerindo uma transição para o Nível 1. Na fase de construção da demonstração, ao conectar a propriedade da perpendicularidade das diagonais do quadrado com a tangência, o estudante alcançou o Nível 2. Entretanto, ele não apenas identificou as figuras e suas características, mas também construiu uma argumentação formal que relaciona a tangente à perpendicularidade do raio. Essa habilidade de desenvolver sequências de afirmações dedutivas indica que Théo compreende a importância das deduções. Essa capacidade de raciocínio formal e a construção de provas são características do Nível 3.

O uso dos recursos do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 3 (Dedução Formal) ao proporcionar ao estudante uma exploração visual e interativa das relações geométricas envolvidas. Nesta análise, é possível observar que a construção dinâmica de tangentes, circunferências e quadriláteros, assim como a medição de ângulos e segmentos, forneceu uma base compreensível para a dedução lógica. Dessa forma, a visualização de triângulos isósceles e quadriláteros dentro da circunferência ajudou a evidenciar a perpendicularidade entre a reta tangente e o raio, facilitando a formulação de uma prova formal. Em decorrência disso, as interações dinâmicas promoveram uma compreensão profunda e a justificação do teorema.

A segunda tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 52**. A participante Elen é destacada nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 52 – Tarefa 9.3 (Provas: Segmentos Tangentes ao Círculo e Teorema de Pitot)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**

1. Mostre que os segmentos tangentes a uma circunferência que partem do mesmo ponto externo são congruentes. ***1. Orientações construtivas:*** *1.1. Refaça os passos 1.1 até o 1.8 da tarefa 9.2.* *1.2. Use a ferramenta "Apagar" e apague o ponto S.* *1.3. Use a ferramenta "Segmento" e trace o segmento OR, ajuste para o estilo pontuado, e os segmentos RP e QP, ajuste esse para cor azul.* ***a) Que figura você pode afirmar que formou, sem medir os ângulos? Por quê?*** *1.4. Meça os ângulos POR e ORR.* ***2. Aplique os passos das orientações para a demonstração argumentativa (2.3. Use os critérios de congruência de triângulos).*** *3. Mostre o Teorema de Pitot: no quadrilátero convexo circunscritível, a soma dos comprimentos dos lados opostos é igual.* *3.1. Use a ferramenta "Ponto" e indique um ponto A fora do círculo e sentido oposto ao ponto R, em relação ao círculo.* *4.2. Use a ferramenta "Reta Tangente" e clique no ponto A e depois no círculo.* *4.3. Use a ferramenta "Interseção em Dois Objetos" para identificar, primeiramente, os pontos de interseção entre as retas tangentes, e depois entre as retas e o círculo.* *4.4. Use a ferramenta "Segmento" e trace os segmentos que façam a conexão dos pontos de modo a formar um quadrilátero circunscritível. Ajuste esse segmento para azul e o estilo das retas tangentes deixe fino com espessura 3.* ***5. Aplique os passos das orientações para a demonstração argumentativa** (Use a propriedade dos segmentos congruentes que partem de um mesmo ponto externo a uma circunferência).* ***6. Use as orientações para a demonstração dinâmica.***	**Transcrição das respostas de Elen:** *a) Foi formado dois triângulos retângulos um no ponto P e outro ponto Q, pelo teorema da reta tangente ao círculo.* *Demonstração* *1. Vamos mostrar que os segmentos tangentes a uma circunferência que partem do mesmo ponto externo são congruentes. De acordo com a construção, o segmento RP e QR são tangentes ao círculo. Traçando segmento OR temos dois triângulos congruentes pelo critério especial do triângulo retângulo. Ou seja, OP≅OQ, OR é a reta em comum e os ângulos nos P e Q são retos. Portanto, RP≅RQ.* *c.q.d.* *Vamos mostrar no quadrilátero convexo circunscritível, a soma dos comprimentos dos lados opostos é igual. De acordo com a construção precisamos mostrar que AE + EB + RP + PC = AD + DC + BQ + QR. Pelo teorema acima, tem-se RP ≅ QR = m, PC ≅ CD = n, DA ≅ AE = p e EB ≅ BQ = q. Então, AE + EB + RP + PC = p+ q + m + n = AD + DC + BQ+ QR.* *c.q.d.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	
	

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Na análise da Tarefa 9.3, ao observar que foram formados dois triângulos retângulos nos pontos *P* e *Q*, Elen está operando no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986). Quando ela analisa que os dois triângulos são congruentes e utiliza o teorema dos segmentos tangentes para justificar essa congruência, ela avança para o Nível 1. A estudante progride para o Nível 2 ao aplicar os critérios de congruência dos triângulos retângulos para concluir que os segmentos RP e *QR* são congruentes. Na demonstração de que os segmentos tangentes são congruentes, utilizando o critério de congruência de triângulos retângulos, Elen alcança o Nível 3. A

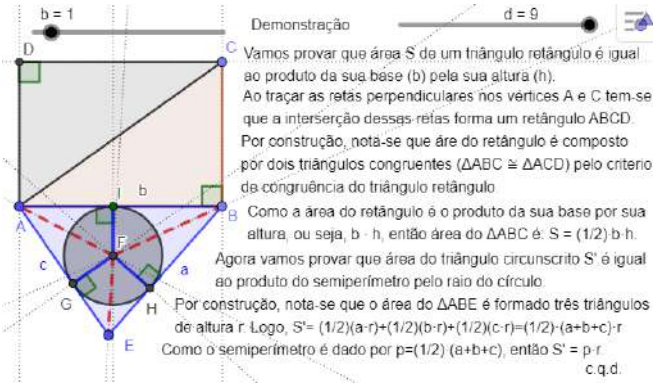
capacidade de formular uma prova lógica e de conectar o Teorema de Pitot à congruência dos segmentos também evidencia um entendimento formal das inter-relações geométricas.

O uso dos recursos do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 3 (Dedução Formal) ao proporcionar uma experiência interativa de construção, na qual os estudantes puderam explorar visualmente a relação de congruência dos segmentos tangentes. Nesta análise, é possível observar que a ferramenta "Interseção em Dois Objetos" e a medição de ângulos possibilitaram a validação da congruência dos triângulos formados, facilitando a aplicação dos critérios de congruência. De forma complementar, a visualização dinâmica dos triângulos e quadriláteros contribuiu para a formulação de uma prova rigorosa e formal, estabelecendo a relação entre os lados do quadrilátero circunscritível.

A segunda tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 53**. O participante Ulan é destacado nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 53 – Tarefa 9.4 (Prova da Área do Triângulo: Retângulo e Circunscrito)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
Mostre que a área de um triângulo retângulo é igual ao produto da sua base pela sua altura. Além disso, demonstre que a área de um triângulo circunscrito a um círculo é igual ao produto do semiperímetro pelo raio do círculo. ***1. Orientações Construtivas:*** *1.1. Crie controle deslizante chamado "b", variando de 0,1 a 10.* *1.2. Utilize a ferramenta "Segmento de Comprimento Fixo" para criar um segmento com comprimento "b". Clique na Janela de Visualização e digite "b" na Caixa de Comando.* *1.3. Com as ferramentas "Reta Perpendicular", "Ponto em Objeto" e "Interseção em Dois Objetos", crie duas retas perpendiculares, uma passando pelo ponto A e outra pelo B. Insira um ponto C, sobre essa última reta e trace uma nova reta perpendicular nessa reta no ponto C. Por fim, trace o ponto de interseção das retas perpendiculares, ponto D.* *1.4. Utilize as ferramentas "Polígono" "Ângulo", produza os triângulos ΔABC e ΔACD e identifique os ângulos internos, sem rótulos, nos vértices A e D. Ajuste eles para cores dos triângulos para cores diferentes.* ***a) Qual a relação que existe entre esses triângulos*** *1.5. . Com a ferramenta "Polígono" novamente, crie os triângulos ABE, com E sentido oposto a C.* *1.6. Use as ferramentas "Bissetriz" e "Interseção de Dois Objetos" para traçar as bissetrizes internas do triângulo e encontre a interseção dessas retas, chamando o ponto de interseção de "F".* ***b) Qual é o nome desse ponto de encontro?*** *1.6. Com as ferramentas "Reta Perpendicular" e "Interseção de Dois Objetos", trace as retas perpendiculares aos lados do triângulo que passam pelo ponto F. Encontre os pontos de interseção dessas retas com os lados do triângulo, nomeando-os de G, H e I.* *1.7. Use a ferramenta "Segmento" para traçar os segmentos FG, FH e FI, nomeando-os de "r". Use legendas para isso e ajuste esses segmentos para*	**Transcrição das respostas de Ulan:** *a) São congruentes pelo critério especial do triângulo retângulo.* *b) É o incentro.* *Demonstração* *Vamos provar que a área S de um triângulo retângulo é igual ao produto da sua base (b) pela sua altura (h). Ao traçar as retas perpendiculares nos vértices A e C tem-se que a interseção dessas retas forma um retângulo ABCD. Por construção, nota-se que áre do retângulo é composto por dois triângulos congruentes ($\Delta ABC \cong \Delta ACD$) pelo critério de congruência do triângulo retângulo.* *Como a área do retângulo é o produto da sua base por sua altura, ou seja, $b \cdot h$, então área do ΔABC é: $S = (1/2) \cdot b \cdot h$.* *Agora vamos provar que a área do triângulo circunscrito S' é igual ao produto do semiperímetro pelo raio do círculo. Por construção, nota-se que o área do ΔABE é formado três triângulos de altura r. Logo, $S' = (1/2)(a \cdot r) + (1/2)(b \cdot r) +$*

cor azul e espessura 10. Use novamente a ferramenta "Segmento" e trace no estilo tracejado e cor vermelha os segmentos AF, EF e BF. ***2. Aplique os passos das orientações para a demonstração argumentativa (2.3.** Use a fórmula da área do retângulo para mostrar que a área do triângulo e depois relacione isso com a área do triângulo circunscrito).* ***3. Use as orientações para a demonstração dinâmica.***	*(1/2)(c·r) = (1/2)·(a + b + c)·r. Como o semiperímetro é dado por p = (1/2)·(a + b + c), então S' = p·r.* *c.q.d.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	
	

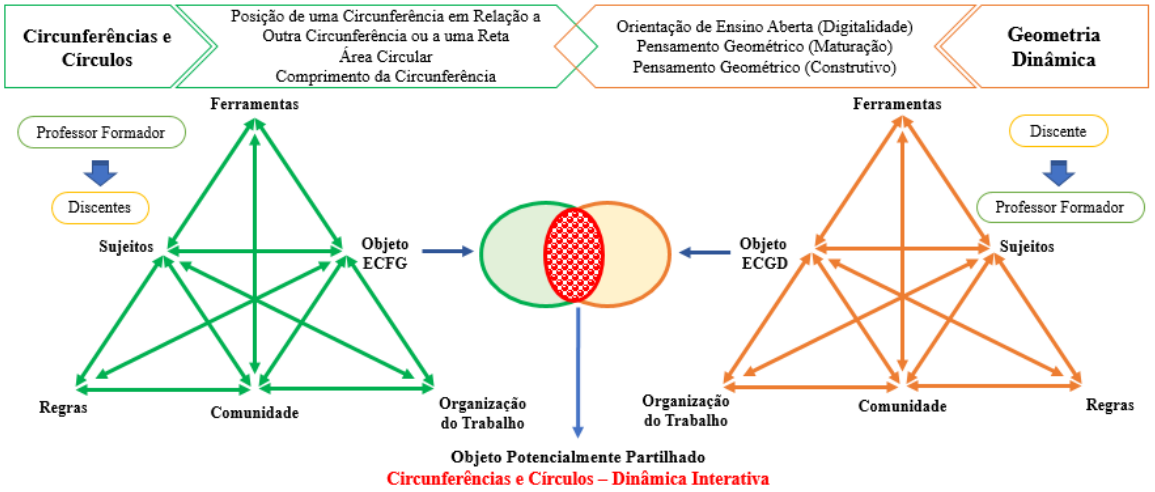
Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Na análise da Tarefa 9.4, observa-se que, ao reconhecer a congruência entre os triângulos formados pelo critério do triângulo retângulo, Ulan está operando no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986). Ao avançar na análise da tarefa e construir o incentro utilizando as bissetrizes internas do triângulo, o estudante demonstra compreensão das partes constitutivas do triângulo e das propriedades do incentro, evidenciando que atingiu o Nível 1. Ao mostrar que a área $S=(1/2)\cdot b\cdot h$ é derivada do fato de que o triângulo está inscrito em um retângulo e que dois triângulos congruentes compõem esse retângulo, Ulan opera no Nível 2. Ao prosseguir na demonstração e articular a relação entre a área do triângulo e o semiperímetro do triângulo circunscrito, o estudante alcança o Nível 3. Ele construiu uma sequência de deduções, utilizando propriedades geométricas para justificar a relação entre o semiperímetro e o raio, demonstrando um raciocínio estruturado e coerente.

O uso dos recursos do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 3 (Dedução Formal), permitindo que o estudante construísse e manipulasse os elementos geométricos de forma dinâmica. Nesta análise, é possível observar que a visualização da congruência dos triângulos, juntamente com o uso das ferramentas de perpendicularidade e bissetrizes, proporcionou uma base sólida para a dedução formal da fórmula da área do triângulo retângulo e do triângulo circunscrito. Ao explorar essas construções, Ulan conseguiu conectar os conceitos de maneira interativa, facilitando a transição para uma argumentação formal e compreensível sobre a relação entre base, altura e área, bem como entre semiperímetro e raio no triângulo circunscrito.

As quatro tarefas analisadas evidenciam, por meio da interação entre o ECFG e a ECGD, a criação de um objeto potencialmente partilhado, conforme descrito na quarta contradição de Engeström (2016). Nesse contexto, o objeto partilhado foi a compreensão dinâmica interativa das ‘Circunferências e Círculos’, com foco na maturação do pensamento geométrico dos estudantes (**Esquema 33**).

Esquema 33 – Circunferências e Círculos – Dinâmica Interativa



Fonte: Pesquisador (2024).

No sistema ECFG, o professor formador teve uma atuação mais intensa, apresentando de forma estruturada e sequencial os conceitos relacionados à posição de uma circunferência em relação a outra circunferência ou a uma reta, bem como à área circular e ao comprimento da circunferência. O objetivo deste sistema foi ensinar sobre ‘Circunferências e Círculos’, ao mesmo tempo, em que estimulava a investigação de suas aplicações por meio de operações como a construção de pontos, segmentos, círculos e outros objetos geométricos. Para isso, o professor realizava revisões teóricas dos capítulos X, XVII e XIX do volume 9, proporcionando aos estudantes uma compreensão formal dos conhecimentos curriculares abordados.

Simultaneamente, no sistema ECDG, os estudantes adotaram uma postura mais proativa em seu processo de aprendizagem. Nesse ambiente, tiveram a oportunidade de explorar os conceitos de forma prática e interativa, manipulando objetos geométricos em um espaço digital dinâmico, o que resultou em um bom desempenho nas AOEA. Esse processo possibilitou o desenvolvimento de habilidades digitais, destacando-se, neste contexto, a prática de garantir a consistência radial interativa da estrutura geométrica por meio da ferramenta “Círculo: Centro & Raio”. Por outro lado, o professor formador, nesse sistema, atuou como mediador, oferecendo

suporte, *feedback online* e auxiliando os estudantes na consolidação do aprendizado adquirido de maneira prática.

Borba, Scucuglia e Gadanidis (2018) destacam a importância de conhecer os recursos disponíveis para analisar como tornar as aulas mais dinâmicas, partindo de noções intuitivas para alcançar generalizações por meio de experimentações matemáticas. Nesse contexto, o uso do ggb-CB no ensino de ‘Circunferências e Círculos’ revelou-se um exemplo valioso, pois permitiu aos estudantes explorar e manipular figuras geométricas de maneira interativa e visual. A ferramenta possibilitou que os futuros professores trabalhassem de forma experimental, facilitando a construção de conceitos geométricos de maneira mais prática. Ao utilizar as ferramentas digitais do GeoGebra, os participantes puderam transformar noções intuitivas sobre as propriedades das circunferências em generalizações, promovendo a maturação do pensamento geométrico de forma mais dinâmica e envolvente.

As operações realizadas neste sistema envolveram personalizações na visualização, apurações da área das figuras, medições, transformações e variações dos objetos, identificações, implantações, comparações e conexões de elementos; conformidações e programações da estrutura, além de construções geométricas com diversas possibilidades de manipulação. Essas operações estão alinhadas com a TA de Leontiev (2018), que afirma que os objetivos se convertem em tarefas específicas, moldadas pelo contexto e empregadas por meio da ação prática. Neste caso, o foco foi sincronizar objetos geométricos para identificar os pontos tangenciais. Ao utilizar as ferramentas digitais para interagir com as ‘Circunferências e Círculos’, os estudantes não apenas absorveram o conteúdo curricular, mas também o construíram ativamente por meio de práticas dinâmicas e interativas, consolidando o aprendizado por meio de uma experiência híbrida.

Na AOEA desta semana, observou-se que os estudantes assumiram o protagonismo em sua própria aprendizagem, desenvolvendo autonomia na construção do conhecimento sobre ‘Circunferências e Círculos’ por meio da interação com o conteúdo e com as TD. Essa abordagem reflete a perspectiva da autoformação proposta por Pineau (2023), que destaca a importância do aprendiz como agente ativo no processo de aprendizado. A postura proativa foi evidente ao buscarem respostas e refletirem sobre as relações geométricas de forma independente.

Nessa circunstância, o progresso dos estudantes nos diferentes níveis de pensamento geométrico, conforme o modelo de Van Hiele (1986), foi facilitado e enriquecido pelo uso dos recursos do ggb-CB, inserido nesta proposta híbrida de ensino. A utilização dessas ferramentas

digitais possibilitou a construção dinâmica e interativa de objetos geométricos, promovendo um aprendizado mais intuitivo e visual, no qual os estudantes puderam se envolver ativamente com os conceitos abordados.

Observou-se, como resultado, que nas tarefas 9.1 (Prova da Reta Tangente ao Círculo), 9.2 (Prova da Reta Perpendicular ao Raio do Círculo), 9.3 (Provas dos Segmentos Tangentes ao Círculo e do Teorema de Pitot) e 9.4 (Prova das Fórmulas da Área do Triângulo Retângulo e Circunscrito), os estudantes Mary, Théo, Elen e Ulan demonstraram avanços significativos no Nível 3 de aprendizagem. Esse progresso evidenciou a capacidade desses estudantes de desenvolver sequências de afirmações dedutivas, compreendendo a importância dessas deduções para a construção de provas e a validação dos conceitos.

Diante disso, a integração desses dois sistemas (ECFG e ECGD) resultou na criação do objeto partilhado mencionado anteriormente. Assim, nesse processo de ensino, realizado nesta proposta híbrida, o uso conjunto das TDI, aliado ao conceito de autoformação e à TA, desempenhou uma função orientadora no avanço da compreensão dos estudantes sobre ‘Circunferências e Círculos’. Esse processo não apenas ampliou suas habilidades de raciocínio dedutivo, mas também favoreceu a construção ativa e autônoma do conhecimento, permitindo uma abordagem mais profunda e reflexiva dos conceitos geométricos.

4.10 Explorando as Relações Métricas e Superfícies

Na décima semana, as aulas foram organizadas para explorar as ‘Relações Métricas e Superfícies’, com o objetivo de promover uma compreensão dinâmica desse conteúdo curricular. Nesse cenário híbrido de ensino, as ações pedagógicas envolveram a construção e a exploração do objeto de estudo, bem como a investigação, identificação e aplicação prática tanto do Teorema de Pitágoras quanto do Teorema de Tales, além da interação discursiva sobre as aplicabilidades discutidas.

Para isso, foi necessário expandir o repertório operacional dos estudantes por meio de tarefas teóricas e práticas. A aplicação das AOEA foi fundamental nesse processo, pois forneceu diretrizes para a criação, manipulação e personalização de pontos, segmentos, semicírculos e outros objetos geométricos. Essas atividades foram planejadas para alcançar as metas Ciade, aproximando a turma dos recursos tecnológicos adotados, especialmente no incentivo à cultura digital com a utilização da ferramenta “Polígono”.

O **Quadro 54**, apresentado a seguir, ilustra a estrutura e a organização dessa abordagem no contexto do ensino aplicado nesta décima semana.

Quadro 54 – Planejamento da nona semana de aula

<table>
<tr><td colspan="4">Artefatos
Computador e Smartphone.
GeoGebra: Plataforma; Classroom Beta; Classic; Geometria.
Ferramentas Específicas: Mover; Ponto; Ponto em Objeto; Interseção de Dois Objetos; Reta; Segmento; Segmento de Comprimento Fixo; Vetor; Reta Perpendicular; Reta Paralela; Polígono; Círculo dados o Centro e um dos seus Pontos; Círculo: Centro & Raio; Compasso; Semicírculo; Arco Circular; Ângulo; Distância, Comprimento e Perímetro; Área; Translação por um Vetor; Controle Deslizante; Texto.
Comandos: Girar(...); Polígono(...); Reflexão(...); Segmento(...); Sequência(...); Transladar(...).
Livro: Fundamentos de Matemática Elementar 9: geometria plana (Cap. XII, XIV, XV e XIX).</td></tr>
<tr><td>Objeto
Relações Métricas e Superfícies.</td><td>Motivo
Necessidade de promover a compreensão dinâmica dos conceitos relacionados às Relações Métricas e Superfícies.</td><td colspan="2">Ação
❖ Construção e exploração das Relações Métricas e Superfícies de modo dinâmico;
❖ Investigação, identificação e aplicação do Teorema de Pitágoras, Teorema de Tales e áreas dos quadriláteros notáveis;
❖ Interação discursiva das aplicabilidades abordadas.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Operações
Comparações: aferir semelhanças e diferenças dos elementos;
Construções: produzir pontos, segmentos, semicírculos, etc.;
Personalizações: configurar, renomear, exibir/ocultar, etc.;
Conformidações: preservar as subsistências das estruturas;
Medições: medir comprimentos e amplitudes angulares;
Inquietações: expor dúvidas subjetivas e/ou coletivas;
Interlocuções: participar das discussões construtivas;
Identificações: localizar as interseções dos objetos;
Programações: processar comandos de construção;
Sincronizações: encontrar os pontos tangenciais;
Explorações: testar os recursos do GeoGebra;
Calibrações: ajustar a superfície geométrica;
Revisões: revisar os conteúdos curriculares;
Implantações: inserir elementos adaptáveis;
Variações: ampliar/reduzir os objetos;
Transformações: deslocar os objetos;
Interações: interagir com as AOEA;
Apurações: calcular áreas planas;
Administrações: gerenciar conta;
Aplicações: resolver problemas;
Conexões: conectar elementos;
Manipulações: mover objetos.</td><td>Metas
➢ Construir pontos, segmentos, semicírculos, etc. para explorar as Relações Métricas e Superfícies com a mediação tecnológica das ferramentas e comandos do GeoGebra;
❖ Investigar e aplicar conceitos relacionados ao Teorema de Pitágoras, Teorema de Tales e áreas dos quadriláteros notáveis;
➢ Desenvolver habilidades práticas de maleabilidade bilateral interativa da estrutura geométrica com uso da ferramenta “Polígono”;
➢ Estimular discussões e reflexões sobre abordagens teóricas e práticas relacionadas ao objeto de estudo.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Condições
Ambiente de ensino híbrido com suporte contínuo da equipe docente para auxiliar na aprendizagem das Relações Métricas e Superfícies durante as atividades presenciais, oferecendo orientações e estímulos personalizados durante as observações online a distância.</td></tr>
</table>

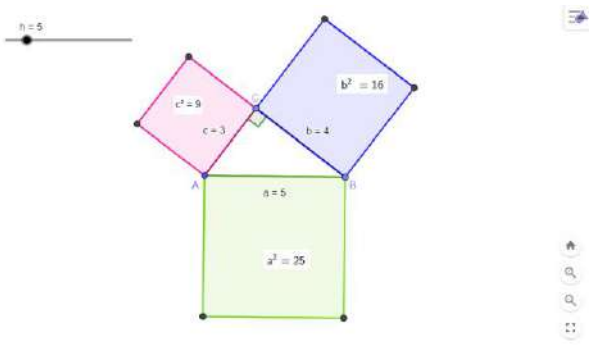
Fonte: Pesquisador (2024).

Na décima semana de aula, o professor formador começou a explorar o Teorema de Pitágoras, abordando a relação entre os quadrados dos catetos e da hipotenusa. Ele destacou que

todo triângulo retângulo pode ser inscrito em um semicírculo cujo diâmetro é a hipotenusa. Para demonstrar isso, o professor utilizou o GeoGebra *Classic online*, na disposição de Geometria.

Com a mediação tecnológica das ferramentas “Segmento de Comprimento Fixo”, “Semicírculo”, “Ponto em Objeto”, “Segmentos”, “Ângulos”, “Polígono Regular”, “Mover” e “Área”, o professor formador elaborou uma demonstração interativa do Teorema de Pitágoras. Inicialmente, criou um segmento *AB* com comprimento *h*, configurado como um controle deslizante ajustável, que representava o diâmetro do semicírculo. Depois, foi inserido um ponto *C* no semicírculo, traçaram-se os catetos *BC* e *CA*, e marcou-se o ângulo reto no vértice *C*, formando assim o triângulo retângulo *ABC*. Os valores dos segmentos foram destacados, com a hipotenusa nomeada como *a* e os catetos como *b* e *c*. Os quadrados dos lados *a*, *b* e *c* foram calculados e exibidos, e suas áreas foram apresentadas, evidenciando a relação $a^2 = b^2 + c^2$, válida para qualquer valor ajustado no controle deslizante, conforme ilustrado na **Figura 31**.

Figura 31 – Triângulos que geram trapézios



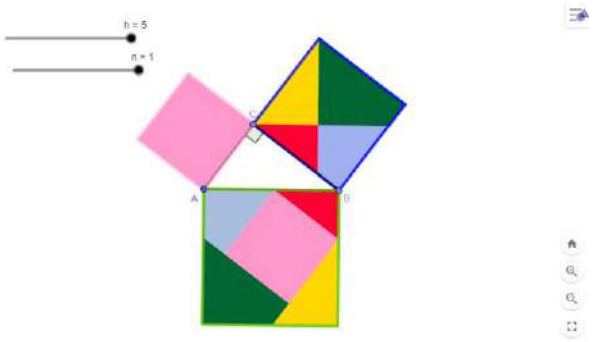
Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/vfmyjmcn. Acesso em: 14 ago. 2024.

Aproveitando a construção anterior e utilizando a mediação tecnológica das ferramentas “Reta Paralela”, “Interseção de Dois Objetos”, “Polígono”, “Compasso”, “Controle Deslizante”, “Vetores” e “Transladar por um Vetor”, o professor formador elaborou uma demonstração interativa do Teorema de Pitágoras. Inicialmente, foram traçadas duas retas paralelas no plano: uma ao segmento *BD*, passando pelo ponto *J*, e outra ao segmento *AB*, passando pelo ponto *C*. A interseção dessas retas gerou o ponto *K*. Em seguida, foram desenhados triângulos e quadriláteros entre os pontos *L*, *B*, *M*, *K*, *N*, *J*, *G* e *C*, além de um quadrado *ACHI* que foi duplicado. Essas figuras foram ajustadas com diferentes cores para facilitar a visualização.

Além disso, a distância *JK* foi medida com um compasso e replicada no segmento *EB*, determinando o ponto O. Um controle deslizante *n* foi criado para movimentar pontos ao longo

de segmentos específicos, ajustando suas posições com base nas fórmulas inseridas na Caixa de Entrada, como "*P = K + n (A – K)*". Com a translação dos pontos ao longo dos vetores criados, foi possível deslocar os polígonos *LBMK*, *CMK*, *LNJK*, *JGK* e *ACHI*, mantendo a relação geométrica entre os elementos. Essa translação evidenciou a validade do Teorema de Pitágoras, conforme ilustrado na **Figura 32**.

Figura 32 – Demonstração interativa do Teorema de Pitágoras



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/gnedqxy8. Acesso em: 14 ago. 2024.

Em seguida, o professor aprofundou a análise das relações métricas do triângulo retângulo, identificando e caracterizando seus principais elementos: a hipotenusa, os catetos, as projeções dos catetos sobre a hipotenusa e a altura relativa à hipotenusa. Ele explicou como, a partir da semelhança entre os triângulos retângulos formados, era possível estabelecer diversas relações métricas além do Teorema de Pitágoras. Entre essas relações, destacou a média proporcional entre cada cateto e sua projeção, a média proporcional entre a altura e os segmentos da hipotenusa, além da equação que relaciona o produto dos catetos com o produto da hipotenusa pela altura.

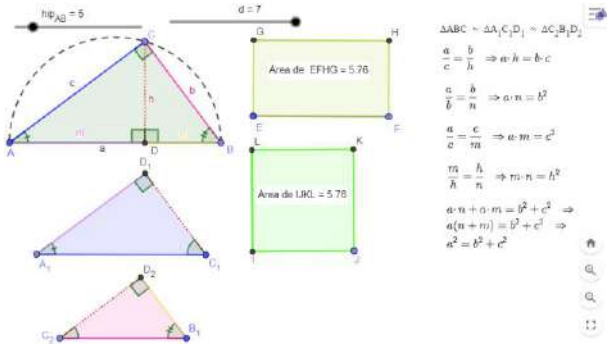
Ainda na primeira etapa da aula, o professor formador, com a mediação tecnológica das ferramentas "Segmento com Comprimento Fixo", "Arco Circular", "Ponto em Objeto", "Polígono", "Reta Perpendicular", "Interseção de Dois Objetos", "Ângulo", "Compasso", "Segmento", "Área" e "Texto", buscou demonstrar as relações métricas do triângulo retângulo.

Neste momento, o professor iniciou a demonstração, configurando dois controles deslizantes e traçando um segmento *AB* com comprimento ajustável, formando um triângulo retângulo *ABC*, com ângulo reto em *C*. Ele construiu uma reta perpendicular ao segmento *AB* no ponto *C*, determinando o ponto *D* e a altura *DC*, que representa a altura do triângulo em relação à base *AB*. A partir das projeções dos catetos sobre *AB*, ele obteve as relações métricas $a \cdot h = b \cdot c$ e $a \cdot n = b^2$, além de demonstrar que os triângulos internos eram congruentes, resultando

na equação $a^2 = b^2 + c^2$, confirmando assim o Teorema de Pitágoras. Para reforçar a explicação, construiu um retângulo e um quadrado, mostrando visualmente que o produto das projeções dos catetos é igual ao quadrado da altura.

A **Figura 33** ilustra uma apresentação interativa, na qual o controle deslizante é utilizado e textos explicativos são exibidos à medida que o valor de *d* aumenta.

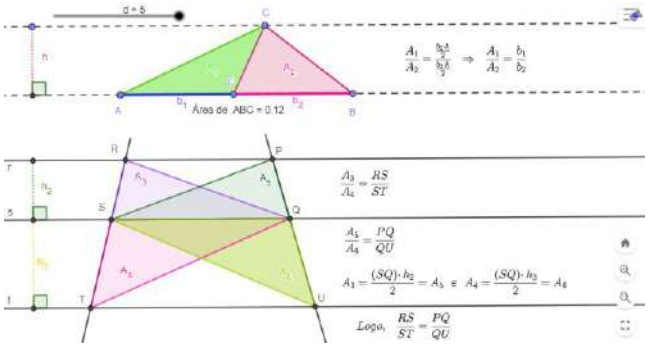
Figura 33 – Triângulos que geram trapézios



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/qfn2yk8s. Acesso em: 14 ago. 2024.

Na segunda etapa da aula, o professor abordou o Teorema de Tales. Na demonstração desse teorema, ele utilizou como mediação tecnológica as ferramentas “Reta”, “Ponto”, “Mover”, “Reta Paralela”, “Reta Perpendicular”, “Interseção de Dois Objetos”, “Segmento”, “Polígono”, “Ângulo”, “Texto” e “Controle Deslizante” para construir e explorar as relações métricas entre segmentos de retas e áreas de triângulos.

Figura 34 – Demonstração intuitiva do Teorema de Tales



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/vn2kc2ab. Acesso em: 14 ago. 2024.

O professor formador iniciou a demonstração do Teorema de Tales criando duas retas paralelas, posicionando a base do triângulo ΔABC na primeira reta e o ponto C na reta paralela.

Ele demonstrou que a área do triângulo se mantinha constante ao mover o ponto *C* ao longo da reta. Em seguida, traçou uma ceviana, dividindo o triângulo em dois menores, e mostrou que a razão entre as áreas desses triângulos era proporcional às suas bases. Para prosseguir, construiu três retas paralelas e duas transversais, destacando que, segundo o Teorema de Tales, a razão entre os segmentos de uma transversal que corta várias retas paralelas é constante. Ele concluiu a demonstração com a construção de triângulos congruentes e a exibição das relações métricas, utilizando um controle deslizante para ilustrar gradualmente as fórmulas, formalizando assim a demonstração do teorema, conforme ilustrado na **Figura 34**, acima.

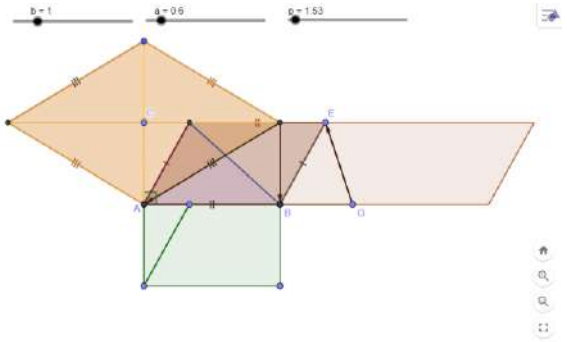
Durante a terceira etapa da aula, o professor formador demonstrou como provar visualmente as áreas de quadriláteros notáveis e de um triângulo qualquer, utilizando tanto a mediação tecnológica das ferramentas “Segmento de Comprimento Fixo”, “Ângulo”, “Reta Paralela”, “Reta Perpendicular”, “Interseção de Dois Objetos”, “Ponto em Objeto”, “Polígono”, “Vetor”, “Transladar por um Vetor”, “Controle Deslizante” e “Texto”, quanto dos comandos “Polígono(...)”, “Transladar(...)”, “Girar(...)”, “Segmento(...)” e “Reflexão(...)”, além de algumas de suas possíveis conexões. Cabe ressaltar que ele já havia apresentado as provas para retângulos e quadrados na sétima semana de aula.

De uma forma específica, o professor formador iniciou a demonstração construindo segmentos que representavam a base (*b*) e a altura (*a*) de quadriláteros notáveis, utilizando três controles deslizantes para ajustar essas dimensões. Para o losango, os controles representavam metade das diagonais, enquanto a base de um trapézio era formada pela soma da base *b* com um segmento *p*. Ele traçou um segmento *AB* como base e um segmento *AC* como altura, assegurando que formassem um ângulo de 90°. Em seguida, desenhou uma reta paralela a *AB* passando por *C* e uma reta perpendicular em *B*, localizando a interseção dessas retas. Com isso, posicionou um ponto *E* na reta paralela e desenhou segmentos, formando polígonos que, ao serem transladados, demonstraram que a área do paralelogramo é calculada pelo produto da base pela altura ($b \times a$).

Depois, o professor dividiu o paralelogramo em dois triângulos congruentes, confirmando que a área de um triângulo é metade da área do paralelogramo, ou seja, $(b \times a) / 2$. Em seguida, ele criou um trapézio com uma nova base maior, demonstrando que a área é calculada pela média das bases multiplicada pela altura, ou seja, $((B + b) \times a) / 2$. Por fim, construiu um losango, refletindo um segmento e formando quatro triângulos congruentes, mostrando que a área do losango é quatro vezes a de um desses triângulos. A área foi expressa

como *(2 × b) × (2 × a) / 2*, simplificando para *(D × d) / 2*, onde *D* e *d* representam as diagonais do losango, conforme ilustrado na **Figura 35**.

Figura 35 – Áreas dos quadriláteros notáveis



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/b3ccnkak. Acesso em: 14 ago. 2024.

Resumidamente, esta décima semana de aula representa o Sistema de Atividades X, no qual foram explorados os conhecimentos curriculares relacionados às ‘Relações Métricas e Superfícies’, conforme as abordagens realizadas pelo professor formador. No entanto, durante esse processo, caracterizado pela pluralidade e multivocalidade, foram observadas algumas tensões e inquietações, que serão analisadas no próximo subtópico.

4.10.1 Análise das contradições heteroformativas no sistema de atividades X

A análise das interações da aula do Sistema de Atividades X, fundamentada nas contradições primária, secundária e terciária de Engeström (2016), revelou as tensões e as possibilidades de aprendizagem que emergiram enquanto os estudantes se dedicavam tanto à construção de pontos, segmentos, semicírculos e outros objetos geométricos no ggb-CB, quanto à exploração dos conhecimentos curriculares relacionados às ‘Relações Métricas e Superfícies’, temas abordados pelo professor formador.

As contradições primárias de Engeström (2016) emergiram em cada componente do sistema de atividade, especialmente na tensão entre o valor de uso (a compreensão prática dos teoremas) e o valor de troca (a mera memorização de fórmulas). Esse conflito foi exemplificado por Théo, que questionou como a relação $a^2 = b^2 + c^2$ poderia se manter verdadeira em todas as situações. Esse questionamento evidenciou a dificuldade em entender a aplicação prática do Teorema de Pitágoras, em contraste com a memorização mecânica da fórmula. O professor, ao utilizar o GeoGebra para demonstrar a construção virtual do teorema, mediou esse processo de

aprendizagem, permitindo que os estudantes não apenas visualizassem, mas também manipulassem os elementos do teorema de forma interativa. Essa abordagem prática revelou-se essencial para resolver a contradição primária.

O processo heteroformativo manifestou-se claramente nesse momento. A aprendizagem desenvolveu-se por meio da interação entre o professor e os estudantes, com o conhecimento sendo construído coletivamente, em vez de apenas transmitido. Segundo Sommerman (2002), essa abordagem destaca a importância da ação educativo-formativa dos outros, algo que se evidenciou no uso do GeoGebra. Dessa forma, a visualização dinâmica proporcionada pela ferramenta facilitou a compreensão do teorema, promovendo um entendimento coletivo que ia além da mera memorização das fórmulas. Os estudantes puderam perceber de forma compreensível as relações entre os lados do triângulo, o que não apenas ampliou suas capacidades de compreensão, mas também os levou a integrar teoria e prática de maneira coletivamente interativa. Essa interação social, portanto, revelou-se fundamental para o enriquecimento do processo de aprendizagem.

Foi possível observar que a contradição secundária proposta por Engeström (2016) surgiu entre os componentes do sistema de atividade, especialmente na interação entre as ferramentas tecnológicas e os objetivos pedagógicos. Quando Mary mencionou a dificuldade em entender como o Teorema de Pitágoras se aplicava à construção virtual no GeoGebra, isso evidenciou a tensão entre o uso da tecnologia e o aprendizado conceitual. A ferramenta digital, ao facilitar a exploração dos conceitos, também desafiava os estudantes a transformar seu conhecimento pré-existente em uma compreensão mais profunda e prática. A dificuldade enfrentada por Mary destacou a necessidade de reconfigurar os métodos de ensino convencionais para abraçar as potencialidades interativas das ferramentas digitais.

Nesse contexto, a ferramenta “Semicírculo” do GeoGebra revelou-se essencial para superar essa contradição. De acordo com a teoria da internalização de Vygotsky (2019), a visualização proporcionada pela ferramenta auxiliou na assimilação do conceito, pois os estudantes puderam interagir diretamente com os elementos geométricos, observando como a relação entre os lados de um triângulo retângulo se mantinha constante ao utilizar o semicírculo. Ao traçar o semicírculo sobre a hipotenusa, os estudantes puderam verificar, de forma visual e dinâmica, que o quadrado da hipotenusa era igual à soma dos quadrados dos catetos, consolidando a compreensão do Teorema de Pitágoras. Esse uso ativo da ferramenta não apenas facilitou a visualização do teorema, mas também proporcionou um ambiente de construção

coletiva, onde os estudantes puderam testar suas hipóteses e ajustar suas compreensões em tempo contínuo.

A contradição terciária surgiu com o uso de ferramentas digitais, como o GeoGebra, que introduziu um novo modelo de atividade em contraste com o método tradicional de ensino. Essa mudança gerou um conflito entre o modelo tradicional e as novas abordagens, evidenciado quando Hend expressou confusão sobre a relação entre segmentos e áreas no Teorema de Tales. Nesse cenário, o método tradicional de ensino, que se baseia em uma abordagem estática e muitas vezes abstrata dos conceitos, parecia não oferecer suporte suficiente para a compreensão dinâmica das relações geométricas. A utilização das ferramentas do GeoGebra, ao possibilitar a manipulação interativa e a visualização de segmentos e áreas, desafiou as concepções mais rígidas dos estudantes, evidenciando as limitações do ensino convencional.

Esse cenário se alinha à ideia de inteligência coletiva proposta por Lévy (2003, p. 28), que define essa inteligência como "[...] uma inteligência distribuída por toda parte, incessantemente valorizada, coordenada de forma imediata, que resulta em uma mobilização efetiva das competências". No caso de Hend, o uso do GeoGebra possibilitou a interação entre os estudantes e o professor, criando uma rede coletiva de aprendizagem. Os estudantes puderam explorar e discutir suas dúvidas, ajustando suas compreensões por meio da experimentação, enquanto a tecnologia mediava a visualização das relações geométricas. Assim, o GeoGebra não apenas facilitou a internalização do conhecimento, mas também promoveu a mobilização das competências coletivas, onde o saber foi construído de forma dinâmica e coletivamente interativa.

A resolução dessas contradições, no contexto deste modelo de formação híbrida (Horn; Staker, 2015), ocorreu por meio da integração de ferramentas digitais no ensino, com o GeoGebra como mediador essencial. A interação entre estudantes e professor, mediada pelo uso da TD, propiciou um ambiente de aprendizagem no qual os estudantes puderam manipular e visualizar conceitos geométricos, transformando a teoria em prática de maneira dinâmica e interativa. Esse processo híbrido, que mescla o uso de tecnologia com o ensino convencional, possibilitou que os estudantes internalizassem os conceitos de Pitágoras e Tales de forma mais clara, superando as dificuldades relacionadas aos aspectos abstratos e reforçando a compreensão por meio da experimentação prática.

Esse movimento pode ser interpretado como um processo de heteroformação (Macedo, 2010), no qual o conhecimento foi co-construído e internalizado de maneira coletiva, por meio da troca de experiências e da interação entre os estudantes, o professor e a ferramenta digital.

O GeoGebra não apenas facilitou a visualização das relações geométricas, mas também promoveu um espaço para o aprendizado cooperativo, onde os estudantes puderam ajustar suas hipóteses e explorar o conteúdo de forma ativa e prática. Assim, o ensino híbrido mediado pela tecnologia revelou-se não apenas eficaz, mas também transformador, pois ampliou as formas de aprendizado e possibilitou a construção coletiva do conhecimento, favorecendo uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos abordados.

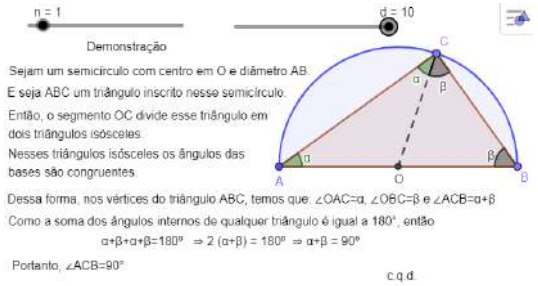
4.10.2 Análise das contradições autoformativas no sistema de atividades X

Com a base estabelecida no subtópico anterior, que tratou das dinâmicas heteroformativas e suas tensões, resultando na construção coletiva do conhecimento, a análise agora se volta para os aspectos autoformativas no Sistema de Atividades X, fundamentando-se nesse processo tecformativo digital e evidenciando como os estudantes adotaram uma postura mais autônoma e proativa no processo de aprendizagem das 'Relações Métricas e Superfícies'. Em decorrência disso, nesta parte, discute-se a maneira como os níveis de aprendizagem (Van Hiele, 1986) se manifestaram nas tarefas dos quatro participantes que mais se destacaram durante as interações da décima semana de aula. Após essa análise, é apresentada a interação geral entre os sistemas envolvidos à luz da contradição quaternária (Engeström, 2016).

A primeira tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 55**. O participante Théo é destacado nessa análise, com base em suas respostas transcritas ggb-CB da turma.

Quadro 55 – Tarefa 10.1 (Prova do Triângulo Retângulo Inscrito no Semicírculo)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	Pensamento Geométrico – Maturação
Prove para qualquer triângulo inscrito em um semicírculo, o ângulo oposto ao diâmetro é sempre um ângulo reto. ***1. Orientações construtivas:*** *1.1. Utilize a ferramenta "Controle Deslizante" para criar um controle deslizante chamado n, variando seus valores de 0,1 a 10. Ajuste a cor para a visualização de círculo.* *a) Por que o valor 0 não pode ser usado nessa construção?* *1.2. Use a ferramenta "Segmento de Comprimento Fixo" para construir um segmento n, clique na Janela de Visualização e digite n na Caixa de Comando.* *1.3. Use a ferramenta "Semicírculo" para construir um semicírculo de diâmetro AB, clique no ponto A e depois em B.* *1.4. Use a ferramenta "Ponto em Objeto" clique sobre a borda do semicírculo, ponto C.* *1.5. Use a ferramenta "Polígono" e construa o triângulo ABC, sendo AB o diâmetro.*	***Transcrição das respostas de Théo:*** *a) O valor 0 não pode ser usado porque um raio de comprimento zero não define um círculo. Para construir um círculo, o raio deve ser um valor positivo, pois representa a distância do centro até qualquer ponto na circunferência. Um raio de 0 resultaria em um ponto e não em um círculo.* *b) São sempre triângulos isósceles. Isso se deve ao fato de que AO, OC e OB ser o raio do triângulo ABC.* *Demonstração* *Sejam um semicírculo com centro em O e diâmetro AB. E seja ABC um triângulo inscrito nesse semicírculo. Então, o segmento OC divide esse triângulo em dois triângulos*

<table>
<tr><td>1.6. Use a ferramenta “Ponto Médio Ou Centro” e encontre o ponto médio AB, nomeia ele de O.
1.7 Use a ferramenta “Segmento” e trace o segmento OC. Ajuste ele para estilo tracejado.
b) Os triângulos AOC e OBC são sempre o quê? Por quê?
1.8. Meça os ângulos internos dos triângulos AOC e OBC. Ajuste eles para as mesmas cores e legendas quando forem congruentes.
2. Aplique os passos das orientações para a demonstração argumentativa (Use os teoremas da base do triângulo isósceles e da soma dos ângulos internos de um triângulo).
3. Use as orientações para a demonstração dinâmica.</td><td>isósceles. Nesses triângulos isósceles os ângulos das bases são congruentes.
Dessa forma, nos vértices do triângulo ABC, temos que:
∠OAC=α, ∠OBC=β e ∠ACB=α+β
Como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180°, então
α + β + α + β = 180º ⇒ 2 (α + β) = 180º ⇒ α + β = 90º.
Portanto, ∠ACB=90°.
c.q.d.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pensamento Geométrico – Construtivo</td></tr>
<tr><td colspan="2"> 
</td></tr>
</table>

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Na análise da Tarefa 10.1, observa-se que, inicialmente, Théo operou no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), ao reconhecer visualmente o triângulo formado e identificar suas características principais, como o diâmetro do semicírculo utilizado como base do triângulo. Ao prosseguir com a construção do triângulo isósceles (a partir do ponto *C* na circunferência) e perceber que os triângulos *ΔAOC* e *ΔOBC* são sempre isósceles, devido ao fato de *AO*, *OC* e *OB* serem raios do semicírculo, o estudante avança para o Nível 1. Quando ele formula a demonstração de que o ângulo oposto ao diâmetro é sempre reto, atinge o Nível 2. Ao utilizar os teoremas da soma dos ângulos internos e a base do triângulo isósceles para provar que o ângulo oposto ao diâmetro é reto, Théo opera no Nível 3. Neste estágio, ele constrói uma sequência de afirmações dedutivas para justificar seu raciocínio, aplicando propriedades geométricas de forma formal e compreendendo a relevância das deduções no contexto do problema.

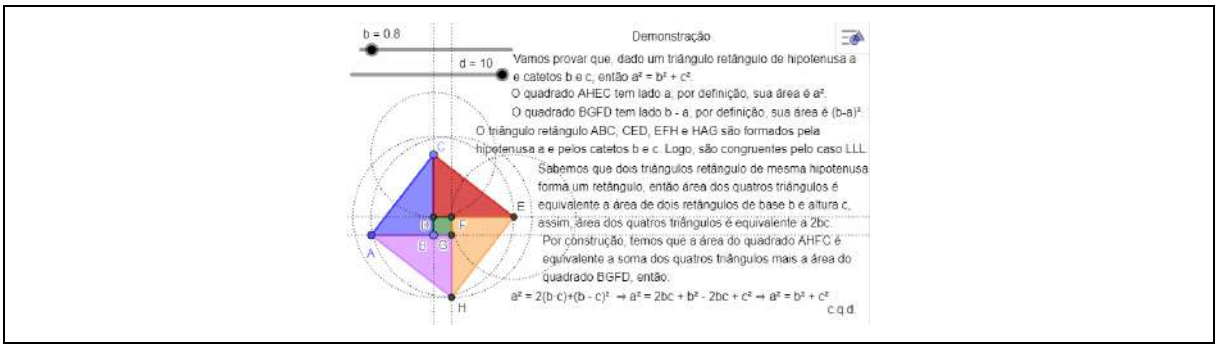
O uso dos recursos do ggb-CB facilitou a transição para o Nível 3 (Dedução Formal) ao permitir que o estudante realizasse uma construção interativa e dinâmica do triângulo inscrito em um semicírculo. Nesta análise, é possível observar que as ferramentas “Segmento”, “Ponto Médio ou Centro” e “Ângulo” proporcionaram uma visualização clara da relação entre os triângulos isósceles formados e seus ângulos. Consequentemente, a manipulação dinâmica do

modelo ajudou Théo a perceber a congruência dos ângulos e a aplicar o teorema da soma dos ângulos internos, facilitando a dedução formal do ângulo reto.

A segunda tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 56**. O participante Aden é destacado nessa análise, com base em suas respostas transcritas ggb-CB da turma.

Quadro 56 – Tarefa 10.2 (Prova do Teorema de Pitágoras)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
Prove que em todo triângulo retângulo com hipotenusa a e catetos b e c, tem-se que $a^2 = b^2 + c^2$. ***1. Orientações construtivas:*** *1.1. Use a ferramenta "Controle Deslizante" para criar um controle deslizante b, variando de 0,1 a 10.* *1.2. Utilize a ferramenta "Segmento de Comprimento Fixo" para criar um segmento com comprimento "b". Clique na Janela de Visualização e digite "b" na Caixa de Comando desse recurso.* *1.3. Use a ferramenta "Reta Perpendicular" para criar uma reta perpendicular ao segmento AB no ponto B.* *1.4. Utilize a ferramenta "Ponto em Objeto" e localize um ponto C na reta, na configuração de contexto, na opção "Condição para Exibir Objeto(s)" digite* $y(C)>y(B)+b$. *1.5. Use as ferramentas "Compasso" e "Interseção em Dois Objetos" para construir uma circunferência de raio AB centrada em C, em seguida, marque a interseção dela com o segmento BC, ponto D.* *1.6. Use a ferramenta "Reta Paralela" para traçar a reta paralela ao segmento AB passando pelo ponto D.* *1.7. Use as ferramentas "Compasso" e "Interseção em Dois Objetos" para construir uma circunferência de raio BC centrada em D, em seguida, marque a interseção dela com a reta paralela ao segmento AB, em direção oposta ao ponto A, ponto E.* *1.8. Use novamente as ferramentas "Compasso" e "Interseção em Dois Objetos" para construir uma circunferência de raio AB centrada em E, em seguida, marque a interseção dela com o segmento BC, ponto F.* *1.9. Use a ferramenta "Reta Paralela" para traçar as retas paralelas ao segmento AB passando pelo ponto A e ao segmento BC passando por F.* *1.10. Use novamente as ferramentas "Compasso" e "Interseção em Dois Objetos" para construir uma circunferência de raio BC centra em F, em seguida, marque a interseção entre as retas construída acima, ponto G, e o ponto de interseção das retas construídas no item anterior, ponto H.* *1.11. Use a ferramenta "Polígono" para criar os triângulos ABC, CED, EFH, HAG e o quadrado BGFD. Ajuste cada figura dessa para uma cor diferente e deixe as retas e as circunferências em estilo pontuado.* ***a) Qual o valor do lado do quadrado BGFD?*** ***2. Aplique os passos das orientações para a demonstração argumentativa.*** *(Note que a área do quadrilátero ACEH é equivalente à soma das áreas das outras figuras geométricas).* ***3. Use as orientações para a demonstração dinâmica.***	**Transcrição das respostas de Aden:** *a) É um quadrado de lado* $(a - b)$. *Demonstração* *Vamos provar que, dado um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c, então* $a^2 = b^2 + c^2$. *O quadrado AHEC tem lado a, por definição, sua área é* a^2. *O triângulo retângulo ABC, CED, EFH e HAG são formados pela hipotenusa a e pelos catetos b e c. Logo, são congruentes pelo caso LLL. Sabemos que dois triângulos retângulo de mesma hipotenusa forma um retângulo, então área dos quatros triângulos é equivalente a área de dois retângulos de base b e altura c, assim, área dos quatros triângulos é equivalente a 2bc. Por construção, temos que a área do quadrado AHFC é equivalente a soma dos quatros triângulos mais a área do quadrado BGFD, então:* $a^2 = 2(b \cdot c)+(b - c)^2 \Rightarrow$ $a^2 = 2bc + b^2 - 2bc + c^2 \Rightarrow$ $a^2 = b^2 + c^2$ *c.q.d.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	



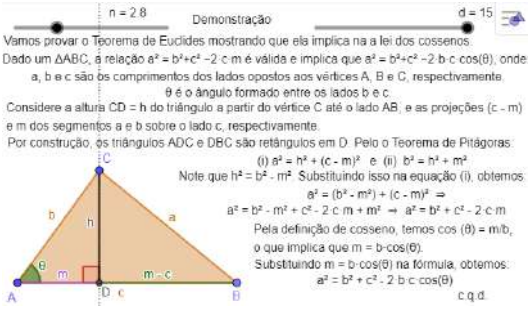
Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Na análise da Tarefa 10.2, observa-se que Aden opera no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), ao reconhecer visualmente o triângulo retângulo e suas partes constituintes, como a hipotenusa e os catetos. À medida que avança, ele transita para o Nível 1, ao identificar a congruência dos triângulos formados pelos catetos e pela hipotenusa, aplicando o critério LLL (Lado-Lado-Lado) para determinar as propriedades dos triângulos. Quando o estudante demonstra que os quatro triângulos retângulos formados têm uma área equivalente à soma de dois retângulos de base *b* e altura *c*, e que a área do quadrado *ACEH* corresponde à soma das áreas dos quatro triângulos e do quadrado *BGFD*, ele atinge o Nível 2. Ao completar a demonstração do Teorema de Pitágoras, provando que $a^2 = b^2 + c^2$ ao mostrar que a área do quadrado formado pela hipotenusa é equivalente à soma das áreas dos quadrados formados pelos catetos, Aden atinge o Nível 3. Ele constrói uma sequência de afirmações dedutivas e desenvolve uma demonstração formal que utiliza as áreas dos triângulos e quadrados para comprovar o teorema.

O uso dos recursos do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 3 (Dedução Formal) ao permitir a construção dinâmica de diferentes figuras, como quadrados e triângulos, além de possibilitar a visualização interativa das relações entre elas. Nesta análise, observa-se que a ferramenta “Controle Deslizante”, ao possibilitar o ajuste dinâmico de medidas e a observação em tempo real do comportamento das construções, auxiliaram o estudante na formulação e teste de hipóteses, permitindo a visualização da equivalência das áreas e da congruência dos triângulos. Isso facilitou a aplicação das propriedades geométricas e a dedução formal do Teorema de Pitágoras.

A terceira tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 57**. O participante Ulan é destacado nessa análise, com base em suas respostas transcritas ggb-CB da turma.

Quadro 57 – Tarefa 10.3 (Prova do Teorema de Euclides – Lei dos Cossenos)

<table>
<tr><th>Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade</th><th>Pensamento Geométrico – Maturação</th></tr>
<tr><td>Prove o Teorema de Euclides para o triângulo agudo e conclua que esse teorema representa a lei dos cossenos.
Orientações construtivas:
1.1. Use a ferramenta “Controle Deslizante” para criar um controle deslizante chamado b, variando de 0,1 a 10.
1.2. Utilize a ferramenta “Segmento de Comprimento Fixo” para criar um segmento com comprimento “n”. Clique na Janela de Visualização e digite “n” na Caixa de Comando desse recurso.
1.3. Use a ferramenta “Polígono” para criar um triângulo agudo de base AB.
1.4. Utilize as ferramentas “Reta Perpendicular” e “Interseção em Dois Objetos” para traçar altura do triângulo, marque o ponto de interseção dessa reta com o lado AB, ponto D. Ajuste essa reta para estilo pontuado e espessura 3.
1.5. Use a ferramenta “Segmento” para traçar a altura e as projeções ortogonais do lado BC e CA sobre o segmento AB, nomeados, respectivamente, de h, m e n.
1.6. Use a ferramenta “Ângulo” para identificar o ângulo interno do triângulo ΔADC e um ângulo θ interno no vértice A. Ajuste para que o ângulo reto fique sem rótulo e o θ só com a opção nome.
a) Como é possível encontrar o seno de um ângulo no triângulo retângulo?
b) Como é possível encontrar o cosseno de um ângulo no triângulo retângulo?
c) Como é possível encontrar a tangente de um ângulo no triângulo retângulo?
2. Aplique os passos das orientações para a demonstração argumentativa. (Lembre-se das propriedades da reta paralela, Teorema de Tales e do ângulo externo do triângulo).
3. Use as orientações para a demonstração dinâmica.</td><td>Transcrição das respostas de Ulan:
a) É a razão entre o comprimento do cateto oposto ao ângulo e o comprimento da hipotenusa.
b) É a razão entre o comprimento do cateto adjacente ao ângulo e o comprimento da hipotenusa.
c) É a razão entre o comprimento do cateto oposto ao ângulo e o comprimento do cateto adjacente ao ângulo.
Demonstração
Vamos provar o Teorema de Euclides mostrando que ela implica na lei dos cossenos. Dado um ΔABC, a relação $a^2 = b^2+c^2 -2\cdot c\cdot m$ é válida e implica que $a^2 = b^2+c^2 -2\cdot b\cdot c\cdot \cos(\theta)$, onde: a, b e c são os comprimentos dos lados opostos aos vértices A, B e C, respectivamente. θ é o ângulo formado entre os lados b e c. Considere a altura CD = h do triângulo a partir do vértice C até o lado AB, e as projeções (c - m) e m dos segmentos a e b sobre o lado c, respectivamente.Por construção, os triângulos ADC e DBC são retângulos em D. Pelo o Teorema de Pitágoras:
$(i)\ a^2 = h^2 + (c - m)^2$ e $(ii)\ b^2 = h^2 + m^2$
Note que $h^2 = b^2 - m^2$. Substituindo isso na equação (i), obtemos:
$a^2 = (b^2 - m^2) + (c - m)^2 \Rightarrow$
$a^2 = b^2 - m^2 + c^2 - 2\cdot c\cdot m + m^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot c\cdot m$
Pela definição de cosseno, temos $\cos(\theta) = m / b$, o que implica que $m = b\cdot\cos(\theta)$. Substituindo $m = b\cdot\cos(\theta)$ na fórmula, obtemos:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos(\theta)$
c.q.d.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Pensamento Geométrico – Construtivo</th></tr>
<tr><td colspan="2"> 
</td></tr>
</table>

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Na análise da Tarefa 10.3, observa-se que, no início, ao construir o triângulo agudo e identificar suas projeções ortogonais, Ulan demonstrou um entendimento no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986). À medida que avançava, sua análise das relações entre seno, cosseno e

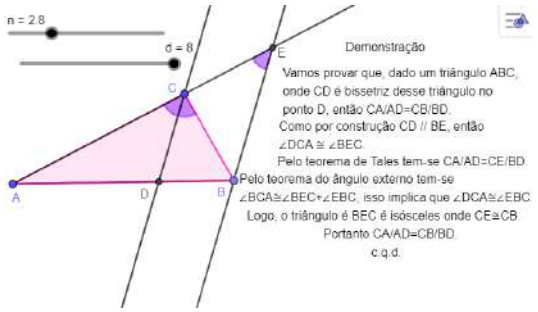
tangente no triângulo retângulo indicou uma transição para o Nível 1. A transição para o Nível 2 torna-se evidente quando Ulan relaciona essas propriedades a definições geométricas mais abstratas, como a aplicação do Teorema de Euclides e sua conexão com a lei dos cossenos. Na demonstração formal, ele utilizou o Teorema de Pitágoras e deduções geométricas para chegar à lei dos cossenos, o que reflete um raciocínio no Nível 3. Assim, ele construiu uma sequência lógica que envolveu deduções geométricas complexas, evidenciando uma compreensão sólida das inter-relações entre os elementos do triângulo e a fórmula da lei dos cossenos.

O uso dos recursos do ggb-CB facilitou a transição para o Nível 3 (Dedução Formal) ao permitir que o estudante realizasse a construção interativa do triângulo agudo e suas projeções, visualizando claramente as relações entre os lados e os ângulos. Nesta análise, é possível observar que a ferramenta "Controle Deslizante" possibilitou variações e ajustes dinâmicos dos segmentos, enquanto as ferramentas "Reta Perpendicular" e "Interseção em Dois Objetos" garantiram uma construção precisa do triângulo e suas projeções. Isso facilitou a aplicação das propriedades trigonométricas e a dedução formal do Teorema de Euclides, conectando-o diretamente à lei dos cossenos de maneira compreensível e visual.

A terceira tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 58**. A participante Elen é destacada nessa análise, com base em suas respostas transcritas ggb-CB da turma.

Quadro 58 – Tarefa 10.4 (Prova do Teorema da Bissetriz Interna)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
Prove que a bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto em duas partes proporcionais aos lados adjacentes. ***Orientações construtivas:*** *1.1. Use a ferramenta "Controle Deslizante" para criar um controle deslizante chamado b, variando de 0,1 a 10.* *1.2. Utilize a ferramenta "Segmento de Comprimento Fixo" para criar um segmento com comprimento "n". Clique na Janela de Visualização e digite "n" na Caixa de Comando desse recurso.* *1.3. Use a ferramenta "Polígono" para criar um triângulo agudo de base AB.* *1.4. Utilize as ferramentas "Bissetriz" e "Interseção em Dois Objetos" para traçar uma bissetriz em um dos ângulos internos do triângulo e marque o ponto de interseção entre a bissetriz e o lado do triângulo, ponto D.* *1.5. Use a ferramenta "Reta Paralela" para traçar uma reta paralela à bissetriz, passando por um dos vértices do triângulo que não é o ponto de partida da bissetriz.* *1.6. Prolongue o lado do triângulo que parte do vértice que dá origem à bissetriz até encontrar a reta paralela, encontrando o ponto E. Utilize as ferramentas "Semirreta" e "Interseção em Dois Objetos" para essa construção.* *1.7. Use a ferramenta "Ângulo" para identificar os ângulos internos formados pela bissetriz e pelo ponto do prolongamento, ponto E. Ajuste os ângulos para a opção sem rótulos.*	**Transcrição das respostas de Elen:** *a) São pares de ângulos que são formados quando duas linhas paralelas são cortadas por uma transversal. Esses ângulos estão na mesma posição relativa em relação às linhas paralelas e à transversal.* *Demonstração* *Vamos provar que, dado um triângulo ABC, onde CD é bissetriz desse triângulo no ponto D, então CA/AD = CB/BD. Como por construção CD // BE, então ∠DCA ≅ ∠BEC. Pelo teorema de Tales tem-se CA/AD = CE/BD. Pelo teorema do ângulo externo tem-se ∠BCA ≅ ∠BEC +*

<table>
<tr><td>a) O que são ângulos correspondentes?
2. Aplique os passos das orientações para a demonstração argumentativa (2.4. Lembre-se das propriedades da reta paralela, Teorema de Tales e do ângulo externo do triângulo).
3. Use as orientações para a demonstração dinâmica.</td><td>∠EBC, isso implica que ∠DCA ≅ ∠EBC. Logo, o triângulo é BEC é isósceles onde CE≅CB. Portanto CA/AD = CB/BD.
c.q.d.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pensamento Geométrico – Construtivo</td></tr>
<tr><td colspan="2"> 
</td></tr>
</table>

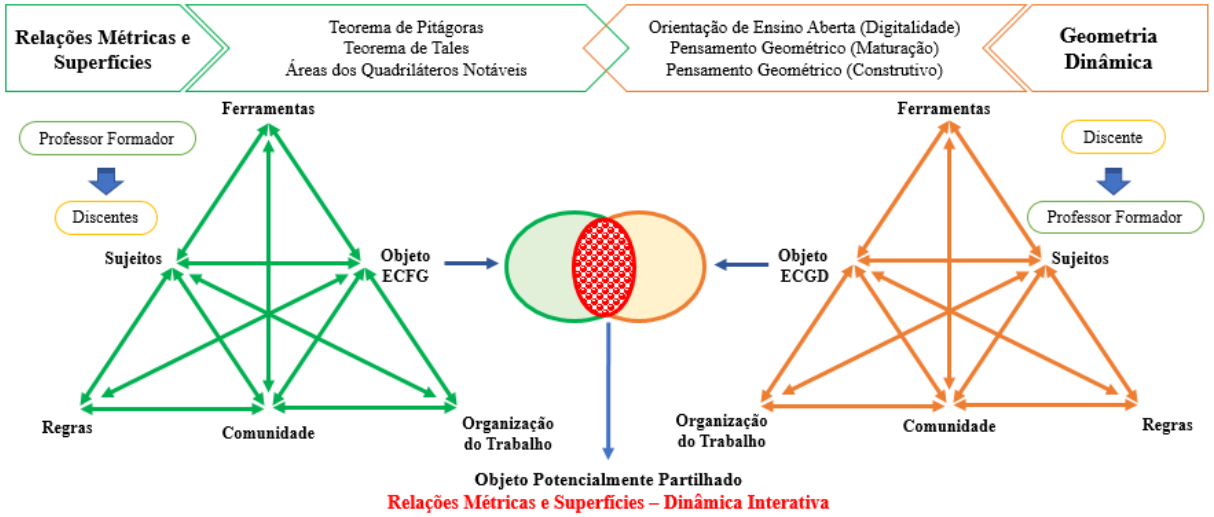
Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Na análise da Tarefa 10.4, infere-se que, inicialmente, ao criar a construção geométrica e traçar a bissetriz, Elen demonstrou um nível de compreensão correspondente ao Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986). À medida que a estudante avança nas construções e começa a traçar as linhas paralelas e a prolongar os lados do triângulo, ela começa a discernir informalmente as propriedades dos ângulos correspondentes e as proporções geradas pela bissetriz, progredindo para o Nível 1. Ao aplicar o Teorema de Tales e o Teorema do Ângulo Externo para estabelecer as proporções entre os segmentos criados pela bissetriz, a estudante avança para o Nível 2. Ao completar a demonstração de que, em um triângulo com bissetriz interna, a razão entre os segmentos do lado oposto é proporcional à razão dos lados adjacentes, ela atinge o Nível 3. Dessa forma, ao articular a relação *CA/AD=CB/BD* e justificar essa equação com base no Teorema de Tales e nas propriedades dos ângulos correspondentes e externos, Elen demonstra a capacidade de desenvolver sequências de afirmações dedutivas e construir uma prova formalmente completa.

O uso do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 3 (Dedução Formal) ao permitir que os estudantes realizassem a construção dinâmica e interativa do triângulo e suas bissetrizes. Nesta análise, é possível observar que a ferramenta “Controle Deslizante” possibilitou variações nas medidas, promovendo a exploração visual dos conceitos. Assim, a construção precisa da bissetriz, as interseções e as retas paralelas garantiram uma visualização clara das relações geométricas e trigonométricas. Isso facilitou a aplicação formal do Teorema de Tales e o uso de ângulos correspondentes, proporcionando uma demonstração rigorosa e compreensível do Teorema da Bissetriz.

As quatro tarefas analisadas evidenciam, por meio da interação entre o ECFG e a ECGD, a criação de um objeto potencialmente partilhado, conforme descrito na quarta contradição de Engeström (2016). Nesse contexto, o objeto partilhado foi a compreensão dinâmica interativa das ‘Relações Métricas e Superfícies’, com foco na maturação do pensamento geométrico dos estudantes (**Esquema 34**).

Esquema 34 – Relações Métricas e Superfícies – Dinâmica Interativa



Fonte: Pesquisador (2024).

No sistema ECFG, o professor formador teve uma atuação mais intensa, apresentando os conceitos relacionados ao Teorema de Pitágoras, ao Teorema de Tales e às áreas dos quadriláteros notáveis de maneira estruturada e sequencial. O objetivo desse sistema foi ensinar as ‘Relações Métricas e Superfícies’, estimulando a investigação de suas aplicações por meio de operações como a construção de pontos, segmentos, semicírculos e outros objetos geométricos. Para isso, o professor realizava revisões teóricas dos capítulos XI, XIV, XV e XIX do volume 9, proporcionando aos estudantes uma compreensão formal dos conhecimentos curriculares abordados.

Em paralelo, no sistema ECDG, os estudantes assumiram um papel mais proativo. Nesse ambiente, tiveram a oportunidade de explorar os conceitos de forma prática e interativa, manipulando objetos geométricos em um espaço digital dinâmico, o que resultou em um bom desempenho nas AOEA. Esse processo favoreceu o desenvolvimento de habilidades digitais, destacando-se, nesse cenário, a prática de maleabilidade bilateral interativa da estrutura geométrica por meio da ferramenta “Polígono”. Por outro lado, o professor formador, nesse

sistema, atuou como mediador, oferecendo suporte e *feedback online*, auxiliando os estudantes na consolidação do aprendizado adquirido de maneira prática.

Nesse sistema, os recursos do ggb-CB possibilitaram a exploração ativa dos conceitos de ‘Relações Métricas e Superfícies’, permitindo que os estudantes manipulassem as figuras e observassem as mudanças, o que facilitou a compreensão das propriedades e relações envolvidas. Como afirmam Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014, p. 133), “[...] as tecnologias digitais são parte do processo de educação do ser humano, e também partes constituintes da incompletude e da superação dessa incompletude ontológica do ser humano”. Em decorrência disto, os recursos adotados não apenas facilitaram o acesso a conteúdos abstratos, mas também contribuíram para a superação das limitações do ensino tradicional, oferecendo novas possibilidades para a construção do conhecimento e promovendo a maturação do pensamento geométrico de maneira mais completa e interconectada.

As operações realizadas neste sistema envolveram personalizações na visualização, calibrações e apurações da área das figuras, medições, transformações e variações dos objetos, identificações, implantações, comparações, sincronizações e conexões de elementos; conformidações e programações da estrutura, além de construções geométricas com diversas possibilidades de manipulação. Essas operações estão em consonância com a TA de Leontiev (2018), que sugere que os objetivos se desdobram em tarefas específicas, adaptadas ao contexto e executadas por meio da ação prática. Neste caso, o foco foi ajustar as superfícies geométricas. Ao utilizar ferramentas digitais para interagir com as ‘Relações Métricas e Superfícies’, os estudantes não apenas absorveram o conteúdo curricular, mas também o construíram ativamente por meio de uma prática dinâmica e interativa, consolidando o aprendizado por meio da experiência híbrida.

Na AOEA desta semana, observou-se que os estudantes assumiram o protagonismo em sua aprendizagem, demonstrando autonomia ao realizarem as tarefas sobre as ‘Relações Métricas e Superfícies’. Esse comportamento reflete a autoformação sinalizada por Macedo (2010), na qual o estudante se torna ativo na construção do conhecimento. A proatividade, nesse cenário, envolve uma prática reflexiva e autônoma, em que o estudante, ao enfrentar problemas geométricos, não apenas busca respostas, mas constrói seu entendimento de maneira crítica, desenvolvendo independência intelectual e habilidades para resolver desafios complexos.

Nesse contexto, o progresso dos estudantes nos níveis de pensamento geométrico, de acordo com o modelo de Van Hiele (1986), foi claramente facilitado e enriquecido pelo uso dos recursos do ggb-CB em uma proposta híbrida de ensino. Esse ambiente de aprendizagem

proporcionou uma construção dinâmica e interativa dos objetos geométricos, estimulando um aprendizado mais intuitivo e visual, ao mesmo tempo, em que possibilitou a exploração ativa dos conceitos.

Como resultado das análises, observou-se que nas tarefas 10.1 (Prova do Triângulo Retângulo Inscrito no Semicírculo), 10.2 (Prova do Teorema de Pitágoras), 10.3 (Prova do Teorema de Euclides – Lei dos Cossenos) e 10.4 (Prova do Teorema da Bissetriz Interna), os estudantes foram desafiados a aprimorar sua capacidade de raciocínio dedutivo. Théo, Aden, Ulan e Elen, respectivamente, demonstraram avanços significativos ao desenvolver sequências de afirmações dedutivas. Não apenas passaram a compreender a importância dessas deduções, mas também a construir e interpretar provas de maneira mais formal, característica do Nível 3 de aprendizagem.

Diante do exposto, a integração desses dois sistemas (ECFG e ECGD) resultou no objeto partilhado mencionado anteriormente. Assim, esse processo de ensino, realizado nesta proposta híbrida, mediado pelas TDI e fundamentado nas ideias de autoformação, associadas à TA, contribuiu de maneira significativa para o avanço da compreensão dos estudantes sobre as ‘Relações Métricas e Superfícies’. Esse enfoque estimulou uma aprendizagem mais ativa e autônoma, permitindo que os estudantes se tornassem protagonistas de seu próprio processo de aprendizagem.

4.11 Explorando Diferentes Objetos Coplanares

Na décima primeira semana, as aulas foram organizadas para explorar os ‘Diferentes Objetos Coplanares’, com o objetivo de promover uma compreensão dinâmica desse conteúdo curricular. Nesse cenário híbrido de ensino, as ações pedagógicas incluíram a construção e exploração do objeto em estudo, investigação, identificação e aplicação prática, tanto em relação aos conceitos de potência de ponto quanto de lugar geométrico, além da interação discursiva sobre as aplicabilidades discutidas.

Para isso, foi necessário expandir o repertório operacional dos estudantes por meio de tarefas teóricas e práticas. A aplicação das AOEA foi essencial nesse processo, pois forneceu diretrizes para a criação, manipulação e personalização de pontos, retas, semicírculos e outros objetos geométricos. Essas atividades foram planejadas para alcançar as metas Ciade, aproximando a turma dos recursos tecnológicos adotados, especialmente no incentivo à cultura digital com a utilização da ferramenta “Arco Circular”.

O **Quadro 59**, apresentado a seguir, ilustra a estrutura e a organização dessa abordagem no contexto do ensino aplicado nesta décima primeira semana.

Quadro 59 – Planejamento da décima primeira semana de aula

<table>
<tr><td colspan="4">Artefatos
Computador e Smartphone.
GeoGebra: Plataforma; Classroom Beta; Classic; Geometria.
Ferramentas Específicas: Mover; Ponto; Ponto em Objeto; Interseção de Dois Objetos; Reta; Segmento; Segmento de Comprimento Fixo; Semirreta; Reta Perpendicular; Reta Paralela; Mediatriz; Bissetriz; Polígono; Círculo dados o Centro e um dos seus Pontos; Círculo: Centro & Raio; Arco Circular; Ângulo; Distância, Comprimento e Perímetro; Controle Deslizante; Texto.
Comandos: Girar(...); Ponto(...); Reta(...); SegmentoFixo(...); Reta(...).
Livro: Fundamentos de Matemática Elementar 9: geometria plana (Cap. XI, XIII e XIX).</td></tr>
<tr><td>Objeto
Diferentes Objetos Coplanares.</td><td>Motivo
Necessidade de promover a compreensão dinâmica dos conceitos relacionados aos Diferentes Objetos Coplanares.</td><td colspan="2">Ação
❖ Construção e exploração dos Diferentes Objetos Coplanares de modo dinâmico;
❖ Investigação, identificação e aplicação dos conceitos relacionados ao lugar geométrico, potência de pontos e espirais geométricas;
❖ Interação discursiva das aplicabilidades abordadas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Operações
Comparações: aferir semelhanças e diferenças dos elementos;
Personalizações: configurar, renomear, exibir/ocultar, etc.;
Conformidações: preservar as subsistências das estruturas;
Medições: medir comprimentos e amplitudes angulares;
Construções: produzir pontos, retas, semicírculos, etc.;
Parametrizações: definir as características dos objetos;
Inquietações: expor dúvidas subjetivas e/ou coletivas;
Interlocuções: participar das discussões construtivas;
Identificações: localizar as interseções dos objetos;
Programações: processar comandos de construção;
Sincronizações: encontrar os pontos tangenciais;
Explorações: testar os recursos do GeoGebra;
Calibrações: ajustar a superfície geométrica;
Revisões: revisar os conteúdos curriculares;
Implantações: inserir elementos adaptáveis;
Variações: ampliar/reduzir os objetos;
Transformações: deslocar os objetos;
Interações: interagir com as AOEA;
Apurações: calcular áreas planas;
Administrações: gerenciar conta;
Aplicações: resolver problemas;
Conexões: conectar elementos;
Manipulações: mover objetos.</td><td colspan="2">Metas
➢ Construir pontos, retas, círculos, etc. para explorar os Diferentes Objetos Coplanares com a mediação tecnológica das ferramentas e comandos do GeoGebra;
➢ Investigar e aplicar conceitos relacionados ao lugar geométrico, potência de pontos e espirais geométricas;
➢ Desenvolver habilidades práticas de parametrização interativa da estrutura geométrica com uso da ferramenta “Arco Circular”;
➢ Estimular discussões e reflexões sobre abordagens teóricas e práticas relacionadas ao objeto de estudo.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Condições
Ambiente de ensino híbrido com suporte contínuo da equipe docente para auxiliar na aprendizagem dos Diferentes Objetos Coplanares durante as atividades presenciais, oferecendo orientações e estímulos personalizados durante as observações online a distância.</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisador (2024).

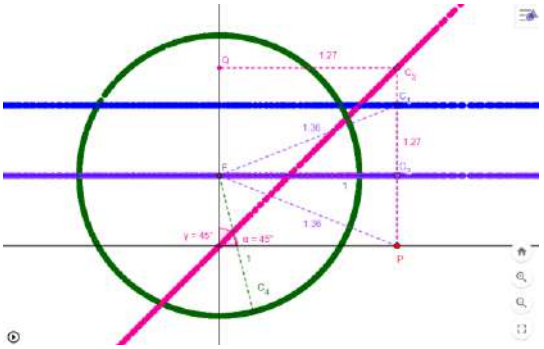
O professor formador iniciou a aula explicando que, na Matemática, especificamente na Geometria, um lugar geométrico é definido como o conjunto de pontos em um plano que

compartilham uma característica ou condição específica. Na Geometria Euclidiana, os lugares geométricos são geralmente representados em duas dimensões, mas é possível expandir esse conceito para o espaço tridimensional, onde superfícies como esferas, cilindros e elipsoides também podem ser consideradas lugares geométricos. Assim, os lugares geométricos podem se manifestar como retas, curvas ou superfícies.

Por conseguinte, utilizando a mediação tecnológica das ferramentas “Reta”, “Ponto em Objeto”, “Ponto Médio ou Centro”, “Reta Paralela”, “Mediatriz”, “Segmento”, “Reta Perpendicular”, “Ângulo” e “Distância, Comprimento e Perímetro”, bem como dos comandos “Reta(...)”, “Ponto(...)”, “SegmentoFixo(...)” e “Girar(...)”, além de algumas de suas conexões e da ativação do recurso “Rasto”, o professor elaborou uma demonstração interativa de diversos lugares geométricos planos, explorando a reta paralela, a mediatriz, a bissetriz e a circunferência.

A construção teve início com dois controles deslizantes, uma reta base e um ponto *P*. A partir disso, foi gerado um ponto médio para criar uma reta paralela e a mediatriz entre essa reta e a reta base. Utilizando a ferramenta de mediatriz, foi demonstrado que os segmentos formados entre um ponto *F* e outros pontos eram congruentes, independentemente do deslocamento do ponto *P*. Em seguida, foi traçada uma reta perpendicular e, para ilustrar a bissetriz, foi mostrado que os segmentos e ângulos formados eram congruentes. A demonstração foi finalizada com o traçado de um novo segmento girado, ressaltando a importância da visualização das construções e da medição dos segmentos. O professor concluiu mencionando que outros conceitos geométricos mais avançados seriam abordados posteriormente no ensino, conforme ilustrado na **Figura 36**.

Figura 36 – Lugares Geométricos

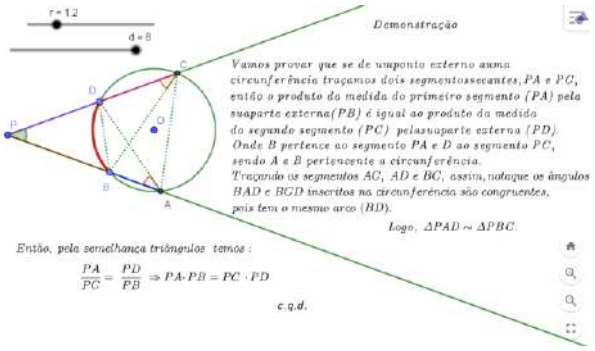


Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/ds2ru6uc. Acesso em: 14 ago. 2024.

Na segunda etapa da aula, o professor formador explicou que a potência de um ponto é definida como o produto das distâncias entre esse ponto e os pontos de interseção de uma reta que passa por ele e uma circunferência dada. Ele esclareceu que a potência de um ponto *P* em relação a um círculo de centro *O* e raio *r* é expressa pela fórmula: $Pot(O)P = d^2 - r^2$, onde d representa a distância de *P* ao centro do círculo. Quando *P* está fora do círculo, temos $d > r$, resultando em $Pot(O)P > 0$. Se *P* está sobre a circunferência, então $d = r$ e $Pot(O)P = 0$. Por fim, se *P* está dentro do círculo, $d < r$ implica que $Pot(O)P < 0$. Assim, com a mediação das ferramentas “Controle Deslizante”, “Círculo: Centro & Raio”, “Ponto em Objeto”, “Ponto”, “Semirreta”, “Interseção em Dois Objetos”, “Segmento”, “Ângulo”, “Arco Circular” e “Texto”, o professor formador começou a ilustrar a potência de um ponto externo à circunferência, utilizando segmentos externos secantes.

Neste momento, ele criou um controle deslizante para ajustar o raio da circunferência, desenhando uma com centro *O* e raio *r*. Posicionou dois pontos (*B* e *D*) sobre a circunferência e um ponto *P* fora dela. Em seguida, traçou as semirretas *PB* e *PD*, encontrando os pontos de interseção *A* e *C*. Os segmentos *AC*, *AD* e *BD* foram representados com estilo pontuado, e os ângulos $\angle DPB$, $\angle BAD$ e $\angle BCD$ foram identificados. Na sequência, traçou o arco *BD* e, enquanto explicava o processo, transcreveu a demonstração na Janela de Visualização. Para finalizar, o professor adicionou um segundo controle deslizante e configurou as condições de exibição para cada representação geométrica, ajustando os textos explicativos conforme o controle deslizante avançava, conforme ilustrado na **Figura 37**.

Figura 37 – Potência de ponto externo com segmentos secantes



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/pwas4er4. Acesso em: 14 ago. 2024.

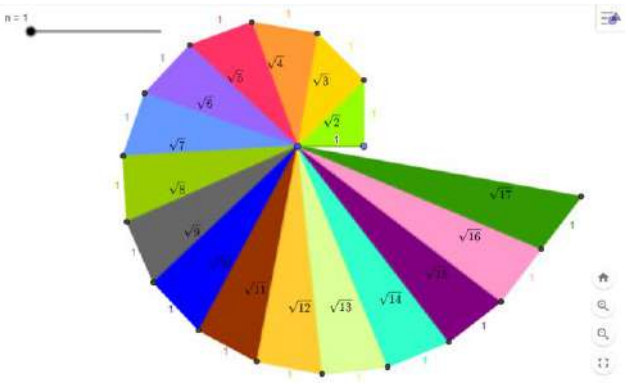
Para estimular a criatividade dos participantes, o professor apresentou a espiral de Teodoro, que pode ser formada por infinitos triângulos retângulos. Ele explicou que a espiral original é gerada a partir de um triângulo retângulo com catetos iguais a 1. A partir desse

triângulo inicial, são criados novos triângulos retângulos, nos quais um cateto menor é igual a 1 e o cateto maior corresponde à hipotenusa do triângulo anterior. Consequentemente, forma-se uma sequência de hipotenusas que pode variar conforme o valor do cateto inicial. Assim, com a mediação tecnológica das ferramentas “Controle Deslizante”, “Segmento de Comprimento Fixo”, “Reta Perpendicular”, “Círculo com Centro e um de seus Pontos”, “Interseção de Dois Objetos”, “Polígono”, “Reta Perpendicular”, “Texto” e “Comprimento, Distância ou Perímetro”, o professor formador construiu a espiral de Teodoro.

Dessa forma, o professor formador iniciou a construção criando um controle deslizante n que determinava o comprimento de um segmento *AB*, seguido pela traçada de uma reta perpendicular ao segmento *AB* no ponto *B*. Em seguida, desenhou uma circunferência com centro em *B* e que passava por *A*, encontrando o ponto de interseção *C* entre a reta perpendicular e a circunferência. Ele destacou que, ao clicar nos dois objetos (circunferência e reta perpendicular), surgiriam dois pontos de interseção, mas enfatizou a importância de clicar sempre no sentido anti-horário para gerar um único ponto de interseção. Após essa construção, desenhou o triângulo *ΔABC*.

O processo foi repetido para traçar uma reta perpendicular ao segmento *AC* no ponto *C*, seguida de uma circunferência com centro em *C* e passando por *A*, resultando no ponto *D*, que é a interseção entre a reta perpendicular e a circunferência. O triângulo *ΔACD* foi então formado, e esse procedimento foi continuado de maneira análoga para construir os triângulos: *ΔADE*, *ΔAEF*, *ΔAFG*, *ΔAGH*, *ΔAHI*, *ΔAIJ*, *ΔAJK*, *ΔAKL*, *ΔALM*, *ΔAMN*, *ΔANO*, *ΔAOP*, *ΔAPQ* e *ΔAQR*.

Figura 38 – Espiral de Teodoro



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/rnn49yna. Acesso em: 14 ago. 2024.

Após essas construções, o professor utilizou a Caixa de Entrada para definir uma sequência de operações ($w_1 = n + n$, $w_2 = n + w_1$, $w_3 = n + w_2$, e assim por diante até $w_{16} = n + w_{15}$). Em seguida, ele inseriu comandos em LaTeX na Caixa de Texto para representar cada valor w_i (de 1 a 16), como "\sqrt{w₁}", "\sqrt{w₂}", e assim por diante. Posteriormente, ele exibiu os valores dos catetos que não seriam hipotenusas no próximo triângulo, ativando rótulos com legendas correspondentes (texto1, texto2, ..., texto16) e diferenciou-os por cores para facilitar a visualização, conforme ilustrado na **Figura 38**, acima.

Em resumo, esta décima primeira semana de aula representa o Sistema de Atividades XI, no qual foram explorados os conhecimentos curriculares relacionados aos 'Diferentes Objetos Coplanares', conforme as abordagens realizadas pelo professor formador. No entanto, durante esse processo, caracterizado pela pluralidade e multivocalidade, foram observadas algumas tensões e inquietações, que serão analisadas no próximo subtópico.

4.11.1 Análise das contradições heteroformativas no sistema de atividades XI

A análise das interações da aula do Sistema de Atividades XI, fundamentada nas contradições primária, secundária e terciária de Engeström (2016), revelou as tensões e as possibilidades de aprendizagem que emergiram enquanto os estudantes se dedicavam tanto à construção de pontos, retas, círculos e outros objetos geométricos no ggb-CB, quanto à exploração dos conhecimentos curriculares relacionados aos Diferentes Objetos Geométricos, tema abordado pelo professor formador.

As interações durante a aula revelaram as contradições primárias de Engeström (2016), que ocorrem dentro dos componentes do sistema de atividade, especialmente na tensão entre o valor de uso e o valor de troca dos conceitos geométricos. A dúvida de Ulan sobre a mediatriz e sua relação com o ponto *P* reflete a dificuldade em compreender tanto o valor prático quanto o teórico desses conceitos, especialmente ao se considerar o lugar geométrico. No caso em questão, a mediatriz de um triângulo é o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos vértices, e entender essa relação com o ponto *P*, que é o circuncentro, tornou-se desafiador. Esse conceito teórico se torna mais acessível quando visualizado e manipulado por meio dos elementos no GeoGebra, mas a transição do abstrato para a concretização virtual gerou uma tensão inicial.

Nesse processo, a heteroformação sinalizada por Macedo (2010) se fez presente quando o professor, atuando como mediador, não apenas explicou os conceitos de mediatriz e circuncentro, mas também orientou a turma a integrar essas explicações com as observações

práticas realizadas por meio do GeoGebra. A interação com a ferramenta digital, mediada pelo professor, possibilitou que os estudantes compreendessem o lugar geométrico de maneira mais compreensível. A troca de conhecimentos entre a turma e o professor, gerada por essas explorações, promoveu uma construção coletiva do entendimento, superando a tensão entre o valor de uso da ferramenta e o valor de troca do conteúdo teórico. Ao manipular mediatrizes e circunferências, os estudantes foram capazes de conectar visualmente os conceitos, consolidando uma compreensão coletiva.

Foi possível observar que a contradição secundária proposta por Engeström (2016) surgiu entre as ferramentas digitais, como o GeoGebra, e os objetivos da atividade, evidenciada pela dúvida de Théo sobre como os arcos circulares variavam conforme a posição dos pontos selecionados. Esse questionamento revelou a tensão entre a visualização digital proporcionada pela ferramenta e a compreensão teórica dos conceitos geométricos. A dificuldade residia em alinhar a dinâmica visual do GeoGebra com a compreensão abstrata dos arcos e suas propriedades matemáticas. Théo, ao tentar entender como a mudança na posição dos pontos alterava o arco, enfrentou o desafio de transpor a experiência visual para a teoria.

No entanto, essa contradição encontrou sua solução por meio da internalização do conhecimento, conforme a teoria de Vygotsky (2019). O uso do GeoGebra possibilitou que os estudantes observassem, de maneira instantânea, a interação entre os conceitos geométricos, como a variação do arco em função da posição dos pontos, de maneira prática e compreensível. Essa interação direta com a ferramenta digital possibilitou uma aproximação mais íntima com os conceitos teóricos, promovendo uma aprendizagem mais interativa. O ajuste dos elementos visuais e a observação das propriedades matemáticas, mediadas pela ferramenta “Arco Circular”, permitiram que Théo, assim como outros estudantes, não apenas resolvessem suas dúvidas pontuais, mas também internalizassem o conceito de maneira mais profunda.

A contradição terciária de Engeström (2016) surgiu quando o uso de novas tecnologias, como o GeoGebra, entrou em conflito com abordagens tradicionais de ensino. Esse conflito foi evidenciado pela resistência de Ulan e Seth em compreender as fórmulas das secantes e tangentes, refletindo a dificuldade de adaptar o aprendizado a um ambiente digital mais interativo. O que antes era ensinado de forma linear e estática, por meio da memorização de fórmulas, agora era questionado e explorado de maneira mais dinâmica. A transição para essa nova abordagem gerou uma tensão, pois os estudantes precisavam se distanciar de um modelo tradicional de aprendizado para explorar as potencialidades da ferramenta digital.

Esse processo de adaptação e resolução de contradições alinha-se às ideias de Lévy (2003), que discute como as TD e a inteligência coletiva podem transformar o ambiente educacional. No caso das ferramentas do GeoGebra, os estudantes puderam, por meio da exploração dinâmica, experimentar diferentes configurações geométricas e perceber como os conceitos de secantes e tangentes se aplicavam a diversas situações. A ferramenta não apenas facilitou a visualização dessas relações, mas também permitiu que eles corrigissem seus próprios erros em tempo real, em um processo cooperativo. A aprendizagem, assim, não ocorreu apenas de forma individual, mas por meio da co-construção coletiva do conhecimento, à medida que os estudantes interagiam entre si e com a tecnologia.

Por fim, a resolução dessas contradições, dentro deste movimento heteroformativo e no modelo de formação híbrida (Horn; Staker, 2015), evidencia como a integração de ferramentas digitais no ensino pode transformar o processo formativo em algo mais envolvente e coletivamente interativa. O uso do GeoGebra facilitou a visualização de relações complexas, como as da potência de um ponto e das espirais geométricas, permitindo que os estudantes não apenas compreendessem teoricamente esses conceitos, mas também os explorassem de maneira prática e dinâmica. Esse ambiente favoreceu a troca de experiências e a mediação do professor, que, ao orientar os estudantes, possibilitou a construção coletiva do conhecimento.

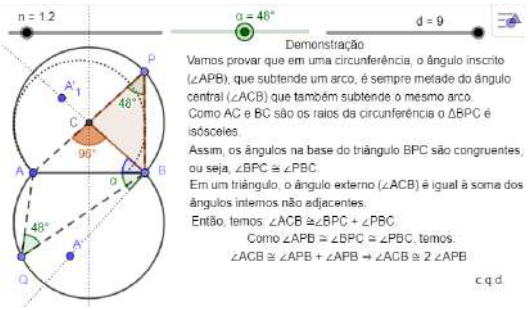
4.11.2 Análise das contradições autoformativas no sistema de atividades XI

Com a base estabelecida no subtópico anterior, que tratou das dinâmicas heteroformativas e suas tensões, resultando na construção coletiva do conhecimento, a análise agora se volta para os aspectos autoformativas no Sistema de Atividades XI, fundamentando-se nesse processo tecformativo digital e evidenciando como os estudantes adotaram uma postura mais autônoma e proativa no processo de aprendizagem dos ‘Diferentes Objetos Coplanares’. Em decorrência disso, nesta parte, discute-se a maneira como os níveis de aprendizagem (Van Hiele, 1986) se manifestaram nas tarefas dos quatro participantes que mais se destacaram durante as interações da décima primeira semana de aula. Após essa análise, é apresentada a interação geral entre os sistemas envolvidos à luz da contradição quaternária (Engeström, 2016).

A primeira tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 60**. O participante Ulan é destacado nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 60 – Tarefa 11.1 (Par de Arco Capaz e Prova do Teorema do Ângulo Inscrito)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
Dado um ângulo α e um segmento AB, determine um ponto P no plano tal que ∠APB = α. ***1. Orientações construtivas:*** *1.1. Utilize a ferramenta "Controle Deslizante" para criar um controle deslizante chamado n, variando seus valores de 0,1 a 10. Em seguida, produza mais um controle, do tipo ângulo, variando de 1º a 89º, com incremento de 1º.* *1.2. Use a ferramenta "Segmento de Comprimento Fixo" e construa um segmento AB de tamanho n, digitando n na Caixa de Comando.* *1.3. Use a ferramenta "Ângulo com Amplitude Fixa", clique no ponto A e depois em B, no sentido anti-horário, e digite α na Caixa de Comando. Com essa ferramenta ainda ativa, clique novamente no ponto A e B, no sentido horário, e digite 90º - α na Caixa de Comando.* *1.4. Use a ferramenta "Semirreta" e trace as semirretas que definem esses ângulos.* *1.5. Use as ferramentas "Mediatriz" e "Interseção em Dois Objetos" para traçar a mediatriz do segmento AB e marque o ponto de interseção dela com a semirreta do ângulo de amplitude 90º - p, ponto C. Ajuste o estilo dessa reta e das semirretas para pontuado e a espessura para 3.* *1.6. Use a ferramenta "Arco Circular": clique no ponto C e depois em B e A, nessa ordem.* *1.7. Use as ferramentas "Ponto em Objeto", "Segmento" e "Ângulo" para colocar um ponto P sobre o arco. Trace os segmentos AP e PB e meça o ângulo ∠APB.* ***a) Mova o ponto P e observe o que acontece.*** ***b) Qual a relação entre ∠APB e α? Por quê?*** *1.8. Utilizando a ferramenta "Reflexão em Relação a uma Reta", clique no arco e no segmento AB.* *1.9. Use as ferramentas "Ponto em Objeto", "Segmento" e "Ângulo" para colocar um ponto Q sobre o arco. Trace os segmentos AQ e PQ e meça o ângulo ∠AQB.* ***c) Qual a relação entre ∠APB e ∠AQB? Por quê?*** ***d) Essa construção é um lugar geométrico, exceto para quais pontos? Por quê?*** *1.10. Use a ferramenta "Polígono" para construir o triângulo BCP e meça o ∠ACB usando a ferramenta "Ângulo".* *e) Qual a relação entre ∠APB e ∠ACB?* ***f) Prove que todo ângulo inscrito na circunferência é a metade do ângulo central.*** ***2. Aplique os passos das orientações para a demonstração argumentativa.*** *(Use as propriedades da base do triângulo isósceles e o Teorema do Ângulo Externo de um Triângulo).* ***3. Use as orientações para a demonstração dinâmica.***	**Transcrição das respostas de Ulan:** *a) Quando eu movo o ponto P ao longo do arco, o ângulo ∠APB sempre continua sendo o mesmo valor do ângulo α.* *b) O ângulo ∠APB vai ser sempre igual a α porque o ponto P está na borda do arco que é definido pelos segmentos AB e o ângulo α. Não importa onde eu coloque o ponto P ao longo do arco, o ângulo ∠APB sempre vai ser igual a α. Isso acontece por causa da regra do arco capaz..* *c) Esse ângulos são sempre iguais. Isso ocorre porque ambos estão medindo o mesmo pedaço de arco AB na circunferência. Na circunferência, todos os ângulos que olham para o mesmo arco são iguais, não importa onde o ponto P ou Q esteja no arco.* *d) Quando o ponto P estiver fora desse arco ou na linha AB. Isso acontece porque essa construção é válida somente para todos os pontos que estão ao longo do arco definido por AB.* *e) O ângulo ∠APB é sempre metade do ângulo central ∠ACB.* *Demonstração* *Vamos provar que em uma circunferência, o ângulo inscrito (∠APB), que subtende um arco, é sempre metade do ângulo central (∠ACB) que também subtende o mesmo arco. Como AC e BC são os raios da circunferência o ΔBPC é isósceles. Assim, os ângulos na base do triângulo BPC são congruentes, ou seja, ∠BPC ≅ ∠PBC. Em um triângulo, o ângulo externo (∠ACB) é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes. Então, temos: ∠ACB ≅ ∠BPC + ∠PBC* *Como ∠APB ≅ ∠BPC ≅ ∠PBC, temos: ACB ≅ ∠APB + ∠APB ⇒ ∠ACB ≅ 2 ∠APB* *c.q.d.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	



Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

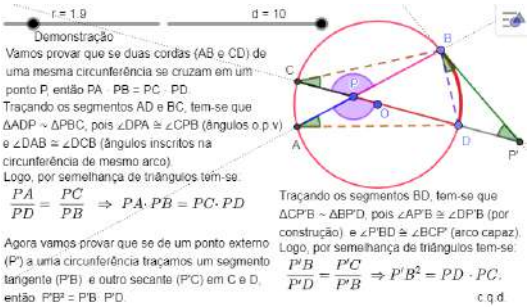
Na análise da Tarefa 11.1, infere-se que Ulan inicia sua operação no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), pois ele reconhece segmentos, ângulos e arcos pela aparência global e interage visualmente com os objetos, sem ainda explicitar suas propriedades geométricas de forma mais abstrata. À medida que a tarefa avança, o estudante move o ponto *P* ao longo do arco e observa que o ângulo ∠*APB* permanece constante e igual ao ângulo α, independentemente da posição de P no arco, o que indica que ele alcança o Nível 1. Ao introduzir a ideia de que o ângulo inscrito é sempre igual ao ângulo ∠*AQB*, Ulan reconhece a classe dos ângulos inscritos que subtendem o mesmo arco, evidenciando um progresso para o Nível 2. Ao formular a demonstração da relação entre o ângulo inscrito e o ângulo central, o estudante mencionado atinge o Nível 3, articulando uma sequência lógica de afirmações geométricas e utilizando o teorema dos triângulos isósceles para provar que o ângulo inscrito é metade do ângulo central.

O uso do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 3 (Dedução Formal) ao permitir que o estudante realizasse a construção virtual e interativa da relação entre os ângulos inscritos e centrais. Nesta análise, é possível observar que a ferramenta “Controle Deslizante” possibilitou a variação dinâmica do ângulo α, permitindo uma exploração empírica antes da formalização. Assim, as construções do ponto *P* e do arco circular, juntamente com a mediatriz e os ângulos correspondentes, facilitaram a visualização da regra do arco capaz. Isso culminou na formulação formal da relação entre o ângulo inscrito e o ângulo central, comprovada por meio de raciocínios geométricos e teoremas conhecidos.

A segunda tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 61**. A participante Elen é destacada nessa análise, com base em suas respostas transcritas ggb-CB da turma.

Quadro 61 – Tarefa 11.2 (Prova do Ponto de Potência)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**

Prove que, se duas cordas de uma mesma circunferência se cruzam, o produto das medidas das duas partes de uma corda é igual ao produto das medidas das partes da outra corda. Em seguida, provar que, se de um ponto externo a uma circunferência traçamos um segmento tangente e outro secante, o quadrado da medida do segmento tangente é igual ao produto da medida do segmento secante pela parte da secante que está fora da circunferência. ***1. Orientações Construtivas:*** *1.1. Utilize a ferramenta "Controle Deslizante" para criar um controle deslizante chamado "r", variando seus valores de 0,1 a 10.* *1.2. Use a ferramenta "Círculo: Raio & Centro" para construir um círculo de raio "r". Ajuste o centro da circunferência para o ponto "O".* *1.3. Com a ferramenta "Ponto em Objeto", clique dentro da circunferência e, em seguida, clique duas vezes na circunferência em lugares distintos. Renomeie esses pontos como "P", "B" e "D".* *1.4. Trace as retas que passam por "P" e "B" e por "P" e "D". Use a ferramenta "Interseção em Dois Objetos" para encontrar os pontos de interseção das retas com a circunferência, chamando o ponto na reta PB de "A" e o ponto na reta PD de "C". Ajuste as retas para o estilo pontuado e com espessura 2.* *1.5. Com a ferramenta "Segmento", trace os segmentos PA, PB, PC e PD. Depois, ajuste os segmentos AD e BC para o estilo tracejado.* *1.6. Use a ferramenta "Arco Circular": clique no ponto "O" e, em seguida, em "B" e "D". Ajuste o arco para uma cor diferente dos demais elementos da construção e com espessura 10.* *1.7. Utilize a ferramenta "Ângulo" para identificar os ângulos sem rótulo. Ajuste os ângulos congruentes para a mesma cor.* *a) Quando "P" está dentro da circunferência, qual a relação entre os triângulos ADP e PBC?* *1.8. Use a ferramenta "Reta Tangente" e trace a reta tangente à circunferência no ponto "C". Identifique o ponto "P'" onde essa reta intersecta a reta PC usando a ferramenta "Interseção em Dois Objetos". Ajuste a reta tangente para o estilo pontuado e espessura 2.* *1.9. Com as ferramentas "Segmento" e "Ângulo", trace os segmentos P'D e P'B e identifique sem rótulo o ângulo P'BD.* *b) O que é um arco capaz?* ***2. Aplique os passos das orientações para a demonstração argumentativa.*** *(Use a propriedade da semelhança de triângulo).* ***3. Use as orientações para a demonstração dinâmica.***	***Transcrição das respostas de Elen:*** *a) Quando o ponto está dentro da circunferência, os triângulos são semelhantes.* *b) É um arco de circunferência que, quando subtendido por uma corda, faz com que o ângulo oposto ao arco seja sempre igual.* *Demonstração* *Vamos provar que se duas cordas (AB e CD) de uma mesma circunferência se cruzam em um ponto P, então PA · PB = PC · PD.* *Traçando os segmentos AD e BC, tem-se que ΔADP ~ ΔPBC, pois ∠DPA ≅ ∠CPB (ângulos o.p.v) e ∠DAB ≅ ∠DCB (ângulos inscritos na circunferência de mesmo arco).* *Logo, por semelhança de triângulos tem-se:* *PA/PD = PC/PB ⇒ PA · PB = PC · PD.* *Agora vamos provar que se de um ponto externo (P') a uma circunferência traçamos um segmento tangente (P'B) e outro secante (P'C) em C e D, então P'B² = P'B· P'D.* *Traçando os segmentos BD, tem-se que ΔCP'B ~ ΔBP'D, pois ∠AP'B ≅ ∠DP'B (por construção). e ∠P'BD ≅ ∠BCP' (arco capaz).* *Logo, por semelhança de triângulos tem-se:* *P'B/P'D = P'C/P'B ⇒ P'B² = PD · PC.* *c.q.d.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	
	

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Na análise da Tarefa 11.2, observa-se que, ao iniciar a construção das cordas e traçar os segmentos, Elen operou no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), reconhecendo as figuras geométricas e suas interseções. No entanto, à medida que avançou, sua análise das relações

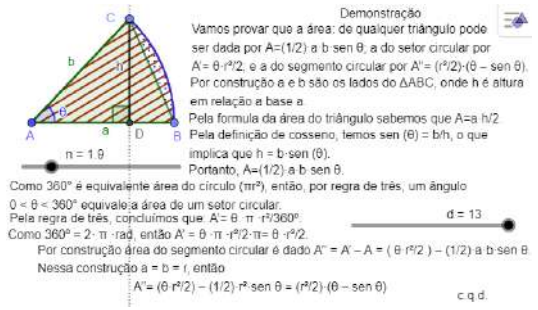
entre os triângulos formados pelas cordas indicou uma progressão para o Nível 1, onde começou a identificar as propriedades dos triângulos semelhantes, como a relação entre os produtos das medidas das partes das cordas. A estudante alcançou o Nível 2 ao reconhecer as propriedades das figuras geométricas envolvidas, como a semelhança entre os triângulos ΔADP e ΔPBC, além da aplicação das propriedades das cordas e dos ângulos inscritos. Na demonstração formal da equação $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, ela progrediu para o Nível 3, conseguindo aplicar a propriedade da semelhança de triângulos para estabelecer relações proporcionais.

O uso dos recursos do ggb-CB facilitou a transição para o Nível 3 (Dedução Formal) ao possibilitar uma exploração visual e dinâmica dos teoremas. Nesta análise, é possível notar que a construção interativa das cordas e tangentes permitiu observar a relação entre os segmentos de forma empírica antes da formalização. Assim, as ferramentas de interseção, semelhança de triângulos e ângulos congruentes possibilitaram a visualização dos ângulos e a aplicação das propriedades de semelhança, o que foi essencial para a dedução formal dos teoremas. Essa visualização prática dos conceitos facilitou a compreensão e a argumentação rigorosa, consolidando a demonstração geométrica.

A terceira tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 62**. O participante Seth é destacado nessa análise, com base em suas respostas transcritas ggb-CB da turma.

Quadro 62 – Tarefa 11.3 (Provas: Área do Triângulo, Setor e Segmento Circular)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
Prove que a área de um triângulo qualquer pode ser encontrada pela metade do produto de dois lados e o seno do ângulo entre eles. Depois, prove que a área de um setor circular é igual à metade do produto do quadrado do raio pela medida do ângulo central em radianos. Além disso, prove que a área de um segmento circular pode ser obtida subtraindo a área do triângulo formado pelo raio e os extremos do arco da área do setor circular correspondente. *1.* ***Orientações construtivas:*** *1.1. Use a ferramenta "Controle Deslizante" para criar um controle deslizante chamado n, variando de 0,1 a 10.* *1.2. Utilize a ferramenta "Segmento de Comprimento Fixo" para criar dois segmentos com comprimento "n". Clique na janela de Visualização e digite "n" na Caixa de Comando desse recurso. Depois clique no ponto B e digite "n" na Caixa de Comando desse recurso. Mova o ponto C, fazendo ângulo não nulo entre os segmentos AB e AC.* *1.3. Use a ferramenta "Polígono" para criar um triângulo ABC de base AB.* *1.4. Utilize as ferramentas "Reta Perpendicular" e "Interseção em Dois Objetos" para traçar altura do triângulo, marque o ponto de interseção dessa reta com o lado AB, ponto D. Ajuste essa reta para estilo pontuado e espessura 3.*	**Transcrição das respostas de Seth:** *a) Um setor circular é basicamente uma "fatias" de um círculo, como uma fatia de pizza. É a área entre dois raios e o arco que eles formam.* *b) Um segmento circular é a parte de um círculo que fica entre um arco e a linha reta que o conecta. É a área "cortada" pelo arco e a linha que vai de um ponto do arco a outro.* *c) Para encontrar o seno de um ângulo em um triângulo retângulo, você divide o comprimento do cateto oposto ao ângulo pelo comprimento da hipotenusa.* *Demonstração* *Vamos provar que a área: de qualquer triângulo pode ser dada por* $A=(1/2)\cdot a\cdot b\cdot \text{sen}\ \theta$*; a do setor circular por* $A'= \theta\cdot r^2/2$*; e a do segmento circular por* $A''= (r^2/2)\cdot(\theta - \text{sen}\ \theta)$*.*

1.5. Use a ferramenta "Segmento" para traçar altura em relação a base AB, nomeado de h. *1.6. Use a ferramenta "Ângulo" para identificar o ângulo interno do triângulo ADC e um ângulo θ interno no vértice A. Ajuste para que o ângulo reto fique sem rótulo e o θ só com a opção nome.* *1.7. Use a ferramenta "Setor Circular" e construa o setor circular clicando, nessa ordem, A, B e C. Ajuste o mesmo para o estilo de preenchimento pontuado.* ***a) O que é um setor circular?*** *1.8. Use a ferramenta "Arco Circular" e construa o setor circular clicando, nessa ordem, A, B e C. Ajuste o mesmo para o estilo de preenchimento pontuado.* ***b) O que é um segmento circular?*** ***c) Como é possível encontrar o seno de um ângulo no triângulo retângulo?*** ***2. Aplique os passos das orientações para a demonstração argumentativa** (2.4. Lembre-se das fórmulas para a área do triângulo, definição de seno para sua demonstração, a área do círculo).* ***3. Use as orientações para a demonstração dinâmica.***	*Por construção a e b são os lados do ΔABC, onde h é altura em relação a base a.* *Pela fórmula da área do triângulo sabemos que A=a·h/2.* *Pela definição de seno, temos sen (θ) = b/h, o que implica que h = b·sen(θ).* *Portanto, A=(1/2)·a·b·sen θ.* *Como 360° é equivalente área do círculo (πr²), então, por regra de três, um ângulo 0 < θ < 360° equivale a área de um setor circular.* *Como 360° = 2· π ·rad, então A' = θ ·π ·r²/2·π= θ ·r²/2. Por construção área do segmento circular é dado A'' = A' – A = (θ·r²/2) – (1/2)·a·b·sen θ.* *Nessa construção a = b = r, então A''= (θ·r²/2) – (1/2)·r²·sen θ = (r²/2)·(θ – sen θ).* *c.q.d.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	
	

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Na análise da Tarefa 11.3, observa-se que Seth operou no Nível 0 do modelo de van Hiele (1986), reconhecendo formas lineares e circulares, bem como suas relações geométricas básicas. À medida que avançou na análise da área do triângulo e do setor circular, o estudante demonstrou sinais de progressão para o Nível 1, onde começou a reconhecer as fórmulas das áreas e a relação entre o seno de um ângulo e a altura de um triângulo. Sua compreensão das áreas do triângulo e do setor circular, assim como a formulação de relações matemáticas, indica uma transição para o Nível 2, onde ele é capaz de formular definições e reconhecer inter-relações entre propriedades geométricas. Na demonstração formal das áreas e sua relação com a definição de seno e a área do círculo, Seth atingiu o Nível 3. Ele foi capaz de deduzir, com base em sequências lógicas, as fórmulas para a área do triângulo e do setor circular, evidenciando um entendimento mais avançado das inter-relações geométricas.

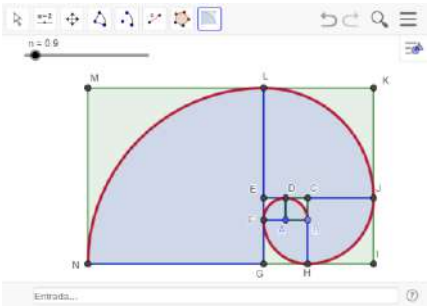
O uso dos recursos do ggb-CB foi essencial para potencializar a transição para o Nível 3 (Dedução Formal), permitindo ao estudante uma exploração interativa e visual das fórmulas. Nesta análise, é possível observar que a construção dinâmica de triângulos, setores circulares e

segmentos circulares facilitou a compreensão das relações entre os elementos, como ângulos e lados. Em virtude disso, a ferramenta "Controle Deslizante" possibilitou ajustar os parâmetros e visualizar como as fórmulas para a área do triângulo e do setor circular se aplicam em diferentes situações. Isso proporcionou uma base sólida para a dedução rigorosa das fórmulas, alinhando a intuição visual com a argumentação formal.

A última tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 63**. O participante Théo é destacado nessa análise, com base em suas respostas transcritas ggb-CB da turma.

Quadro 63 – Tarefa 11.4 (Espiral de Fibonacci)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
1.1. Use a ferramenta "Controle Deslizante" para criar um controle deslizante chamado n, variando de 0,1 a 10. *1.2. Utilize a ferramenta "Segmento de Comprimento Fixo" para criar um segmento com comprimento n. Clique na Janela de Visualização e digite n na Caixa de Comando desse recurso.* *1.3. Use a ferramenta "Polígono Regular" para criar um quadrado. Clique no ponto A e depois no ponto B, e digite 4 na Caixa de Comando para definir os vértices. Ajuste esse quadrado para a cor verde.* ***a) Qual é o valor da área desse quadrado em função de n?*** *1.4. Utilize a ferramenta "Setor Circular" e clique nos pontos A, B e D. Ajuste a cor para azul.* *1.5. Tire um print somente dessa construção e salve em uma pasta. Para isso, segura as teclas "Windows + Shift + S" e selecione a área da representação da imagem, cole no paint e salve como imagem PNG.* ***b) Qual é o valor desse setor em função de n?*** ***c) Qual é o valor da parte do objeto geométrico de cor verde sem a cor azul, em função de n?*** ***d) Quais são os próximos dois termos da sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...? Qual é o nome dessa sequência?*** *1.6. Clique no menu e selecione a opção "Criar Ferramenta". Na janela desse recurso, na interface de Objetos Finais, clique na seta para baixo da opção "Selecione objetos da construção ou escolha-as de uma lista". Escolha as seguintes opções:* *"Polígono pol1: Polígono(A, B, 4)"* *"SetorCircular(A, B, D)"* *"Ponto C: Polígono(A, B, 4)"* *"Ponto D: Polígono(A, B, 4)"* *Depois, clique no botão "PRÓXIMO". Na interface de Objetos Iniciais, clique na opção "número n" e clique no item da lixeira (ele será deletado). Em seguida, na seta para baixo da opção "Selecione objetos da construção ou escolha-as de uma lista", escolha:* *"Ponto B: Ponto sobre Círculo (A, n)"* *Clique no botão "PRÓXIMO". Na interface de Nome e Ícone, para "Nome da ferramenta", digite "Setor Circular Inscrito no Quadrado". Na opção "Nome do comando", observe que aparece automaticamente o nome do comando "SetorCircularInscritonoQuadrado". Na opção "Ajuda", digite "Clique no ponto inicial e depois no ponto final.".* *Por fim, na opção "Ícone", escolha a imagem do print que você tirou da sua construção e clique em "Concluído".* ***e) O que aparece na sua barra de ferramentas?***	***Transcrição das respostas de Théo:*** *a) A área do quadrado é dada pela fórmula $A = l^2$. Como o lado do quadrado é n, a área em função de n é $A(n) = n^2$.* *b)A fórmula para calcular a área de um setor circular é: $A_s = (\theta / 360°) \times \pi \times r^2$, Como é em função de n e $\theta = 90°$, então fica $As = (90° / 360°) \times \pi \times n^2 = (1/4) \times \pi \times n^2$.* *c) Para encontrar a parte do quadrado que não está ocupada pelo setor circular, subtraímos a área do setor da área do quadrado $Av(n) = n^2 - (\pi / 4) \times n^2$* *d) Essa é a sequência de Fibonacci, onde cada termo é a soma dos dois anteriores. Portanto, os próximos termos são:* *$13 = 8 + 5$* *$21 = 13 + 8$* *e) Vejo a ferramenta que eu criei sendo representada pela imagem tirada.* *f) Dá pra ver como o setor circular está ligado aos quadrados em volta dele. A curva vermelha é a espiral de Fibonacci, que aparece a partir dos quadrados e mostra como as áreas estão relacionadas com essa sequência numérica. Essa construção combina um*

1.7. Com a nova ferramenta criada, clique primeiro no ponto A e depois em D. Em seguida, clique no ponto B, depois em F, e depois no ponto C e em H, e depois no ponto E e em J, e, por fim, no ponto G e L. *1.8. Use a ferramenta "Arco Circular" para destacar a curva do setor circular. Para isso, ajuste a cor para vermelho e a espessura para 10. Para cada quadrado, clique no ponto interno oposto ao arco e, em seguida, nos pontos que definem o arco no sentido anti-horário.* ***f) O que é possível observar nessa construção? O ela representa geométrica? Ela tem fim?***	*quadrado e um setor circular, e a espiral mostra como as proporções crescem seguindo a sequência de Fibonacci. Essa construção não tem um fim definido, se expandido infinitamente.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	
	

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

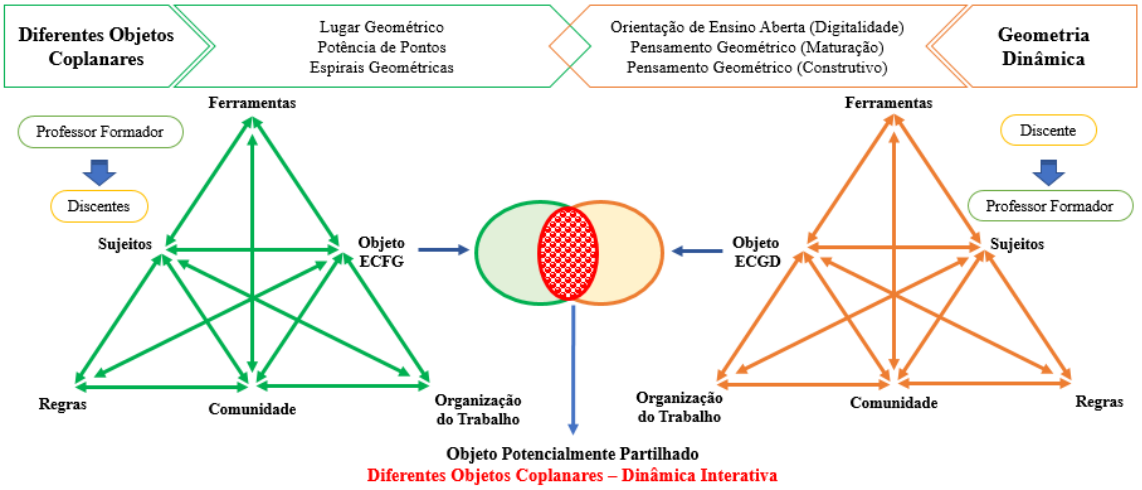
Na análise da Tarefa 11.4, observa-se que, inicialmente, Théo se encontra no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), onde realiza visualizações iniciais e reconhece formas geométricas, como o quadrado e o setor circular, sem uma exploração aprofundada de suas propriedades. À medida que avança, especialmente ao calcular a área do setor circular e relacioná-la com a do quadrado, o estudante transita para o Nível 1. Ele analisa informalmente as partes das figuras e estabelece propriedades, utilizando fórmulas básicas para descrever suas construções. Quando ele subtrai a área do setor circular da área do quadrado para determinar a área remanescente e, posteriormente, relaciona essa construção com a sequência de Fibonacci, o estudante demonstra ter alcançado o Nível 2. Nesse nível, Théo começa a reconhecer classes de figuras e estabelece inter-relações abstratas entre suas propriedades.

O uso dos recursos do ggb-CB facilitou a transição para o Nível 2 (Dedução Informal) ao permitir que o estudante visualizasse e manipulasse dinamicamente elementos geométricos, como quadrados, setores circulares e espirais. Nesta análise, é possível observar que a ferramenta "Controle Deslizante" possibilitou a exploração das variáveis, como o valor de "n", e como elas afetam as áreas e proporções entre os objetos, o que facilitou a dedução das relações entre eles. A criação de uma ferramenta personalizada contribuiu para consolidar a compreensão, permitindo que o estudante aplicasse o conceito de maneira prática e exploratória, estabelecendo uma conexão entre a Geometria e a sequência de Fibonacci.

As quatro tarefas analisadas evidenciam, por meio da interação entre o ECFG e a ECGD, a criação de um objeto potencialmente partilhado, conforme descrito na quarta contradição de

Engeström (2016). Nesse contexto, o objeto partilhado foi a compreensão dinâmica interativa dos ‘Diferentes Objetos Coplanares’, com foco na maturação do pensamento geométrico dos estudantes (**Esquema 35**).

Esquema 35 – Diferentes Objetos Coplanares – Dinâmica Interativa



Fonte: Pesquisador (2024).

No sistema ECFG, o professor formador teve uma atuação mais intensa, apresentando os conceitos relacionados ao lugar geométrico, à potência de pontos e às espirais geométricas de maneira estruturada e sequencial. O objetivo desse sistema era ensinar os ‘Diferentes Objetos Coplanares’ e estimular a investigação de suas aplicações por meio de operações como a construção de pontos, retas, semicírculos e outros objetos geométricos. Para isso, o professor realizava revisões teóricas dos capítulos XI, XIII e XIX do volume 9, proporcionando aos estudantes uma compreensão formal dos conhecimentos curriculares abordados.

Concomitantemente, no sistema ECDG, os estudantes passaram a adotar uma postura mais proativa e a ter uma participação mais intensa. Nesse ambiente, tiveram a oportunidade de explorar os conceitos de forma prática e interativa, manipulando objetos geométricos em um espaço digital dinâmico, o que resultou em um bom desempenho nas AOEA. Isso possibilitou o desenvolvimento de habilidades digitais, destacando-se, nesse contexto, a prática de parametrização interativa da estrutura geométrica com o uso da ferramenta “Arco Circular”. Por outro lado, o professor formador atuou como mediador, oferecendo suporte e *feedback online*, auxiliando os estudantes a consolidar o aprendizado de maneira prática.

Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014) destacam que, com o desenvolvimento e a inovação das TD, já é possível discutir o ensino matemático em condições privilegiadas, por meio de ambientes de interação *online*. Sob essa perspectiva, o ggb-CB se apresenta como um

recurso poderoso, permitindo aos estudantes explorar, manipular e visualizar figuras geométricas coplanares de forma prática e envolvente. Esse ambiente digital favoreceu a maturação do pensamento geométrico por meio da construção de conhecimento, possibilitando que os estudantes experimentassem diferentes relações entre os objetos e compreendessem suas propriedades de maneira mais intuitiva e acessível. Assim, a utilização das ferramentas digitais do GeoGebra contribui não apenas para a assimilação de conceitos geométricos, mas também para a ampliação de habilidades digitais essenciais no contexto contemporâneo da educação.

As operações realizadas nesse sistema envolveram personalizações na visualização, calibrações e apurações da área das figuras, medições, transformações e variações dos objetos, identificações, implantações, comparações, sincronizações e conexões de elementos, parametrizações; conformidações e programações da estrutura, além de construções geométricas com diversas possibilidades de manipulação. Essas operações estão alinhadas com a TA de Leontiev (2018), que argumenta que os objetivos são transformados em tarefas específicas, as quais variam conforme o contexto e são executadas por meio da ação prática. Nesse cenário, o foco foi parametrizar as características dos objetos geométricos. Ao utilizar ferramentas digitais para interagir com os ‘Diferentes Objetos Coplanares’, os estudantes não apenas absorveram o conteúdo curricular, mas também o construíram ativamente por meio de uma prática dinâmica e interativa, consolidando o aprendizado por meio da experiência híbrida.

Na AOEA desta semana, observou-se que os estudantes adotaram uma postura proativa, refletindo a ideia de autoformação proposta por Galvani (2002, p. 97), que afirma que a autoformação é um “[...] processo paradoxal, que se alimenta de suas dependências”. Esse conceito destaca a importância do papel ativo dos estudantes na construção de seu próprio conhecimento. Ao explorar de forma independente e reflexiva os conceitos relacionados a ‘Diferentes Objetos Coplanares’, os estudantes desenvolveram sua autonomia. Essa interação ativa com o conteúdo não apenas os desafiou a assumir a responsabilidade pela própria aprendizagem, mas também os incentivou a adotar uma postura reflexiva, permitindo que considerassem suas descobertas e compreendessem o conhecimento de maneira mais autônoma.

Nessa conjuntura, o progresso dos estudantes nos diferentes níveis de pensamento geométrico, segundo o modelo de Van Hiele (1986), foi significativamente apoiado pelo uso dos recursos do ggb-CB em uma proposta híbrida de ensino. Esse ambiente de aprendizagem favoreceu a construção dinâmica e interativa dos objetos geométricos, proporcionando um aprendizado mais intuitivo e visual. Ao explorarem as tarefas propostas, os estudantes foram

desafiados a avançar em sua compreensão, não apenas de forma prática, mas também por meio de uma reflexão mais profunda sobre as relações geométricas.

Na análise da Tarefa 11.4 (Espiral de Fibonacci), por exemplo, o estudante Théo demonstrou um avanço significativo no Nível 2 de aprendizagem ao desenvolver uma compreensão mais abstrata das relações geométricas por meio de deduções informais. Esse processo indicou uma transição de saberes-geométricos, permitindo uma compreensão mais teórica e abstrata do conteúdo explorado. Por outro lado, nas tarefas 11.1 (Par de Arco Capaz e Prova do Teorema do Ângulo Inscrito), 11.2 (Prova do Ponto de Potência) e 11.3 (Prova da Área do Triângulo, Setor e Segmento Circular), os estudantes Ulan, Elen e Seth avançaram para o Nível 3 ao elaborarem sequências de afirmações dedutivas e uma compreensão mais aprofundada da relevância dessas deduções, além de serem capazes de construir e compreender provas formais. Esse progresso reflete uma evolução do raciocínio lógico, passando de uma abordagem exploratória e intuitiva para uma mais formal e estruturada.

Dessa forma, a integração desses dois sistemas (ECFG e ECGD) resultou no objeto partilhado mencionado anteriormente. Esse processo de ensino, realizado nesta proposta híbrida, mediado pelas TDI e fundamentado nos conceitos de autoformação e na TA, contribuiu significativamente para o avanço da compreensão dos estudantes sobre os ‘Diferentes Objetos Coplanares’. Isso possibilitou uma aprendizagem mais interativa e autônoma.

4.12 Explorando as Figuras Espaciais de Posição

Na décima segunda semana, as aulas foram estruturadas para explorar as ‘Figuras Espaciais de Posição’, com o objetivo de promover uma compreensão dinâmica desse conteúdo curricular. Nesse cenário híbrido de ensino, as ações pedagógicas envolveram a construção e a exploração do objeto de estudo, bem como a investigação, identificação e aplicação prática dos conceitos relacionados ao postulado da determinação do plano, à posição dos planos e à formação dos diedros e triedros, além da interação discursiva sobre as aplicabilidades discutidas.

Para isso, foi necessário expandir o repertório operacional dos estudantes por meio de tarefas teóricas e práticas. A aplicação das AOEA foi essencial nesse processo, pois forneceu diretrizes para a criação, manipulação e personalização de pontos, retas, planos e outros objetos geométricos. Essas atividades foram planejadas para alcançar as metas Ciade, aproximando a

turma dos recursos tecnológicos adotados, especialmente no incentivo à cultura digital com a utilização da ferramenta “Girar a Janela de Visualização 3D”.

O **Quadro 64**, apresentado a seguir, ilustra a estrutura e a organização dessa abordagem no contexto do ensino aplicado nesta décima segunda semana.

Quadro 64 – Planejamento da décima segunda semana de aula

<table>
<tr><td colspan="3">Artefatos
Computador e Smartphone.
GeoGebra: Plataforma; Classroom Beta; Classic; Geometria; Calculadora 3D.
Ferramentas Específicas: Mover; Ponto; Ponto em Objeto; Interseção de Dois Objetos; Reta; Reta Perpendicular; Interseção de Duas Superfícies; Plano por três pontos; Plano; Plano Perpendicular; Plano Paralelo; Ângulo; Girar a Janela de Visualização 3D.
Comandos: Plano(...)
Livro: Fundamentos de Matemática Elementar 10: geometria espacial, posição e métrica (do Cap. I ao VI).</td></tr>
<tr><td>Objeto
Figuras Espaciais de Posição.</td><td>Motivo
Necessidade de promover a compreensão dinâmica dos conceitos relacionados às Figuras Espaciais de Posição.</td><td>Ação
❖ Construção e exploração das Figuras Espaciais de Posição de modo dinâmico;
❖ Investigação, identificação e aplicação dos conceitos relacionados ao postulado da determinação do plano, posição dos planos e diedros/ triedros;
❖ Interação discursiva das aplicabilidades abordadas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Operações
Simulações: gerar representações dos objetos no espaço físico;
Comparações: aferir semelhanças e diferenças dos elementos;
Personalizações: configurar, renomear, exibir/ocultar, etc.;
Conformidações: preservar as subsistências das estruturas;
Percepções: explorar as visualizações multidimensionais;
Medições: medir comprimentos e amplitudes angulares;
Parametrizações: definir as características dos objetos;
Inquietações: expor dúvidas subjetivas e/ou coletivas;
Interlocuções: participar das discussões construtivas;
Identificações: localizar as interseções dos objetos;
Programações: processar comandos de construção;
Sincronizações: encontrar os pontos tangenciais;
Construções: produzir pontos, retas, planos, etc.;
Explorações: testar os recursos do GeoGebra;
Calibrações: ajustar a superfície geométrica;
Revisões: revisar os conteúdos curriculares;
Implantações: inserir elementos adaptáveis;
Variações: ampliar/reduzir os objetos;
Transformações: deslocar os objetos;
Interações: interagir com as AOEA;
Apurações: calcular áreas planas;
Administrações: gerenciar conta;
Aplicações: resolver problemas;
Conexões: conectar elementos;
Manipulações: mover objetos.</td><td>Metas
➢ Construir pontos, retas, planos, ângulos, etc. para explorar as Figuras Espaciais de Posição com a mediação tecnológica das ferramentas e comandos do GeoGebra;
➢ Investigar e aplicar conceitos relacionados ao postulado da determinação do plano, posição dos planos e diedros/triedros;
➢ Desenvolver habilidades práticas de visualização multidimensional da estrutura geométrica com uso da ferramenta “Girar Janela de Visualização 3D”;
➢ Estimular discussões e reflexões sobre abordagens teóricas e práticas relacionadas ao objeto de estudo.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Condições
Ambiente de ensino híbrido com suporte contínuo da equipe docente para auxiliar na aprendizagem das Figuras Espaciais de Posição durante as atividades presenciais, oferecendo orientações e estímulos personalizados durante as observações online a distância.</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisador (2024).

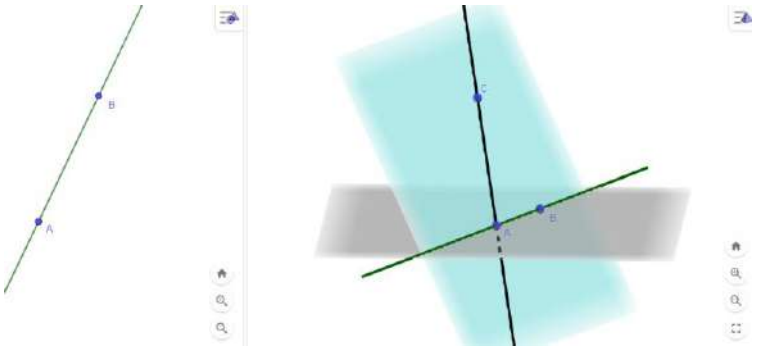
O professor formador deu início à terceira unidade, apresentando a interface 3D do GeoGebra, com foco nos conceitos de Geometria Espacial. Ele começou explicando que o espaço é definido como o conjunto de todos os pontos e que, a partir desse entendimento, desenvolveria novos conhecimentos geométricos com a mediação tecnológica das ferramentas “Ponto”, “Mover”, “Plano por três pontos” e “Girar a Janela de Visualização 3D”. Em razão disso, o professor não apenas explorou postulados espaciais, mas também diferentes projeções tridimensionais. Ele demonstrou que, por meio da barra de estilo da Janela de Visualização 3D, é possível visualizar os objetos em quatro tipos distintos de projeções, além de permitir a rotação interativa das construções no espaço tridimensional.

Nesse contexto, o professor formador abordou o postulado da determinação do plano, enfatizando que três pontos distintos e não colineares definem um único plano. Para ilustrar esse conceito, ele criou três pontos não colineares, nomeados *A*, *B* e *C*. Em seguida, ativou a Janela de Visualização 3D, onde os pontos foram inicialmente visualizados sobre o plano *XY*. Para facilitar a compreensão, ele clicou no ponto *C* e o moveu verticalmente na Janela de Visualização 3D, demonstrando que, ao fazer isso, esse ponto deixava de estar no plano previamente definido. Ele então gerou um novo plano, denominado α.

Na sequência, traçou as retas *AB* e *AC*, demonstrando que, mesmo estando em planos diferentes, essas retas continuavam a ser concorrentes e determinavam o plano β. O professor formador destacou que duas retas concorrentes também definem um plano e mencionou que é possível determinar um plano por meio de uma reta e um ponto externo a ela. De forma complementar, ele ressaltou que duas retas paralelas distintas também podem definir um plano, conforme a ilustração na Figura 39.

Essa construção está ilustrada na **Figura 39**. Essa construção, ilustrada na Figura 39, evidencia a disposição complementar entre a Janela de Visualização (2D), localizada à esquerda, e a Janela de Visualização 3D do GeoGebra *Classic online*, posicionada à direita na configuração de Geometria. A sincronização automática entre as duas janelas transcende a mera exibição simultânea, promovendo uma integração dinâmica que potencializa o aprendizado. Enquanto a Janela de Visualização permite uma abordagem mais tradicional, favorecendo a precisão na elaboração de elementos geométricos, a Janela de Visualização 3D amplia a percepção espacial e fomenta a compreensão das interações no ambiente tridimensional. Essa dualidade não apenas enriquece a experiência pedagógica, mas também estimula uma reflexão mais profunda sobre a interconexão entre diferentes dimensões de representação, preparando os estudantes para enfrentar desafios geométricos de maneira mais crítica e fundamentada.

Figura 39 – Planos concorrentes



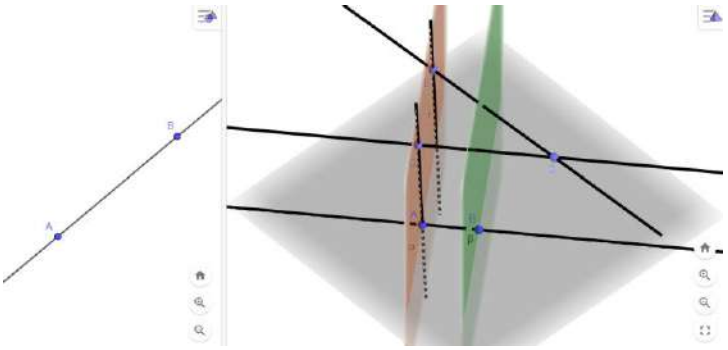
Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/demekmkf. Acesso em: 14 ago. 2024.

Na segunda etapa da aula, o professor abordou os conceitos de planos perpendiculares, planos paralelos e retas reversas de maneira interativa, utilizando a mediação das ferramentas tecnológicas “Reta Perpendicular”, “Ângulo”, “Plano Paralelo”, “Reta”, “Ponto em Objeto” e “Girar a Janela de Visualização 3D”. Ele iniciou a explicação sobre planos perpendiculares, demonstrando que dois planos são perpendiculares quando se cruzam em uma reta e formam um ângulo reto. Para ilustrar, traçou a reta *AB* no plano *XY* e, em seguida, desenhou uma reta perpendicular ao ponto *A*, criando o plano α. Posteriormente, gerou o plano β, que foi posicionado paralelo a α no ponto *B*. Assim, ele esclareceu que dois planos são paralelos quando não se cruzam, mesmo que se estendam indefinidamente.

Dando continuidade ao assunto, ele inseriu um ponto *C* na reta perpendicular criada, que pertence ao plano α, e traçou uma reta paralela à *AB* que passa por *C*. Em seguida, foram adicionados os pontos *D* e *E*, desenhadas as retas *CA* e *ED*, e traçada uma reta paralela a *CA*, denominada *r*. O professor formador explicou que os planos α e β eram paralelos e perpendiculares ao plano *XY* ($\alpha \parallel \beta$ e $\alpha \perp XY$ e $\beta \perp XY$), e que as retas *AB* e *ED* eram reversas. Além disso, destacou que as retas *AB* e *r* também eram reversas, mas ortogonais, pois formavam um ângulo reto em relação ao plano *XY*, embora não se cruzassem.

O professor, então, definiu retas reversas como aquelas que não se encontram e não pertencem ao mesmo plano, ilustrando com duas retas paralelas situadas em planos distintos, que, apesar de paralelas, jamais se cruzariam, conforme demonstrado na **Figura 40**. Na conclusão dessa explicação, é possível refletir sobre o papel fundamental das TD no processo de ensino e aprendizagem de conceitos abstratos, como os de planos e retas no espaço tridimensional. A utilização de ferramentas como da Janela 3D, além de facilitar a visualização desses conceitos, proporciona uma experiência mais dinâmica e interativa para os estudantes, permitindo que desenvolvam uma compreensão mais intuitiva.

Figura 40 – Planos perpendiculares, paralelos e retas reversas



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/dkajxdrt. Acesso em: 14 ago. 2024.

É importante ressaltar que, durante essa abordagem, o professor formador explorou o conceito de figuras geométricas, explicando que uma figura é considerada plana quando todos os seus pontos pertencem ao mesmo plano, sendo denominados coplanares. Por outro lado, figuras cujos pontos não pertencem ao mesmo plano são chamadas de figuras não coplanares. De forma complementar, ele esclareceu que, se dois planos distintos compartilham um ponto em comum, sua interseção resulta em uma reta única. O professor também detalhou a condição de paralelismo entre retas e planos, explicando que uma reta é paralela a um plano se, e somente se, não houver pontos em comum entre eles. Por fim, destacou que, para determinar a interseção de dois planos, é suficiente encontrar dois pontos distintos que sejam comuns a ambos.

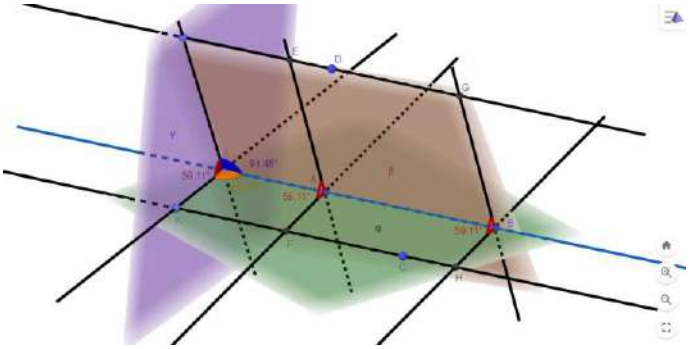
Na terceira etapa da aula, o professor formador abordou os conceitos de diedros e triedros, que são fundamentais para a compreensão da Geometria Espacial. Ele enfatizou que, na Geometria Euclidiana Plana, a relação entre uma reta e um plano é essencial para estabelecer uma base sólida para os conhecimentos tridimensionais. Nesta dimensão, as interações tornam-se mais complexas, pois dois planos podem ser coincidentes, paralelos ou concorrentes. O professor destacou que, neste momento, o foco está nos planos concorrentes, uma vez que a interseção de dois planos concorrentes resulta em uma reta, formando um diedro. Por outro lado, a interseção de três planos concorrentes leva à formação de um ponto, gerando um triedro.

Para ilustrar o conceito, o professor formador utilizou a Janela de Visualização 3D do GeoGebra, empregando as mediações das ferramentas tecnológicas “Ponto”, “Plano”, “Plano Perpendicular”, “Interseção de Duas Superfícies”, “Reta Paralela”, “Interseção em Dois Objetos”, “Ângulo”, “Ponto em Objeto” e “Reta”. O professor iniciou a construção inserindo quatro pontos no plano *XY*. Em seguida, moveu o ponto *C* verticalmente para cima e, ao clicar nos pontos *A*, *B* e *C*, criou o plano α. Após isso, clicou nos pontos *A*, *B* e *D* para formar o plano β.

Para melhorar a visualização, ele ocultou o plano *XY* e utilizou a barra de estilo para selecionar a visualização em branco. Com isso, o professor localizou a reta *AB*, que representava a interseção dos dois planos criados. Em seguida, ele traçou duas retas paralelas à reta *AB*: uma passando pelo ponto *C* e outra pelo ponto *D*. Ao clicar nas retas paralelas e nos pontos *A* e *B*, ele desenhou as retas inseridas nos planos, identificando as interseções dessas retas com as paralelas e, posteriormente, traçou os ângulos diedros *FAE* e *HBG*. Para finalizar, o professor inseriu um ponto em cada uma das retas paralelas *AB* e outro na reta *AB*, conectando esses pontos para formar um plano γ. Esse plano foi representado como interseccionando os planos α e β, formando um ângulo e gerando um triedro.

O professor mediu os três ângulos formados na interseção, caracterizando essa junção como um triedro, conforme ilustrado na **Figura 41**. É importante ressaltar que o uso da Janela 3D do GeoGebra nessa construção foi essencial para a visualização e compreensão dos conceitos geométricos em três dimensões, promovendo uma experiência de aprendizado imersiva e intuitiva. Essa funcionalidade permitiu ao professor e aos estudantes explorar a interação entre planos, retas e ângulos de maneira detalhada, destacando aspectos que seriam difíceis de visualizar em representações bidimensionais, como as da lousa.

Figura 41 – Diedros e triedros



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/pk6ybcjs. Acesso em: 14 ago. 2024.

Ao final da aula, o professor utilizou o aplicativo Calculadora 3D do GeoGebra, desativou o eixo e o plano *XY* e, com o apoio da tecnologia, fez uso das ferramentas “Ponto”, do comando “Plano(...)” e da virtualização por Realidade Aumentada (AR). Ao ativar a opção AR no dispositivo, ele direcionou a câmera do smartphone para a mesa e, ao mover lentamente o aparelho, detectou a superfície de projeção. Nesse espaço, produziu três pontos – *A*, *B* e *C* – e, ao mover o ponto *A* verticalmente para cima, traçou o plano definido por esses três pontos. Essa demonstração causou grande surpresa na turma, que, naquele momento, parecia

desconhecer as potencialidades da tecnologia aplicada ao ensino. A interação com a AR não apenas ilustrou a simulação geométrica no ambiente real, mas também despertou o interesse e a curiosidade dos estudantes, evidenciando o impacto da mediação tecnológica no processo de aprendizagem.

Basicamente, esta décima segunda semana de aula representa o Sistema de Atividades XII, no qual foram explorados os conhecimentos curriculares relacionados às 'Figuras Espaciais de Posição', conforme as abordagens realizadas pelo professor formador. No entanto, durante esse processo, caracterizado pela pluralidade e multivocalidade, foram observadas algumas tensões e inquietações, que serão analisadas no próximo subtópico.

4.12.1 Análise das contradições heteroformativas no sistema de atividades XII

A análise das interações da aula do Sistema de Atividades XII, fundamentada nas contradições primária, secundária e terciária de Engeström (2016), revelou as tensões e as possibilidades de aprendizagem que emergiram enquanto os estudantes se dedicavam tanto à construção de pontos, retas, planos e outros objetos geométricos no ggb-CB, quanto à exploração dos conhecimentos curriculares relacionados às 'Figuras Espaciais de Posição', tema abordado pelo professor formador.

As interações da aula evidenciaram a contradição primária de Engeström (2016) no contexto do sistema de atividade, relacionada à tensão entre o valor de uso e o valor de troca dos conceitos geométricos. Seth, ao comparar a definição de um plano com a de um triângulo, revelou a dificuldade em distinguir esses conceitos, que possuíam valores prático (uso) e teórico (troca) distintos. Nesse momento, a heteroformação, conforme Macedo (2010), se manifestou, com o professor esclarecendo a relação entre o triângulo e o plano. Esse processo facilitou a compreensão dos estudantes por meio da troca de experiências e explicações, conduzindo-os a uma visão coletiva sobre o que define um plano geométrico.

Foi possível observar que a contradição secundária proposta por Engeström (2016) surgiu entre o uso das ferramentas digitais do GeoGebra e o objetivo de internalizar conceitos espaciais complexos, como diedros e triedros. A dúvida de Théo sobre como o ponto *C*, ao ser movido, modificava o plano exemplificou essa tensão entre o artefato e a abstração geométrica. A partir da interação no GeoGebra, o estudante conseguiu internalizar o conceito de planos e suas posições relativas, conforme as ideias de Vygotsky (2019), que destaca a importância do uso de ferramentas externas para a internalização do conhecimento. Os recursos da Janela 3D,

especialmente, a ferramenta “Mover Janela de Visualização 3D”, foram instrumentos inovadores que potencializaram a compreensão dos estudantes, permitindo que observassem como os elementos interagem em diferentes ângulos e profundidades. Isso ajudou a turma a construir um entendimento mais sólido e intuitivo sobre as relações espaciais entre os componentes geométricos.

As contradições terciárias de Engeström (2016) foram observadas quando um novo modelo de atividade, mediado pela tecnologia, foi introduzido, gerando conflitos com o modelo tradicional de ensino. No caso do uso das ferramentas GeoGebra, os estudantes não apenas visualizaram os conhecimentos geométricos em 2D, mas também puderam explorar a Geometria Espacial em 3D, algo que as representações estáticas em papel não permitiam. Nesse contexto, a tensão surgiu quando Elen e Ulan, ao se depararem com os planos e suas interações, inicialmente enfrentaram dificuldades para compreender essas figuras tridimensionais, que se distanciavam das representações tradicionais que conheciam. Contudo, essa dificuldade foi superada por meio da visualização dinâmica e interativa proporcionada pela ferramenta. Ao manipularem e observarem os planos a partir de diferentes ângulos, os estudantes internalizaram os conceitos de forma mais intuitiva, superando a abstração dos modelos anteriores e promovendo uma compreensão mais clara das interações espaciais.

Para Lévy (2003), ao valorizarmos os diferentes conhecimentos dos indivíduos e proporcionarmos a oportunidade de colaboração de maneira instantânea, criamos um ambiente propício ao desenvolvimento da inteligência coletiva. Em vista disto, a interação dos estudantes com a ferramenta GeoGebra, ao explorar a Geometria de forma coletivamente interativa, não apenas facilitou a compreensão individual, mas também gerou um processo de aprendizagem coletiva. A mobilização conjunta dos saberes, à medida que os estudantes exploravam e discutiam suas observações, exemplifica como a tecnologia não só amplia o aprendizado individual, mas também contribui para o reconhecimento e valorização do saber do outro, promovendo um movimento de construção coletiva.

Essas contradições foram resolvidas neste contexto formativo híbrido (Horn; Staker, 2015), mediado pelo uso da ferramenta GeoGebra. A possibilidade de visualização tridimensional e manipulação das construções geométricas facilitou a troca de conhecimentos entre estudantes e professores, promovendo um ambiente mais cooperativo e dinâmico. Esse processo está inserido em um movimento heteroformativo, no qual o conhecimento é construído coletivamente por meio da interação constante, em que o professor atua como mediador, enquanto os estudantes também são agentes ativos na troca de saberes.

A exploração de elementos como diedros, triedros e planos no GeoGebra proporcionou aos estudantes uma compreensão mais profunda da Geometria Espacial. Ao interagir com as ferramentas dessa mencionada TD, os estudantes puderam ajustar e visualizar em tempo real as transformações e relações geométricas, facilitando a conexão entre a teoria e a prática. Essa abordagem tornou o ambiente de aprendizagem mais ativo e cooperativo, onde as representações visuais enriqueceram a compreensão dos conceitos e fortaleceram a construção coletiva do conhecimento.

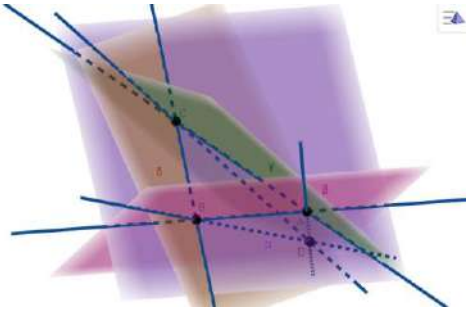
4.12.2 Análise das contradições autoformativas no sistema de atividades XII

Com a base estabelecida no subtópico anterior, que tratou das dinâmicas heteroformativas e suas tensões, resultando na construção coletiva do conhecimento, a análise agora se volta para os aspectos autoformativas no Sistema de Atividades XII, fundamentando-se nesse processo tecformativo digital e evidenciando como os estudantes adotaram uma postura mais autônoma e proativa no processo de aprendizagem das 'Figuras Espaciais de Posição'. Em decorrência disso, nesta parte, discute-se a maneira como os níveis de aprendizagem (Van Hiele, 1986) se manifestaram nas tarefas dos quatro participantes que mais se destacaram durante as interações da décima segunda semana de aula. Após essa análise, é apresentada a interação geral entre os sistemas envolvidos à luz da contradição quaternária (Engeström, 2016).

A primeira tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 65**. A participante Hend é destacada nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 65 – Tarefa 12.1 (Planos)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	Pensamento Geométrico – Maturação
1.1. Usando a ferramenta "Ponto", crie 4 pontos não colineares no plano XY. *1.2. Com a ferramenta "Mover", clique no ponto C e arraste-o verticalmente para cima.* *1.3. Com a ferramenta "Mover", clique no ponto D e arraste-o verticalmente para baixo. Em estilo escolha a opção branca da Janela de Visualização, ou seja, sem o plano XY.* *1.4. Utilize a ferramenta "Plano por três pontos" para produzir os planos ABC, ABD, ACD e BCD, nomeando-os, respectivamente, como α (alfa), β (beta), γ (gama) e δ (delta) nas legendas. Ajuste eles para cores*	***Transcrição das respostas de Hend:*** *a) Os pontos devem ser não colineares para garantir que um único plano possa ser definido. Se os pontos forem colineares, não será possível formar um plano, pois todos estariam alinhados em uma única linha.* *b) Pois, a partir de 3 pontos não colineares, é possível gerar exatamente um plano, pois três pontos distintos determinam um único plano no espaço.* *c) Com 4 pontos não colineares, até 4 planos diferentes podem ser gerados, dependendo de como os pontos são combinados. Se algum ponto for colinear com os outros, o número de planos possíveis será reduzido.* *d) Que a interseção dos três planos é uma reta.*

diferentes e na opção estilo escolha a opção plano em branco, para ocultar o plano XY. *1.5. Use o comando "Interseção(Objeto, Objeto)" para encontrar as interseções desses planos.* ***a) Por que os pontos devem ser não colineares?*** ***b) Quantos planos podem ser gerados a partir de 3 pontos?*** ***c) Quantos planos podem ser gerados a partir de 4 pontos?*** *1.6. Use a ferramenta "Girar Janela de Visualização 3D".* ***d) O que observa?*** ***e) Qual a importância de estudar a interseção entre planos?*** ***f) Na sua concepção com a inter-relação da Geometria Plana com a Geometria Espacial nessa construção?***	*e) Estudar a interseção entre planos é fundamental para compreender como diferentes superfícies se encontram e se relacionam no espaço tridimensional, além de ser essencial para resolver problemas.* *f) Na atividade, percebi que quando criamos planos no espaço tridimensional a partir de pontos não colineares, estamos aplicando conceitos de geometria plana, especificamente, o fato de que três pontos não colineares definem um único plano. Essa base plana é essencial para a construção de figuras tridimensionais, já que os planos que formamos são compostos por esses pontos e, assim, influenciam a estrutura espacial que conseguimos visualizar. Além disso, a interseção dos planos nos mostra como as figuras planas podem interagir no espaço. Por exemplo, ao observar as interseções, podemos identificar novas linhas ou pontos que são o resultado da combinação dos planos. Isso demonstra que as relações entre figuras planas (como retas e planos) têm um impacto direto na forma como visualizamos e entendemos a geometria espacial. Portanto, ao estudar essas interseções, não só aprofundamos nosso conhecimento sobre as figuras em si, mas também aprendemos como os conceitos de uma dimensão se aplicam e se transformam em outras dimensões.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	
	

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Na Tarefa 12.1, observa-se que a estudante Hend inicia a atividade no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), ao reconhecer que os pontos precisam ser não colineares para formar um plano. Ela avança rapidamente para o Nível 1 ao explicar por que três pontos não colineares definem um único plano e que quatro pontos podem gerar até quatro planos diferentes. Isso demonstra uma compreensão dos atributos e características dos planos. Ao discutir as interseções dos planos e reconhecer que a interseção entre três planos é uma reta, a estudante atinge o Nível 2, articulando as inter-relações geométricas entre os planos. A análise mais detalhada sobre a importância de estudar as interseções e a conexão entre a Geometria Plana e a Geometria Espacial indica que Hend está progredindo para o Nível 3. Ela consegue estabelecer um raciocínio estruturado e dedutivo sobre como os conceitos bidimensionais se aplicam aos tridimensionais.

Deduz-se que Hend atinge o Nível 4 ao articular uma conexão robusta entre a Geometria Plana e a Geometria Espacial. Sua análise de que "*[...] ao criar planos no espaço tridimensional a partir de pontos não colineares, estamos aplicando conceitos de geometria plana"* e que "*[...]*

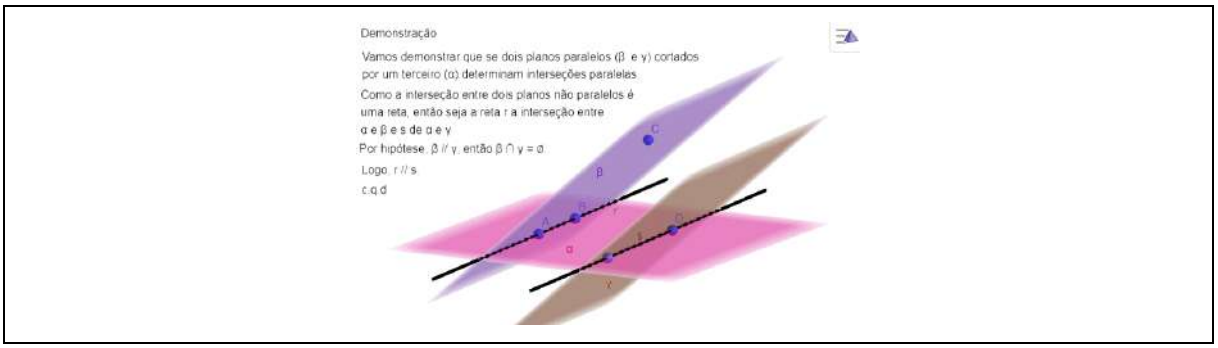
as relações entre figuras planas (como retas e planos) têm um impacto direto na forma como visualizamos e entendemos a geometria espacial" revela um entendimento abrangente das inter-relações entre diferentes dimensões geométricas. A reflexão sobre como as propriedades geométricas se mantêm, independentemente da dimensão, demonstra uma compreensão profunda que caracteriza esse nível.

O uso dos recursos do ggb-CB facilitou a transição para o Nível 4 (Rigor), permitindo que Hend visualizasse as relações entre os planos e suas interseções de maneira dinâmica e interativa. Nesta análise, é possível observar que a utilização das ferramentas para criar planos a partir de pontos não colineares e identificar suas interseções possibilitou uma compreensão precisa das propriedades geométricas. A manipulação dos planos no espaço tridimensional e a observação das interseções forneceram uma base sólida para aplicar o conceito de que três pontos não colineares definem um plano, enquanto quatro pontos podem gerar múltiplos planos. Isso permitiu que Hend formulasse conclusões rigorosas sobre a interação entre Geometria Plana e Geometria Espacial, refletindo uma compreensão mais profunda das relações espaciais.

A segunda tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 66**. A participante Elen é destacada nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 66 – Tarefa 12.2 (Prova da Interseção Paralela dos Planos)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
Mostre que dois planos paralelos cortados por um terceiro determinam interseções paralelas. ***1. Orientações Construtivas:*** *1.1. Usando a ferramenta "Ponto", crie 4 pontos não colineares no plano XY.* *1.2. Com a ferramenta "Mover", clique no ponto C e arraste-o verticalmente para cima.* *1.3. Utilize a ferramenta "Plano por três pontos" para produzir os planos ABD e ABC. Nomeie-os, respectivamente, como α e β.* *1.4. Use a ferramenta "Plano Paralelo" e produza o plano paralelo a que passe pelo ponto D. Nomeie este plano como γ. Oculte o plano XY selecionando a opção branca no estilo de visualização da tela e ajuste os planos para cores diferentes para melhor visualização.* *1.5. Use o comando "Interseção(Objeto, Objeto)" para encontrar as interseções desses planos. Nomeie-os com r e s.* ***a) A interseção de dois planos não paralelos?*** ***b) A interseção de dois planos paralelos?*** ***c) A interseção de dois planos coincidentes?*** ***2. Aplique os passos das orientações para a demonstração argumentativa (2.3.** Use a relação de elementos paralelos**).*** ***3. Use as orientações para a demonstração dinâmica.***	***Transcrição das respostas de Elen:*** *a) A interseção de dois planos não paralelos será uma reta.* *b) A interseção de dois planos paralelos não terá interseção, ou seja, não se encontrarão, sendo assim, é um conjunto vazio.* *c) A interseção de dois planos coincidentes será o próprio plano.* *Demonstração* *Vamos demonstrar que se dois planos paralelos (β e γ) cortados por um terceiro (α) determinam interseções paralelas.* *Como a interseção entre dois planos não paralelos é uma reta, então seja a reta r a interseção entre α e β e s de α e γ.* *Por hipótese, β // γ, então β ∩ γ = ∅. Logo, r // s.* *c.q.d.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	



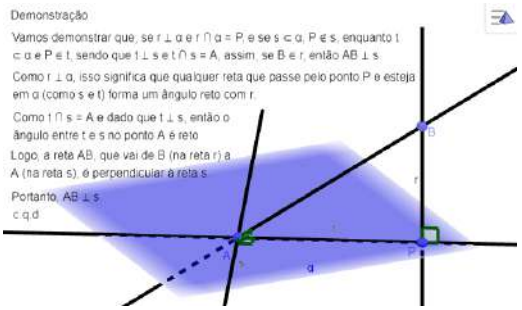
Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Na análise da Tarefa 12.2, evidencia-se que Elen, inicialmente, opera no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), pois reconhece as figuras geométricas e identifica que a interseção de dois planos não paralelos resulta em uma reta. À medida que avança, sua análise das interseções de planos paralelos e coincidentes revela um progresso para o Nível 1, onde começa a discernir as características desses planos. A demonstração formal apresentada pela estudante, na qual prova que a interseção de dois planos paralelos cortados por um terceiro resulta em retas paralelas, evidencia sua transição para o Nível 2. Ao articular as deduções geométricas com clareza, Elen se aproxima do Nível 3, desenvolvendo sequências de afirmações dedutivas que explicam as interseções entre planos paralelos e não paralelos. Sua conclusão de que a interseção entre planos paralelos resulta em um conjunto vazio, assim como a validação da relação de paralelismo entre as retas *r* e *s*, demonstram sua capacidade de raciocínio formal em um sistema matemático.

O uso dos recursos do ggb-CB facilitou a transição para o Nível 3 (Dedução Formal) ao permitir a construção e visualização interativa dos planos paralelos e suas interseções. Nesta análise, é possível observar que Elen conseguiu explorar a relação de paralelismo entre os planos de forma dinâmica, manipulando pontos e planos para verificar as interseções paralelas. Em virtude disso, a ferramenta “Interseção(Objeto, Objeto)” possibilitou a identificação e a nomeação das retas de interseção. Ao analisar as propriedades geométricas dos planos, a dedução formal foi facilmente elaborada. Isso permitiu a formalização do raciocínio, levando à conclusão de que as interseções de planos paralelos são, de fato, paralelas.

A terceira tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 67**. O participante Seth é destacado nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 67 – Tarefa 12.3 (Prova da Reta Perpendicular ao Plano)

<table>
<tr><th>Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade</th><th>Pensamento Geométrico – Maturação</th></tr>
<tr><td>Demonstre que, se a reta r é perpendicular ao plano α e a interseção entre elas é o ponto P, e se a reta s está contida no plano α e P não pertence a s, enquanto a reta t também está contida em α e P pertence a t, sendo que t é perpendicular a s e a interseção entre t e s é o ponto A, então, se B pertence a r, a reta AB é perpendicular a s.
1. Orientações Construtivas:
1.1. Usando a ferramenta “Ponto”, crie dois pontos não colineares no plano XY e nomeie-os como A e P.
1.2. Utilize a ferramenta “Reta Perpendicular” na Janela de Visualização 3D para produzir uma reta perpendicular ao plano no ponto P.
a) Quantas retas do plano XY (plano α) são perpendiculares a essa reta?
1.3. Use a ferramenta “Reta Perpendicular” e crie uma reta perpendicular à reta s no ponto A, nomeando essa reta de t. Use a Janela de Visualização.
b) Por que a reta t é importante nesta construção?
1.4. Com a ferramenta “Ponto em Objeto”, insira um ponto B na reta perpendicular ao plano no ponto P.
1.5. Use a ferramenta “Reta” para traçar a reta AB e AP.
1.6. Utilize a ferramenta “Ângulo” para identificar os ângulos retos na construção, sem rótulos.
1.7. Use a ferramenta “Plano” e clique nas retas contidas no plano XY, em seguida, na barra de estilo escolha a opção de visualização branca, sem o plano XY. Nomeia esse plano de α.
c) Como podemos verificar que AB é perpendicular a s?
2. Aplique os passos das orientações para a demonstração argumentativa (2.3. Use a relação da reta perpendicular ao plano).
3. Use as orientações para a demonstração dinâmica.</td><td>Transcrição das respostas de Seth:
a) Todas as retas que estão contidas no plano α.
b) A reta t nos ajuda a estabelecer a relação de perpendicularidade entre A e s.
c) Se o ângulo entre a reta AB e a reta s for um ângulo reto, isso confirma a perpendicularidade.
Demonstração
Vamos demonstrar que, se r ⊥ α e r ∩ α = P, e se s ⊂ α, P ∉ s, enquanto t ⊂ α e P ∈ t, sendo que t ⊥ s e t ∩ s = A, assim, se B ∈ r, então AB ⊥ s.
Como r ⊥ α, isso significa que qualquer reta que passe pelo ponto P e esteja em α (como s e t) forma um ângulo reto com r.
Como t ∩ s = A e dado que t ⊥ s, então o ângulo entre t e s no ponto A é um ângulo reto.
Logo, a reta AB, que vai de B (na reta r) a A (na reta s), é perpendicular à reta s.
Portanto, AB ⊥ s.
c.q.d.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Pensamento Geométrico – Construtivo</th></tr>
<tr><td colspan="2"> 
</td></tr>
</table>

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Na análise da Tarefa 12.3, observa-se que, inicialmente, Seth opera no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), ao reconhecer que todas as retas contidas no plano α são perpendiculares à reta *r*, o que indica uma compreensão visual básica da relação entre planos e retas. À medida que avança, ele identifica a importância da reta *t* para estabelecer a perpendicularidade, sinalizando sua transição para o Nível 1, onde analisa as propriedades geométricas de maneira mais elaborada. Ao afirmar que a reta *t* é fundamental na construção, pois ajuda a estabelecer a relação de perpendicularidade entre as retas *AB* e *s*, o estudante

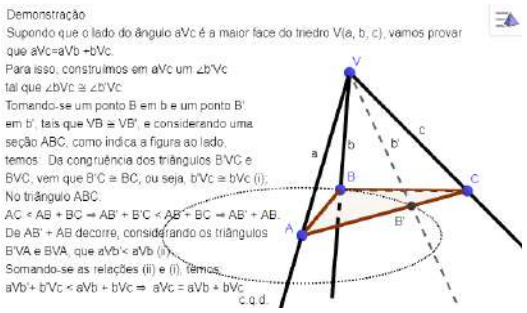
começa a discernir características e propriedades das figuras geométricas, o que o coloca no Nível 2. A elaboração da demonstração, na qual o estudante articula sequências de afirmações dedutivas para concluir que a reta *AB* é perpendicular à reta *s*, é um indicativo do Nível 3. Ao construir um raciocínio lógico, ele não apenas apresenta uma compreensão das relações entre as retas, mas também se engaja em um raciocínio formal dentro de um sistema matemático, demonstrando uma compreensão das deduções relevantes.

O uso do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 3 (Dedução Formal) ao permitir a visualização precisa das relações geométricas envolvidas, como as retas perpendiculares e suas interseções. Nesta análise, é possível observar que a ferramenta de construção dinâmica possibilitou a Seth estabelecer a perpendicularidade entre as retas de maneira visual e intuitiva. Além disso, a manipulação das ferramentas de ângulo e plano permitiu a verificação da perpendicularidade da reta *AB* em relação à reta *s*. Essa abordagem facilitou a transição para uma argumentação formal, uma vez que o raciocínio visual foi formalizado por meio de propriedades geométricas, como a perpendicularidade de retas e ângulos retos.

A quarta tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 68**. O participante Ulan é destacado nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 68 – Tarefa 12.4 (Prova do Teorema das Faces do Triedro)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	Pensamento Geométrico – Maturação
Demonstre que, em todo triedro, qualquer face é menor que a soma das outras duas. ***1. Orientações Construtivas:*** *1.1. Utilize a ferramenta "Polígono" na Janela de Visualização para criar um triângulo ABC, certificando-se de que o lado AC seja o maior em relação aos outros lados.* *1.2. Com a ferramenta "Compasso", meça a distância do lado AB. Em seguida, com essa distância como raio e centrado em A, trace uma circunferência sobre o lado AC. Ajuste o estilo da circunferência para pontuado, com espessura 2.* *1.3. Use a ferramenta "Interseção em Dois Objetos" para encontrar o ponto de interseção, nomeando-o como B'.* *1.4. Na Janela de Visualização 3D, utilize a ferramenta "Ponto" para posicionar um ponto V sobre o plano XY. Clique no plano e mova-o verticalmente para cima.* ***a) O que é triedro?*** ***b) O que é triedro trirretangular?*** *1.5. Use a ferramenta "Semirretas" para traçar as semirretas VA, VB, VC e VB'. Nomeie-as,*	***Transcrição das respostas de Ulan:*** *a) Um triedro é uma figura geométrica tridimensional formada pela interseção de três planos em um espaço. Os planos se encontram em um ponto comum, chamado de vértice, e as interseções entre esses planos formam as faces do triedro. Cada face é um triângulo, e os três triângulos juntos definem a forma do triedro.* *b) É um triedro cujas três faces formam ângulos retos entre si. Isso significa que todos os ângulos entre as faces são de 90 graus, e, consequentemente, os diedros formados também são retos.* *c) Elas representam as arestas do triedro, ligando o ponto V às faces do triângulo ABC.* *d) Sim, há uma forte inter-relação entre a geometria plana e a geometria espacial nessa construção. A geometria plana está presente na construção do triângulo ABC e na medida dos seus lados. Já a geometria espacial é explorada ao criar o ponto V no espaço tridimensional e ao traçar as semirretas VA, VB, e VC, que formam o triedro. Assim, a geometria plana oferece a base para a construção das faces do triedro, e a geometria espacial permite visualizar a relação entre os ângulos tridimensionais e as arestas.* *Demonstração*

respectivamente, como a, b, c e b'. Ajuste a semirreta b' para ter um estilo tracejado. ***c) Como essas semirretas se relacionam com o triedro?*** ***d) Você vê alguma inter-relação da Geometria Plana com a Geometria Espacial nessa construção?*** ***2. Aplique os passos das orientações para a demonstração argumentativa (2.3.** Use a desigualdade triangular**).*** ***3. Use as orientações para a demonstração dinâmica.***	*Supondo que o lado do ângulo aVc é a maior face do triedro V(a, b, c), vamos provar que aVc = aVb + bVc.* *Para isso, construímos em aVc um ∠b'Vc tal que ∠bVc ≅ ∠b'Vc. Tomando-se um ponto B em b e um ponto B' em b', tais que VB ≅ VB', e considerando uma seção ABC, como indica a figura ao lado, temos: Da congruência dos triângulos B'VC e BVC, vem que B'C ≅ BC, ou seja, b'Vc ≅ bVc (i);* *No triângulo ABC: AC < AB + BC ⇒ AB' + B'C < AB + BC ⇒ AB' + AB. De AB' + AB decorre, considerando os triângulos B'VA e BVA, que aVb' < aVb (ii)* *Somando-se as relações (ii) e (i), temos:* *aVb' + b'Vc < aVb + bVc ⇒ aVc = aVb + bVc* *c.q.d.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	
	

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

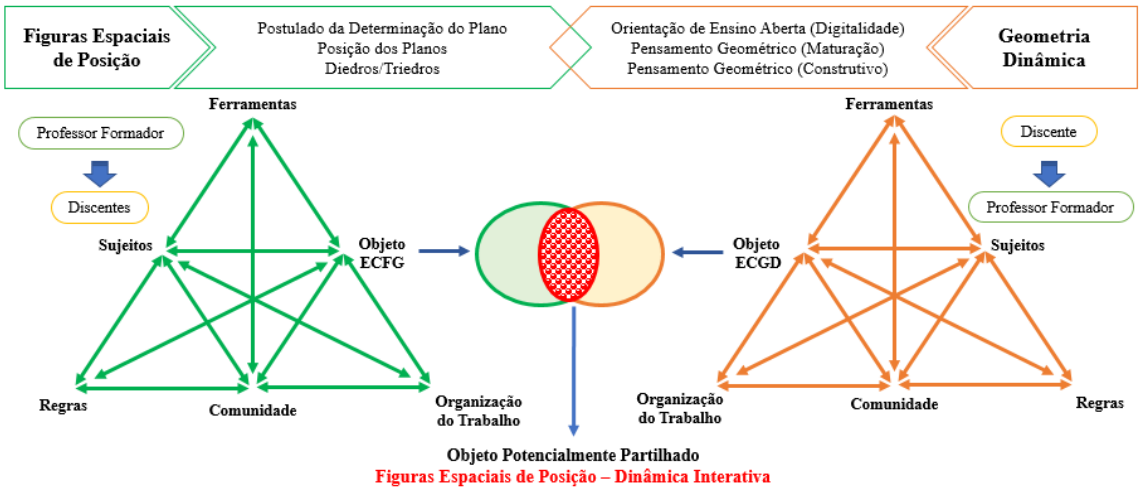
Na análise da Tarefa 12.4, infere-se que, inicialmente, Ulan opera no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), ao reconhecer e descrever as características de um triedro e de um triedro trirretangular. À medida que avança, ele demonstra uma progressão para o Nível 1, explorando as propriedades geométricas das arestas e das faces do triedro. Ao utilizar a desigualdade triangular para construir a demonstração que envolve as faces do triedro, o estudante atinge o Nível 2. Ele consegue estabelecer inter-relações entre as faces e utiliza raciocínio dedutivo para elaborar a prova. Na construção da demonstração, em que Ulan aplica conceitos de congruência e soma de lados, ele se posiciona em um nível mais avançado de raciocínio, o Nível 3. O estudante articula sequências dedutivas para demonstrar a relação entre as faces do triedro, evidenciando um raciocínio formal e a capacidade de construir uma prova lógica.

Quando Ulan afirma que "*[...] a geometria plana oferece a base para a construção das faces do triedro, e a geometria espacial permite visualizar a relação entre os ângulos tridimensionais*", ele demonstra uma capacidade de conectar os conhecimentos bidimensionais e tridimensionais de forma rigorosa. Ele não se limita a descrever as figuras ou suas propriedades, mas compreende as inter-relações entre os diferentes sistemas geométricos, características que definem o Nível 4.

O uso dos recursos do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 4 (Rigor), permitindo que Ulan construísse visualmente o triedro tridimensional e manipulasse os elementos do espaço. Nesta análise, é possível observar que a visualização interativa das semirretas que conectam o ponto *V* às faces do triângulo *ΔABC* facilitou a compreensão das relações geométricas envolvidas. Além disso, ao combinar a manipulação dinâmica com a construção formal da desigualdade triangular, o estudante conseguiu demonstrar rigorosamente a relação entre os lados do triedro, conectando a Geometria Plana (triângulos) à Geometria Espacial (triedro tridimensional), promovendo uma transição fluida do raciocínio empírico para a argumentação dedutiva.

As quatro tarefas analisadas evidenciam, por meio da interação entre o ECFG e a ECGD, a criação de um objeto potencialmente partilhado, conforme descrito na quarta contradição de Engeström (2016). Nesse contexto, o objeto partilhado foi a compreensão dinâmica interativa das ‘Figuras Espaciais de Posição’, com foco na maturação do pensamento geométrico dos estudantes (**Esquema 36**).

Esquema 36 – Figuras Espaciais de Posição – Dinâmica Interativa



Fonte: Pesquisador (2024).

No sistema ECFG, o professor formador teve uma atuação mais intensa, apresentando de forma estruturada e sequencial os conceitos relacionados ao postulado da determinação do plano, à posição dos planos e a formalização dos diedros/triedros. O objetivo desse sistema foi ensinar as ‘Figuras Espaciais de Posição’ e estimular a investigação de suas aplicações por meio de operações como a construção de pontos, retas, planos e outros objetos geométricos. Para

isso, o professor realizava revisões teóricas dos capítulos I ao VI do volume 10, proporcionando aos estudantes uma compreensão formal dos conhecimentos curriculares abordados.

Ao mesmo tempo, no sistema ECDG, os estudantes passaram a adotar uma postura mais proativa, intensificando sua participação. Nesse ambiente, tiveram a oportunidade de explorar os conceitos de forma prática e interativa, manipulando objetos geométricos em um espaço digital dinâmico, o que resultou em um bom desempenho nas AOEA. Essa experiência favoreceu o desenvolvimento de habilidades digitais, destacando-se, nesse contexto, a prática de visualização multidimensional da estrutura geométrica por meio da ferramenta "Girar Janela de Visualização 3D". Por outro lado, o professor formador atuou como mediador nesse sistema, oferecendo suporte e *feedback online*, o que ajudou os estudantes a consolidar o aprendizado de maneira prática.

Neste sistema, a ideia de Lévy (2003, p. 62) sobre o "[...] aspecto da informática mais determinante para a evolução cultural e as atividades cognitivas é sempre o mais recente, relacionando-se com o último envoltório técnico" pode ser relacionada às funcionalidades dos recursos digitais, como a Janela 3D do GeoGebra. Esses recursos, enquanto tecnologias recentes, ampliam as possibilidades cognitivas dos estudantes, permitindo que interajam com camadas de conhecimento cada vez mais avançadas. Ao explorar as 'Figuras Espaciais de Posição', como planos, retas e diedros/triedros, os estudantes não apenas têm acesso a informações de forma mais dinâmica, mas também se envolvem ativamente no processo de construção do conhecimento, promovendo a maturação do pensamento geométrico. Assim, o ggb-CB favoreceu a expansão das fronteiras do saber, permitindo que os estudantes transitem entre o conteúdo teórico e a prática de maneira fluida.

As operações realizadas neste sistema envolveram simulações, percepções, personalizações na visualização, calibrações e apurações da área das figuras, medições, transformações e variações dos objetos, identificações, implantações, comparações, sincronizações e conexões de elementos, parametrizações, conformidações e programações da estrutura, além de construções geométricas com diversas possibilidades de manipulação. Essas operações estão em consonância com a TA de Leontiev (2018), que destaca que as ações são determinadas pela tarefa a ser cumprida, com o objetivo final orientando todas as ações executadas. Sob essa perspectiva, o foco foi criar representações dos objetos no espaço físico e explorar suas visualizações em múltiplas dimensões, promovendo um processo de exploração e manipulação no ambiente digital.

Na AOEA desta semana, os estudantes adotaram uma postura proativa, alinhada à ideia de autoformação de Sommerman (2002), que enfatiza a capacidade do indivíduo de assumir a responsabilidade por sua própria formação, personalizando e individualizando seu aprendizado. Nessa lógica, em vez de serem receptores passivos, os estudantes assumiram a responsabilidade pela própria aprendizagem, explorando conceitos de forma independente e reflexiva no estudo das ‘Figuras Espaciais de Posição’. Essa postura favoreceu o desenvolvimento da autonomia, uma vez que os estudantes se envolveram ativamente nas tarefas propostas, testando hipóteses e ajustando seu entendimento com base na prática. Esse processo de aprendizagem, centrado no estudante, promoveu a mobilização de habilidades reflexivas, essenciais para a compreensão dos conceitos abordados.

Nesse contexto, o progresso dos estudantes ao longo dos níveis de pensamento geométrico, conforme o modelo de Van Hiele (1986), foi significativamente facilitado pelo uso do ggb-CB, inserido em uma proposta híbrida de ensino. Esse ambiente formativo propiciou a construção dinâmica e interativa de objetos geométricos, favorecendo um aprendizado mais intuitivo e visual, essencial para a compreensão dos conceitos espaciais.

A análise das tarefas revela avanços claros: nas tarefas 12.2 (Prova da Interseção Paralela dos Planos) e 12.3 (Prova da Reta Perpendicular ao Plano), os estudantes Elen e Seth, respectivamente, demonstraram um progresso notável ao alcançarem o Nível 3 de aprendizagem. Nesse nível, desenvolveram sequências de afirmações dedutivas e passaram a compreender melhor a relevância das deduções na construção e interpretação de provas. Esse avanço não apenas refletiu o domínio técnico dos conceitos, mas também a capacidade de aplicar o raciocínio lógico de maneira mais estruturada.

Por outro lado, nas tarefas 12.1 (Planos) e 12.4 (Prova do Teorema das Faces do Triedro), os estudantes Hend e Ulan avançaram para o Nível 4, caracterizado pela compreensão mais rigorosa e formal dos sistemas dedutivos. Neste estágio, os estudantes não apenas conseguiram elaborar provas mais complexas, mas também começaram a comparar diferentes sistemas dedutivos, avaliando sua consistência e independência. Esse nível de reflexão indica que os estudantes não estavam apenas aplicando os conceitos de maneira mecânica, mas também questionando e conectando as ideias de forma mais crítica e aprofundada. Esse movimento evidencia o impacto positivo de uma abordagem pedagógica que integra TDI e estimula a exploração autônoma dos estudantes.

Diante desse cenário, a integração dos dois sistemas (ECFG e ECGD) resultou na criação do objeto partilhado anteriormente mencionado. Esse processo de ensino, realizado

nesta proposta híbrida, fundamentou-se na autoformação dos estudantes e foi mediado pelas TDI. A TA desempenhou um papel essencial, contribuindo significativamente para o avanço da compreensão dos estudantes sobre as ‘Figuras Espaciais de Posição’ e promovendo uma aprendizagem que ultrapassou a simples recepção de informações.

4.13 Explorando os Poliedros

Na décima terceira semana, as aulas foram estruturadas para explorar os ‘Poliedros’, com o objetivo de promover uma compreensão dinâmica sobre esse conteúdo curricular. Nesse cenário híbrido de ensino, as ações pedagógicas envolveram a construção e a exploração do objeto de estudo, bem como a investigação, identificação e aplicação prática dos conceitos relacionados aos volumes dos sólidos geométricos, incluindo a caracterização dos prismas e pirâmides, além da interação discursiva sobre as aplicabilidades discutidas.

Para isso, foi necessário expandir o repertório operacional dos estudantes por meio de tarefas teóricas e práticas. A aplicação das AOEA foi fundamental nesse processo, pois forneceu diretrizes para a criação, manipulação e personalização de pontos, polígonos, pirâmides e outros objetos geométricos. Essas atividades foram planejadas para alcançar as metas Ciade, aproximando a turma dos recursos tecnológicos adotados, especialmente no incentivo à cultura digital com a utilização das ferramentas “Extrusão para Prisma” e “Fazer extrusão para Pirâmide”.

O **Quadro 69**, apresentado a seguir, ilustra a estrutura e a organização dessa abordagem no contexto do ensino aplicado nesta décima terceira semana.

Quadro 69 – Planejamento da décima terceira semana de aula

<table>
<tr><td colspan="3">Artefatos
Computador e Smartphone.
GeoGebra: Plataforma; Classroom Beta; Classic; Geometria, Calculadora 3D.
Ferramentas Específicas: Mover; Ponto; Interseções em Dois Objetos; Segmento; Segmento de Comprimento Fixo; Reta Perpendicular; Reta Paralela; Polígono; Polígono Regular; Círculo: Centro & Raio; Controle Deslizante; Pirâmide; Prisma; Extrusão para Prisma; Fazer Extrusão para Pirâmide; Área; Volume; Girar a Janela de Visualização 3D.
Comandos: Concatenar(...); Cubo(...); Girar(...); Pirâmide(...), Ponto(...); Sequência(...); Vetor(...).
Livro: Fundamentos de Matemática Elementar 10: geometria espacial, posição e métrica (Cap. VIII, IX e XIII).</td></tr>
<tr><td>Objeto
Poliedros.</td><td>Motivo
Necessidade de promover a compreensão dinâmica dos conceitos relacionados aos Poliedros.</td><td>Ação
❖ Construção e exploração os Poliedros de modo dinâmico;
❖ Investigação, identificação e aplicação dos conceitos relacionados aos volumes dos sólidos geométricos e caracterização dos prismas e pirâmides;</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">❖ Interação discursiva das aplicabilidades abordadas.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Operações
Simulações: gerar representações dos objetos no espaço físico;
Comparações: aferir semelhanças e diferenças dos elementos;
Personalizações: configurar, renomear, exibir/ocultar, etc.;
Conformidações: preservar as subsistências das estruturas;
Apurações: calcular área das figuras e volume dos sólidos;
Percepções: explorar as visualizações multidimensionais;
Construções: produzir pontos, polígonos, pirâmides, etc.;
Medições: medir comprimentos e amplitudes angulares;
Parametrizações: definir as características dos objetos;
Inquietações: expor dúvidas subjetivas e/ou coletivas;
Interlocuções: participar das discussões construtivas;
Elevações: provocar a extrusão da região superficial;
Identificações: localizar as interseções dos objetos;
Programações: processar comandos de construção;
Sincronizações: encontrar os pontos tangenciais;
Explorações: testar os recursos do GeoGebra;
Calibrações: ajustar a superfície geométrica;
Revisões: revisar os conteúdos curriculares;
Implantações: inserir elementos adaptáveis;
Variações: ampliar/reduzir os objetos;
Transformações: deslocar os objetos;
Interações: interagir com as AOEA;
Administrações: gerenciar conta;
Aplicações: resolver problemas;
Conexões: conectar elementos;
Manipulações: mover objetos.</td><td>Metas
➢ Construir pontos, polígonos, pirâmides, etc. para explorar os Poliedros com a mediação tecnológica das ferramentas e comandos do GeoGebra;
➢ Investigar e aplicar conceitos relacionados aos volumes dos sólidos geométricos, caracterização dos prismas e pirâmides;
➢ Desenvolver habilidades práticas de elevação interativa da estrutura geométrica com uso das ferramentas “Extrusão para Prisma” e “Fazer extrusão para Pirâmide”;
➢ Estimular discussões e reflexões sobre abordagens teóricas e práticas relacionadas ao objeto de estudo.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Condições
Ambiente de ensino híbrido com suporte contínuo da equipe docente para auxiliar na aprendizagem dos Poliedros durante as atividades presenciais, oferecendo orientações e estímulos personalizados durante as observações online a distância.</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisador (2024).

O professor formador inicia a aula abordando os sólidos geométricos, explicando que são objetos tridimensionais definidos no espaço. Exemplos comuns incluem cubos, pirâmides, cilindros e esferas. Esses sólidos são geralmente classificados em duas categorias principais: ‘Poliedros’ e ‘Corpos Redondos’. Ele destaca que os sólidos que não se enquadram nessas categorias são agrupados como ‘outros’. Os ‘Poliedros’, em particular, são sólidos cujas faces são polígonos. As interseções entre essas faces formam arestas, enquanto os pontos onde as arestas se encontram são denominados vértices.

Neste momento, o professor formador concentra-se nos ‘Poliedros’, com ênfase nos prismas, iniciando pela definição dos prismas mais simples, como o cubo e o paralelepípedo. De forma complementar, ele explica que todo sólido ocupa uma determinada porção do espaço, o que é medido pelo seu volume. Assim, ressalta que o volume é frequentemente calculado utilizando como unidade padrão o volume de um cubo com aresta de 1 unidade (*u.c.*), resultando

em 1 *u.c.³*. Por exemplo, se a aresta do cubo mede 1 *cm*, seu volume será 1 *cm³*; se a aresta mede 1 *m*, o volume será 1 *m³*.

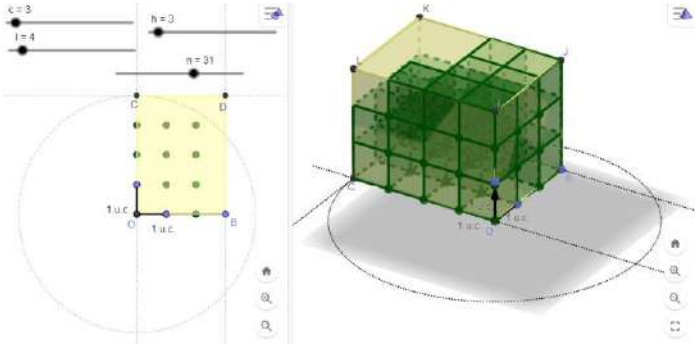
Para explorar os conceitos de volume, o professor formador utilizou o GeoGebra na Janela de Visualização 3D. Com a mediação tecnológica das ferramentas "Controle Deslizante", "Mover", "Ponto", "Segmento de Comprimento Fixo", "Reta Perpendicular", "Círculo: Centro & Raio", "Interseções em Dois Objetos", "Reta Paralela", "Polígono", "Extrusão para Prisma" e "Segmento", além dos comandos Concatenar(...); Cubo(...); Ponto(...); Sequência(...); Vetor(...), buscou facilitar a compreensão dos estudantes.

O professor formador iniciou a construção criando quatro controles deslizantes, denominados *n*, *c*, *l* e *h*. Utilizando o Campo de Entrada, ele digitou o comando "*O*" para criar o ponto *A* e, em seguida, definiu o vetor *u*. Com a combinação dos comandos "Sequência(...)" e "Concatenar(...)", demonstrou como os pontos surgem ao mover os controles deslizantes nas três direções. Para finalizar essa etapa, utilizou os comandos "Sequência(...)" e "Cubo(...)" para gerar os cubos a partir dos pontos criados.

Em seguida, o professor construiu um segmento de comprimento *c*, traçou retas perpendiculares nos pontos *O* e *B* desse segmento e desenhou uma circunferência de raio l com centro em *O*. Depois, encontrou um ponto de interseção entre a circunferência e a reta, traçando uma reta paralela que passava por esse ponto e identificando a interseção com outra reta perpendicular. A partir desses pontos, desenhou o quadrilátero *ABCD*. Na Janela de Visualização 3D, ele fez a extrusão desse quadrilátero para formar o prisma de base *ABCD*. Em seguida, traçou os segmentos *OE*, *OF* e *OG* no cubo, destacando que cada um deles correspondia a 1 unidade cúbica. O professor explicou que o cubo possui volume de 1 unidade volumétrica (*u.v.*) e que o paralelepípedo, com dimensões $c = 3$, $l = 4$ e $h = 3$, tem um volume total de 36 *u.v.* Essa abordagem prática permitiu que os estudantes compreendessem melhor a relação entre as dimensões e o volume dos sólidos geométricos.

A **Figura 42** ilustra essa construção. Esse tipo de interação, proporcionada pelas TD, permite que os estudantes vivenciem o processo de construção de sólidos geométricos, o que torna o aprendizado mais compreensível. Além disso, a utilização dos controles deslizantes, a combinação de comandos e a extrusão de figuras ilustram de forma clara a dinâmica das transformações geométricas, promovendo uma aprendizagem mais ativa. Esse tipo de abordagem estimulou a curiosidade e o engajamento dos participantes, facilitando o desenvolvimento do raciocínio lógico e espacial, habilidades essenciais para a compreensão de conceitos mais complexos, como o cálculo de volumes.

Figura 42 – Conceito de volume



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/yqku8c7g. Acesso em: 14 ago. 2024.

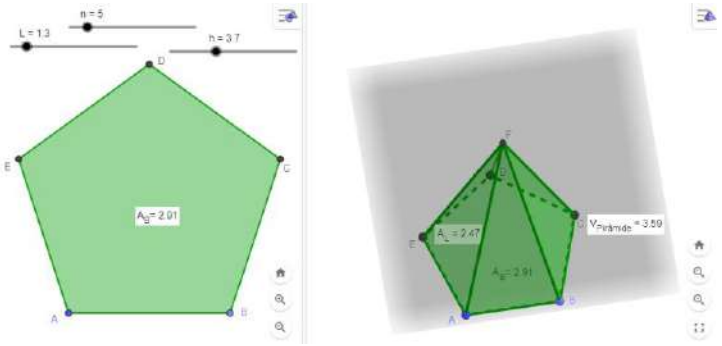
Na segunda etapa da aula, o professor formador explorou o conceito de pirâmides, destacando suas características como figuras geométricas tridimensionais com uma base poligonal e faces triangulares. Ele explicou que as pirâmides podem ser classificadas em retas e oblíquas e que, caso a base seja um polígono regular, elas são consideradas regulares, apresentando elementos como arestas laterais congruentes e apótemas. O professor também abordou a classificação das pirâmides de acordo com o tipo de base, mencionando exemplos como pirâmides triangulares, quadrangulares e pentagonais. De forma complementar, detalhou os componentes das pirâmides, incluindo vértices, arestas e altura, proporcionando aos estudantes uma compreensão clara sobre a estrutura e as propriedades dessas figuras geométricas.

Durante a aula, o professor formador utilizou a Janela de Visualização 3D para ilustrar a construção de pirâmides. Com a mediação tecnológica das ferramentas “Controle Deslizante”, “Mover”, “Segmento com Comprimento Fixo”, “Polígono Regular”, “Fazer Extrusão para Pirâmide”, “Girar a Janela de Visualização 3D”, “Área” e “Volume”, buscou facilitar a compreensão dos estudantes.

O professor iniciou a atividade criando três controles deslizantes, denominados *n* (número de vértices), *L* (comprimento do segmento) e *h* (altura da pirâmide). Primeiramente, ele definiu um segmento de comprimento *L* e, em seguida, aplicou um polígono com n vértices sobre esse segmento. Na sequência, realizou a extrusão dessa figura, ou seja, transformou o polígono em uma pirâmide com altura *h*. Posteriormente, o professor calculou a área da base, a área lateral e o volume desse sólido.

A **Figura 43** ilustra essa construção para um sólido de base $n = 5$.

Figura 43 – Pirâmide pentagonal

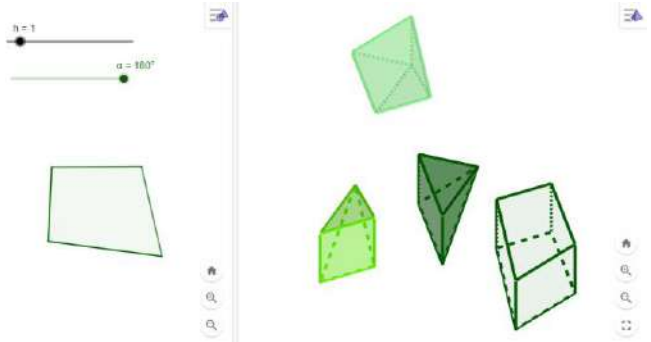


Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/fwundxq2. Acesso em: 14 ago. 2024.

Na terceira etapa da aula, o professor formador utilizou o GeoGebra Classic *online*, na disposição de Geometria, com a Janela de Visualização e a Janela de Visualização 3D. Assim, por meio da mediação tecnológica das ferramentas "Controle Deslizante", "Mover", "Polígono", "Extrusão para Prisma" e "Pirâmide", além do comando "Girar(...)", buscou-se apresentar uma demonstração intuitiva do volume da pirâmide em relação ao volume do prisma.

Neste momento, o professor começou criando dois controles deslizantes: um para a altura *h* e outro para o ângulo α. Em seguida, ele construiu um quadrilátero *ABCD* e realizou a extrusão dessa figura, gerando um prisma com base *ABCD* e altura *h*. Depois, o professor criou três pirâmides, denominadas *e*, *g* e *i*, todas com o vértice principal em *B* e bases nos lados do quadrilátero. Para ajustar a posição dessas pirâmides, ele utilizou o comando "Girar(...)" três vezes, inserindo uma constante na sintaxe do ponto para manter o afastamento entre elas após a manipulação. Com essa construção, ele demonstrou de forma intuitiva que o volume das três pirâmides é equivalente ao volume do prisma, conforme ilustrado na **Figura 44**.

Figura 44 – Demonstração intuitiva do volume da pirâmide.



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/bedyvvam. Acesso em: 14 ago. 2024.

Ao final da aula, o professor utilizou o aplicativo Calculadora 3D do GeoGebra, desativando os eixos e o plano *XY*. Com a mediação da tecnologia, ele empregou a ferramenta “Ponto” e o comando “Pirâmide(...)”, além de explorar a virtualização da AR. Após ativar o modo AR no dispositivo, apontou a câmera do smartphone para um canto do laboratório e, ao mover o aparelho de forma gradual, conseguiu identificar a superfície onde realizaria a projeção. Nesse espaço, foram criados três pontos — *A*, *B* e *C* — e, ao ajustar o ponto *D* verticalmente, formou-se uma pirâmide e um prisma com esses pontos. Essa abordagem possibilitou a demonstração da interação com o sólido geométrico em diferentes contextos, projetando-o em vários locais do laboratório, proporcionando uma experiência mais dinâmica e imersiva.

Em suma, esta décima terceira semana de aula representa o Sistema de Atividades XIII, no qual foram explorados os conhecimentos curriculares relacionados aos ‘Poliedros’, conforme as abordagens realizadas pelo professor formador. No entanto, durante esse processo, caracterizado pela pluralidade e multivocalidade, foram observadas algumas tensões e inquietações, que serão analisadas no próximo subtópico.

4.13.1 Análise das contradições heteroformativas no sistema de atividades XIII

A análise das interações da aula do Sistema de Atividades XIII, fundamentada nas contradições primária, secundária e terciária de Engeström (2016), revelou as tensões e as possibilidades de aprendizagem que emergiram enquanto os estudantes se dedicavam tanto à construção de pontos, polígonos, pirâmides e outros objetos geométricos no ggb-CB, quanto à exploração dos conhecimentos curriculares relacionados aos ‘Poliedros’, tema abordado pelo professor formador.

Na análise das interações durante a aula, as contradições primárias descritas por Engeström (2016) manifestaram-se na relação entre a compreensão teórica dos conceitos geométricos e sua aplicação prática no ambiente digital. Os estudantes, ao utilizarem a ferramenta de extrusão no GeoGebra, vivenciaram a tensão entre o valor de uso dos conceitos, como o volume de um prisma, e a tradução desses conceitos nessa mencionada TD. O questionamento de Aden sobre a extrusão exemplificou essa tensão: ele enfrentava dificuldades em entender como a altura do prisma estava relacionada à sua base, confundindo os conceitos de área e volume, o que gerava uma certa insegurança ao tentar visualizar a transformação tridimensional de uma figura bidimensional. O questionamento de Aden sobre a extrusão

exemplificou essa tensão: ele tinha dificuldades em compreender como a altura do prisma era gerada pela ferramenta digital, refletindo a complexidade de transferir o conhecimento teórico para a prática digital.

Esse desafio foi superado por meio da heteroformação proposta por Macedo (2010), na qual o professor, ao mediar a interação entre os estudantes e as TD, os orientou a construir coletivamente o conhecimento. As explicações compartilhadas e as discussões geradas entre os estudantes contribuíram para a internalização dos conceitos, transformando o processo de aprendizado em uma experiência formativa mediada por interações sociais. Ao trocar ideias e explorar a ferramenta em conjunto, os estudantes não apenas compreenderam a aplicação da extrusão, mas também ampliaram sua compreensão sobre o conceito de volume, resultando em um aprendizado mais cooperativo.

Foi possível observar que as contradições secundárias de Engeström (2016) surgiram nas dificuldades enfrentadas pelos estudantes ao tentarem conciliar as ferramentas digitais com os objetivos de internalizar conceitos abstratos. Sob essa perspectiva, a teoria de Vygotsky (2019) sobre a internalização do conhecimento revelou-se central: ao manipular o GeoGebra, os estudantes tornaram visíveis o que antes era abstrato, como as relações entre a área da base, a altura e o volume de um sólido. As TD, atuando como mediador, possibilitou que conceitos como a fórmula do volume, que é igual ao produto da área da base pela altura, fossem explorados de forma prática e dinâmica.

A interação com a ferramenta “Fazer Extrusão de Pirâmide” foi essencial nesse processo. Ao utilizar essa função, os estudantes puderam visualizar e manipular a extrusão de pirâmides, observando em tempo real como as variáveis de base e altura influenciam o volume. Esse recurso facilitou a compreensão, pois possibilitou uma abordagem mais compreensível do conceito de volume, proporcionando uma representação visual clara e acessível. Assim, a tecnologia não apenas ilustrou, mas também transformou a compreensão dos estudantes.

As contradições terciárias de Engeström (2016) surgiram quando a introdução do GeoGebra e das visualizações tridimensionais entrou em conflito com os métodos tradicionais de ensino. A TDI trouxe um novo modelo de aprendizado, e os estudantes começaram a perceber as limitações do ensino puramente teórico. Nesse cenário, a ideia de inteligência coletiva de Lévy (2003) se manifestou nas interações entre os estudantes, que, ao colaborarem na construção e manipulação de pirâmides e prismas no GeoGebra, foram capazes de desenvolver, de forma conjunta, um entendimento mais profundo e dinâmico. Essas

contradições entre o antigo e o novo modelo de ensino foram resolvidas na prática. Ao serem guiados pela tecnologia, os estudantes passaram a questionar, colaborar e descobrir juntos.

Essa resolução se articula com a proposta de formação híbrida (Horn; Staker, 2015), que combina o ensino tradicional com a inovação tecnológica. Ao utilizar o GeoGebra, os estudantes não são apenas receptores passivos de informações, mas se tornam agentes ativos de seu próprio aprendizado, explorando os conceitos geométricos de maneira prática e visual. A manipulação de objetos tridimensionais, como pirâmides e prismas, transforma o conceito de volume, que antes era apenas uma fórmula a ser memorizada, em uma relação espacial dinâmica, explorada em tempo real.

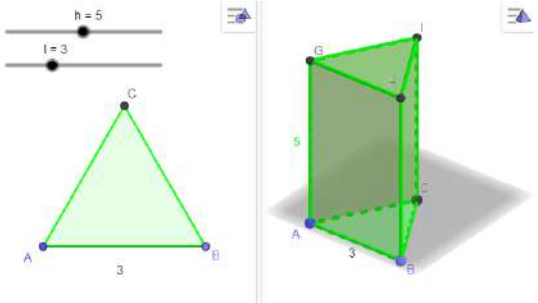
Esse processo de aprendizagem insere-se no movimento heteroformativo, no qual o conhecimento é construído coletivamente por meio das interações entre estudantes e professores. Ao explorarem juntos as representações digitais e discutirem suas descobertas, os estudantes desenvolvem um entendimento mais profundo e cooperativo. A ferramenta GeoGebra facilita essa construção coletiva, proporcionando um ambiente em que a troca de ideias e o trabalho conjunto não apenas resolvem as contradições do ensino tradicional, mas também transformam a Geometria em uma experiência interativa. Nesse contexto, a aprendizagem torna-se uma vivência compartilhada, na qual a reflexão e a colaboração são fundamentais para a internalização dos conceitos.

4.13.2 Análise das contradições autoformativas no sistema de atividades XIII

Com a base estabelecida no subtópico anterior, que tratou das dinâmicas heteroformativas e suas tensões, resultando na construção coletiva do conhecimento, a análise agora se volta para os aspectos autoformativas no Sistema de Atividades XIII, fundamentando-se nesse processo tecformativo digital e evidenciando como os estudantes adotaram uma postura mais autônoma e proativa no processo de aprendizagem dos ‘Poliedros’. Em decorrência disso, nesta parte, discute-se a maneira como os níveis de aprendizagem (Van Hiele, 1986) se manifestaram nas tarefas dos quatro participantes que mais se destacaram durante as interações da décima terceira semana de aula. Após essa análise, é apresentada a interação geral entre os sistemas envolvidos à luz da contradição quaternária (Engeström, 2016).

A primeira tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 70**. O participante Aden é destacado nessa análise, com base em suas respostas transcritas ggb-CB da turma.

Quadro 70 – Tarefa 13.1 (Prisma Triangular)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
1.1. Clique no menu "Exibir" e selecione "Janela de Visualização 3D". *1.2. Use a ferramenta "Controle Deslizante" e, na Janela de Visualização, crie dois controles deslizantes com intervalo de 0,1 a 10 e incremento de 0.1. Renomeie o primeiro como "h" e o segundo como "l".* *1.3. Clique na terceira caixa da esquerda para a direita e ative a ferramenta "Segmento com Comprimento Fixo". Clique em qualquer lugar na Janela de Visualização. Na Caixa de Comando que vai aparecer digite "l" para o comprimento.* *1.4. Use a ferramenta "Polígono Regular" e selecione os dois pontos do segmento. Na Caixa de Comando; digite "3" para o número de vértices. Um triângulo de lado "l" será formado tanto na Janela de Visualização quanto na Janela de Visualização 3D.* *1.5. Em seguida, na Janela de Visualização 3D, ative a ferramenta "Extrusão para Prisma" e clique no triângulo. O GeoGebra abrirá a caixa "Prisma"; digite "h" para a altura.* *1.6. Com a ferramenta "Mover" manipule sua construção.* ***a) Ao ajustar os controles deslizantes de "h" e "l", que tipos de variações você observa?*** *Descreva o que ocorre na Janela de Visualização 3D com a construção obtida. Ajuste os seletores para "h = 5 u.c." e "l = 3 u.c.". Ative a ferramenta "Distância, Comprimento ou Perímetro", que está na quarta caixa da direita para a esquerda. Clique na ferramenta ativada, depois clique na aresta da base e na aresta lateral da figura construída na Janela 3D.* ***b) Que tipo de polígono compõe a base do prisma?*** ***c) Qual é a medida da área da base (Ab) do prisma?*** ***d) Que tipo de polígono compõem as faces laterais do prisma? Quantos são esses polígonos?*** ***e) Qual é a medida da área total do prisma? Descreva como você fez esse cálculo.*** ***f) Na sua concepção com a inter-relação da Geometria Plana com a Geometria Espacial nessa construção?***	***Transcrição das respostas de Aden:*** *a) Ao usar o controle deslizante l, o lado da base do prisma muda e consequentemente sua área por ser regular, e ao deslizar o controle h, a altura do prisma também muda. O volume do prisma muda de acordo os controles deslizantes que altera sua área da base e sua altura* *b) A base do prisma é um triângulo equilátero, pois foi criado a partir de um triângulo com três vértices.* *c) Área da Altura = (√3/4)l² = (√3/4)3² = (√3/4) = (9/4)((√3) u.a.* *d) As faces laterais do prisma são retângulos, sendo 3 ao todo.* *e) Como a base do prisma é um triângulo, haverá três faces laterais retangulares, uma para cada lado do triângulo. E cada lado é dado por Al=l.h=3.5=15, logo, AT = Ab + Alt = (9/4)((√3) + 45 u.a.* *f) Percebo que a relação entre a geometria plana e a espacial é crucial para entendermos como as propriedades bidimensionais influenciam a forma tridimensional. Ao criar o prisma a partir de um triângulo equilátero, fica claro que características como congruência e simetria da base não apenas definem sua forma, mas também impactam diretamente a estrutura do prisma. Essa transição mostra como a geometria plana e a espacial estão interconectadas, revelando que conceitos essenciais, como área e perímetro da base, são fundamentais para compreender o volume e a configuração tridimensional do prisma. Além disso, ao observar as faces laterais retangulares que surgem dos lados do triângulo, percebo que elas são uma extensão direta da figura plana, mantendo suas características. Isso demonstra a continuidade dos princípios geométricos que permeiam diferentes dimensões, onde cada face lateral é influenciada pela forma da base. Essa relação entre as figuras planas e espaciais é vital para entender a estrutura do prisma e como cada elemento está interligado.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	
	

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Na análise da Tarefa 13.1, deduz-se que, ao ajustar os controles deslizantes de altura e lateral do prisma, Aden demonstra um entendimento inicial correspondente ao Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), evidenciando a capacidade de reconhecer as variações nas dimensões do prisma. Ele avança para o Nível 1, evidenciando uma percepção mais clara das propriedades geométricas ao começar a discernir e nomear características das figuras, como a simetria da base e a congruência dos lados do triângulo, embora ainda não estabeleça inter-relações explícitas entre essas propriedades. Nota-se um avanço para o Nível 2, quando Aden apresenta um progresso significativo ao calcular a área da base do prisma e a área total. O estudante atinge o Nível 3 ao apresentar um raciocínio formalizado sobre a Geometria Espacial, explicando como a área da base triangular influencia a estrutura tridimensional do prisma. Assim, demonstra compreender a relevância das relações entre a Geometria Plana e a Geometria Espacial ao articular que a configuração tridimensional depende das propriedades da figura bidimensional.

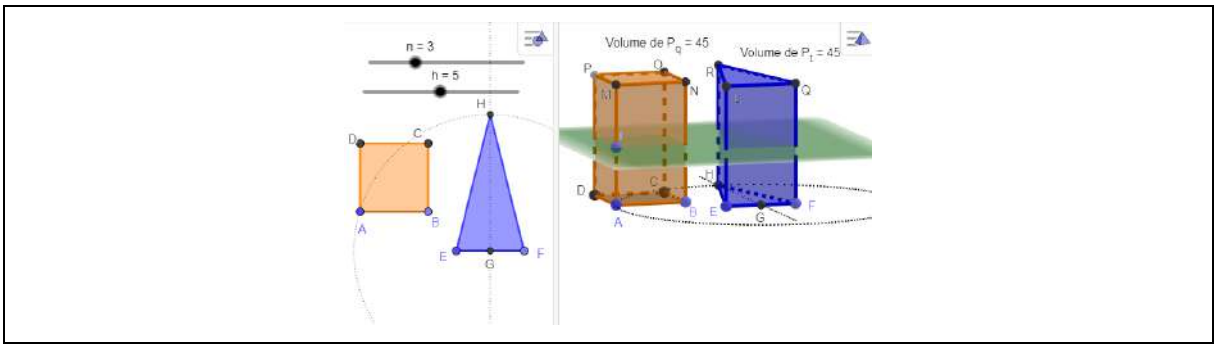
Aden alcança o Nível 4 ao afirmar: "*Percebo que a relação entre a geometria plana e a espacial é crucial para entendermos como as propriedades bidimensionais influenciam a forma tridimensional*". Essa afirmação demonstra um entendimento profundo da interconexão entre as dimensões plana e espacial, evidenciando não apenas a observação de características como congruência e simetria da base, mas também o reconhecimento da importância desses conceitos para a definição e construção rigorosa do prisma. Ao explorar a continuidade dos princípios geométricos e como as propriedades da base influenciam as faces laterais e o volume, o estudante revela uma capacidade de análise rigorosa e estrutural dos sistemas geométricos, algo característico de um nível em que se comparam e se relacionam diferentes sistemas dedutivos.

O uso dos recursos do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 4 (Rigor) ao permitir que o estudante manipulasse dinamicamente as variáveis de altura e comprimento da base do prisma, observando as variações na área da base e nas dimensões do volume. É possível notar que as ferramentas possibilitaram a visualização precisa da relação entre a Geometria Plana e a Geometria Espacial, essencial para uma compreensão rigorosa. A construção interativa dos elementos do prisma, como a base triangular e as faces laterais retangulares, proporcionou uma análise detalhada das propriedades geométricas e da interdependência entre elas, resultando em um entendimento mais profundo e estruturado da figura tridimensional.

A segunda tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 71**. A participante Mary é destacada nessa análise, com base em suas respostas transcritas ggb-CB da turma.

Quadro 71 – Tarefa 13.2 (Prismas – Quadrangular e Triangular)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	Pensamento Geométrico – Maturação
1.1. Clique no menu "Exibir" e selecione "Janela de Visualização 3D". Desmarque "eixo" e "malha" na barra de estilo, e habilite "Plano Cinza". *1.2. Na Janela de Visualização, selecione a ferramenta "Controle Deslizante" e crie dois deslizantes, u sendo n e outro h, ambos com intervalo de 0,1 a 10 e incremento de 0,1.* *1.3. Selecione a ferramenta "Segmento com Comprimento Fixo" e escolha o ponto A na Janela de Visualização. Na caixa que aparecer, digite "n" como comprimento.* *1.4. Agora, selecione a ferramenta "Polígono Regular" e clique nos pontos A e B do segmento. Na Caixa de Comando, insira "4" para o número de vértices. Um quadrado de lado 3 u.c. será formado em ambas as janelas.* *1.5. Para construir um triângulo isósceles com base n u.c. e altura 2n u.c., use a ferramenta "Segmento de Comprimento Fixo". Clique na Janela de Visualização e digite "n" para o comprimento da base.* *1.6. Em seguida, utilize a ferramenta "Ponto Médio ou Centro" para encontrar o ponto médio do segmento EF. Depois, use a ferramenta "Círculo: Centro & Raio", clique no ponto médio e digite "2n" para o raio.* *1.7. Com a ferramenta "Reta Perpendicular", trace uma reta perpendicular ao segmento EF no ponto médio.* *1.8. Use a ferramenta "Interseção de Dois Objetos" para identificar o ponto de interseção entre a reta perpendicular e a circunferência. Ajuste a reta e a circunferência para um estilo pontuado, com espessura 2.* *1.9. Selecione a ferramenta "Polígono" e clique nos pontos E, F e o ponto de interseção.* ***a) Determine as áreas das bases dos prismas em função de n? O que você pode concluir?*** *1.10. Selecione a ferramenta "Extrusão para Prisma" e clique no quadrado. Digite "h" para a altura. Um prisma de base quadrangular será criado. Altere a cor do objeto.* *1.11. Repita o passo anterior para o triângulo construído.* *1.12. Use a ferramenta "Volume" e clique nos dois prismas.* *1.13. Crie um plano paralelo ao da base que secciona os prismas, usando a ferramenta "Plano Paralelo" e clicando em um ponto qualquer de um dos prismas.* *1.14. Utilize a ferramenta "Interseção de Dois Objetos" para destacar a interseção entre o plano e os prismas. Escolha cores escuras e alta transparência para a região destacada.* ***b) Quais conclusões você tira sobre a medida da seção transversal?*** ***c) O que acontece na Janela de Visualização 3D ao manipular o controle deslizante h?*** ***d) Como relacionar a área da base e a altura para encontrar o volume?*** ***e) De que maneira a compreensão das inter-relações entre as figuras planas e espaciais pode influenciar o seu entendimento sobre problemas práticos no mundo real?*** ***f) Como o uso de ferramentas digitais para visualizar e manipular figuras geométricas pode alterar sua percepção sobre a Geometria?***	***Transcrição das respostas de Mary:*** *a) Área do prisma de base quadrangular = n^2* *Área do prisma de base triangular = $n.2n/2=n^2$* *Dessa forma, as áreas são equivalentes.* *b) A área das seções transversais destacadas têm a mesma área das bases. Por que nos prismas, a área de qualquer seção feita paralela a base, tem o mesmo valor da base.* *c) A altura dos prismas aumentam, consequentemente o volume também, no entanto, continuam tendo o mesmo volume entre si e o plano ainda os intercepta na mesma proporção.* *d) Noto que o volume de um prisma é dado pela soma das áreas de todas as seções transversais realizadas paralelamente à base do prisma, em diferentes valores de altura. Como todas essas seções possuem a mesma área que a base e considerando que existem h diferentes alturas possíveis para fazer essas seções, o volume do prisma pode ser expresso pela fórmula: $V=Ab.h=n^2.h$.* *e) A compreensão das inter-relações entre figuras planas e espaciais é crucial, pois muitos problemas do mundo real, como na arquitetura, design e engenharia, dependem dessa conexão. Por exemplo, ao projetar um edifício, saber como a forma da base (plano) impacta a estrutura tridimensional (espaço) pode levar a decisões mais eficientes em termos de materiais e segurança. Essa análise ajuda a visualizar soluções, estimar recursos e prever comportamentos de estruturas, enriquecendo a formação do aluno em contextos aplicados.* *f) Essas ferramentas transformam a percepção da geometria, tornando-a mais dinâmica e interativa. Elas permitem experimentar com variáveis em tempo real, facilitando a compreensão de conceitos que, muitas vezes, parecem abstratos quando abordados apenas teoricamente. Essa interação estimula um aprendizado mais profundo, onde os alunos podem formular hipóteses, testar e observar resultados, promovendo uma abordagem mais exploratória e engajada da geometria.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	



Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Na análise da Tarefa 13.2, deduz-se que, inicialmente, Mary parte do Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986) ao demonstrar a capacidade de reconhecer figuras geométricas pela aparência, identificando o prisma e suas características. Ao descrever as áreas das bases dos prismas e concluir que são equivalentes, a estudante avança para o Nível 1, onde realiza uma análise informal das partes e atributos das figuras, discernindo propriedades sem, no entanto, estabelecer relações explícitas entre elas. A transição para o Nível 2 é evidenciada quando Mary formula definições abstratas e estabelece inter-relações entre as propriedades das figuras, como ao calcular as áreas das bases e discutir a equivalência entre elas. Ela atinge o Nível 3 ao desenvolver um raciocínio formal sobre a Geometria Espacial, articulando como a altura do prisma influencia seu volume e demonstrando a relevância das deduções matemáticas.

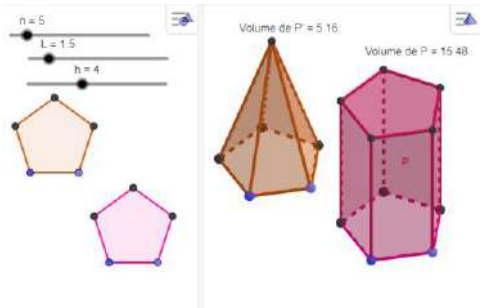
Ao afirmar que "[...] *o volume de um prisma é dado pela soma das áreas de todas as seções transversais realizadas paralelamente à base do prisma, em diferentes valores de altura*", a estudante demonstra habilidade na construção e compreensão de provas geométricas, consolidando seu raciocínio dedutivo dentro de um sistema geométrico completo. Nesta análise, é possível observar que Mary atinge o Nível 4 ao refletir sobre as inter-relações entre a Geometria Plana e a Geometria Espacial, discutindo a importância dessa compreensão em contextos do mundo real, como na arquitetura e no design. Assim, a análise das implicações práticas dessa conexão revela um entendimento rigoroso e integrado dos conceitos geométricos, evidenciando sua capacidade de articular ideias complexas que vão além do conhecimento adquirido.

O uso dos recursos do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 4 (Rigor), permitindo que a estudante manipulasse dinamicamente os deslizadores para ajustar a altura e o tamanho das bases dos prismas, gerando visualizações precisas dos efeitos dessas mudanças nas áreas e volumes. Com isso, ela pôde identificar e formalizar relações, como a equivalência entre as áreas das bases, a constância da área das seções transversais e a fórmula para o volume,

aplicando o conceito de soma das seções transversais para o cálculo do volume. Esse processo, aliado à interação visual e ao controle preciso das variáveis, contribuiu para uma compreensão rigorosa dos conceitos fundamentais da Geometria Espacial e das relações entre figuras planas e espaciais.

A terceira tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 72**. O participante Seth é destacado nessa análise, com base em suas respostas transcritas ggb-CB da turma.

Quadro 72 – Tarefa 13.3 (Pirâmide Verso Prisma)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
1.1. Abra a Janela de Visualização 3D pela Barra de Ferramentas. Desmarque os "eixos" e "malha" e habilite o "Plano Cinza". *1.2. Na Janela de Visualização, crie três controles deslizantes: n, um número inteiro, com intervalo de 1 a 10 e incremento de 1; L, intervalo de 0,1 a 10, incremento de 0,1; e h, intervalo de 0,1 a 10, incremento de 0,1.* *1.3. Selecione a ferramenta "Segmento com Comprimento Fixo". Clique na Janela de Visualização e digite "L" para o comprimento. Crie outro segmento de comprimento "L" um pouco afastado do primeiro.* *1.4. Selecione a ferramenta "Polígono Regular". Clique nas extremidades de um dos segmentos e digite "n" para o número de vértices. Repita para o outro segmento. Um polígono regular de n lados será formado em ambas as janelas.* *1.5. Selecione a ferramenta "Extrusão para Pirâmide". Clique sobre o polígono formado na Janela de Visualização 3D e defina a altura "h".* *1.7. Utilize a ferramenta "Extrusão para Prisma" e clique sobre o outro polígono, também definindo a altura "h".* *1.8. Selecione a ferramenta "Mover" e manipule os controles deslizantes para alterar as dimensões dos sólidos.* ***a) Quais as diferenças visuais que você observa entre os prismas e as pirâmides?*** ***b) O que você pode constatar em relação às faces laterais de cada figura?*** ***c) Qual é o número mínimo de vértices necessário para formar uma pirâmide?*** ***d) Quais são os elementos de uma pirâmide e que tipos de polígonos compõem suas faces laterais?*** *1.9. Use a ferramenta "Volume" e clique nos sólidos geométricos construídos.* ***e) Ao variar os valores de "n" e observar o volume da pirâmide e do prisma que têm a mesma base e a mesma altura, quais conclusões você pode tirar sobre a relação entre os volumes dessas duas figuras?***	***Transcrição das respostas de Seth:*** *a) Enquanto os prismas têm duas bases, as pirâmides têm apenas uma.* *b) As faces laterais do prisma são quadriláteros, e as faces laterais da pirâmide são triângulos.* *c) 4 vértices.* *d) Base da pirâmide, arestas da base, vértice da pirâmide, faces laterais, arestas laterais, altura da pirâmide, eixo, ponto central, apótema da pirâmide, apótema da base e raio da circunferência circunscrita. Os polígonos das faces laterais da pirâmide são triângulos.* *e) Ao variar os valores de "n", é possível notar que, independentemente do número de lados da base (ou seja, do formato da base), o volume da pirâmide é sempre um terço do volume do prisma que possui a mesma base e altura.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	
	

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

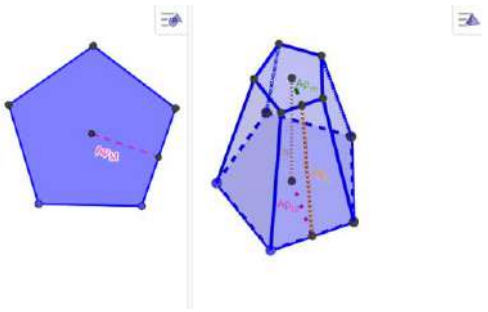
Na análise da Tarefa 13.3, observa-se que Seth apresenta o Nível 0 do modelo de van Hiele (1986), ao reconhecer que os prismas possuem duas bases, enquanto as pirâmides têm apenas uma. Ao avançar na atividade, o estudante passa para o Nível 1, onde começa a analisar informalmente as características das figuras geométricas. Isso fica evidente quando descreve que as faces laterais do prisma são quadriláteros, enquanto as da pirâmide são triângulos, estabelecendo relações entre os elementos das figuras, embora ainda de forma descritiva e sem maior abstração. Em seguida, ao discutir a relação entre o volume da pirâmide e o do prisma, Seth atinge o Nível 2. Nesse ponto, ele demonstra uma dedução informal ao formular a relação entre os volumes dessas duas figuras.

O uso dos recursos do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 2 (Dedução Informal) ao permitir que o estudante manipule visualmente as dimensões dos sólidos (pirâmides e prismas) e observe, de forma prática, a relação entre seus volumes. Nesta análise, é possível notar que, por meio da ferramenta "Controle Deslizante", o participante pode explorar a variação das formas e perceber empiricamente que o volume da pirâmide é sempre um terço do volume do prisma, independentemente do número de lados na base. Essa experiência visual e interativa facilitou a construção de conjecturas e a dedução informal dos conceitos, como a relação entre os volumes dessas figuras.

A terceira tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 73**. O participante Théo é destacado nessa análise, com base em suas respostas transcritas ggb-CB da turma.

Quadro 73 – Tarefa 13.4 (Tronco de Pirâmide)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
Construa um roteiro que explore todos os elementos do tronco de pirâmide *1.1. Escolha uma base (Triangular, Quadrangular, Pentagonal, Hexagonal, Octagonal, etc.)* *1.2. Definir a altura (h) como a distância perpendicular entre as duas bases.* *1.3. Definir o apótema da base maior (Ap_M) como o segmento que vai do centro da base maior até o ponto médio de um de*	***Transcrição das respostas de Théo:*** *1°) Na Janela de Visualização, selecione a opção de "Polígono Regular". Clique em dois pontos para definir a posição, e insira "5" na caixa que aparece para criar um pentágono.* *2°) Na Janela de Visualização 3D, escolha a opção "Fazer Extrusão para Pirâmide". Clique sobre o pentágono e digite "3" na caixa que aparece para definir a altura da pirâmide.* *3º) Utilize a opção "Ponto Médio ou Centro" para clicar em todos os vértices da base da pirâmide e no vértice superior. Em seguida, selecione a ferramenta de "Polígono" e clique sobre os pontos criados para formar os trapézios.* *4°) Desabilite a pirâmide. Use a ferramenta de "Polígono" para desenhar um pentágono na parte superior, fechando assim a figura para formar o tronco.* *5º) Com a opção "Ponto Médio ou Centro", clique em cada pentágono para definir o centro de ambas as bases.* *6º) Selecione a ferramenta "Ponto Médio ou Centro" e clique em dois vértices de um dos trapézios na parte inferior e, em seguida, nesse mesmo trapézio na parte superior. Depois, use a opção "Segmento" para conectar os dois pontos criados. Faça o mesmo conectando os pontos médios de cada base ao seu centro.*

seus lados, formando um ângulo reto. *1.4. Definir o apótema da base menor (Ap_m) da mesma forma, aplicado à base menor.* *1.5. Definir o apótema lateral (Ap_L) como a altura dos trapézios laterais que conectam as bases.* ***a) Qual a inter-relação da Geometria Plana com a Geometria Espacial explorada nessa sua seu roteiro de construção?***	*7º) Para identificar a altura, conecte os pontos médios das duas bases da pirâmide usando a ferramenta de "Segmento".* *a) Vejo essa inter-relação no uso das bases e dos apótemas. A base do tronco de pirâmide, seja ela triangular, quadrangular ou de outra forma, é uma figura da geometria plana, cujas propriedades, como lados, ângulos e apótemas, são essenciais para definir a estrutura tridimensional da pirâmide truncada. Ao trabalhar com o apótema da base maior e o apótema da base menor, aplicamos conceitos da geometria plana para calcular distâncias e identificar pontos médios nos lados das bases, o que influencia diretamente a construção da figura espacial. Já o apótema lateral (ApL), que corresponde à altura dos trapézios laterais, conecta as duas bases e forma a parte lateral do tronco, mostrando a transição da geometria plana para a geometria espacial. O fato de que as bases são figuras planas, mas que, ao serem conectadas pela altura e pelos apótemas laterais, formam uma figura tridimensional, destaca como os elementos da geometria plana são fundamentais para a construção e análise de formas espaciais. Assim, a geometria plana serve como base para entendermos e construirmos a figura espacial, e as relações entre as áreas das bases, a altura e os apótemas são cruciais para determinar o volume e outras propriedades do tronco de pirâmide.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	
	

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Na análise da Tarefa 13.4, observa-se que, inicialmente, ao escolher e definir a base do tronco como um pentágono, Théo demonstra um funcionamento no Nível 0 do modelo de van Hiele (1986), reconhecendo a forma e as características visuais das figuras. À medida que a atividade avança, o estudante começa a analisar os atributos e as partes do tronco de pirâmide, evidenciando um progresso para o Nível 1. Com o avanço nas etapas da construção, ele começa a transitar para o Nível 2, ao formular definições mais abstratas e estabelecer inter-relações entre as propriedades das figuras geométricas. Ao conectar a Geometria Plana à Geometria Espacial na construção do tronco de pirâmide, Théo atinge o Nível 3. Nesse nível, ele demonstra a capacidade de formular e seguir sequências lógicas durante a construção, como a identificação da altura e a elaboração dos trapézios laterais.

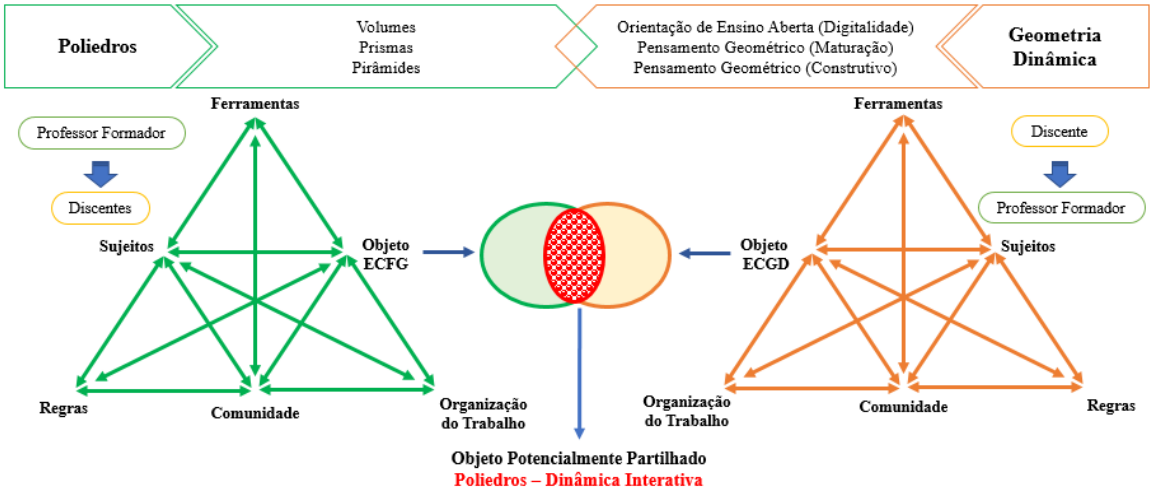
Théo alcança o Nível 4 ao afirmar que: "*Ao trabalhar com o apótema da base maior e o apótema da base menor, aplicamos conceitos da geometria plana [...], o que influencia diretamente a construção da figura espacial*". Essa afirmação demonstra uma compreensão profunda da interdependência entre o conhecimento bidimensional e tridimensional. Desse modo, o estudante não apenas reconhece a importância dos apótemas e das bases planas na

definição da estrutura tridimensional, mas também explica como essas propriedades planas (como apótemas e pontos médios) impactam diretamente a construção e a análise da pirâmide truncada. Além disso, a menção à "*[...] transição da geometria plana para a geometria espacial*" também evidencia sua capacidade de integrar essas dimensões, o que é um indicativo de raciocínio formal e rigoroso.

O uso dos recursos do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 4 (Rigor) neste contexto, pois permitiu ao estudante manipular dinamicamente os elementos da pirâmide truncada, como os apótemas das bases e a altura. Nesta análise, é possível observar que a construção virtual em 3D proporcionou uma compreensão precisa da relação entre as bases planas e a figura tridimensional resultante, facilitando o entendimento das conexões entre os elementos, como os apótemas e a altura. Nota-se que a utilização da ferramenta "Polígono Regular" para criar as bases e "Fazer Extrusão para Pirâmide" contribuiu para a formalização das propriedades geométricas, como a simetria, e possibilitou que o participante explorasse e validasse rigorosamente as relações matemáticas, como a interdependência entre apótemas, áreas e volume. Dessa forma, a transição para o rigor foi impulsionada pela capacidade de testar, visualizar e ajustar variáveis no ambiente digital.

As quatro tarefas analisadas evidenciam, por meio da interação entre o ECFG e a ECGD, a criação de um objeto potencialmente partilhado, conforme descrito na quarta contradição de Engeström (2016). Nesse contexto, o objeto partilhado foi a compreensão dinâmica interativa dos 'Poliedros', com foco na maturação do pensamento geométrico dos estudantes (**Esquema 37**).

Esquema 37 – Poliedros – Dinâmica Interativa



Fonte: Pesquisador (2024).

No sistema ECFG, o professor formador teve uma atuação mais intensa, apresentando os conceitos relacionados aos volumes dos sólidos geométricos e à caracterização dos prismas e pirâmides. O objetivo desse sistema era ensinar sobre ‘Poliedros’ e estimular a investigação de suas aplicações por meio de operações como a construção de pontos, polígonos, pirâmides e outros objetos geométricos. Para isso, o professor realizava revisões teóricas dos capítulos VIII, IX e XIII do volume 10, proporcionando aos estudantes uma compreensão formal dos conhecimentos curriculares abordados.

De forma concomitante, no sistema ECDG, os estudantes passaram a ter uma atuação mais intensa, assumindo um papel proativo. Nesse ambiente, tiveram a oportunidade de explorar os conceitos de maneira prática e interativa, manipulando objetos geométricos em um espaço digital dinâmico, visando um bom desempenho nas AOEA. Isso possibilitou o desenvolvimento de habilidades digitais, destacando-se, nesse contexto, a prática de elevação interativa da estrutura geométrica com o uso das ferramentas “Extrusão para Prisma” e “Fazer extrusão para Pirâmide”. Por outro lado, o professor formador, nesse sistema, atuou como mediador, oferecendo suporte, *feedback online* e auxiliando os estudantes na consolidação do aprendizado adquirido de forma prática.

Nesse sistema, por meio do uso dos recursos do ggb-CB, os estudantes desenvolveram uma compreensão mais profunda e interativa dos conteúdos relacionados aos ‘Poliedros’. Desse modo, as TDI proporcionaram simulações, experimentações e visualizações que seriam impossíveis no ambiente tradicional, transformando a experiência educacional em algo mais rico e envolvente. Esse processo de aprendizagem, como aponta Lévy (2003, p. 19), faz parte de uma “[...] formidável infraestrutura epistêmica e de software”, que envolve instituições de ensino, redes de comunicação e TDI que atualizam e difundem continuamente o saber. Nesse sentido, o uso das novas ferramentas digitais contribuiu para a flexibilidade e vitalidade dessas produções e trocas de saberes, preparando os futuros professores para o mundo dinâmico e interconectado do conhecimento contemporâneo e promovendo a maturação do pensamento geométrico.

As operações realizadas neste sistema envolvem simulações, percepções e personalizações na visualização; calibrações e apurações da área das figuras e do volume dos sólidos; medições, transformações e variações dos objetos; identificações, implantações, comparações, sincronizações e conexões de elementos; parametrizações; conformidações; programações e elevações da estrutura; além de construções geométricas com diversas possibilidades de manipulação. Essas operações estão alinhadas com a TA de Leontiev (2018),

que enfatiza que as ações são moldadas pela tarefa a ser executada, ou seja, o objetivo final orienta todas as operações executadas. Sob essa perspectiva, o foco foi estimular a extrusão da região superficial e o cálculo do volume dos poliedros. Ao utilizar ferramentas digitais para interagir com poliedros, os estudantes não apenas absorveram o conteúdo curricular, mas também o construíram ativamente por meio de uma prática dinâmica e interativa, consolidando o aprendizado através da experiência híbrida.

A AOEA desta semana revelou que os estudantes adotaram uma postura proativa, refletindo o conceito de autoformação sinalizado por Macedo (2010), no qual o estudante é incentivado a se tornar protagonista de sua própria aprendizagem, especialmente no estudo dos 'Poliedros'. Ao explorar as ferramentas digitais e se envolver ativamente no processo, eles desenvolveram a autonomia intelectual necessária para construir conhecimento de forma independente e crítica. Nesse contexto, não se limitaram à simples recepção de informações; ao contrário, adotaram uma postura reflexiva e investigativa, buscando estabelecer conexões e construir significados a partir das experiências proporcionadas pelo ambiente digital.

Neste cenário, o progresso dos estudantes nos diferentes níveis de pensamento geométrico, conforme o modelo de Van Hiele (1986), foi amplamente facilitado pelo uso dos recursos do ggb-CB dentro dessa proposta híbrida de ensino. A natureza dinâmica e interativa dessa ferramenta possibilitou uma construção mais intuitiva e virtual dos objetos geométricos, oferecendo aos estudantes a oportunidade de explorar conceitos de maneira mais crítica e reflexiva. Esse processo de aprendizagem não apenas estimulou a prática direta com os objetos, mas também promoveu um entendimento mais profundo das relações entre as propriedades das figuras.

Como resultado, foi possível observar avanços significativos na maturação do pensamento geométrico dos estudantes. Por exemplo, na tarefa 13.3 (Pirâmide Verso Prisma), o estudante Seth demonstrou progresso ao alcançar o Nível 2, elaborando definições mais abstratas e estabelecendo inter-relações entre as propriedades das figuras. Isso evidenciou a transição de um entendimento mais compreensível para uma análise mais reflexiva e conectada dos conceitos.

Nas tarefas 13.1 (Prisma Triangular), 13.2 (Prismas – Quadrangular e Triangular) e 13.4 (Tronco de Pirâmide), os estudantes Aden, Mary e Théo avançaram para o Nível 4, onde foram capazes de compreender a estrutura lógica dos sistemas dedutivos envolvidos, demonstrando rigor na comparação da consistência e da independência dos diferentes teoremas e propriedades.

Esse progresso reflete não apenas a aquisição de conhecimento técnico, mas também a mobilização de habilidades críticas e reflexivas para a construção e análise de provas.

Dessa forma, a integração desses dois sistemas (ECFG e ECGD) resultou no objeto partilhado mencionado anteriormente. Esse processo de ensino, realizado nesta proposta híbrida, mediada pelas TDI e fundamentado nos princípios da autoformação e na TA, possibilitou que os estudantes adotassem uma postura ativa e reflexiva em seu aprendizado. Esse processo não apenas contribuiu para o desenvolvimento de uma aprendizagem mais autônoma e crítica, mas também favoreceu a capacidade de relacionar o conhecimento teórico à sua aplicação prática.

4.14 Explorando os Sólidos Geométricos

Na décima quarta semana, as aulas foram estruturadas para explorar os ‘Sólidos Geométricos’, com o objetivo de promover uma compreensão dinâmica desse conteúdo curricular. Nesse cenário híbrido de ensino, as ações pedagógicas envolveram a construção e a exploração do objeto de estudo, bem como a investigação, identificação e aplicação prática, tanto em relação aos sólidos platônicos quanto à planificação e ao Princípio de Cavalieri, além da interação discursiva sobre as aplicabilidades discutidas.

Para isso, foi necessário expandir o repertório operacional dos estudantes por meio de tarefas teóricas e práticas. A aplicação das AOEA foi essencial nesse processo, pois forneceu diretrizes para a criação, manipulação e personalização de pontos, polígonos, primas e outros objetos geométricos. Essas atividades foram planejadas para alcançar as metas Ciade, aproximando a turma dos recursos tecnológicos adotados, especialmente no incentivo à cultura digital com a utilização da ferramenta “Planificação”.

O **Quadro 74**, apresentado a seguir, ilustra a estrutura e a organização dessa abordagem no contexto do ensino aplicado nesta décima quarta semana.

Quadro 74 – Planejamento da décima quarta semana de aula

Artefatos
Computador e *Smartphone*. GeoGebra: Plataforma; *Classroom Beta*; *Classic*; Geometria, Calculadora 3D. Ferramentas Específicas: Mover; Ponto; Interseção em Dois Objetos; Segmento; Segmento de Comprimento Fixo; Reta Perpendicular; Mediatriz; Polígono; Polígono Regular; Semicírculo; Distância, Comprimento ou Perímetro; Área; Controle Deslizante; Texto; Interseção de Duas Superfície; Plano por três pontos; Prisma; Tetraedro; Fazer extrusão para Pirâmide; Extrusão de Prisma; Cubo; Planificação; Volume; Girar a Janela de Visualização 3D. Comandos: Cubo(...), Tetraedro(...).

<table>
<tr><td colspan="4">Virtualização: Realidade Aumentada.
Livro: Fundamentos de Matemática Elementar 10: geometria espacial, posição e métrica (Cap. VII, VIII e XIV).</td></tr>
<tr><td>Objeto
Sólidos Geométricos.</td><td>Motivo
Necessidade de promover a compreensão dinâmica dos conceitos relacionados aos Sólidos Geométricos.</td><td colspan="2">Ação
❖ Construção e exploração dos Sólidos Geométricos de modo dinâmico;
❖ Investigação, identificação e aplicação dos conceitos relacionados aos sólidos platônicos, a planificação e ao Princípio de Cavalieri;
❖ Interação discursiva das aplicabilidades abordadas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Operações
Simulações: gerar representações dos objetos no espaço físico;
Comparações: aferir semelhanças e diferenças dos elementos;
Personalizações: configurar, renomear, exibir/ocultar, etc.;
Conformidações: preservar as subsistências das estruturas;
Apurações: calcular área das figuras e volume dos sólidos;
Percepções: explorar as visualizações multidimensionais;
Medições: medir comprimentos e amplitudes angulares;
Parametrizações: definir as características dos objetos;
Construções: produzir pontos, polígonos, prismas, etc.;
Inquietações: expor dúvidas subjetivas e/ou coletivas;
Interlocuções: participar das discussões construtivas;
Elevações: provocar a extrusão da região superficial;
Identificações: localizar as interseções dos objetos;
Programações: processar comandos de construção;
Sincronizações: encontrar os pontos tangenciais;
Planificações: desdobrar os sólidos geométricos;
Explorações: testar os recursos do GeoGebra;
Calibrações: ajustar a superfície geométrica;
Revisões: revisar os conteúdos curriculares;
Implantações: inserir elementos adaptáveis;
Variações: ampliar/reduzir os objetos;
Transformações: deslocar os objetos;
Interações: interagir com as AOEA;
Administrações: gerenciar conta;
Aplicações: resolver problemas;
Conexões: conectar elementos;
Manipulações: mover objetos.</td><td colspan="2">Metas
➢ Construir pontos, polígonos, prismas, etc. para explorar os Sólidos Geométricos com a mediação tecnológica das ferramentas, comandos e virtualização (realidade aumentada) do GeoGebra;
➢ Investigar e aplicar conceitos relacionados a sólidos platônicos, a planificação e ao Princípio de Cavalieri;
➢ Desenvolver habilidades práticas de desdobramento interativo da estrutura geométrica com uso da ferramenta “Planificação”;
➢ Estimular discussões e reflexões sobre abordagens teóricas e práticas relacionadas ao objeto de estudo.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Condições
Ambiente de ensino híbrido com suporte contínuo da equipe docente para auxiliar na aprendizagem dos Sólidos Geométricos durante as atividades presenciais, oferecendo orientações e estímulos personalizados durante as observações online a distância.</td></tr>
</table>

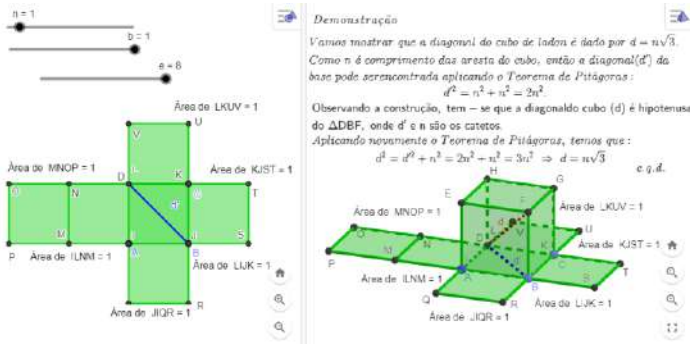
Fonte: Pesquisador (2024).

O professor formador iniciou a aula da décima quarta semana com uma exploração detalhada sobre o cubo, explicando que ele é um tipo específico de paralelepípedo retângulo, cujas arestas são todas congruentes. Em seguida, abordou a diagonal do cubo, mostrando a relação entre as diagonais das faces e a diagonal principal. O professor também discutiu a área total do cubo, destacando que ela corresponde à soma das áreas das seis faces quadradas. Para calcular essa área, ele explicou que basta multiplicar a área de uma face pelo número de faces, simplificando o processo de cálculo.

A seguir, o professor formador utilizou o GeoGebra *Classic online*, na disposição de Geometria, com a Janela de Visualização e a Janela de Visualização 3D, com a mediação tecnológica das ferramentas “Ponto”, “Mover”, “Controle Deslizante”, “Segmento de Comprimento Fixo”, “Cubo”, “Planificação”, “Área”, “Segmento”, “Texto” e “Girar a Janela de Visualização 3D”., buscou exploração essa abordagem de forma interativa.

Desse modo, primeiramente, ele criou um controle deslizante *n* e, em seguida, gerou um segmento de comprimento *n*. Usando esse segmento como base, ele construiu o cubo *ABCDECFGH* e, ao clicar sobre o cubo, demonstrou sua planificação, mostrando como o cubo pode ser ‘desdobrado’ em um plano. Ele destacou a funcionalidade do GeoGebra ao permitir essa planificação interativa, com o surgimento automático de um controle deslizante, variando de 0 a 1, que permite simular o processo de abertura e fechamento do cubo. Após isso, o professor calculou a área de cada quadrado que compõe o cubo.

Figura 45 – Planificação do cubo e demonstração da diagonal principal



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/da2mkuz4. Acesso em: 14 ago. 2024.

Durante essa construção ele ainda demonstrou a diagonal do cubo, traçando as diagonais da base e a diagonal principal do cubo, explicando que essa diagonal é calculada como o produto do comprimento da aresta pela raiz quadrada de 3. Para concluir, ele usou a configuração de contexto, na interface avançada, especificamente, na opção “Condição de Exibir Objeto(s)”, para criar uma interação dinâmica, facilitando a visualização das demonstrações realizadas, conforme ilustrado na **Figura 45**, acima.

Nesse momento, o professor explicou que o cubo se caracteriza como um Sólido de Platão. Ele detalhou que um sólido é considerado de Platão quando satisfaz três condições fundamentais: todas as suas faces têm o mesmo número de arestas, todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número de arestas e a Relação de Euler é válida. O professor também ressaltou

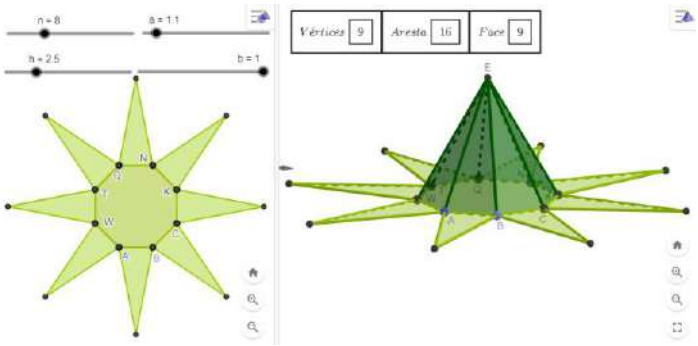
que existem exatamente cinco classes de Poliedros de Platão, fazendo uma conexão entre essas formas geométricas e suas propriedades matemáticas.

Depois disso, o professor formador abordou o conteúdo da Relação de Euler com profundidade, explicando que, para todo poliedro convexo, a relação $V - A + F = 2$ se aplica, onde V representa o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces do poliedro. Ele destacou que os poliedros que atendem a essa condição são chamados de poliedros eulerianos, e que, embora todo poliedro convexo seja euleriano, nem todo poliedro euleriano precisa ser convexo.

Com a mediação tecnológica das ferramentas “Ponto”, “Mover”, “Controle Deslizante”, “Segmento de Comprimento Fixo”, “Polígono Regular”, Fazer extrusão para Pirâmide”, “Planificação” e “Texto” ele buscou explorar essas relações de forma interativa com uma pirâmide de n lados. Ele começou criando três deslizantes, nomeados a, h e n. A partir disso, produziu um segmento com comprimento a e gerou um polígono regular com n lados. Em seguida, fez a extrusão do polígono, criando uma pirâmide com altura h. O professor também exibiu a planificação da pirâmide para facilitar a compreensão do sólido.

Para complementar, ele utilizou a ferramenta de Caixa de Texto dinâmica, que foi configurada com a opção avançada de “Fórmula LaTeX”. Através dessa configuração, ele criou uma Caixa de Texto que se atualizava automaticamente conforme o valor do deslizante n, que alterava o número de lados da base da pirâmide. As equações inseridas no Campo de Entrada — “$n' = n + 1$”, “$v = n$”” e “$a' = 2n$”” — permitiram que o texto na caixa se ajustasse dinamicamente, pois estavam conectados a essas operações incluídas do botão de ícone do GeoGebra, conforme ilustrado na **Figura 46**.

Figura 46 – Relação de Euler nas pirâmides



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/qd7xfdcd. Acesso em: 14 ago. 2024.

Na terceira etapa da aula o professor formador explorou o Princípio de Cavalieri ao introduzir a ideia de comparar volumes de sólidos usando seções horizontais. Ele utilizou esse raciocínio para demonstrar que, ao aplicar o princípio de Cavalieri, os sólidos situados em um mesmo semiespaço e com bases no mesmo plano terão volumes iguais, pois suas seções, paralelas à base, têm áreas equivalentes, o que é possível garantir pela congruência das seções.

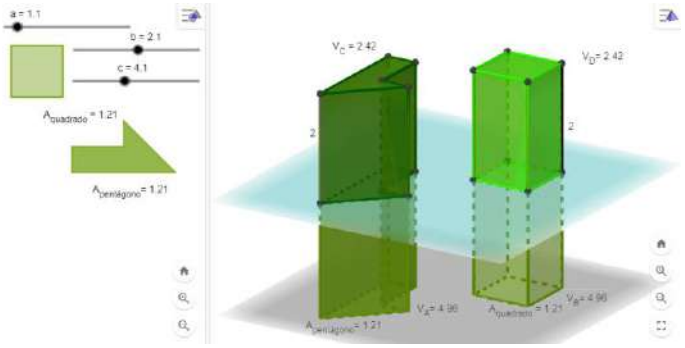
O professor formador com a mediação tecnológica das ferramentas “Controle Deslizante”, “Segmento de Comprimento Fixo”, “Polígono Regular”, “Semicírculo”, “Reta Perpendicular”, “Mediatriz”, “Interseção em Dois Objetos”, “Polígono”, “Área”, “Extrusão de Prisma”, “Plano por três pontos”, “Prisma”, “Interseção de Duas Superfície”, “Segmento”, “Distância, Comprimento ou Perímetro” e “Volume” explorou esse princípio em dois prismas de mesma base poligonal diferente, porém de mesma base.

Inicialmente, o professor formador criou três controles deslizantes, denominados *a*, *b* e *c*. Em seguida, ele construiu três segmentos de comprimento fixo de tamanho *a*, *AB*, *CD* e *DE*. Com o primeiro ele formou o quadrado e com os dois outros formaram, juntos, o segmento *CE*, que representou o diâmetro de um semicírculo. A partir dos pontos *C* e *D*, o professor traçou retas perpendiculares ao segmento *CE*. A interseção dessas perpendiculares formou o ponto *F*. Em seguida, ele desenhou a mediatriz do segmento *DF* e, a partir do ponto de interseção, traçou uma reta paralela ao segmento *CD*. Essa reta paralela se encontrou com a reta perpendicular traçada a partir do ponto *C*.

Na sequência, o professor desenhou o pentágono *CGHJI*, demonstrando que, embora esse pentágono fosse diferente do quadrado formado pelo lado *AB*, ambos possuíam a mesma área. Depois disso, ele construiu um triângulo equilátero de altura *b*, fazendo a extrusão para formar um prisma e, a partir dos pontos da face superior desse prisma, traçou um plano chamado α. Ele também fez a extrusão no quadrado e pentágono, ambos de altura *c*, formando sólidos com volumes V_A e V_B, respectivamente. O professor então encontrou a interseção desse plano α com os dois últimos prismas e, a partir dessa interseção, formou novos prismas com volumes V_C e V_D, promovendo a interação entre os conceitos abordados.

A **Figura 47** ilustra a construção, ocultando alguns elementos que não são essenciais para a visualização da aplicação do princípio de Cavalieri.

Figura 47 – Princípio de Cavalieri nos Prismas



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/qd7xfdcd. Acesso em: 14 ago. 2024.

Antes de encerrar a aula, o professor formador, aproveitando os recursos tecnológicos disponíveis no aplicativo Calculadora 3D do GeoGebra, fez uma demonstração prática e imersiva que envolveu a criação de um Tetraedro e sua respectiva planificação. Para isso, ele usou a mediação tecnológica da ferramenta “Tetraedro” e “Planificação”, o que permitiu aos estudantes observar como as faces do sólido tridimensional se desdobravam em uma superfície bidimensional.

Sucintamente, esta décima quarta semana de aula representa o Sistema de Atividades XIV, no qual foram explorados os conhecimentos curriculares relacionados aos ‘Sólidos Geométricos’, conforme as abordagens realizadas pelo professor formador. No entanto, durante esse processo, caracterizado pela pluralidade e multivocalidade, foram observadas algumas tensões e inquietações, que serão analisadas no próximo subtópico.

4.14.1 Análise das contradições heteroformativas no sistema de atividades XIV

A análise das interações da aula do Sistema de Atividades XIV, fundamentada nas contradições primária, secundária e terciária de Engeström (2016), revelou as tensões e as possibilidades de aprendizagem que emergiram enquanto os estudantes se dedicavam tanto à construção de pontos, polígonos, prismas e outros objetos geométricos no ggb-CB, quanto à exploração dos conhecimentos curriculares relacionados aos ‘Sólidos Geométricos’, tema abordado pelo professor formador.

No caso da primeira contradição primária de Engeström (2016), que se refere à tensão entre o valor de uso e o valor de troca, essa tensão manifestou-se quando Seth reconheceu a aplicabilidade do conceito do cubo em desdobramento, mas demonstrou incerteza sobre como o Princípio de Cavalieri se aplicaria a outros sólidos. Essa hesitação refletiu uma dificuldade

mais profunda em internalizar completamente o princípio, mesmo após a utilização de ferramentas visuais como o GeoGebra. Esse processo fez parte da heteroformação proposta por Macedo (2010), na qual o professor desempenhou um papel ativo, guiando os estudantes na exploração da visualização geométrica e transformando essa hesitação em uma oportunidade para a construção coletiva do conhecimento.

Na contradição secundária de Engeström (2016), que surgiu entre as ferramentas e os objetivos pedagógicos, emergiu outra tensão, evidenciada quando Elen questionou a complexidade de planificar os sólidos utilizando a ferramenta "Planificação". Embora a planificação pareça simples, a dificuldade de contar corretamente os elementos na visualização em 2D revela a tensão entre o uso da ferramenta digital e a precisão que o conceito exige. Isso está relacionado à internalização do conhecimento, conforme Vygotsky (2019), uma vez que o uso do GeoGebra permite que os estudantes experimentem e observem na prática as implicações de suas manipulações. Eles não estão mais apenas "memorizando" fórmulas ou contagens, mas visualizando e ajustando suas percepções, internalizando as relações entre os elementos de forma mais compreensível e intuitiva.

Foi possível observar que as contradições terciárias, conforme Engeström (2016), emergiram quando novas tecnologias e metodologias, como o uso do GeoGebra, substituíram abordagens tradicionais de ensino. A colaboração entre Théo e Ulan exemplificou essa transição: ao utilizar o GeoGebra, os estudantes passaram de um aprendizado estático para um modelo dinâmico, no qual puderam manipular figuras geométricas e observar os resultados em tempo real. Esse deslocamento inicial gerou tensões, uma vez que muitos ainda estavam habituados a métodos mais tradicionais. Contudo, essa mudança refletiu o conceito de inteligência coletiva, conforme Lévy (2003), no qual os estudantes aprenderam em conjunto, utilizando ferramentas digitais que promoveram a construção do conhecimento de maneira simultânea. A resolução dessas tensões ocorreu, portanto, por meio da integração gradual dessas tecnologias ao processo pedagógico, que se tornou mais interativo, flexível e voltado à produção coletiva do saber.

A resolução dessas contradições, no contexto da formação híbrida (Horn; Staker, 2015), ocorreu de maneira coletiva dentro do movimento heteroformativo, no qual a mediação ativa do professor e o uso das ferramentas do GeoGebra desempenharam papéis centrais. Ao conectar a teoria à prática, os estudantes, orientados pelo professor, foram capazes de visualizar sólidos platônicos e compreender a Relação de Euler de forma mais tangível. Essa interação contínua entre o professor e a turma, por meio de uma abordagem coletivamente interativa e tecnológica,

resultou na construção coletiva do conhecimento. Nesse processo, o aprendizado tornou-se mais relevante, com os conceitos sendo explorados, compreendidos e aplicados, evidenciando como o uso integrado da tecnologia promoveu uma compreensão mais sólida e aplicada dos conteúdos.

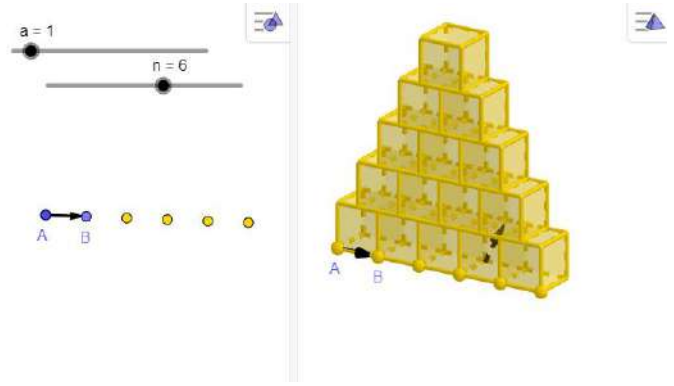
4.14.2 Análise das contradições autoformativas no sistema de atividades XIV

Com a base estabelecida no subtópico anterior, que tratou das dinâmicas heteroformativas e suas tensões, resultando na construção coletiva do conhecimento, a análise agora se volta para os aspectos autoformativas no Sistema de Atividades XIV, fundamentando-se nesse processo tecformativo digital e evidenciando como os estudantes adotaram uma postura mais autônoma e proativa no processo de aprendizagem dos 'Sólidos Geométricos'. Assim, nesta parte, discute-se a maneira como os níveis de aprendizagem (Van Hiele, 1986) se manifestaram nas tarefas dos quatro participantes que mais se destacaram durante as interações da décima quarta semana de aula. Após essa análise, é apresentada a interação geral entre os sistemas envolvidos à luz da contradição quaternária (Engeström, 2016).

A primeira tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 75**. O participante Théo é destacado nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 75 – Tarefa 14.1 (Empilhando Cubos)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	Pensamento Geométrico – Maturação
1.1. Coloque para exibir a Janela de Visualização e a Janela de Visualização 3D; Em ambos, desabilite o eixo e a malha, selecionando o plano de visualização branca. *1.2. Use a ferramenta "Controle Deslizante" e faça dois deslizantes: um "a" variando de 0,1 a 10 e outro "n", variando de 1 a 10, com incremento de 1.* *1.3. Use a ferramenta "Segmento de Comprimento Fixo" clique na Janela de Visualização e depois, na Caixa de Comando digite "n" para o comprimento.* *1.4. Use a ferramenta "Vetor" e trace os vetores u = AB.* *1.5. Digite: v=(0.5, 0, 1) no Campo de Entrada e tecle enter.* *1.6. Digite L_1 = Sequência(Transladar(A, Vetor(i u)), i, 0, n- 1) no Campo de Entrada e tecle enter.* ***a) O que observa quando move o deslizante n?*** *1.7. Digite L_2 = Sequência(Cubo(Elemento(L_1, i), Elemento(L_1, i + 1), EixoZ), i, 1, n) no Campo de Entrada e tecle enter.* ***b) O que observa quando move o deslizante n?*** *1.8. Digite L_3 = Sequência(Transladar(ParteDaLista(L_2, 1, n-1- i), Vetor(i v)), i, 1, n-1) no Campo de Entrada.* ***c) O que observa quando move o deslizante n?***	***Transcrição das respostas de Théo:*** *a) Ao mover o deslizante n, eu vejo a quantidade, vejo uma quantidade de pontos indo na direção do vetor u, à medida que aumento o valor de n.* *b) Vejo a quantidade de cubos sendo adicionada, a partir do valor 2, na direção do vetor u.* *c) Vejo a quantidade de cubos sendo adicionada, a partir do valor 2, tanto na direção do vetor u, como do vetor v, formando uma escada entre eles.* *d) São números que representam uma sequência numérica que pode ser organizada como um triângulo equilátero. O n-ésimo número triangular é dado pela fórmula T(n)= n(n + 1) / 2.* *e) Notei que para n=2, tem-se um cubo, para n=3, três cubos, para n=4,quatro cubos, para n=5, 10 cubos. Assim, tem-se C(n)=n(n-1)/2 cubos.*

d) O que são números triangulares? Qual é a fórmula do n-ésimo termo dessa sequência? ***e) Escreva a quantidade de cubos em função de n, para isso descreva a quantidade de cubos para cada valor de n ampliado.*** ***f) Para a=1,2 u.c. qual é o valor da diagonal do cubo, área base, área total e volume?***	*f) Sabendo que* *Diagonal: d = a√3, logo, d= 1,2 √3* *Área da base: Ab = a², logo, Ab=(1,2)²=1,44 u.a.* *Área total: At = 6Ab, logo, At=6.1,44=8,64* *Volume: V = a³, logo, V=1,728.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	
	

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024)

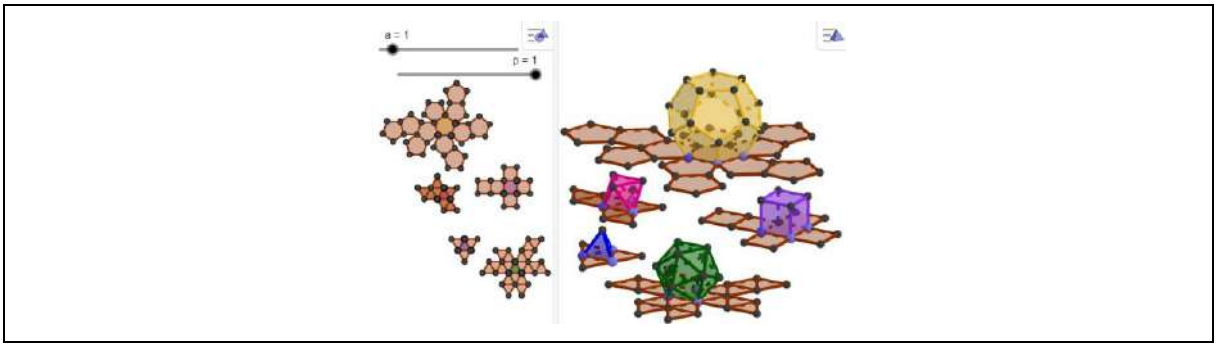
Na análise da Tarefa 14.1, observa-se que, inicialmente, ao mover o deslizante e observar a quantidade de pontos deslocando-se na direção do vetor, o estudante demonstra uma compreensão no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), onde reconhece visualmente a ação dos elementos em uma representação tridimensional. À medida que a atividade avança, Théo transita para o Nível 1, ao analisar informalmente as partes e atributos dos cubos e suas sequências. Quando ele apresenta uma compreensão sobre números triangulares e formulações algébricas, isso indica um progresso para o Nível 2. Nesse estágio, o estudante começa a formular definições mais abstratas, como ao definir o número triangular e aplicar a fórmula que encontrou.

O uso dos recursos do ggb-CB potencializou a transição do estudante para o Nível 2 (Dedução Informal) ao proporcionar uma exploração interativa e virtual das propriedades geométricas. Nesta análise, é possível notar que as ferramentas como o “Controle Deslizante” e os comandos sequenciais de translação permitiram ao estudante perceber, de maneira prática, como as alterações nas variáveis influenciam as figuras e suas inter-relações. Isso facilitou a formação de observações mais estruturadas e a capacidade de reconhecer padrões e propriedades, como a sequência de números triangulares, sem depender apenas da percepção visual. A interação com a ferramenta de entrada de comandos possibilitou a formulação de definições abstratas, permitindo ao participante avançar da observação intuitiva para uma análise mais organizada e ordenada das relações geométricas, caracterizando o desenvolvimento do pensamento informal.

A segunda tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 76**. O participante Seth é destacado nessa análise, com base em suas respostas transcritas ggb-CB da turma.

Quadro 76 – Tarefa 14.2 (Sólidos Platônicos)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
1.1. Na Janela de Visualização 3D, na barra de estilo, desabilite o eixo e a malha e selecione o plano de visualização branca. *1.2. Use a ferramenta "Controle Deslizante" e faça dois deslizantes: um "a" variando de 0,1 a 10, incremento 0,1 e outro "p", variando de 0,1 a 1, com incremento de 0,1.* *1.3. Use a ferramenta "Segmento de Comprimento Fixo" clique na Janela de Visualização e depois, na Caixa de Comando digite "a" para o comprimento. Assim, faça os segmentos de forma espaçados AB, CD, EF, GH e IJ.* *1.4. Na Campo de Entrada digite: Tetraedro(A,B) e tecle enter.* *1.5. Na Campo de Entrada digite: Cubo(C, D) e tecle enter.* *1.6. Na Campo de Entrada digite: Octaedro(E, F) e tecle enter.* *1.7. Na Campo de Entrada digite: Icosaedro(G,H) e tecle enter.* *1.8 . Na Campo de Entrada digite: Dodecaedro(I, J) e tecle enter.* ***a) O que observa?*** *1.9. Na Campo de Entrada digite: Planificação(b, p) e tecle enter.* *1.10. Na Campo de Entrada digite: Planificação(c, p) e tecle enter.* *1.11. Na Campo de Entrada digite: Planificação(d, p) e tecle enter.* *1.12. Na Campo de Entrada digite: Planificação(e, p) e tecle enter.* *1.13. Na Campo de Entrada digite: Planificação(k, p) e tecle enter.* *1.14. Selecione o valor de p com o botão direito do mouse e clique na opção ANIMAR . E veja na Janela de Visualização 3D o poliedro e sua planificação de forma dinâmica.* ***b) O que observa ao mover o controle deslizante p?*** ***c) Escreva a Relação de Euler desses sólidos?*** ***d) Para a=1 u.c. qual é o valor da área base, área total e volume tetraedro regular?*** ***e) Para a=1 u.c. qual é o valor da área base, área total e volume octaedro regular?*** ***f) Para a=1 u.c. qual é o valor da área base, área total e volume icosaedro regular?***	***Transcrição das respostas de Seth:*** *a) Foi formado os sólidos platônicos.* *b) Consigo o processo de planificação dos sólidos platônicos.* *c) A relação de Euler para poliedros é dada por V - E + F = 2, onde: V = número de vértices; A = número de arestas; e F = número de faces* *Para os sólidos que você construiu:* *Tetraedro: V = 4, A = 6, F = 4 ⟶ 4 - 6 + 4 = 2* *Cubo: V = 8, A = 12, F = 6 ⟶ 8 - 12 + 6 = 2* *Octaedro: V = 6, A = 12, F = 8 ⟶ 6 - 12 + 8 = 2* *Icosaedro: V = 12, A = 30, F = 20 ⟶ 12 - 30 + 20 = 2* *Dodecaedro: V = 20, A = 30, F = 12 ⟶ 20 - 30 + 12 = 2* *d) Tetraedro Regular:* *Área da base: Ab = (√3 / 4) * a² = (√3 / 4) * 1² = √3 / 4 ≈ 0.433 u.a.* *Área total: At = √3 * a² = √3 * 1² = √3 ≈ 1.732 u.a.* *Volume: V = (1 / 3) * Ab * h = (1 / 3) * (√3 / 4) * (√2 / 3) = (√6 / 12) ≈ 0.204 u.c.* *e) Octaedro Regular:* *Área da base: Ab = (√3 / 4) * a² = (√3 / 4) * 1² = √3 / 4 ≈ 0.433 u.a.* *Área total: A_t = 2√3 * a² = 2√3 * 1² = 2√3 ≈ 3.464 u.a.* *Volume: V = (1/3) * a³ * √2, então para a = 1 u.c., V = (1/3) * 1² * √2 = (√2 / 3) ≈ 0.471 u.c.* *f) Icosaedro Regular:* *Área da base: A_b = (√3 / 4) * a² = (√3 / 4) * 1² = √3 / 4 ≈ 0.433 u.a.* *Área total: A_t = 5√3 * a² = 5√3 * 1² = 5√3 ≈ 8.660 u.a.* *Volume: V = (5 / 12) * (3 + √5) * a³ = (5 / 12) * (3 + √5) ≈ 2.181 u.c.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	



Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

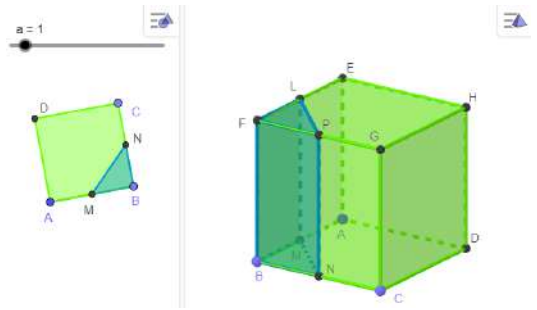
Na análise da Tarefa 14.2, é possível inferir que, inicialmente, as ações do estudante demonstram um reconhecimento visual e a capacidade de formar conexões simples entre os sólidos geométricos. Nesse estágio, Seth reconhece os sólidos platônicos, o que corresponde ao Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986). Em seguida, ele avança para o Nível 1, ao realizar uma análise das partes e atributos dos sólidos, discernindo características como vértices, arestas e faces. A capacidade de discutir a Relação de Euler para os sólidos ($V - E + F = 2$) indica uma transição para o Nível 2, onde o participante começa a formalizar definições abstratas e a estabelecer inter-relações mais complexas entre as propriedades das figuras.

O uso dos recursos do ggb-CB facilitou a transição do estudante para o Nível 2 (Dedução Informal), ao possibilitar a exploração dinâmica das propriedades dos sólidos platônicos. Nesta análise, é possível observar que a interação com deslizantes e planificações permitiu que ele percebesse as inter-relações entre os sólidos e suas representações planas, organizando suas observações de maneira mais abstrata. Além disso, a visualização interativa das figuras contribuiu para estabelecer conexões entre vértices, arestas e faces, promovendo uma análise mais estruturada e reflexiva sobre as propriedades dos poliedros.

A terceira tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 77**. O participante Ulan é destacado nessa análise, com base em suas respostas transcritas ggb-CB da turma.

Quadro 77 – Tarefa 14.3 (Prisma)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
1.1. Na Janela de Visualização 3D, na barra de estilo, desabilite o eixo e a malha e selecione o plano de visualização branca. *1.2. Use a ferramenta "Controle Deslizante" e faça um deslizante: um "a" variando de 0,1 a 10.* *1.1. "Segmento de Comprimento Fixo" clique na Janela de Visualização e depois, na Caixa de Comando digite "a" para o comprimento.*	***Transcrição das respostas de Ulan:*** *a) Volume do Cubo: $Vc = a^3$.* *Volume do Prisma BMNFLP: O volume do prisma é dado pela área da base multiplicada pela altura.*

1.3. Use a ferramenta "Cubo", clicando nos pontos A e B. *1.4. Na Janela de Visualização, use a ferramenta "Ponto Médio ou Centro" e encontre os pontos médios de AC e BC, nomeando-os, respectivamente de M e N.* *1.5. Use a ferramenta "Polígono" e desenhe o polígono MBN.* *1.6. Com a ferramenta "Extrusão para Prisma" clique no polígono ABC e depois, na Caixa de Comando, digite "a" para altura.* ***a) Calcule o volume do prisma BMNFLP e do cubo.*** ***b) Quanto vale a razão entre o volume do prisma BMNFPQ e o volume do cubo?*** ***c) Retirando do cubo o prisma BMNFLP restará o poliedro AMNCDEPLGH. Quantos são as suas faces? Todas as faces são polígonos regulares?*** ***d) Qual é a quantidade de arestas que partem de cada vértice?*** ***e) Trata-se de um Poliedro Convexo?*** ***f) A Relação de Euler é válida para esse sólido? Justifique sua resposta.***	*A base MBN é um triângulo cuja área pode ser calculada como:* *Área de MBN = Ap = (base * altura) / 2, como é um triângulo retângulo e cada cateto vale a metada de a, então Ap= (a/2)(a/2)/2=a²/8* *Logo, o volume será: Vp= (a²/8) * a =a³/8.* *b) Razão = Vp / Vc = (a³/8) / a³ = 1/8.* *c) O poliedro resultante terá 7 faces. Nem todas as faces são polígonos regulares.* *d) Três.* *e) Sim, pois todos os vértices do poliedro estão voltados para fora e não há arestas que se cruzam ao longo das faces.* *f) É válida a relação de Euler, pois o sólido é convexo.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	
	

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Na análise da Tarefa 14.3, observa-se que, inicialmente, o estudante demonstra um reconhecimento visual básico dos sólidos envolvidos, indicando uma capacidade de identificar a forma do prisma e do cubo, o que sugere que ele está operando no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986). Contudo, à medida que avança nas atividades, seu raciocínio torna-se mais analítico, sugerindo um progresso para o Nível 1, onde começa a discernir as partes e os atributos dos sólidos. Ao realizar os cálculos e formular a razão entre os volumes do prisma e do cubo, ele avança para o Nível 2, onde elabora definições e estabelece inter-relações entre as propriedades geométricas.

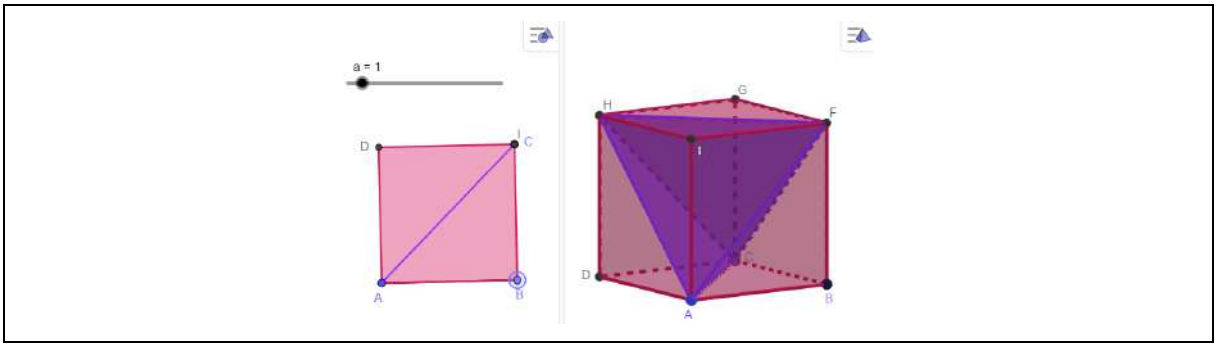
O uso dos recursos do ggb-CB facilitou a transição para o Nível 2 (Dedução Informal), pois permitiu ao estudante explorar dinamicamente as propriedades dos sólidos por meio da visualização em 3D e da manipulação de deslizadores. Essas ferramentas possibilitaram a análise das relações entre o cubo, o prisma e o poliedro resultante, auxiliando o estudante a perceber inter-relações abstratas entre os sólidos geométricos. Nesta análise, é possível notar

que a interação com o ambiente virtual estimulou a formação de definições e a organização de ideias, sem a necessidade de dedução formal, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio geométrico.

A última tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 78**. A participante Elen é destacada nessa análise, com base em suas respostas transcritas ggb-CB da turma.

Quadro 78 – Tarefa 14.4 (Tetraedro Inserido no Cubo)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
1.1. Na Janela de Visualização 3D, na barra de estilo, desabilite o eixo e a malha e selecione o plano de visualização branca. *1.2. Use a ferramenta "Controle Deslizante" e faça um deslizante: um "a" variando de 0,1 a 10.* *1.1. "Segmento de Comprimento Fixo" clique na Janela de Visualização e depois, na Caixa de Comando digite "a" para o comprimento.* *1.3. Use a ferramenta "Cubo", clicando nos pontos A e B.* *1.4. Na Campo de Entrada digite: Tetraedro(A,H,F) e tecle enter.* ***a) O tetraedro é regular? Justifique sua resposta?*** ***b) Calcule o volume do cubo e do tetraedro.*** ***c) Calcule a razão entre os volumes do tetraedro e do cubo. Estabeleça uma relação entre o volume do tetraedro e do cubo.*** ***d) Calcule a razão entre as áreas do tetraedro e do cubo.*** ***e) Dimensione a aresta do cubo (aumentando e diminuindo o comprimento de uma das arestas). Diga o que você observa em relação às razões entre seus volumes e áreas?*** ***f) Você ver alguma inter-relação da Geometria Plana com a Geometria Espacial nessa construção?***	***Transcrição das respostas de Elen:*** *a) Sim, pois um tetraedro é considerado regular se todas as suas arestas têm o mesmo comprimento, para esse caso, sua aresta vale sempre a.* *b) Volume do Cubo: $V_{cubo} = a^3$.* *Volume do Tetraedro: $V_{tetraedro} = a^3/6$.* *c) Razão = $V_{tetraedro} / V_{cubo} = (a^3 / 6) / a^3 = 1/6$.* *Portanto, o volume do tetraedro é sempre 1/6 do volume do cubo quando ambos têm arestas de mesmo comprimento.* *d) Área do Cubo: $A_{cubo} = 6a^2$.* *Àrea do Tetraedro: $A_{tetraedro} = (\sqrt{3} / 4) * a^2 * 4 = \sqrt{3} * a^2$.* *Razão = $A_{tetraedro} / A_{cubo} = (\sqrt{3} * a^2) / (6a^2) = \sqrt{3} / 6$.* *Portanto, a área do tetraedro é $\sqrt{3}/6$ da área do cubo.* *e) Ao aumentar ou diminuir o comprimento de uma das arestas, observe que tanto os volumes quanto as áreas do cubo e do tetraedro variam em função de a^3 e a^2, respectivamente. A razão entre os volumes (1/6) e as áreas ($\sqrt{3}/6$) se mantém constantes, demonstrando que essas relações são independentes do tamanho da aresta.* *f) Isso está na forma como os conceitos de figuras planas ajudam a criar e entender sólidos geométricos. Na geometria plana, utilizamos segmentos e medidas das faces das figuras, como quadrados e triângulos equiláteros, que aparecem nas faces do cubo e do tetraedro. Por exemplo, a área das faces do cubo é baseada em quadrados, enquanto as faces do tetraedro são triângulos equiláteros. Quando passamos para a geometria espacial, esses conceitos são ampliados para calcular volumes. O volume do cubo é obtido pela multiplicação das suas arestas, enquanto o volume do tetraedro é uma fração desse volume. Assim, a área de uma figura plana como o quadrado ou triângulo é essencial para definir as propriedades tridimensionais do cubo e do tetraedro, como o volume. Além disso, ao aumentar ou diminuir o tamanho das arestas do cubo e do tetraedro, as relações entre seus volumes e áreas se mantêm constantes, mostrando que as proporções entre os sólidos permanecem as mesmas, independentemente de suas dimensões. Isso demonstra como a geometria plana fornece a base para a compreensão dos sólidos tridimensionais, e a geometria espacial expande essa compreensão para outras propriedades, como o volume.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	



Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Na análise da Tarefa 14.4, infere-se que, inicialmente, ao definir a base do tetraedro e sua relação com o cubo, Elen opera no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986). À medida que avança nas etapas, a estudante demonstra o Nível 1 ao analisar as propriedades das figuras. Ao justificar que o tetraedro é regular, ela evidencia um entendimento das características das formas geométricas. Com a discussão sobre a razão entre os volumes e áreas, Elen transita para o Nível 2. Ao calcular a razão entre os volumes do tetraedro e do cubo, bem como a razão entre as áreas, ela demonstra a capacidade de estabelecer relações mais complexas. Ela atinge o Nível 3 ao articular sequências lógicas em suas respostas. Sobretudo, ao dimensionar a aresta do cubo e observar como as variações afetam os volumes e as áreas, ela estabelece uma relação dedutiva que evidencia sua capacidade de pensar criticamente sobre a inter-relação entre os elementos.

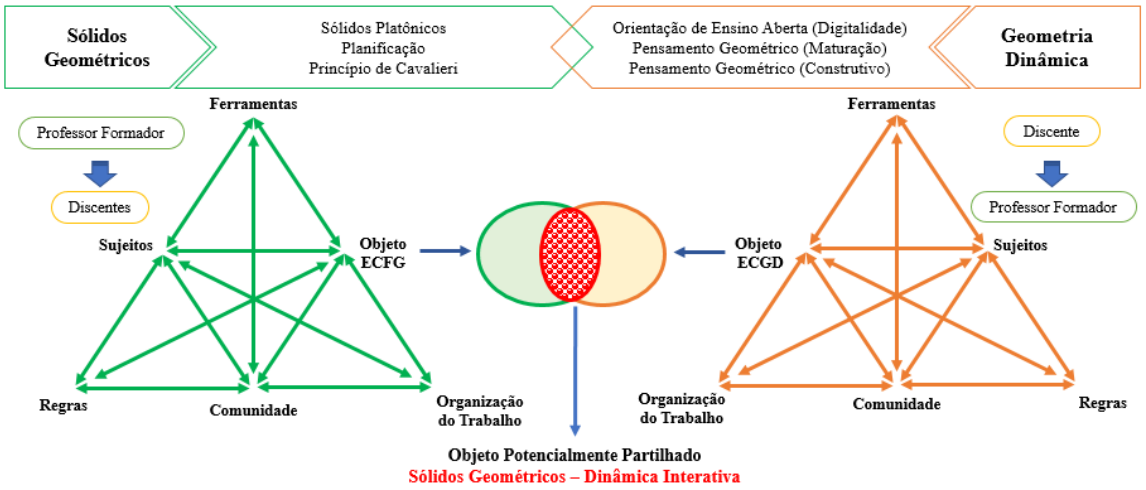
A estudante demonstra ter alcançado o Nível 4 ao apresentar uma análise aprofundada sobre a relação entre volumes e áreas em sólidos geométricos, ampliando a compreensão dos conhecimentos bidimensionais e tridimensionais. Ao afirmar que "*[...] a razão entre os volumes (1/6) e as áreas (√3/6) se mantém constante, demonstrando que essas relações são independentes do tamanho da aresta*", a estudante aplica um raciocínio baseado em sistemas dedutivos, comparando as propriedades geométricas de diferentes sólidos e estabelecendo uma relação consistente entre suas dimensões. Além disso, ao conectar conceitos de Geometria Plana e Geometria Espacial, ela explora a ideia de que "*[...] as relações entre os volumes e as áreas se mantêm constantes, independentemente de suas dimensões*", evidenciando uma análise de consistência e completude de axiomas e propriedades, característica desse nível.

O uso dos recursos do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 4 (Rigor) ao permitir que a estudante explorasse, de forma dinâmica e virtual, as relações entre volumes e áreas dos sólidos, aprofundando sua compreensão das propriedades geométricas. Nesta análise, é possível observar que a manipulação das arestas e a visualização das mudanças nas dimensões dos sólidos possibilitaram uma análise detalhada das constantes entre volumes e áreas,

demonstrando a independência do tamanho das arestas. Esse ambiente interativo facilitou a comparação entre diferentes sólidos e a aplicação de raciocínios dedutivos, essenciais para estabelecer relações entre sistemas geométricos.

As quatro tarefas analisadas evidenciam, por meio da interação entre o ECFG e a ECGD, a criação de um objeto potencialmente partilhado, conforme descrito na quarta contradição de Engeström (2016). Nesse contexto, o objeto partilhado foi a compreensão dinâmica interativa dos ‘Sólidos Geométricos’, com foco na maturação do pensamento geométrico dos estudantes (**Esquema 38**).

Esquema 38 – Sólidos Geométricos – Dinâmica Interativa



Fonte: Pesquisador (2024).

No sistema ECFG, o professor formador teve uma atuação mais intensa, apresentando os conceitos relacionados aos sólidos platônicos, à planificação e ao Princípio de Cavalieri. O objetivo desse sistema foi ensinar os ‘Sólidos Geométricos’ e estimular a investigação de suas aplicações por meio de operações como a construção de pontos, polígonos, prismas e outros objetos geométricos. Para isso, o professor realizava revisões teóricas dos capítulos VII, VIII e XIV do volume 10, proporcionando aos estudantes uma compreensão formal dos conhecimentos curriculares abordados.

Ao mesmo tempo, no sistema ECDG, os estudantes passaram a ter uma atuação mais intensa, adotando uma postura proativa. Nesse ambiente, tiveram a oportunidade de explorar os conceitos de forma prática e interativa, manipulando objetos geométricos em um espaço digital dinâmico, o que resultou em um desempenho positivo nas AOEA. Esse processo possibilitou o desenvolvimento de habilidades digitais, com ênfase na prática de desdobramento interativo da estrutura geométrica, utilizando a ferramenta “Planificação”. Por outro lado, o professor

formador, nesse contexto, atuou como mediador, oferecendo suporte, *feedback online* e auxiliando os estudantes a consolidar o aprendizado de maneira prática.

Observou-se que o uso do ggb-CB amplia significativamente as capacidades cognitivas dos estudantes, pois permite explorar e visualizar sólidos geométricos de forma interativa e dinâmica. As TD, como apontado por Lévy (2017), reconfiguram a relação com o saber ao potencializar habilidades como percepção e imaginação. Nesse sistema, as ferramentas digitais do GeoGebra não apenas facilitam a compreensão dos conceitos de Geometria, mas também oferecem uma experiência de aprendizagem mais prática, promovendo a reflexão e o raciocínio espacial de maneira intuitiva, o que contribui para a maturação do pensamento geométrico. Esse ambiente digital redefine as possibilidades do ensino geométrico, ampliando o alcance da aprendizagem.

As operações realizadas nesse sistema envolvem simulações, percepções e personalizações na visualização; calibrações e apurações da área das figuras e do volume dos sólidos; medições, transformações e variações dos objetos; identificações, implantações, comparações, sincronizações e conexões de elementos; parametrizações; conformidações; programações, elevações e planificações da estrutura; além de construções geométricas com diversas possibilidades de manipulação. Essas operações encontram respaldo na TA de Leontiev (2018), que destaca a ideia de que as ações são orientadas pela tarefa a ser cumprida, ou seja, o objetivo final direciona todas as operações. Sob essa perspectiva, o foco foi desdobrar os sólidos geométricos. Ao utilizar ferramentas digitais para interagir com os sólidos, os estudantes não apenas absorveram o conteúdo curricular, mas também o construíram ativamente por meio de práticas dinâmicas e interativas.

Na AOEA desta semana, observou-se que os estudantes adotaram uma postura proativa, refletindo uma perspectiva de autoformação. Ao serem desafiados a explorar e manipular conceitos geométricos de forma independente, os estudantes não apenas absorveram o conteúdo, mas também desenvolveram a capacidade de reflexão crítica e autodirecionamento no aprendizado. Esse processo permitiu que ampliassem suas competências, especialmente no que diz respeito aos ‘Sólidos Geométricos’, estabelecendo conexões abstratas entre os conceitos abordados. Como destaca Galvani (2002, p. 106), “[...] as práticas de exploração intersubjetivas da autoformação se distinguem conforme o nível de realidade que elas privilegiam”, o que sugere que a interação entre os estudantes e o ambiente de aprendizagem contribuiu para a construção de diferentes representações e significados. Assim, os estudantes deixaram de ser

meros receptores passivos de informação, assumindo um papel ativo na construção do seu próprio conhecimento e promovendo um aprendizado reflexivo.

Nesse ambiente, o progresso dos estudantes nos diferentes níveis de pensamento geométrico, conforme o modelo de Van Hiele (1986), foi facilitado e potencializado pelo uso dos recursos do ggb-CB, inserido nesta proposta híbrida de ensino. Esse processo formativo, ao permitir a construção dinâmica e interativa de objetos geométricos, proporcionou aos estudantes uma experiência de aprendizado mais intuitiva e virtual. Essa abordagem não apenas facilitou a assimilação dos conceitos, mas também favoreceu a internalização das propriedades geométricas de maneira mais compreensível.

Como resultado das análises realizadas, foi possível observar que nas tarefas 14.1 (Empilhando Cubos), 14.2 (Sólidos Platônicos) e 14.3 (Prisma), os estudantes Théo, Ulan e Seth avançaram para o Nível 2 de aprendizagem ao desenvolverem definições abstratas e estabelecerem conexões entre as propriedades das figuras. Esse progresso reflete uma compreensão mais profunda, permitindo-lhes articular as relações métricas e as características dos sólidos com maior clareza.

Por outro lado, na tarefa 14.4 (Tetraedro Inserido no Cubo), a estudante Elen demonstrou um avanço significativo ao transitar para o Nível 4, compreendendo com rigor a estrutura de diferentes sistemas dedutivos. Esse movimento não apenas evidenciou sua capacidade de análise crítica, mas também sua habilidade em comparar a consistência, a completude e a independência dos sistemas em questão. Esse progresso ressalta a importância da mediação digital e da prática reflexiva, pois não se limitou apenas à construção de conhecimento, mas também ao desenvolvimento de habilidades dedutivas mais sofisticadas, essenciais para a formação de um raciocínio geométrico mais rigoroso e interconectado.

Em virtude dos fatos apresentados, a integração dos dois sistemas (ECFG e ECGD) resultou na criação do objeto partilhado mencionado anteriormente. Esse processo de ensino, realizado nesta proposta híbrida, fundamentado na autoformação, nas TDI e na TA, foi essencial para o avanço da compreensão dos estudantes sobre os ‘Sólidos Geométricos’. Ao combinar essas abordagens, o processo educativo se transforma, oferecendo aos estudantes não apenas a oportunidade de aprender conteúdos geométricos, mas também de desenvolver habilidades críticas, reflexivas e autônomas, que transcendem o ambiente da sala de aula e os preparam para enfrentar desafios complexos de forma criativa e independente.

4.15 Explorando os Corpos Redondos

Na décima quinta semana, as aulas foram organizadas para explorar os ‘Corpos Redondos’, com o objetivo de promover uma compreensão dinâmica desse conteúdo curricular. Nesse cenário híbrido de ensino, as ações pedagógicas envolveram a construção e a exploração do objeto de estudo, bem como a investigação, identificação e aplicação prática dos conceitos relacionados à cilindros, cones e esferas, além da interação discursiva sobre as aplicabilidades discutidas.

Para isso, foi necessário expandir o repertório operacional dos estudantes por meio de tarefas teóricas e práticas. A aplicação das AOEA foi essencial nesse processo, pois forneceu diretrizes para a criação, manipulação e personalização de pontos, círculos, esferas e outros objetos geométricos. Essas atividades foram planejadas para alcançar as metas Ciade, aproximando a turma dos recursos tecnológicos adotados, especialmente no incentivo à cultura digital com a utilização da ferramenta “Esfera: Centro & Raio”.

O **Quadro 79**, apresentado a seguir, ilustra a estrutura e a organização dessa abordagem no contexto do ensino aplicado nesta décima quinta semana.

Quadro 79 – Planejamento da décima primeira semana de aula

<table>
<tr><td colspan="4">Artefatos
Computador e Smartphone.
GeoGebra: Plataforma; Classroom Beta; Classic; Geometria, Calculadora 3D.
Ferramentas Específicas: Mover; Ponto; Ponto em Objeto; Interseção de Dois Objetos; Segmento; Segmento de Comprimento Fixo; Reta Perpendicular; Reta Paralela; Polígono; Polígono Regular; Círculo: Centro & Raio; Setor Circular; Arco Circular; Ângulo de Amplitude Fixa; Área; Controle Deslizante; Texto; Círculo dados Eixo e um dos seus Pontos; Extrusão para Prisma; Cilindro, Cone; Esfera: Centro & Raio; Volume; Girar a Janela de Visualização 3D.
Comando: CilindroInfinito(...), Cone(...), Superfície(...)
Virtualização: Realidade Aumentada.
Livro: Fundamentos de Matemática Elementar 10: geometria espacial, posição e métrica (do Cap. X ao XVI).</td></tr>
<tr><td>Objeto
Corpos Redondos</td><td>Motivo
Necessidade de promover a compreensão dinâmica dos conceitos relacionados aos Corpos Redondos.</td><td colspan="2">Ação
❖ Construção e exploração dos Corpos Redondos de modo dinâmico;
❖ Investigação, identificação e aplicação dos conceitos relacionados aos cilindros, cones e esferas;
❖ Interação discursiva das aplicabilidades abordadas.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Operações
Simulações: gerar representações dos objetos no espaço físico;
Comparações: aferir semelhanças e diferenças dos elementos;
Personalizações: configurar, renomear, exibir/ocultar, etc.;
Conformidações: preservar as subsistências das estruturas;
Apurações: calcular área das figuras e volume dos sólidos;
Percepções: explorar as visualizações multidimensionais;
Medições: medir comprimentos e amplitudes angulares;</td><td>Metas
➢ Construir pontos, círculos, esferas, etc. para explorar os Corpos Redondos com a mediação tecnológica das ferramentas e comandos do GeoGebra;</td></tr>
</table>

Parametrizações: definir as características dos objetos; Inquietações: expor dúvidas subjetivas e/ou coletivas; Interlocuções: participar das discussões construtivas; Elevações: provocar a extrusão da região superficial; Construções: produzir pontos, círculos, esferas, etc.; Identificações: localizar as interseções dos objetos; Programações: processar comandos de construção; Planificações: desdobrar os sólidos geométricos; Sincronizações: encontrar os pontos tangenciais; Explorações: testar os recursos do GeoGebra; Calibrações: ajustar a superfície geométrica; Revisões: revisar os conteúdos curriculares; Implantações: inserir elementos adaptáveis; Execuções: resolver roteiros das AOEA; Variações: ampliar/reduzir os objetos; Transformações: deslocar os objetos; Administrações: gerenciar conta; Moldações: modelar os sólidos; Conexões: conectar elementos; Manipulações: mover objetos.	➢ Investigar e aplicar conceitos relacionados aos cilindros, cones e esferas; ➢ Desenvolver habilidades práticas de mensuração multidimensional e interativa dos elementos geométricos com uso da ferramenta “Esfera: Centro & Raio”; ➢ Estimular discussões e reflexões sobre abordagens teóricas e práticas relacionadas ao objeto de estudo.
Condições Ambiente de ensino híbrido com suporte contínuo da equipe docente para auxiliar na aprendizagem das Corpos Redondos durante as atividades presenciais, oferecendo orientações e estímulos personalizados durante as observações *online* a distância.	

Fonte: Pesquisador (2024).

O professor formador iniciou sua abordagem explicando as superfícies cilíndricas, destacando que as superfícies cilíndricas regradas são geradas por uma reta chamada geratriz, que se move paralelamente a uma reta fixa, denominada direção, percorrendo os pontos de uma linha chamada diretriz. Ele esclareceu que essas superfícies são desenvolvíveis, ou seja, podem ser estendidas em um plano sem dobras ou rupturas. Com base nessa noção, o professor apresentou três exemplos: se a diretriz for uma reta não paralela à direção, a superfície gerada será um plano; se for um segmento de reta não paralelo, resultará em uma faixa de plano; e se for um polígono, gerará uma superfície prismática ilimitada.

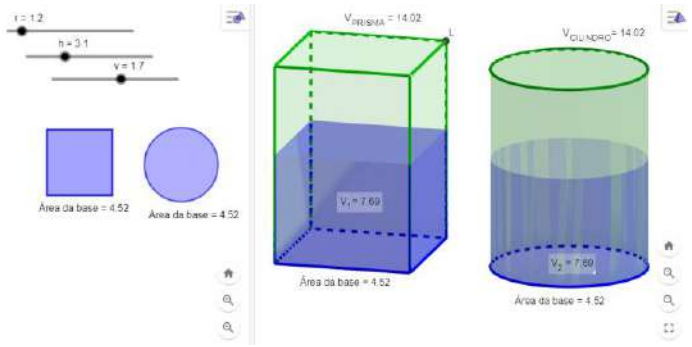
Seguindo, o professor explicou as superfícies cilíndricas de revolução, que são formadas pela rotação de uma reta (geratriz) em torno de uma reta fixa (eixo), com a geratriz sempre paralela ao eixo. Ele detalhou que, ao girar uma reta em torno de um eixo, a figura gerada é uma superfície cilíndrica de revolução. Esse tipo de cilindro é denominado cilindro circular reto quando as geratrizes são perpendiculares às bases e cilindro oblíquo quando as geratrizes estão inclinadas. Ele também abordou a definição de cilindro como a reunião de segmentos paralelos e congruentes a uma reta, situados em um plano, com base em um círculo. Explicou a altura do cilindro como a distância entre os planos das bases, além dos conceitos de superfície lateral e superfície total, detalhando como essas superfícies são formadas pelas geratrizes e pelas bases.

Para demonstrar que o Princípio de Cavalieri é válido também para os cilindros, o professor formador utilizou o GeoGebra *Classic online*, na disposição de Geometria, com a Janela de Visualização e a Janela de Visualização 3D. Ele fez uso de ferramentas tecnológicas, como “Controle Deslizante”, “Segmento de Comprimento Fixo”, “Polígono Regular”, “Círculo: Centro & Raio”, “Extrusão para Prisma”, “Área” e “Volume”, a fim de facilitar a compreensão dos estudantes.

Primeiramente, o professor criou três deslizadores denominados *r*, *h* e *v*. No Campo de Entrada, ele digitou “*b = sqrt(π)*” e, em seguida, traçou um segmento *AB* com comprimento “*r*b*”. Utilizando esses valores, ele construiu um quadrado com lado *AB* e um círculo com raio *r*, ambos na Janela de Visualização. Depois, aplicou uma extrusão ao quadrado e ao círculo para formar um prisma e um cilindro, ambos com altura *h*, clicando primeiro no quadrado e, em seguida, no círculo. Em seguida, repetiu a extrusão para gerar os sólidos com altura *v*. Para diferenciar os sólidos, ajustou a cor do prisma e do cilindro para azul, enquanto os outros dois mantiveram cores distintas. Por fim, ele calculou a área da base e o volume de cada sólido, demonstrando que ambos apresentavam o mesmo valor para as bases.

A **Figura 48** ilustra essa construção, na qual foi explorado intuitivamente o Princípio de Cavalieri, demonstrando a equivalência dos volumes de sólidos com seções transversais de áreas iguais.

Figura 48 – Princípio de Cavalieri



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/da8msb9g. Acesso em: 14 ago. 2024.

Durante essa aula do professor formador, foram abordadas as noções intuitivas sobre a geração de superfícies cônicas, com foco especial nas superfícies regradas desenvolvíveis cônicas. Ele explicou que essas superfícies são formadas por uma reta geratriz que passa por um ponto chamado vértice e percorre os pontos de uma linha, denominada diretriz, sendo que o vértice não pertence ao plano da diretriz. Em seguida, o professor explorou o conceito de cone

circular, esclarecendo que o cone é a reunião de semirretas que têm origem no vértice e passam pelos pontos de um círculo. Essa configuração pode ser limitada ou ilimitada, dependendo da posição do vértice em relação à base.

O professor formador destacou que o cone reto, gerado por revolução, é um cone de revolução, ou seja, resulta da rotação de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos. Assim, ele apresentou os elementos fundamentais desse sólido, como a base, as geratrizes e a altura. Também explicou a importância da seção meridiana, que é a interseção do cone com um plano que contém a reta que passa pelo vértice e pelo centro da base. No caso do cone circular reto, essa seção meridiana é sempre um triângulo isósceles.

Ao abordar as superfícies do cone, o professor explicou como calcular a área lateral, que corresponde à reunião das geratrizes, e a área total, que é a soma da área lateral com a área da base. A fórmula para a área lateral foi derivada da ideia de que essa superfície pode ser desenvolvida em um plano como um setor circular. A área total, por sua vez, é a soma da área lateral com a área da base, e a fórmula final foi apresentada como $At = \pi r(g+r)$, onde g representa a geratriz. De forma adicional, o professor introduziu o conceito de volume do cone, relacionando-o ao volume de um tetraedro com altura e base equivalentes. Utilizando o Princípio de Cavalieri, ele demonstrou que cones com a mesma base e altura possuem volumes iguais, enfatizando a importância dessa ferramenta para a comparação de volumes de sólidos.

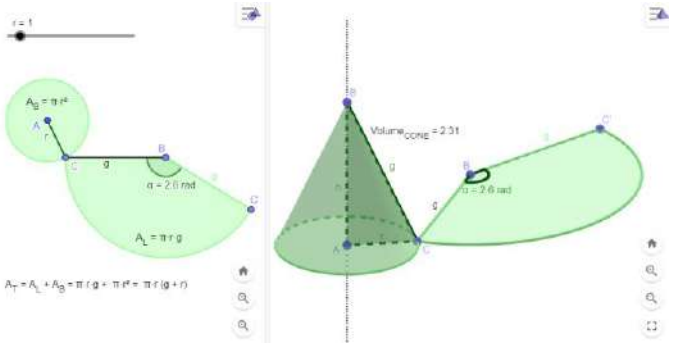
Durante a abordagem, o professor utilizou o GeoGebra *Classic online*, na disposição de Geometria, empregando as Janelas de Visualização e Visualização 3D, além da mediação tecnológica das ferramentas “Controle Deslizante”, “Ponto”, “Mover”, “Reta Perpendicular”, “Ponto em Objeto”, “Cone”, “Segmento”, “Polígono”, “Segmento de Comprimento Fixo”, “Ângulo de Amplitude Fixa”, “Setor Circular”, “Volume” e “Texto”. O intuito foi apresentar o conteúdo de forma interativa.

Ele começou criando um deslizante chamado r. Em seguida, inseriu um ponto A no plano XY e, utilizando a ferramenta de reta perpendicular, traçou uma reta nesse plano que passava pelo ponto A. Depois, inseriu o ponto B nessa reta, definindo r como a altura do cone. Com esses elementos, o professor traçou o segmento AC, conectando o ponto A ao ponto C, que estava localizado na circunferência da base do cone. A partir daí, desenhou o triângulo retângulo ΔACB, onde denominou os segmentos como $AC = r$, $CB = g$ e $BA = h$, configurando as legendas por meio da opção de contexto.

O próximo passo foi clicar no ponto C e traçar um segmento de comprimento g. Em seguida, formou-se um ângulo de amplitude fixa ao clicar nos pontos C e D e, na Caixa de

Comando, digitou-se a expressão "*360° * r / g*", criando o ângulo alfa em radianos. Para essa operação, foi ativada a opção "*rad*" na barra de configurações do objeto. Em seguida, o professor desenhou o setor circular *CDC'*, renomeando o ponto *D* como *B* nas configurações de contexto. Ele calculou o volume do cone e apresentou as fórmulas da área da base, lateral e total do cone. Por fim, traçou o segmento *BC'*, denominando-o também como *g*, conforme ilustrado na **Figura 18**.

Figura 49 – Construindo sólidos de revolução



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/qxcpgzm2. Acesso em: 14 ago. 2024.

Na terceira etapa da aula, o professor formador iniciou a exploração do conceito de esfera, começando com uma definição intuitiva. Ele explicou que uma esfera é o conjunto de todos os pontos no espaço que estão a uma distância constante, chamada de raio, em relação a um ponto fixo, denominado centro. Para tornar o conceito mais acessível, o professor utilizou a ideia de uma esfera como um sólido de revolução, gerado pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro da esfera.

Seguindo essa linha de raciocínio, ele abordou as superfícies da esfera, explicando que a superfície da esfera é composta por todos os pontos que estão a uma distância igual ao raio em relação ao centro da esfera. Essa superfície representa uma esfera 'ideal', dado pela fórmula $A=4\pi r^2$, onde *r* é o raio da esfera. O professor formador apresentou a dedução dessa fórmula com base em conceitos geométricos e estabeleceu uma conexão com a ideia de setores circulares desenvolvidos em um plano. Ele também explorou a classificação das seções da esfera, como as seções meridionais e os círculos máximos, além de outras características importantes, como polos, equador, paralelos e meridianos, que são seções e pontos referenciais fundamentais para a compreensão da estrutura da esfera.

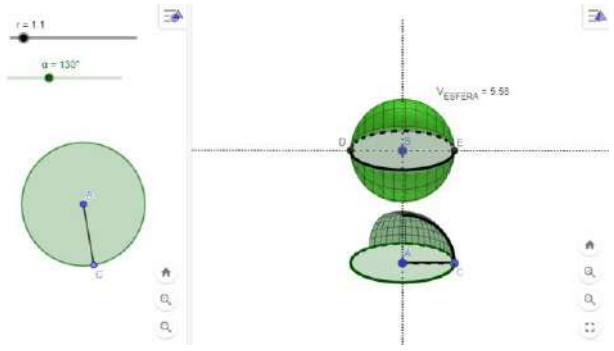
Na sequência, o professor apresentou o conceito de volume da esfera, fornecendo a fórmula $V=(4/3)\pi r^3$. Ele contextualizou o volume ao relacionar a esfera com um cilindro

equilátero e dois cones que, juntos, compõem o volume da esfera. Para reforçar essa relação, utilizou o princípio de Cavalieri, que compara o volume de diferentes sólidos com seções correspondentes.

Para demonstrar a formação da esfera como um sólido de revolução, o professor formador, com a mediação das ferramentas tecnológicas "Controle Deslizante", "Círculo: Centro & Raio", "Reta Perpendicular", "Ponto em Objeto", "Arco Circular", "Esfera: Centro & Raio", "Segmento", "Reta Paralela", "Interseção em Dois Objetos", "Círculo dado Eixo e um dos seus Pontos" e "Volume", além do comando "Superfície(...)", construiu uma semiesfera e uma esfera de forma interativa.

Nesse cenário, o professor formador começou criando dois deslizadores denominados *r* e *α*. Em seguida, desenhou um círculo com centro em *A* e raio *r*, traçando uma reta perpendicular (*f*) ao plano no ponto *A*. O ponto *B* foi inserido nessa reta, enquanto o ponto *C* foi posicionado na circunferência do círculo. Com esses elementos, ele clicou nos pontos *A*, *C* e *B*, gerando o arco circular *d*. Depois, no Campo de Entrada, inseriu o comando "*Superfície(d, α, f)*", criando a calota de uma esfera de raio *r*. Em seguida, desenhou uma esfera com centro em *B* e raio "*r*". O professor traçou o segmento *AC* e, utilizando a ferramenta "Reta Paralela", desenhou uma reta *g* paralela a esse segmento no ponto *B*, encontrando a interseção da esfera com a reta *g*. Posteriormente, produziu a circunferência *e*, clicando primeiro em *g* e depois em *D*. Por fim, inseriu no Campo de Entrada o comando "*Superfície(e, α, g)*" e calculou o volume da esfera com centro em *B* e raio *r*, conforme ilustrado na **Figura 50**.

Figura 50 – Construção de sólidos de revolução



Fonte: Pesquisador (2024).
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/da8msb9g. Acesso em: 14 ago. 2024.

Antes de encerrar a aula, o professor formador aproveitou os recursos tecnológicos disponíveis no aplicativo Calculadora 3D do GeoGebra para realizar uma simulação prática e imersiva. Nessa demonstração, ele criou um cilindro, dois cones e uma esfera. Para isso, utilizou

a mediação tecnológica das ferramentas “Ponto”, “Mover”, “Controle Deslizante”, “Círculo: Centro & Raio”, “Reta Perpendicular”, “Interseção em Dois Objetos”, “Ponto Médio ou Centro”, “Cilindro” e “Esfera: Centro & Raio”, além dos comandos Cone(...) e CilindroInfinito(...). Com esses recursos, ele potencializou a virtualização da realidade, permitindo que os estudantes observassem a inserção de dois cones dentro de um cilindro limitado e uma esfera dentro de um cilindro infinito.

Concisamente, esta décima quinta semana de aula representa o Sistema de Atividades XV, no qual foram explorados os conhecimentos curriculares relacionados aos ‘Corpos Redondos’, conforme as abordagens realizadas pelo professor formador. No entanto, durante esse processo, caracterizado pela pluralidade e multivocalidade, foram observadas algumas tensões e inquietações, que serão analisadas no próximo subtópico.

4.15.1 Análise das contradições heteroformativas no sistema de atividades XV

A análise das interações da aula do Sistema de Atividades XV, fundamentada nas contradições primária, secundária e terciária de Engeström (2016), revelou as tensões e as possibilidades de aprendizagem que emergiram enquanto os estudantes se dedicavam tanto à construção de pontos, círculos, esferas e outros objetos geométricos no ggb-CB, quanto à exploração dos conhecimentos curriculares relacionados aos ‘Corpos Redondos’, tema abordado pelo professor formador.

A análise das interações durante a aula, à luz das contradições propostas por Engeström (2016), revelou como os estudantes interagiram com o sistema de ensino híbrido e as ferramentas digitais. A contradição primária emergiu quando Seth, por exemplo, expressou surpresa ao perceber que o Princípio de Cavalieri poderia ser aplicado a diferentes sólidos. A tensão entre o valor de uso, representado pela visualização prática no GeoGebra, e o valor de troca, que se refere à compreensão teórica do conceito, tornou-se evidente quando Seth questionou como as secções em sólidos, como cones ou pirâmides, poderiam garantir volumes iguais. Essa dúvida refletiu a dificuldade de transição entre a experiência prática com a ferramenta digital e a abstração teórica do princípio.

Nesse contexto, o processo heteroformativo se manifestou no papel mediador do professor, que, ao orientar Seth e outros estudantes, como Théo e Elen, os ajudou a transitar de uma compreensão inicial, predominantemente visual, para uma internalização mais profunda e teórica dos conceitos. Conforme definido por Sommerman (2002), a heteroformação representa

o aspecto social da formação, onde o aprendizado ocorre por meio da ação educativo-formativa dos outros. Nessa lógica, a interação entre os estudantes e a ferramenta permitiu que eles avançassem de uma simples observação dos sólidos no GeoGebra para uma reflexão mais abrangente sobre como os conceitos geométricos se aplicam em diferentes contextos. Esse processo não apenas facilitou o entendimento individual, mas também estimulou a troca de conhecimentos entre os estudantes, promovendo a construção coletiva do saber.

Foi possível observar que a contradição secundária proposta por Engeström (2016) entre as ferramentas digitais utilizadas e os objetivos da atividade tornou-se evidente na interação de Mary, que demonstrou dificuldade em conectar a visualização no GeoGebra com o conceito do Princípio de Cavalieri. Embora a estudante reconhecesse a importância das seções transversais, ela enfrentava dificuldades para internalizar o conceito sem uma explicação mais detalhada. Essa dificuldade se manifestou claramente quando Mary questionou como as secções em sólidos, como cilindros e pirâmides, poderiam garantir volumes iguais, uma dúvida que refletia a tensão entre a visualização prática no GeoGebra e a compreensão teórica abstrata do princípio.

Neste momento, a mediação do professor foi fundamental para facilitar a internalização do conhecimento, conforme proposto por Vygotsky (2019). Ao utilizar as ferramentas do GeoGebra para criar seções paralelas nos sólidos, o professor possibilitou que Mary, juntamente com Seth, visualizassem como as áreas das seções transversais eram iguais, o que garantia a equivalência dos volumes. Utilizando a ferramenta “Esfera: Raio & Centro”, ele também demonstrou como realizar medições equivalentes em três dimensões. Dessa forma, as ferramentas digitais tornaram-se mediadores essenciais nesse processo, permitindo que os estudantes não apenas observassem, mas também manipulassem as representações dos sólidos, facilitando a construção coletiva do conhecimento. Esse processo cooperativo não apenas respondeu às dúvidas individuais, mas também promoveu uma reflexão conjunta, aprofundando a compreensão dos conceitos geométricos por meio da troca de ideias entre os estudantes e o professor.

A contradição terciária surgiu com a introdução do GeoGebra, uma ferramenta digital inovadora que entrou em conflito com o modelo tradicional de ensino, gerando uma nova forma de interação entre os estudantes e o conteúdo. Théo, por exemplo, inicialmente questionou o funcionamento da extrusão e como ela gerava volume. Esse questionamento refletia uma tensão entre a abstração dos conceitos geométricos e sua transformação em representações visuais dinâmicas, mediadas pela tecnologia. A necessidade de os estudantes, como Théo e Seth, reavaliarem suas expectativas e modos de aprendizado tornou-se evidente à medida que

começaram a perceber o potencial do GeoGebra em proporcionar novas formas de entendimento. A ferramenta digital não apenas trouxe um novo modo de visualização, mas também desafiou as abordagens tradicionais de aprendizagem, criando um espaço para a reinterpretação dos conceitos.

Nesse processo, a inteligência coletiva, conforme proposto por Lévy (2017), manifestou-se nas interações entre Théo e Seth, que começaram a colaborar e trocar ideias sobre como o GeoGebra facilitava a compreensão de conceitos complexos ao "girar" ou "desenvolver" formas tridimensionais. Essa troca de conhecimento, mediada pela tecnologia, foi essencial para a construção coletiva do entendimento sobre extrusão e volume. A tecnologia, ao facilitar a visualização e manipulação dos objetos, promoveu um espaço coletivamente interativo em que os estudantes não apenas resolviam suas dúvidas, mas também construíam, de forma conjunta, uma compreensão mais profunda e dinâmica dos conceitos geométricos.

Por fim, a resolução dessas contradições tornou-se evidente quando os estudantes, ao interagirem com o professor e entre si, utilizaram a tecnologia para aprofundar sua compreensão dos conceitos. Esse processo se insere dentro do modelo híbrido (Horn; Staker, 2015), mediado pelas ferramentas do GeoGebra, que desempenhou um papel central no ensino. A combinação da tecnologia com a mediação do professor não apenas facilitou a aprendizagem, mas também criou um espaço coletivo e dinâmico, permitindo que os estudantes conectassem a teoria à sua aplicação prática de maneira mais compreensível.

Esse movimento heteroformativo, no qual o aprendizado foi mediado por interações entre a turma e o professor, resultou na construção coletiva do conhecimento. Os estudantes, ao utilizarem o GeoGebra, puderam explorar conceitos abstratos de forma virtual e interativa. O professor, atuando como mediador, orientou as trocas de saberes entre os estudantes, promovendo um ambiente em que cada um pôde internalizar o conhecimento em seu próprio ritmo, ao mesmo tempo, em que contribuía para a compreensão coletiva. Essa troca constante de ideias e o uso de ferramentas digitais possibilitaram uma aprendizagem mais ativa e reflexiva.

4.15.2 Análise das contradições autoformativas no sistema de atividades XV

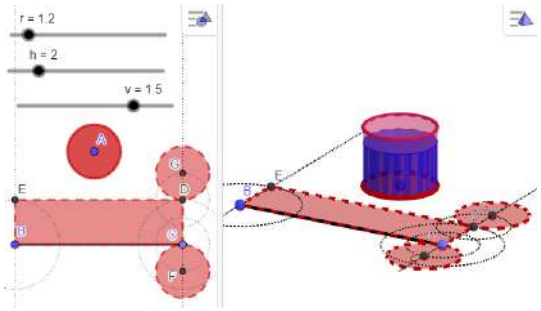
Com a base estabelecida no subtópico anterior, que tratou das dinâmicas heteroformativas e suas tensões, resultando na construção coletiva do conhecimento, a análise agora se volta para os aspectos autoformativas no Sistema de Atividades XV, fundamentando-

se nesse processo tecformativo digital e evidenciando como os estudantes adotaram uma postura mais autônoma e proativa no processo de aprendizagem dos ‘Corpos Redondos’. Assim, nesta parte, discute-se a maneira como os níveis de aprendizagem (Van Hiele, 1986) se manifestaram nas tarefas dos quatro participantes que mais se destacaram durante as interações da décima quinta semana de aula. Após essa análise, é apresentada a interação geral entre os sistemas envolvidos à luz da contradição quaternária (Engeström, 2016).

A primeira tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 80**. A participante Mary é destacada nessa análise, com base nas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 80 – Tarefa 15.1 (Planificação do Cilindro)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
1.1. Na Janela de Visualização 3D, desabilite o eixo e a malha na barra de estilo, e selecione o plano de visualização branca. *1.2. Utilize a ferramenta “Controle Deslizante” para criar três deslizantes: “r” e “h” variando de 0,1 a 10; um “v” variando de 0 a h.* *1.3. Use a ferramenta “Círculo: Centro & Raio”, clique na Janela de Visualização e, na Caixa de Comando, digite r para o raio.* *1.4. No Campo de Entrada, digite: Cilindro(c, h) e pressione Enter. Ajuste a cor para uma tonalidade clara que não seja azul.* *1.5. No Campo de Entrada, digite: Cilindro(c, v) e pressione Enter. Ajuste a cor para azul.* ***a) Mova os controles deslizantes e observe as alterações no modelo.*** ***b) Justifique por que o cilindro é considerado um sólido de revolução.*** *1.6. Utilize a ferramenta “Segmento de Comprimento Fixo” e clique na Janela de Visualização, a uma certa distância da região circular criada, digitando 2 * π * r para o comprimento.* *1.7. Com a ferramenta “Reta Perpendicular”, trace retas perpendiculares ao segmento BC nos pontos B e C.* *1.8. Use a ferramenta “Círculo: Centro & Raio”, clique no ponto B e, na Caixa de Comando, digite “h” para o raio. Em seguida, clique no ponto C e digite h novamente. Ajuste os objetos dos passos 1.6 a 1.8 para estilo pontuado e espessura 2.* *1.9. Selecione a ferramenta “Interseção” e identifique as interseções entre as circunferências criadas e as retas perpendiculares.* *1.10. Utilize a ferramenta “Polígono” para desenhar o retângulo BCDE.* *1.11. Com a ferramenta “Compasso”, meça a distância do raio da circunferência produzida, clique no ponto A, depois centralize ela no ponto D, usando novamente a ferramenta compasso clique no ponto A, depois centralize ela no ponto D. Ajuste esses objetos para estilo pontuado e espessura.* *1.12. Novamente Selecione a ferramenta “Interseção em Dois Objetos” e identifique as interseções entre essas novas circunferências criadas e a reta CD, pontos F e G.* *1.13. Use a ferramenta “Círculo: Centro e Um dos seus Pontos”, clique no ponto F e depois em C. Em seguida, clique em G e depois em D. Ajuste o retângulo BCDE e essas duas circunferências para a mesma cor da primeira circunferência, com estilo tracejado.* ***c) Um cilindro com raio de 1,2 u.c. e altura de 2u.c. tem um volume de: (use π=3,14).*** ***d) A área lateral do cilindro é dada por:***	***Transcrição das respostas de Mary:*** *a) Noto que o raio e a altura do cilindro mudam, alterando a aparência e o volume do sólido.* *b) O cilindro é considerado um sólido de revolução porque é gerado pela rotação de uma reta (o raio) em torno de um eixo, criando uma forma tridimensional uniforme em torno desse eixo.* *c) Para um cilindro com raio de 1,2 u.c. e altura de 2 u.c., o volume é calculado como:* $V = \pi * r^2 * h = 3,14 * (1,2)^2 * 2 = 3,14 * 1,44 * 2 = 9,0492$ u.c.³ *d) A área lateral é dada por:* $A_L = 2 * \pi * r * h = 2 * 3,14 * 1,2 * 2 = 15,088$ u.c.² *e) A área da base é:* $A_B = \pi * r^2 = 3,14 * (1,2)^2 = 3,14 * 1,44 = 4,5296$ u.c.² *f) Se 3/4 do cilindro está ocupado, a quantidade de volume não ocupado é:* $V' = V - (3/4) * V = (1/4) * V = (1/4) * 9,0492 = 2,2623$ u.c.³

e) A área da base do cilindro é: ***f) Se 3/4 do cilindro está ocupado, o volume não ocupado é:***	
Pensamento Geométrico – Construtivo	
	

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

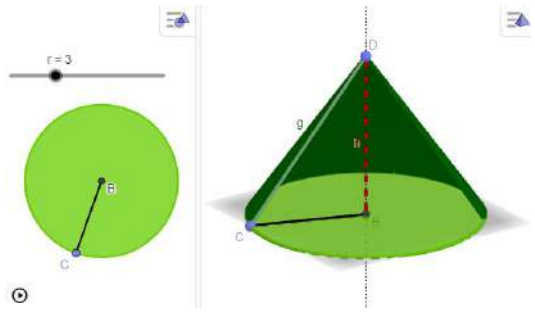
Na Tarefa 15.1, observa-se que a estudante Mary inicia no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), pois demonstra uma compreensão básica ao reconhecer o formato global do cilindro e notar visualmente como suas características se alteram. A estudante avança para o Nível 1 ao justificar que o cilindro é um sólido de revolução, identificando que ele é gerado pela rotação de uma reta em torno de um eixo. Ao calcular o volume, a área lateral e a área da base do cilindro, Mary atinge o Nível 2.

O uso dos recursos do ggb-CB facilitou a transição para o Nível 2 (Dedução Informal) ao permitir que a estudante manipulasse interativamente os parâmetros do cilindro, como raio e altura, e visualizasse as mudanças em seu volume e área lateral. Nesta análise, é possível observar que a visualização dinâmica e a possibilidade de experimentação direta com as variáveis possibilitaram a participante estabelecer relações entre as propriedades do cilindro de forma mais intuitiva, sem a necessidade de uma formalização rigorosa. Esse ambiente favoreceu a construção de definições e a compreensão das inter-relações entre as propriedades do sólido.

A segunda tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 81**. O participante Théo é destacado nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 81 – Tarefa 15.2 (Cone)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
1.1. Na Janela de Visualização 3D, desabilite o eixo e a malha na barra de estilo, e selecione o plano de visualização cinza. *1.2. Utilize a ferramenta "Controle Deslizante" para criar um deslizante "r" variando de 0,1 a 10.* *1.3. Use a ferramenta "Ponto" e clique na Janela de Visualização 3D. Em seguida, clique nesse ponto e direcione-o verticalmente para cima, até sair do plano XY (plano cinza).*	***Transcrição das respostas de Théo:*** *a) O segmento r representa o raio da base do cone, enquanto h é a altura e g é a geratriz. Em um cone equilátero, a relação entre eles é dada pelo teorema de Pitágoras: $g^2 = r^2 + h^2$.*

1.4. Use a ferramenta "Reta Paralela", clique no plano cinza e depois no ponto A. Ajuste ela para pontuado, espessura 2. *1.5. Selecione a ferramenta "Interseção em Dois Objetos", clique no plano XY e depois na reta perpendicular.* *1.6. Na Janela de Visualização, use a ferramenta "Segmento de Comprimento Fixo", clique no ponto B e digite, na Caixa de Comando, r para o comprimento.* *1.7. Use a ferramenta "Círculo: Centro e Um dos seus Pontos", clique no ponto B e depois em C.* *1.8. Usando a ferramenta "Ponto em Objeto", insira um ponto na reta AB, chamado de ponto D.* *1.9. Selecione a ferramenta "Segmento" e faça a ligação dos segmentos CD e BD, nomeando esses segmentos, respectivamente, de g e h.* ***a) Qual a relação existente entre os segmentos r, h e g?*** ***b) Qual deve ser o valor do h para que o cone seja equilátero?*** *1.10. Clique sobre o segmento g e ative o rasto. Em seguida, clique no ponto C e ative a "Animação".* ***c) Descreva o que está acontecendo?*** ***d) Sabendo que esse cone é equilátero e o r = 3 u.c., qual é o valor da área total dele aproximadamente?*** ***e) Qual o volume desse cone aproximadamente?*** ***f) Qual a diferença entre capacidade e volume?***	*b) Para um cone equilátero, temos que g=2r, assim:* *$(2r)^2=r^2+h^2$, implica que $h=r\sqrt{3}$* *c) A área total do cone é dada por $AT = \pi r(r + g)$. Substituindo g por 2r, temos $AT = \pi r(3r)$, que resulta em $AT = 3\pi r^2$. Para r = 3, a área total é aproximadamente 84,78 u.c.².* *e) O volume do cone é dado por $V = (1/3)\pi r^2 h = (1/3)\pi r^2(r\sqrt{3})$. Para r = 3, o volume é aproximadamente 51,84 u.c.³.* *f) Capacidade refere-se à quantidade máxima de líquido que um recipiente pode conter, enquanto volume é o espaço tridimensional que um objeto ocupa. A capacidade é frequentemente medida em unidades de litros ou mililitros, enquanto o volume é medido em unidades cúbicas.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	
	

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Na Tarefa 15.2, observa-se que Théo inicia sua jornada no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), ao perceber as transformações nas figuras geométricas enquanto manipula os controles deslizantes, reconhecendo a forma do prisma e suas propriedades visuais básicas. À medida que avança para o Nível 1, o estudante estabelece relações entre os segmentos, como o raio da base, a altura e a geratriz. Ele atinge o Nível 2 ao utilizar as propriedades geométricas para calcular a área total e o volume do cone equilátero. Assim, começa a formular definições abstratas e a estabelecer inter-relações mais profundas entre as propriedades das figuras, especialmente ao aplicar o Teorema de Pitágoras para determinar o valor de *h*, além de perceber que o cone é equilátero ao satisfazer essa relação entre os segmentos.

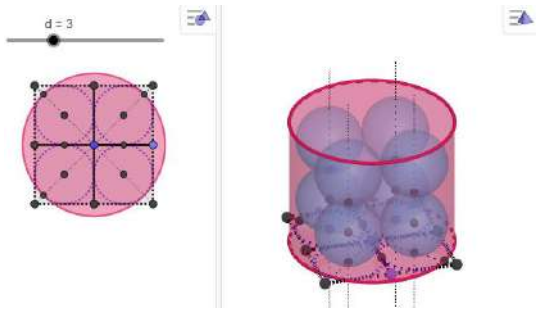
O uso do ggb-CB facilitou a transição para o Nível 2 (Dedução Informal) ao permitir que o estudante manipulasse os elementos do cone em 3D, como o raio e a altura, e observasse suas variações em tempo real. Nesta análise, é possível notar que as ferramentas de "Controle Deslizante" e animação possibilitaram que ele visualizasse a relação entre os segmentos "*r*",

"*h*" e "*g*", levando-a a formular relações mais abstratas, como "$g = 2r$" e "$h = r\sqrt{3}$", sem recorrer a uma demonstração formal. Esse ambiente interativo facilitou a construção de definições e inter-relações de forma mais intuitiva e virtual.

A terceira tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 82**. A participante Elen é destacada nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 82 – Tarefa 15.3 (As Oito Esferas no Cilindro)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
Oito bolas (esferas) de raio r são colocadas em um cilindro circular reto em duas camadas com quatro bolas em cada camada. Cada bola deve estar em contato com, 2 outras bolas na mesma camada, 2 bolas de outra camada, 1 ponto na lateral do cilindro e 1 ponto na base ou na "tampa" do cilindro. *1.1. Use a ferramenta "Controle Deslizante" e crie um controle "d" variando de 0,1 a 10.* *1.2. Use a ferramenta "Segmento Comprimento Fixo" e clique na Janela de Visualização e, na Caixa de Comando, digite d para comprimento.* *1.3. Use a ferramenta "Polígono Regular", na Caixa de Comando, digitando sempre 4 para os vértices, desenho os quadrados ABCD, DAEF, AFGH e BAHJ.* *4. Selecione a ferramenta "Ponto Médio ou Centro" e encontre o centro de cada quadrado criado como também o ponto médio do segmento AB e FA.* *1.5. Use a ferramenta "Círculo dados Centro em Um dos seus Pontos" e trace as circunferências inscritas em cada quadrado.* *1.6. Usando as ferramentas "Segmento" e "Interseção em Dois Objetos" trace as diagonais do quadrado CEGJ e encontre pelo menos três interseções dessas diagonais com as circunferências. Encontre as que estão próximas aos vértices.* *1.7. Use a ferramenta "Círculo definido por Três Pontos" e produza a circunferência que passe por esses pontos de interseção, nomeia essa circunferência para "c".* *1.8. Na Janela de Visualização 3D, use a ferramenta "Reta Perpendicular" e trace as retas perpendiculares ao plano XY que passa pelo centro de cada quadrado de medida r.* *1.9. Use a ferramenta "Esfera: centro e ponto" e desenhe 4 esferas cada uma com centros em circunferência e ponto relacionado aos pontos médios de AB ou FA.* *1.10. Selecione a ferramenta "Interseção em Dois Objetos" e encontre o ponto de interseção entre cada esfera e as retas perpendiculares, na parte superior do plano XY. Depois disso, oculte as esferas criadas.* *1.11. Novamente usando a ferramenta "Esfera: centro e ponto" e desenhe as esferas com centros nessas novos pontos e ponto no centro dos respectivos quadrados.* *1.10. Novamente selecione a ferramenta "Interseção em Dois Objetos" e encontre o ponto de interseção entre cada esfera e as retas perpendiculares.* *1.11. Use a ferramenta "Reflexão em Relação a um Ponto" clique em cada esfera e depois no seu respectivo ponto de interseção.* *1.12. Digite Cilindro(c, 2d) no Campo de Entrada e tecle enter. Ajuste todos elementos que não fazem parte da esfera do cilindro para estilo pontuado, espessura 1. E na Janela de Álgebra desative todos os rótulos, exceto o diâmetro para melhorar a visualização.*	***Transcrição das respostas de Elen:*** *a) Observo que as esferas estão dispostas de maneira a ocupar duas camadas no cilindro, com contato entre elas e a lateral do cilindro. A configuração permite que as esferas se toquem, mantendo a simetria e o alinhamento correto em relação ao cilindro.* *b) A altura do cilindro é igual à altura total das duas camadas de esferas. Como cada esfera tem altura de 2r, temos duas camadas: Altura = 2(2r) = 4r. Com r = 3/2: Altura = 4(3/2) = 6 u.c.* *c) Como a diagonal de cada quadrado, pode ser encontrada aplicando o teorema de Pitágoras e o quadrado tem comprimento 2r, então a diagonal (d) é dada por: $d = \sqrt{((2r)^2 + (2r)^2)}$.* *Isso resulta em $d = 2r\sqrt{2}$.* *O raio do círculo maior (R) é a distância do centro dela até o centro de um dos círculos menores, mais o raio do círculo menor (r). Essa distância é metade da diagonal do quadrado: $R=(d/2)+ r$.* *Portanto, $R=(2r\sqrt{2}/2) + r = r\sqrt{2}+r$.* *Como r=3/2, então: $R = 3/2(\sqrt{2} + 1) \approx 3,62$ u.c.* *Assim, o raio do cilindro é aproximadamente 3,62 u.c.* *d) $V = (4/3)\ \pi\ r^3 = (4/3)\ \pi\ (3/2)^3 = (9/2)\ \pi \approx 14,14$ u.v.* *e) $V_c = \pi \times (3,62)^2 \times 6 . \approx 246,05$ u.v.*

a) O que você consegue observar? ***Sabendo que o raio de cada esfera é 3/2 u.c., responda:*** ***b) Qual é a altura do cilindro?*** ***c) Qual é o raio da base do cilindro?*** ***d) Qual é o volume aproximado de cada esfera?*** ***e) Qual é o volume do cilindro?*** ***f) Qual é o volume aproximado que sobra no cilindro com as 8 esferas?***	*f)* $V_{T8} = 8V \approx 8 \times 14{,}14 \approx 113{,}12$ *u.v.* $V_s = V_c - V_{T8} \approx 246{,}05 - 113{,}12 = 132{,}93$ *u.v..*
Pensamento Geométrico – Construtivo	
	

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

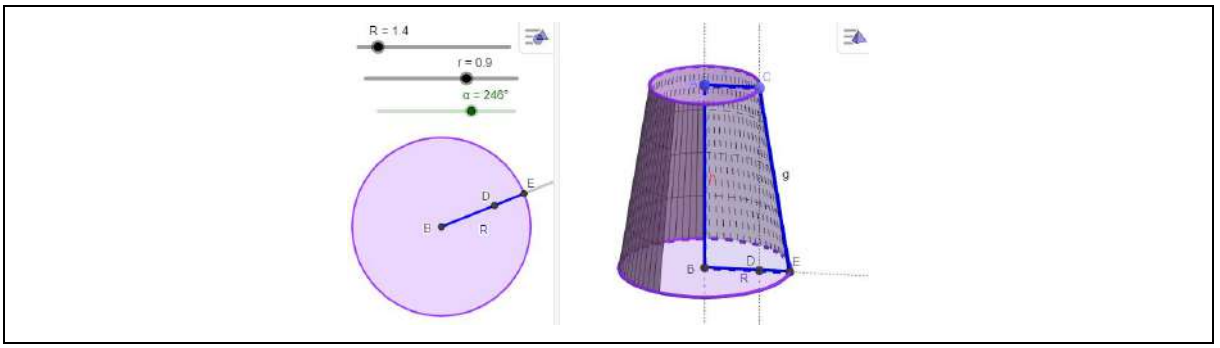
Na Tarefa 15.3, observa-se que Elen parte do Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986) ao reconhecer a disposição das esferas em duas camadas e como elas se tocam entre si e com a lateral do cilindro. Ao calcular a altura do cilindro com base na disposição das esferas e aplicar o Teorema de Pitágoras para encontrar o raio da base do cilindro, a estudante atinge o Nível 1. Ela avança para o Nível 2 ao calcular o volume das esferas e do cilindro, articulando uma sequência lógica de deduções para determinar o volume restante no cilindro. Elen atinge o Nível 3, pois a formulação das expressões para o volume da esfera e do cilindro, além da resolução dos cálculos envolvidos, indicam que a estudante já compreende a estrutura das fórmulas e consegue utilizá-las para aplicar raciocínios dedutivos com certo rigor. A resposta que envolve o cálculo do volume do cilindro e das esferas, bem como a diferenciação entre o volume total e o volume disponível, demonstra uma aplicação sistemática e lógica de conhecimentos geométricos.

O uso dos recursos do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 3 (Dedução Formal) ao permitir que a estudante visualizasse e manipulasse as relações entre as esferas e o cilindro de maneira interativa e precisa. Nesta análise, é possível observar que as ferramentas “Segmento”, “Interseção em Dois Objetos” e “Círculo definido por Três Pontos” possibilitaram a identificação e formalização das relações geométricas entre as esferas e o cilindro. Além disso, nota-se que a inserção de equações para o cálculo de volumes e a utilização de comandos para ajustar e testar hipóteses fortaleceram a compreensão do raciocínio dedutivo. Assim, a possibilidade de manipular objetos e visualizar diretamente os resultados reforçou a compreensão das deduções matemáticas necessárias para resolver os problemas propostos.

A terceira tarefa analisada neste sistema de atividades está apresentada no **Quadro 83**. O participante Seth é destacado nessa análise, com base em suas respostas transcritas do ggb-CB da turma.

Quadro 83 – Tarefa 15.4 (Tronco de Cone)

Orientação de Ensino e Aberta – Digitalidade	**Pensamento Geométrico – Maturação**
Construa um roteiro que explore todos os elementos do tronco de cone. *1.1. Escolha uma base circular.* *1.2. Defina a altura (h) como a distância perpendicular entre as duas bases.* *1.3. Defina o raio da base maior (R) como a distância do centro da base maior até a borda.* *1.4. Defina o raio da base menor (r) e a distância do centro da base menor até a borda.* *Defina a geratriz (g) como a medida do segmento que conecta os pontos correspondentes nas bordas das bases, formando uma inclinação entre as duas bases.* ***a) Qual a inter-relação da Geometria Plana com a Geometria Espacial explorada nessa sua seu roteiro de construção?***	***Transcrição das respostas de Seth:*** *1. Crie três comandos deslizantes: R (raio da base maior), r (raio da base menor) e α (ângulo), sendo o máximo de r, R-0,1.* *2. Crie um ponto na janela de visualização 3D, leve ele para cima.* *3. Trace a perpendicular desse ponto ao plano XY e encontre o ponto de interseção entre ambos.* *4. Na janela de visualização, crie uma circunferência com raio R, selecionando o ponto B como centro.* *5. No Campo de Entrada, digite Círculo(A, r).* *6. Insira um ponto na circunferência de centro em A e trace uma perpendicular ao plano que passe por ela.* *7. Encontre o ponto de interseção dessa reta com o plano XY, ponto D..* *8. Trace a semirreta BC e encontre o ponto de interseção dela com a circunferência com centro em B, ponto E.* *9. Trace o segmento EC, nomeando de g.* *10. Coloque todas as retas para estilo pontuado espessura 1.* *11. No campo de entrada, digite Superfície(g, α, AB)* *12. Ao aumentar o comando deslizante α, o tronco será preenchido.* *13. Crie um segmento ligando os dois centros das circunferências (Pontos A e B) para definir a altura do tronco, denominá-lo de h* *14. Ligue os segmentos BE denominando ele de R e o AC denominando ele de r.* *15. Forme o quadrilátero BECA.* *16. Edite a cor e o preenchimento das duas circunferências para finalizar a visualização do tronco de cone.* *a) Noto que a base circular do tronco de cone é um elemento da geometria plana, e seus conceitos são essenciais para definir o objeto espacial. Ao definir o raio da base maior e o raio da base menor, utilizamos a geometria plana para compreender as medidas e os relacionamentos entre as duas bases circulares, que são fundamentais para a construção do tronco de cone. Esses círculos são figuras planas que estabelecem a base da estrutura espacial. A transição da geometria plana para a geometria espacial acontece através da adição de elementos como a altura, que conecta as duas bases, e a geratriz, que é o segmento inclinado que une os pontos correspondentes nas bordas das bases. A geratriz estabelece a inclinação do tronco de cone, um aspecto crucial da geometria espacial, e a altura define a distância entre as bases, possibilitando a análise tridimensional da figura. Assim, a construção do tronco de cone evidencia a interdependência entre a geometria plana e a espacial: os conceitos de círculos e seus raios na geometria plana são utilizados para gerar uma figura tridimensional, e a manipulação de elementos espaciais, como a altura e a geratriz, nos permite calcular e visualizar o volume e a forma do tronco. Dessa maneira, a geometria plana serve como base para a construção da figura que vai formar o sólido geométrico, enquanto a geometria espacial nos permite aprofundar a análise da estrutura completa.*
Pensamento Geométrico – Construtivo	



Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Na Tarefa 15.4, infere-se que Seth inicia sua trajetória no Nível 0 do modelo de Van Hiele (1986), ao reconhecer a estrutura geral do tronco de cone e seus elementos, como as bases circulares, a altura e a geratriz. Ele avança para o Nível 1 ao começar a discernir as características do tronco de cone e estabelecer relações entre a Geometria Plana (base circular) e a Geometria Espacial (altura e geratriz), demonstrando uma análise mais elaborada das figuras. Seth alcança o Nível 2 ao descrever como os raios e a altura se interconectam na construção do tronco de cone. Sua compreensão das inter-relações entre os conhecimentos bidimensionais e tridimensionais reflete uma habilidade de abstrair propriedades geométricas e aplicá-las na construção de 'Sólidos Geométricos'. À medida que Seth avança em sua explicação, utilizando a geratriz para conectar os pontos correspondentes nas bordas das bases e relacionando isso ao cálculo do volume do tronco de cone, ela demonstra uma capacidade de deduzir formalmente as relações matemáticas subjacentes às figuras geométricas, alcançando o Nível 3.

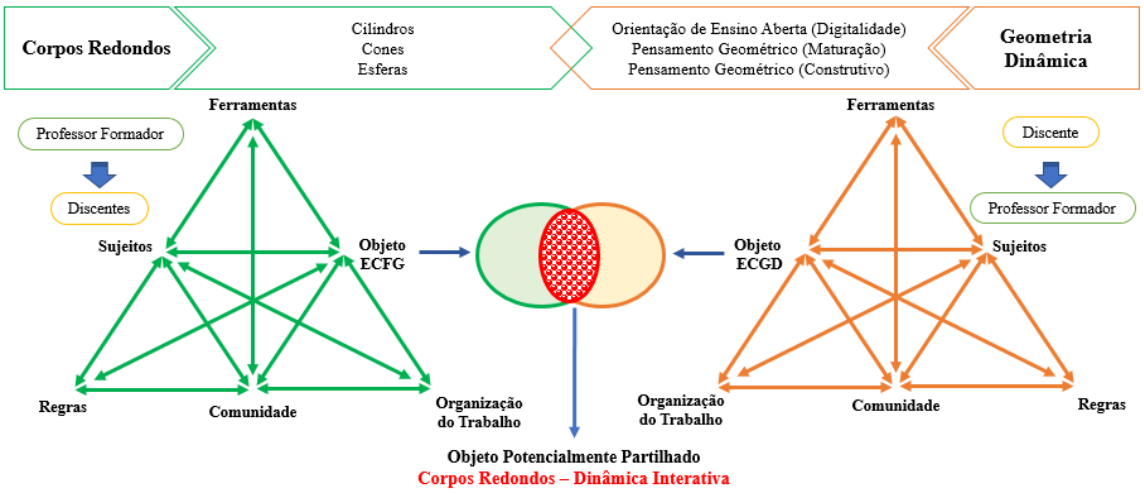
Seth alcança o Nível 4 ao afirmar que: "*A transição da geometria plana para a geometria espacial acontece através da adição de elementos como a altura, que conecta as duas bases, e a geratriz, que é o segmento inclinado que une os pontos correspondentes nas bordas das bases*". Isso se deve ao fato de que, ao compreender a relação entre a Geometria Plana (os círculos e seus raios) e a Geometria Espacial (a altura e a geratriz), o estudante demonstra uma análise rigorosa e detalhada das interações entre os elementos, incluindo a capacidade de comparar e entender a estrutura tridimensional do tronco de cone. Esse raciocínio evidencia um entendimento profundo das interdependências entre diferentes conceitos e sistemas geométricos.

O uso dos recursos do ggb-CB potencializou a transição para o Nível 4 (Rigor), permitindo que o estudante manipule de maneira precisa os elementos do tronco de cone, como os raios das bases e a geratriz, além de aplicar comandos matemáticos rigorosos para a

construção da figura. Nesta análise, é possível observar que a visualização tridimensional e os recursos disponíveis possibilitaram a exploração das inter-relações entre a Geometria Plana e a Geometria Espacial, como a altura e a geratriz. Desse modo, ao manipular esses parâmetros, o participante evidenciou a compreensão dos conceitos e suas interdependências, refletindo sobre o rigor dos elementos envolvidos e suas definições. Esse uso aprofundado das ferramentas permitiu uma análise detalhada e sistemática da estrutura geométrica, demonstrando a capacidade de trabalhar com rigor em diferentes sistemas dedutivos.

As quatro tarefas analisadas evidenciam, por meio da interação entre o ECFG e a ECGD, a criação de um objeto potencialmente partilhado, conforme descrito na quarta contradição de Engeström (2016). Nesse contexto, o objeto partilhado foi a compreensão dinâmica interativa dos ‘Corpos Redondos’, com foco na maturação do pensamento geométrico dos estudantes (**Esquema 39**).

Esquema 39 – Corpos Redondos – Dinâmica Interativa



Fonte: Pesquisador (2024).

No sistema ECFG, o professor formador teve uma atuação mais intensa, apresentando de maneira estruturada os conceitos relacionados à cilindros, cones e esferas. O objetivo desse sistema era ensinar sobre os ‘Corpos Redondos’ e estimular a investigação de suas aplicações por meio de atividades práticas, como a construção de pontos, círculos, esferas e outros objetos geométricos. Para isso, o professor realizava revisões teóricas dos capítulos X ao XVI do volume 10, proporcionando aos estudantes uma compreensão formal dos conhecimentos curriculares abordados.

Simultaneamente, no sistema ECDG, os estudantes adotaram uma postura mais proativa. Nesse ambiente, tiveram a oportunidade de explorar os conceitos de maneira prática e interativa,

manipulando objetos geométricos em um ambiente digital dinâmico, o que resultou em um desempenho positivo nas AOEA. Isso possibilitou o desenvolvimento de habilidades digitais, destacando-se, nesse cenário, a prática de mensuração multidimensional e interativa dos elementos geométricos por meio da ferramenta “Esfera: Centro & Raio”. Por outro lado, o professor formador, nesse sistema, atuou como mediador, oferecendo suporte, *feedback online* e auxiliando os estudantes a consolidar o aprendizado de forma prática.

Nesse sistema, o uso dos recursos do ggb-CB permitiu que os estudantes explorassem conceitos de ‘Corpos Redondos’ de forma prática e interativa, ajustando parâmetros e observando as mudanças nos objetos geométricos. Esse tipo de ferramenta digital está alinhado à visão de Lévy (2017), que defende que o melhor uso das TD é aquele que contribui para o desenvolvimento e a emancipação dos indivíduos, promovendo a maturação do pensamento geométrico. Ao proporcionar uma experiência de aprendizagem virtual e dinâmica, o GeoGebra não apenas facilitou a compreensão dos conceitos geométricos, mas também ampliou as capacidades cognitivas dos participantes, permitindo-lhes realizar experimentações e testar hipóteses de maneira autônoma. Assim, os recursos digitais, ao promoverem essa forma mais ativa de aprender, apoiam o processo de aquisição de conhecimentos e fomentam a autonomia dos estudantes.

As operações realizadas nesse sistema envolvem simulações, percepções e personalizações na visualização; calibrações e apurações da área das figuras e do volume dos sólidos; medições, transformações e variações dos objetos; identificações, implantações, comparações, sincronizações e conexões de elementos; parametrizações; conformidações; programações, elevações, planificações e moldações da estrutura; além de construções geométricas com diversas possibilidades de manipulação. Essas ações estão alinhadas com a visão da TA de Leontiev (2018), que afirma que a ação é determinada pela tarefa; ou seja, o objetivo final orienta as operações executadas. Nesse contexto, o foco foi modelar os sólidos geométricos. Ao utilizar ferramentas digitais para interagir com os corpos redondos, os estudantes absorveram o conteúdo curricular e construíram ativamente seus saberes-geométricos, consolidando o aprendizado por meio da prática dinâmica e interativa da experiência híbrida.

A AOEA desta semana destacou a proatividade dos estudantes, refletindo a noção de autoformação como um componente essencial da formação humana. Ao explorar de forma interativa e independente os conceitos relacionados aos ‘Corpos Redondos’, os estudantes não apenas aprofundaram sua compreensão teórica, mas também fortaleceram sua capacidade

crítica e reflexiva. Como afirma Galvani (2002, p. 107): “Todas essas abordagens de exploração intersubjetiva da autoformação se caracterizam por um retorno reflexivo sobre a experiência, por uma exploração coletiva e pelo cruzamento interpessoal e intercultural das produções de saber”. Esse processo levou os estudantes a estabelecer conexões abstratas e a aplicar o conhecimento de maneira prática, promovendo uma aprendizagem mais centrada neles. Assim, assumiram um papel ativo e responsável na construção de seu próprio saber, contribuindo para o desenvolvimento de indivíduos autônomos e com pensamento crítico, dentro de um processo tripolar que envolve a relação consigo mesmos, com os outros e com o ambiente digital.

Nessa circunstância, o progresso dos estudantes nos diferentes níveis de pensamento geométrico, conforme o modelo de Van Hiele (1986), foi claramente facilitado e potencializado pelo uso dos recursos do ggb-CB dentro dessa proposta híbrida de ensino. O processo formativo possibilitou a construção dinâmica e interativa de objetos geométricos, promovendo um aprendizado que se revelou não apenas mais intuitivo e virtual, mas também engajou os estudantes em uma exploração ativa dos conceitos.

A evolução dos estudantes ao longo das tarefas revela um processo de aprendizado que vai além da simples assimilação de conceitos geométricos. Nas tarefas 15.1 (Planificação do Cilindro) e 15.2 (Cone), os estudantes Mary e Théo demonstraram um avanço para o Nível 2, ao conseguirem formular definições mais abstratas e estabelecer inter-relações entre as propriedades das figuras. Esse progresso reflete um entendimento mais profundo, no qual os estudantes começam a perceber as formas geométricas não apenas como entidades isoladas, mas como partes de um sistema interconectado. Na tarefa 15.3 (As Oito Esferas no Cilindro), a estudante Elen progrediu para o Nível 3, desenvolvendo sequências de afirmações dedutivas. Isso demonstra uma habilidade crescente para organizar um raciocínio lógico-geométrico, compreendendo a relevância das deduções e aplicando-as de maneira estruturada e consciente.

Por fim, na tarefa 15.4 (Tronco de Cone), o estudante Seth avançou significativamente para o Nível 4, demonstrando uma compreensão aprofundada dos sistemas dedutivos. Ele é capaz de comparar e analisar sua consistência, completude e independência com rigor crítico. Esse progresso não reflete apenas uma melhoria técnica, mas uma verdadeira internalização das estruturas lógicas da Geometria, o que o capacita a refletir criticamente sobre diferentes formas de organização do conhecimento.

Diante dos fatos apresentados, a integração desses dois sistemas (ECFG e ECGD) resultou na criação do objeto partilhado mencionado anteriormente. Esse processo de ensino, realizado nesta proposta híbrida e fundamentado na autoformação, nas TDI e na TA, teve um

impacto significativo no avanço da compreensão dos estudantes sobre os ‘Corpos Redondos’. Ao promover uma aprendizagem ativa e reflexiva, possibilitou-se que os estudantes não apenas compreendessem os conceitos geométricos de forma abstrata, mas também os aplicassem em contextos práticos. Como consequência, reforçou-se a conexão entre teoria e prática, contribuindo para o desenvolvimento de uma base sólida de raciocínio geométrico.

4.16 Discussões Temáticas

A Análise Temática aplicada convergiu para seis temas relevantes: a) Adaptação tecnológica; b) Visibilidade geométrica; c) Dinamização das aulas; d) Expansão das práticas tecnológicas; e) Domínio digital; f) Desafios motivadores. Esses temas foram discutidos à luz da TAE de Engeström e Sannino (2016), que propõe que o processo de aprendizagem ocorre por meio de contradições e expansões. Nesse contexto, os três primeiros temas destacam a sexta etapa do modelo expansivo mencionado, que é a reflexão, enquanto os demais temas abordam a consolidação, a sétima etapa do ciclo de aprendizagem.

4.16.1 Reflexão

A reflexão sobre a implementação da proposta formativa híbrida nas aulas de FME III surgiu de maneira natural, quando os sete participantes analisaram retrospectivamente suas trajetórias de aprendizado e como essa ferramenta tecnológica influenciou sua adaptação e compreensão dos conteúdos geométricos. De acordo com Engeström e Sannino (2016), a interação com novas ferramentas e métodos pedagógicos provoca uma série de reflexões críticas sobre a eficácia e os desafios da prática educacional.

a) Adaptação tecnológica: Um dos temas centrais desta reflexão é a adaptação ao uso de TDI. Vários participantes relataram a dificuldade inicial com o GeoGebra, evidenciando o choque entre a metodologia tradicional de ensino, fortemente baseada em lápis, papel e instrução expositiva, e a introdução de uma ferramenta digital interativa. A declaração de Mary é emblemática nesse aspecto: “*Isso foi o que mais me dificultou no curso, pois eu não sabia nada, absolutamente nada sobre o GeoGebra, que conheci durante as aulas*” (Mary). Essa dificuldade inicial não é incomum em processos de aprendizagem expansiva. Segundo Engeström (2016), o surgimento de contradições — nesse caso, a tensão entre a familiaridade

com métodos tradicionais e a novidade do uso de tecnologias — é o ponto de partida para o desenvolvimento e a expansão do conhecimento.

No caso de Hend, essa adaptação ocorreu de forma progressiva: "*De início, tive um pouco de dificuldade, porque era algo totalmente diferente do que já havíamos trabalhado*" (Hend). Aqui, observamos que a estudante reconhece o caráter disruptivo da introdução do GeoGebra, especialmente quando comparado ao ensino anterior, no qual laboratórios de Matemática não faziam parte da experiência educacional. Já para Elen, o choque tecnológico foi ainda mais pronunciado: "*Foi totalmente novo, porque eu nunca tinha conhecido a ferramenta. Foi o meu primeiro contato*" (Elen). A incerteza inicial e a necessidade de desenvolver novas habilidades são características da fase de contradição e ajustamento que, de acordo com Engeström, são cruciais para o aprendizado expansivo.

No entanto, essa fase de adaptação culmina na superação das dificuldades, como reflete Seth: "*Tive algumas dificuldades, principalmente porque antes eu nunca tinha visto o GeoGebra, mas depois consegui aprender com muita facilidade; foi tranquilo*" (Seth). Essa declaração demonstra que, por meio da persistência e do suporte pedagógico, a ferramenta se torna uma aliada no processo de aprendizado. Aqui, pode-se observar o que Engeström (2016) denomina de "expansão do objeto", onde o estudante não apenas resolve a contradição, mas também internaliza e amplia o uso da tecnologia, utilizando-a de forma produtiva e criativa.

b) Visibilidade geométrica: Outro ponto de reflexão que permeia as falas dos participantes é a importância da visualização para o aprendizado geométrico. A ferramenta GeoGebra permitiu que os estudantes transcendessem as limitações do aprendizado abstrato, oferecendo uma interface visual e interativa para a compreensão dos conceitos matemáticos. Mary menciona a transformação que o GeoGebra proporcionou: "*Porque eu não tinha essa visão com a Geometria e a tecnologia, mas, depois da segurança e tal, as coisas foram ficando mais fáceis*" (Mary). Isso revela que o uso de ferramentas digitais, como o GeoGebra, é fundamental na construção de uma compreensão mais profunda e visual dos conceitos, algo que é destacado por Engeström (2016) como uma expansão dos meios de mediação.

Aden, ao refletir sobre sua experiência com a ferramenta, destaca também essa capacidade de visualização tridimensional: "*Aquela visão geométrica, principalmente quando trabalhamos com poliedros, oferece uma ideia tridimensional de como funciona*" (Aden). A transição da bidimensionalidade para a tridimensionalidade proporcionada pelo GeoGebra não é apenas uma mudança de perspectiva, mas sim uma expansão cognitiva, na qual os estudantes começam a compreender as inter-relações espaciais de maneira mais compreensível.

Ulan também reflete sobre o impacto positivo da ferramenta no aprendizado: "*A aplicação do GeoGebra teve um grande diferencial na matéria, pois, com o uso do GeoGebra, consegui visualizar melhor as questões*" (Ulan). Para Engeström, o uso de ferramentas que ampliam a visão e a capacidade de interação com os objetos de aprendizagem é essencial para o desenvolvimento de atividades expansivas. Ao utilizar o GeoGebra, os estudantes passam a perceber os conceitos geométricos não apenas como abstrações matemáticas, mas como entidades manipuláveis e exploráveis, o que promove uma internalização mais efetiva e um engajamento mais profundo.

Seth complementa essa reflexão com sua afirmação: "*O GeoGebra ampliou bastante a minha visão de geometria. [...] Pude ver como as coisas aconteciam, por que elas aconteciam*" A partir dessa declaração, podemos identificar o processo de expansão do aprendizado, no qual a ferramenta tecnológica rompe com as limitações anteriores, permitindo que os estudantes compreendam não apenas o "o quê" dos conceitos, mas também o "porquê" de suas interações e propriedades.

c) Dinamização das aulas: A última grande reflexão dos participantes está centrada no impacto do uso do GeoGebra para tornar as aulas mais dinâmicas. Vários estudantes destacaram como a introdução dessa ferramenta transformou a estrutura das aulas, tornando o processo de ensino e aprendizagem mais interativo e envolvente. Aden refletiu sobre essa mudança: "*Gostei bastante da sua metodologia, especialmente a parte de usar o GeoGebra. Achei suas aulas mais interativas*" (Aden). A interatividade proporcionada pelo GeoGebra rompe com a passividade tradicional das aulas expositivas, permitindo que os estudantes se envolvam ativamente na construção e manipulação dos conceitos.

Théo reforça essa ideia ao afirmar: "*Essa disciplina, se fosse ministrada sem o uso do GeoGebra e da tecnologia, talvez não despertasse tanto interesse*" A introdução de uma metodologia ativa, facilitada pelo uso do GeoGebra, não apenas engajou os estudantes, mas também aumentou seu interesse pela disciplina. Na visão de Engeström (2016), essa transformação da atividade, na qual os estudantes passam de receptores passivos a agentes ativos no processo de aprendizagem, é um dos pilares da aprendizagem expansiva.

Hend também menciona o impacto positivo da tecnologia na dinâmica das aulas: "*As aulas se tornaram mais dinâmicas, deixando para trás aquelas aulas pesadas de antes*" (Hend). O uso do GeoGebra trouxe uma mudança significativa na abordagem do conteúdo, tornando o processo de aprendizagem mais fluido e envolvente. Segundo Engeström (2016), essa transformação na estrutura da atividade é essencial para a evolução da prática pedagógica, onde

o foco não está apenas no conteúdo, mas também na maneira como ele é mediado e vivenciado pelos estudantes.

Ulan concluiu essa reflexão ao destacar como o GeoGebra facilitou a construção geométrica: "*O GeoGebra facilitou a criação e visualização geométrica, tornando a aula mais produtiva e dinâmica*" (Ulan). Nesse contexto, observa-se que a ferramenta tecnológica não apenas trouxe dinamismo, mas também aumentou a eficiência do processo de ensino e aprendizagem, permitindo que os estudantes se apropriassem dos conceitos geométricos de forma mais rápida e eficaz.

A análise reflexiva das falas dos participantes revela que a adaptação tecnológica, a visibilidade geométrica e a dinamização das aulas são temas centrais na experiência de aprendizado proporcionada pela proposta formativa híbrida. Dialogando com a TAE de Engeström e Sannino (2016), pode-se observar que as contradições iniciais enfrentadas pelos estudantes, como a dificuldade de adaptação ao uso de novas tecnologias, atuaram como motores para a expansão de sua compreensão e habilidades. Ao refletirem criticamente sobre suas experiências, os estudantes reconheceram o papel transformador do GeoGebra, não apenas no aprendizado dos conceitos geométricos, mas também na forma como interagiram com o conhecimento e se engajaram nas atividades pedagógicas.

Diante disso, os estudantes vivenciaram um processo expansivo de aprendizagem, no qual suas práticas foram transformadas e ampliadas. Essa reflexão não apenas validou a metodologia proposta, mas também proporcionou uma base sólida para a consolidação de novas práticas educacionais, cada vez mais alinhadas às demandas contemporâneas da Educação Matemática.

4.16.2 Consolidação

A consolidação de novas práticas pedagógicas, especialmente no contexto da implementação de ferramentas digitais, como o GeoGebra, na disciplina de FME III, envolve um processo contínuo de adaptação, aprendizado e transformação. Segundo Engeström e Sannino (2016), essa fase de consolidação reflete a estabilização de uma prática que, após enfrentar e resolver contradições e desafios, se torna parte integrante do repertório educacional e cognitivo dos estudantes. Ao analisar as falas dos sete participantes da pesquisa, foi possível perceber como o GeoGebra se consolidou não apenas como uma ferramenta de ensino, mas

também como um mediador de novas formas de pensar e aplicar conceitos matemáticos em contextos reais.

d) Expansão das práticas tecnológicas: A consolidação de qualquer prática pedagógica depende de sua capacidade de transcender o espaço imediato da sala de aula e se integrar aos diversos contextos vivenciais dos estudantes. Mary, por exemplo, reflete sobre o uso do GeoGebra em seu estágio noturno com estudantes da Educação de Jovens e Adultos (EJA): "*Eu utilizei a ferramenta do GeoGebra para mostrar aos alunos, na prática, e foi muito bom [...] eles puderam ver, na prática, como seria a distância entre aqueles dois pontos*" (Mary). Essa declaração ilustra como o uso contínuo da ferramenta se consolidou não apenas no entendimento teórico dos conceitos geométricos, mas também na capacidade de ensinar esses conceitos de maneira clara e prática. A consolidação aqui está alinhada com o que Engeström (2016) define como a expansão de uma atividade para novos contextos, onde o estudante se apropria do conhecimento e o transfere para situações reais.

Elen ressalta que "*continuo usando o GeoGebra no estágio, especialmente para ensinar gráficos*" (Elen). Essa declaração evidencia como o uso do GeoGebra se consolidou na prática pedagógica. Aden também enfatiza essa continuidade no uso do GeoGebra, tanto no contexto de seu estágio quanto em outras disciplinas: "*Utilizei e utilizo até hoje, principalmente no meu estágio. [...] Estou utilizando-o até hoje; para mim, foi muito inspirador*" (Aden). Essa consolidação reflete um domínio que transcende a disciplina específica, incorporando o GeoGebra como uma ferramenta essencial na formação acadêmica e no estágio, além de ampliar seu uso para áreas além da Geometria, como gráficos e funções. Engeström e Sannino (2016) destacam que essa fase de consolidação representa a superação das barreiras iniciais de uso e a incorporação de novas práticas como parte do desenvolvimento contínuo dos estudantes.

e) Domínio digital: Outro aspecto central da consolidação é a evolução no uso das ferramentas digitais ao longo do tempo. Théo, por exemplo, menciona: "*Consegui compreender todos os recursos que o GeoGebra oferece para nos auxiliar durante as aulas, construções e atividades*" (Théo). Essa declaração reflete como a utilização do GeoGebra passou de uma prática inicial desafiadora para uma habilidade natural e parte do repertório dos estudantes. Para Engeström (2016), essa fase da prática se consolida quando os participantes deixam de se sentir como novatos ao utilizar a tecnologia e, com o tempo, adquirem a confiança necessária para utilizá-la de forma autônoma.

Da mesma forma, Seth reforça a ideia de evolução, destacando que, apesar das dificuldades iniciais, o uso contínuo do GeoGebra facilitou o aprendizado e possibilitou uma

compreensão mais profunda dos conceitos geométricos: "*O aprendizado eu senti que foi bem facilitado com o GeoGebra justamente por causa dessa possibilidade de imaginação que foi ampliada*" (Seth). Aqui, observa-se a consolidação de uma prática que, embora tenha começado com desafios, se transformou em uma ferramenta central para a exploração de conceitos. Isso reflete o processo expansivo de aprendizado descrito por Engeström (2016), no qual a prática evolui e os desafios se tornam oportunidades de crescimento.

Hend menciona que o acesso contínuo ao GeoGebra, tanto dentro quanto fora da sala de aula, foi essencial para o processo de consolidação: "*Foi tudo muito proveitoso em relação ao conteúdo, à forma como foi ensinado e à possibilidade de acessarmos a plataforma em casa também*" (Hend). Esse acesso remoto reflete a consolidação de uma prática híbrida que transcende as fronteiras físicas da sala de aula, permitindo que os estudantes continuem a desenvolver suas habilidades tecnológicas e matemáticas de forma independente.

f) Desafio Motivadores: A consolidação de uma nova prática pedagógica depende, em grande parte, do engajamento dos estudantes em atividades que não apenas os desafiem, mas que também inspirem a curiosidade e a criatividade. Aden reflete sobre como a construção de uma bicicleta no GeoGebra gerou um elevado nível de motivação: "*A construção da bicicleta foi a que mais me chamou a atenção, pois utilizamos muitos recursos e conceitos da geometria para criar objetos do nosso dia a dia*" (Aden). Esse tipo de atividade, que combina teoria e prática, não apenas solidifica o aprendizado, mas também permite que os estudantes percebam a relevância do que estão aprendendo. Segundo Engeström (2016), essa consolidação ocorre quando os estudantes começam a integrar o conhecimento de maneira significativa em sua vida cotidiana, ampliando suas habilidades de resolução de problemas.

Théo, ao refletir sobre a mesma atividade, destaca a importância do engajamento emocional: "*Essa, para mim, foi a atividade que mais me prendeu, que mais me deixou entusiasmado para fazer*" (Théo). A consolidação de uma prática pedagógica, nesse contexto, não se limita ao domínio técnico, mas também envolve o desenvolvimento de uma relação positiva e entusiástica com o processo de aprendizagem. Quando os estudantes enfrentam desafios motivadores, a consolidação ocorre de forma mais profunda, como descrito por Engeström (2016), pois a prática deixa de ser apenas um exercício acadêmico e se transforma em uma experiência de descoberta. Essa motivação emocional, conforme Vygotsky (2019), é importante para a mediação, pois contribui para a internalização de conceitos complexos por meio de interações significativas com as ferramentas digitais.

A atividade do Cubo Mágico foi mencionada por diversos participantes como um exemplo de como a prática consolidada pode gerar engajamento e criatividade. Hend reflete sobre o aspecto cooperativo da atividade: "*O último trabalho do Cubo Mágico instigou bastante a gente a buscar alternativas e procurar outras formas de fazer*" (Hend). Esse aspecto está em consonância com a TAE de Engeström (2016), que enfatiza a importância das interações coletivas e do aprendizado conjunto no processo expansivo de consolidação de uma prática.

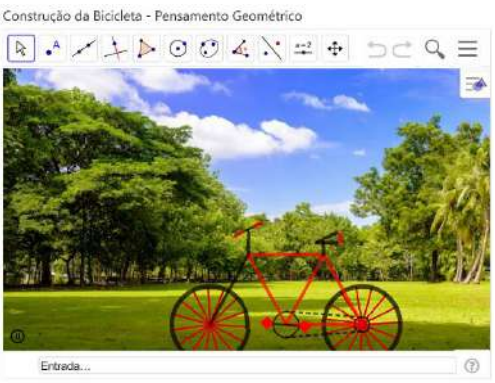
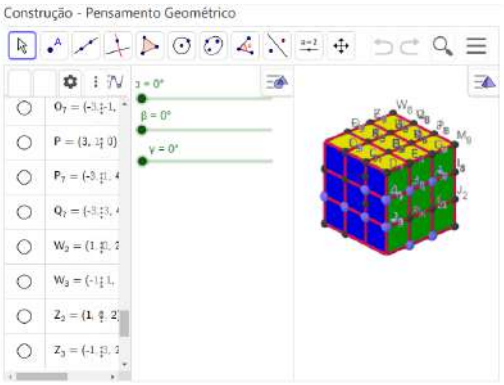
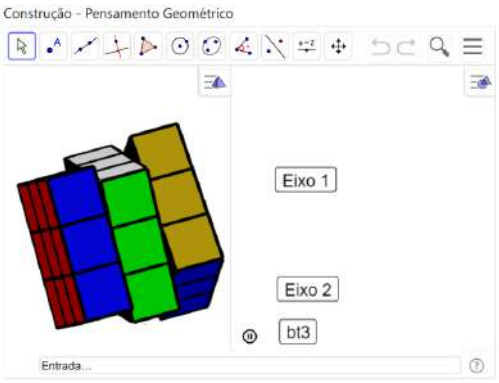
Ulan também destaca a complexidade e o aprendizado proporcionados pela atividade do Cubo Mágico: "*A que mais chamou minha atenção foi a atividade do Cubo Mágico, que utilizou a geometria 3D [...] mas também gerou um grande aprendizado*" (Ulan). Esse relato evidencia como os desafios apresentados pelas atividades, mesmo quando difíceis, podem ser motivadores e contribuir para a consolidação do aprendizado, à medida que os estudantes superam barreiras e integram novos conhecimentos de maneira expansiva.

Durante a análise dos dados, emergiu um Nível Criativo, um elemento que transcende os cinco níveis de aprendizado geométrico propostos por Van Hiele (1986). Esse nível não constituía uma ação sequência adicional, mas surgia de maneira interativa e transversal, articulando-se com os demais níveis ao longo do processo de aprendizagem da Geometria, em diferentes momentos práticos.

O **Quadro 84**, apresentado abaixo, apresenta as criações geométricas desenvolvidas pelos participantes, destacando o envolvimento dos estudantes em um nível elevado de criatividade ao produzir uma bicicleta e o famoso cubo Rubik. Essas obras foram elaboradas a partir de uma abordagem de ensino aberta, que demonstrou a possibilidade de utilizar conhecimentos geométricos e ferramentas digitais para expandir a imaginação. Ao mesmo tempo, os estudantes tiveram total liberdade para personalizar suas criações, permitindo uma expressão individual única.

Dessa forma, o Nível Criativo manifestou-se quando os estudantes não apenas seguiam os padrões de raciocínio estabelecidos, mas também inovaram, criando novas possibilidades construtivas, explorando diferentes representações geométricas e experimentando variações nas construções e nas ferramentas digitais. Esse aspecto criativo destacou-se tanto na fase inicial de visualização de figuras, em que os estudantes manipulavam e transformavam formas, quanto nos níveis mais avançados, onde a criatividade permitia deduzir novas relações e desenvolver soluções originais para problemas geométricos. Esse nível foi especialmente relevante durante as atividades práticas da pesquisa, quando os estudantes, ao utilizarem o GeoGebra, puderam articular diferentes níveis de raciocínio geométrico com o pensamento criativo.

Quadro 84 – Ilustração da criatividade geométrica realizada pelos participantes

Pensamento Geométrico – Construtivo	
	
	

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

A consolidação de uma prática pedagógica, especialmente no contexto da proposta de intervenção híbrida com o uso do GeoGebra, é um processo contínuo que envolve tanto o domínio técnico das ferramentas quanto o engajamento emocional e intelectual dos estudantes. Os relatos dos sete participantes demonstram que a utilização do GeoGebra se consolidou como uma prática educativa eficaz, sendo aplicada em diversos contextos acadêmicos e profissionais, e proporcionando um aprendizado mais dinâmico e envolvente. A TAE de Engeström (2016) oferece uma perspectiva valiosa para compreender como essa consolidação ocorre, não apenas como a superação de desafios, mas como um processo de transformação contínua, onde o aprendizado transcende as barreiras iniciais e se transforma em uma prática mais ampla, profunda e significativa.

4.17 Tecendo saberes para a consolidação de um novo modelo híbrido de ensino

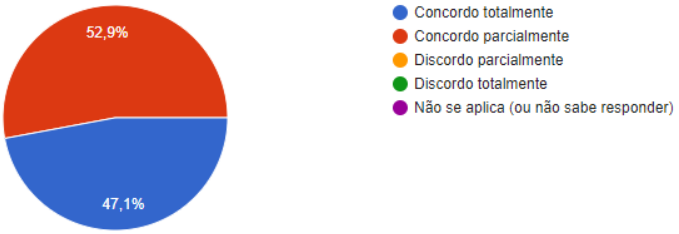
A proposta formativa híbrida, denominada Tecformação Digital, destacou-se como uma abordagem eficaz e inovadora no ensino da Geometria, especialmente ao integrar ferramentas

tecnológicas, como o ggb-CB, ao processo de formação inicial de professores de Matemática. Essa metodologia possibilitou uma transição significativa das práticas pedagógicas convencionais, que eram baseadas em lousa e piloto na figura do professor, ou em papel e lápis por parte dos estudantes, para um ambiente mais dinâmico, interativo e alinhado às demandas da cultura digital.

A análise dos resultados obtidos com a aplicação da proposta formativa híbrida Tecformação Digital, integrada ao uso do ggb-CB, revela uma percepção amplamente positiva por parte dos estudantes, especialmente em relação à facilitação da aprendizagem, à autonomia e à interatividade. O questionário aplicado ao final do curso reforça essas impressões, evidenciando as experiências dos participantes. Os gráficos a seguir ilustram as respostas dos estudantes sobre suas vivências de aprendizagem, adaptabilidade e uso das ferramentas tecnológicas, sublinhando a eficácia do ambiente digital formativo e seu impacto positivo no processo educativo.

Dessa maneira, em relação à metodologia de ensino, 52,9% dos estudantes concordaram totalmente que esta foi empregada de maneira adequada, enquanto 47,1% concordaram parcialmente (**Gráfico 10**). Esses resultados refletem o sucesso da proposta pedagógica híbrida e a integração das TDI, destacando a relevância da mediação e da experimentação tecnológica. A ausência de respostas discordantes indica que a metodologia aplicada foi amplamente aceita e valorizada pelos estudantes, sendo reconhecida como eficaz no ensino da Geometria.

Gráfico 10 – Metodologia de ensino

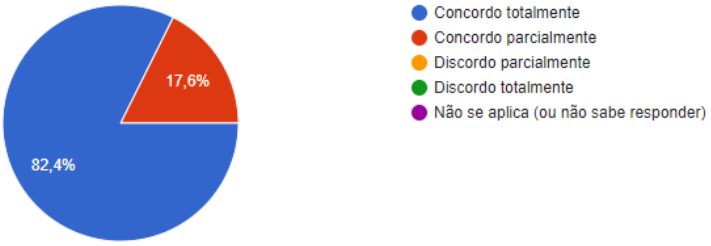


Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Quanto à sequência dos conteúdos, 82,4% dos estudantes concordaram totalmente que a organização das aulas foi adequada, enquanto 17,6% concordaram parcialmente (**Gráfico 11**). Esses resultados indicam que a estrutura sequencial das aulas seguiu uma progressão lógica e eficaz, essencial para a construção gradual e sólida do conhecimento. A integração entre teoria e prática, por meio do uso contínuo do GeoGebra, contribuiu para que os participantes

acompanhassem o desenvolvimento dos temas, solidificando sua compreensão dos saberes geométricos.

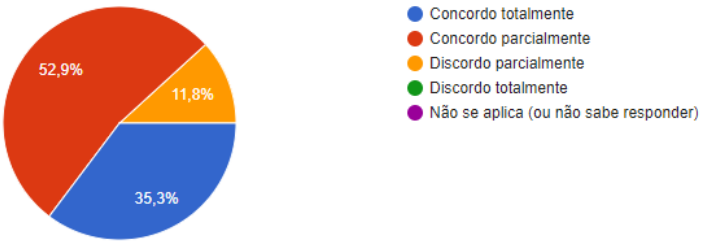
Gráfico 11 – Sequência de conteúdos



Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Em relação às adaptações, 52,9% dos estudantes concordaram parcialmente que não enfrentaram problemas de adaptação às atividades, enquanto 11,8% concordaram totalmente. No entanto, 35,3% discordaram parcialmente, indicando que, para uma parcela significativa dos estudantes, houve desafios iniciais na adaptação às ferramentas digitais e à metodologia proposta (**Gráfico 12**). Essa situação ilustra a terceira contradição de Engeström (2016), na qual a introdução de novas práticas digitais, inicialmente em conflito com as práticas tradicionais de ensino, levou à superação das tensões iniciais, resultando na transformação das práticas pedagógicas à medida que as novas ferramentas foram integradas ao processo educativo.

Gráfico 12 – Obstáculos iniciais à adaptação da formação híbrida

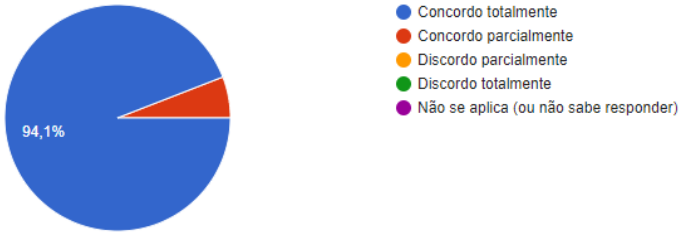


Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Em relação à mediação entre professores e estudantes, 94,1% dos participantes concordaram que a interação com o mediador foi produtiva, refletindo o papel fundamental da mediação pedagógica na facilitação do processo de aprendizagem em um ambiente híbrido (**Gráfico 13**). A mediação pedagógica, conforme proposto por Vygotsky (2019), é entendida como um elemento-chave no apoio ao processo de aprendizagem, especialmente dentro da ZDP). Nesse contexto, o mediador – neste caso, o professor formador – atuou como facilitador,

orientando os estudantes além do que seriam capazes de alcançar sozinhos, permitindo-lhes atingir um nível mais avançado de compreensão e desenvolvimento de habilidades.

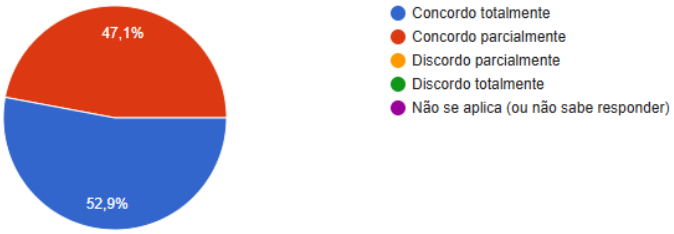
Gráfico 13 – Mediação entre professor e estudantes



Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Os dados mostram que 52,9% dos participantes concordaram plenamente que se sentiram preparados para participar das atividades, enquanto 47,1% concordaram parcialmente (**Gráfico 14**). Isso indica que a maioria dos estudantes se sentiu bem orientada em relação às tarefas propostas, o que pode ser atribuído à clareza dos materiais didáticos e à estrutura bem organizada da disciplina. A ausência de respostas de total discordância sugere que a adaptação às atividades foi facilitada pelo suporte oferecido pela plataforma GeoGebra, que promoveu a visualização de conceitos geométricos de maneira interativa.

Gráfico 14 – Ação proativa



Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

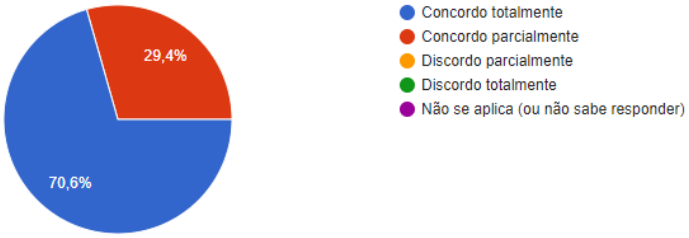
Um total de 94,2% dos estudantes reconheceu a clareza dos materiais, sendo que 47,1% concordaram totalmente e outros 47,1% concordaram parcialmente que esses recursos facilitaram um estudo mais independente. Apenas 5,8% discordaram parcialmente, evidenciando que a maioria se sentiu apoiada em sua jornada de aprendizado (**Gráfico 15**). Essa percepção reforça o sucesso da Tecformação Digital em fornecer materiais adequados, permitindo aos participantes explorar conteúdos de forma autônoma, especialmente ao utilizar o GeoGebra para visualizar e manipular conceitos geométricos complexos.

Gráfico 15 – Qualidade do material didático disponibilizado no ggb-CB

Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Além disso, a aprendizagem mediada por artefatos digitais foi outro ponto destacado pelos estudantes. Com 29,4% dos participantes concordando totalmente e 70,6% concordando parcialmente que os materiais didáticos tecnológicos estimularam sua aprendizagem, a ausência de discordâncias indica que os recursos utilizados, como os *applets* de Geometria do GeoGebra, foram eficazes em engajar os participantes e promover uma aprendizagem ativa e autônoma **(Gráfico 16).** Essa alta taxa de concordância evidencia que a abordagem digital e interativa não apenas facilitou a compreensão dos conteúdos, mas também aumentou o interesse e a motivação para aprender, elementos essenciais em um ambiente híbrido.

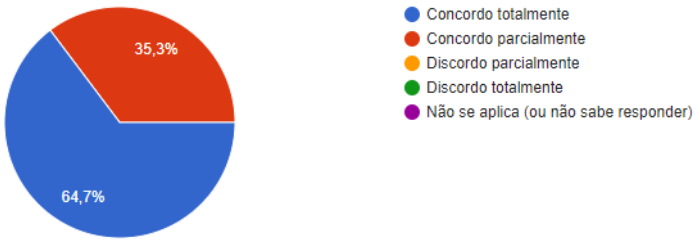
Gráfico 16 – Mediação tecnológica



Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

A avaliação e o *feedback* também foram considerados adequados. Com 35,3% dos estudantes concordando totalmente e 64,7% concordando parcialmente que o processo avaliativo foi apropriado e proporcionou retroalimentação contínua, fica evidente que a avaliação associada ao uso do ggb-CB foi eficaz (**Gráfico 17**). Esse *feedback* auxiliou os participantes a identificar suas dificuldades e a ajustar suas estratégias de aprendizado, promovendo um desenvolvimento mais consistente das competências geométricas e tecnológicas.

Gráfico 17 – *Feedback Online*



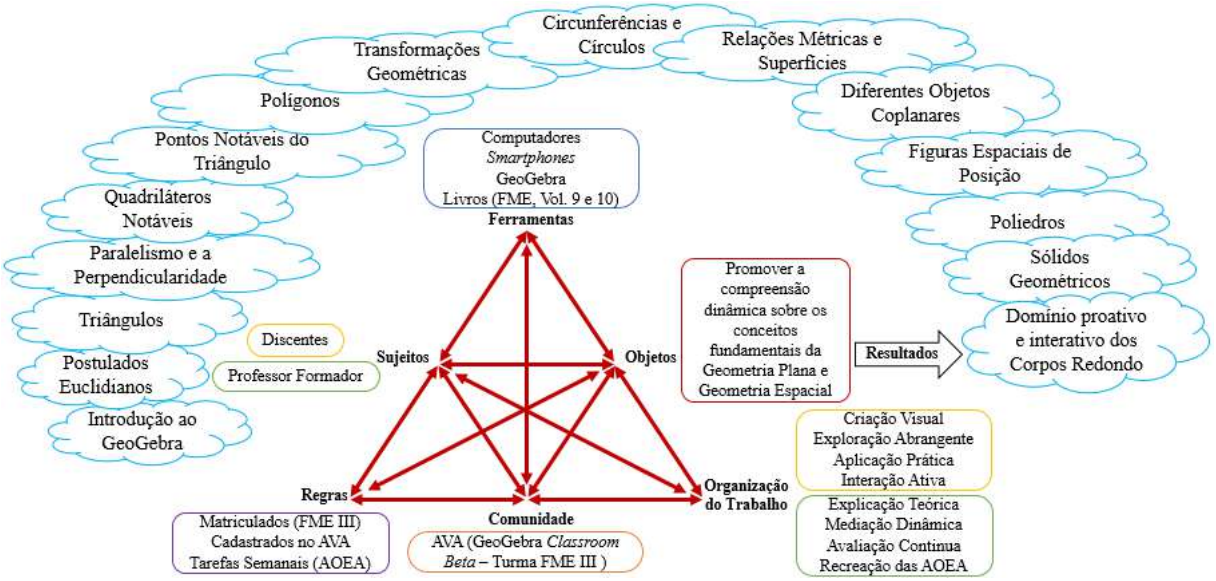
Fonte: Acervo da Pesquisa (2024).

Os dados apresentados confirmam que a Tecformação Digital foi essencial para facilitar a adaptação dos estudantes a um ambiente de ensino híbrido e dinâmico. Nesse sentido, Engeström (2016) destaca que a aprendizagem expansiva é impulsionada pela resolução de contradições. A partir disso, pode-se observar que os desafios iniciais enfrentados pelos participantes, como a adaptação às novas tecnologias, foram gradualmente transformados em oportunidades para o desenvolvimento de competências. Assim, à medida que esses obstáculos se tornaram motivadores, contribuíram diretamente para a evolução da prática pedagógica. Esse processo também evidenciou a relevância do ensino híbrido, conforme apontam Horn e Staker (2014), que ressaltam a flexibilidade e a interatividade da aprendizagem mediada por TD, como o ggb-CB. É importante destacar que esses elementos não apenas tornam o aprendizado mais acessível e motivador, mas também criam um ambiente propício à autonomia e ao engajamento contínuo dos futuros professores em seu processo de formação.

Vale ressaltar que a proposta intervencionista da Tecformação Digital foi desenvolvida ao longo de 15 semanas, integrando conceitos geométricos com os recursos do ggb-CB, compondo, assim, o que Engeström (2016) denomina de historicidade das práticas, ou seja, o processo contínuo de transformação das atividades ao longo do tempo, mediado por instrumentos e interações. Dessa forma, as ações implementadas configuraram um sistema de atividades orientado por um saber geométrico, mediado por artefatos digitais, e ressaltaram a importância das relações que emergem nesse contexto. Essa estrutura permitiu que os conhecimentos subsequentes interagissem com os anteriores, promovendo um domínio proativo e interativo por parte dos participantes. Em vista disso, surgiu um sistema de atividades curriculares conectado, no qual os conhecimentos construídos podem ser facilmente revisitados, uma vez que ficam armazenados na nuvem (na conta do usuário na plataforma do GeoGebra).

O **Esquema 40** ilustra o sistema de atividade curricular integrado durante a aplicação da última aula desta proposta formativa.

Esquema 40 – Sistema de atividade dinâmico e multifacetado aplicado



Fonte: Pesquisador (2024).

Essa abordagem não apenas facilitou a interação com os conteúdos, mas também se tornou um meio de mediação que estimulou a construção coletiva do conhecimento. As interações constantes entre professor e estudantes, bem como entre os próprios estudantes, revelaram a multivocalidade, um dos princípios da teoria de Engeström (2016), que se manifestou nas discussões e na troca de ideias mediadas pelos artefatos digitais. Essa dinâmica cooperativa foi essencial para enriquecer o processo de aprendizagem, permitindo que diferentes perspectivas fossem consideradas e integradas, resultando em uma aprendizagem-sociotecnológica.

Além disso, as tensões formativas, conforme destacadas por Engeström (2016), foram fundamentais para a compreensão dos saberes geométricos. As discussões contínuas sobre os temas abordados ao longo das semanas estabeleceram uma sequência lógica de aprendizagem, que facilitou a internalização do conhecimento no contexto da cibercultura. É importante ressaltar que cada aula foi construída sobre a anterior, promovendo não apenas o domínio das novas ferramentas digitais introduzidas a cada nova abordagem, mas também uma ampliação significativa da capacidade dos estudantes de pensar geometricamente.

Cada uma das aulas constituiu um sistema de atividades interativas, no qual o ECFG foi ampliado pela ECGD por meio do uso do ggb-CB. Essa interação entre os sistemas possibilitou uma troca contínua de saberes, transformando as ideias geométricas em práticas interativas. Essa dinâmica não apenas promoveu uma evolução na forma como os estudantes compreendiam e manipulavam conceitos geométricos, mas também fortaleceu seu raciocínio lógico-

geométrico e sua capacidade de aplicação prática. De modo geral, promoveu um aprender-com-tecnologias-digitais-interativas.

A aprendizagem expansiva, conforme discutido por Engeström e Sannino (2016), envolve a criação e implementação de um novo conceito de atividade, que exige a reconstrução dos elementos dentro de um sistema de atividade. Sob essa perspectiva, as contradições que surgiram durante as aulas revelaram-se naturais e, em vez de representarem um obstáculo, funcionaram como catalisadores para o desenvolvimento cognitivo. Assim, a tensão entre a teoria geométrica formal e a exploração dinâmica da Geometria foi gradualmente superada à medida que os estudantes aprendiam a conciliar a abstração teórica com a prática virtual proporcionada pelas TDI. Essas contradições permitiram que os estudantes não apenas enfrentassem desafios, mas também consolidaram uma compreensão mais profunda do saber-geométrico-com-tecnologias-digitais.

Nesse contexto, as experiências vivenciadas ao longo das aulas enriqueceram o conhecimento abordado e abriram caminhos para uma aprendizagem mais avançada, que vai além da simples absorção de conteúdos. Esse tipo de aprendizagem se caracteriza por uma transformação profunda nas práticas dos participantes, permitindo-lhes construir e modificar seus próprios entendimentos, além de gerar novas formas de interação com o saber. Em decorrência disso, em vez de apenas reproduzir conceitos preestabelecidos, os estudantes passaram a participar ativamente da criação de novos conhecimentos, refletindo a dinâmica da aprendizagem expansiva descrita por Engeström (2016).

Uma transformação expansiva ocorre quando o objeto e o propósito da atividade são reconceptualizados, ampliando significativamente o horizonte de possibilidades em relação ao modo anterior de atividade. Esse processo pode ser compreendido como uma jornada coletiva, na qual, ao final das 15 semanas, os estudantes passaram por um ciclo completo de transformação. Cabe destacar que, segundo Engeström (2016), a aprendizagem ocorre por meio de ciclos prolongados de mudanças qualitativas. Nesse sentido, o sistema de atividades interconectadas gerou um objeto partilhado: o Ensino de Geometria Dinâmica Interativa. Esse modelo inovador superou o ensino tradicional, resultando da constante interação entre os participantes e as ferramentas digitais, que integraram teoria e prática de maneira fluida.

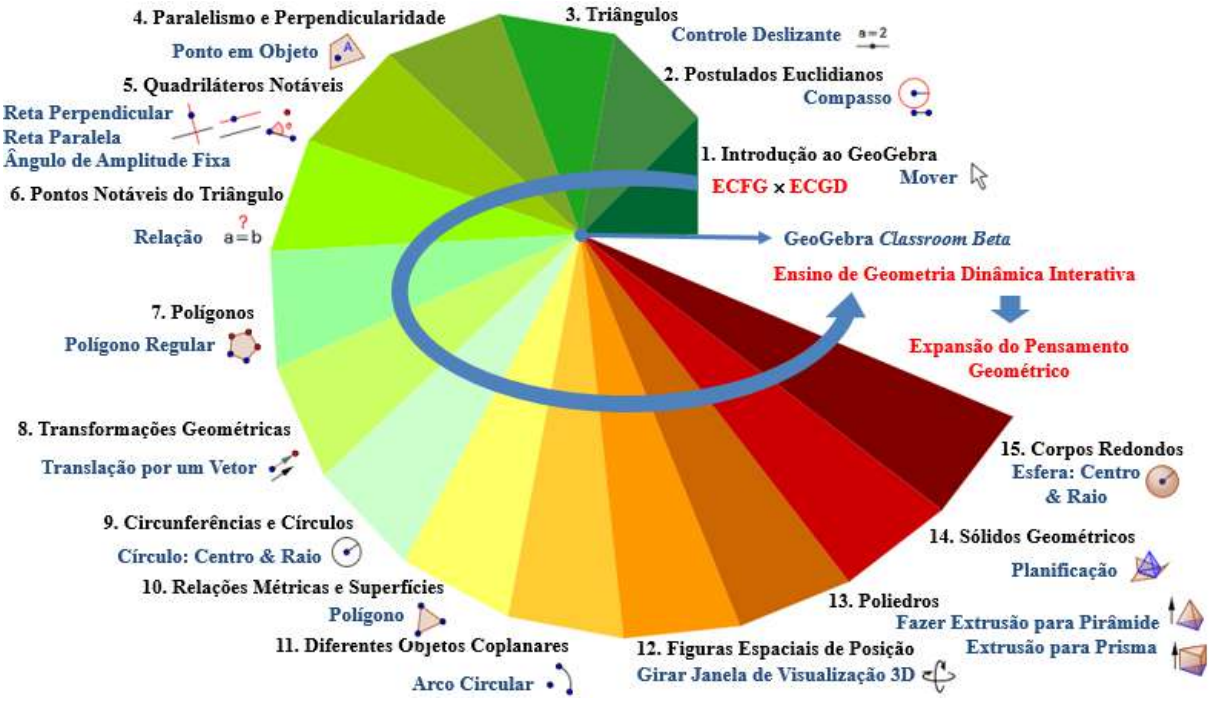
De forma adicional, essa abordagem possibilitou uma expansão do pensamento geométrico, permitindo que os estudantes avançassem para níveis mais complexos de raciocínio, conforme os estágios propostos por Van Hiele (1986). É importante ressaltar que, durante a análise, foi identificado um Nível Criativo que se articula de maneira transversal aos

cinco níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico. Esse nível não segue uma ordem linear, mas se manifesta em diferentes momentos do processo de aprendizagem, complementando e enriquecendo as etapas de Visualização, Análise, Dedução Informal, Dedução Formal e Rigor. Essa interação promove uma maturação do conhecimento e estimula a criatividade dos estudantes ao lidarem com a Geometria de forma autônoma.

Essa dinâmica evidencia que esta tese não se restringiu ao desenvolvimento do pensamento geométrico, mas também promoveu a expansão desse pensamento. Isso permitiu aos participantes não apenas aprofundar suas habilidades cognitivas, mas também ampliar sua capacidade de aplicar a Geometria em contextos mais diversos e desafiadores.

É possível observar que o **Esquema 41**, estabelece uma conexão com 15 sistemas de atividades, cada um representando uma aula com um conteúdo curricular específico, mediado pelas ferramentas do GeoGebra. Essa abordagem gerou tensões entre o sistema principal (ECFG) e o sistema adjacente (ECGD). Como resultado, o ensino de Geometria tornou-se dinâmica e interativa, promovendo a expansão do pensamento geométrico dos participantes.

Esquema 41 – Sistema de atividades sequenciais e interconectado



Fonte: Pesquisador (2024).

Vale ressaltar que as cores aplicadas a cada triângulo na construção sinalizam o processo de maturação ao longo do percurso. Também é possível afirmar que o sistema de atividades sequenciais e interconectadas da Tecformação Digital contribuiu para a cognição do saber-

geométrico-com-tecnologias-digitais, além de promover um ambiente de autoformação e heteroformação, impulsionando o desenvolvimento da cibercultura.

Desse modo, outro ponto importante é que, a partir do uso das ferramentas do ggb-CB, os estudantes adotaram essas tecnologias tanto em suas atividades acadêmicas quanto profissionais, disponibilizando suas construções na plataforma. Nesse ambiente em rede, também realizaram pesquisas sobre outras possibilidades construtivas, o que demonstra uma prática de compartilhamento que vai além da simples utilização da ferramenta, refletindo a expansão da cibercultura, conforme discutido por Lévy (2021). À luz disso, o processo de mobilização das competências digitais também se revela no hábito dos participantes de interagir de maneira coletiva, desenvolvendo e trocando saberes em espaços virtuais.

À luz dos fatos apresentados, conclui-se que a mediação tecnológica, nesse processo formativo, propiciou uma transformação nos hábitos de aprendizagem, favorecendo o surgimento de uma cibercultura voltada para a criação e experimentação. Assim, as ferramentas utilizadas permitiram que os estudantes interagissem de maneira dinâmica com conceitos geométricos, desenvolvendo habilidades técnicas e, simultaneamente, uma nova abordagem para a resolução de problemas no ambiente digital. Esse processo não se limitou ao mero uso dos recursos, mas promoveu uma construção ativa de saberes que integram o universo digital ao físico, estimulando práticas de aprendizagem ativas.

Esses achados ressaltam a eficácia da Tecformação Digital em estabelecer um ambiente de aprendizado produtivo. Como consequência, a combinação de ensino híbrido, uso de ferramentas digitais e mediação contínua demonstrou ser eficaz no desenvolvimento das competências geométricas e tecnológicas dos futuros professores. Isso não apenas fomentou a autonomia e a motivação dos estudantes, mas também garantiu um engajamento significativo ao longo da disciplina FME III. Ao percorrer as etapas da TEA de Engeström (2016), a proposta trouxe inovações para o aprender a aprender e o saber-fazer geométrico, permitindo uma expansão do pensamento geométrico dos participantes e promovendo um aprendizado virtualizado. Em virtude disso, ao integrar TDI ao ensino híbrido, essa abordagem se consolidou, nesta pesquisa, como uma metodologia inovadora e essencial para preparar os educadores para os desafios contemporâneos da Educação Matemática, mostrando-se mais produtiva e formativa do que o ensino tradicional, que se baseia apenas em recursos convencionais.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta tese, apresenta-se um modelo inovador de ensino híbrido fundamentado na TA e sua aplicação no processo de ensino e aprendizagem. A análise da implementação revela como essa abordagem pode ser valiosa na formação inicial de professores de Matemática, integrando TDI. Nesse sentido, as discussões buscaram esclarecer a natureza da Tecformação Digital e como essa proposta formativa organizou as interações dos participantes no contexto da ecoformação, heteroformação e da autoformação, mediadas pelas ferramentas digitais (ser-humano-tecnologias-digitais-coletividade). Essa abordagem foi realizada por meio de recursos tecnológicos em ambientes presenciais e virtuais.

As percepções dos participantes da pesquisa refletem um processo de aprendizagem que desconstrói as práticas pedagógicas convencionais e incentiva a superação de barreiras para um novo aprendizado. Essa proposta formativa foi caracterizada por um constante equilíbrio entre a aplicação prática de conceitos geométricos e a compreensão teórica, mediada pelo uso de artefatos tecnológicos, como o GeoGebra *Classic online*, na disposição de Geometria. É importante ressaltar que, inicialmente, os estudantes enfrentaram dificuldades ao lidar com a abstração de conceitos como ponto, alinhamento, área e volume, evidenciando as tensões entre o conhecimento teórico e sua representação virtual nas plataformas digitais.

Conforme o curso avançava, essas dificuldades foram substituídas por uma evolução nas percepções dos estudantes, que começaram a identificar as contradições inerentes à prática com os novos recursos. Nesses momentos, surgiram questionamentos sobre a tradução de conceitos abstratos para o ambiente digital, onde o ensino híbrido e a mediação do professor formador foram fundamentais para facilitar a compreensão do conteúdo. Diante desse aspecto, as TD, ao permitirem uma manipulação virtual dos conceitos, possibilitaram uma compreensão mais profunda e prática, atenuando algumas dessas tensões iniciais.

Ao se adaptarem ao uso de novas tecnologias, os estudantes também ajustaram suas expectativas em relação ao ensino, transitando gradualmente de uma resistência inicial para um aprendizado mais coletivo e dinâmico. Assim, a interação entre pares e o uso das TDI favoreceram um aprendizado cooperativo, com trocas constantes de conhecimentos e experiências, promovendo a construção conjunta do saber. Esse engajamento contribuiu para a compreensão do saber geométrico e transformou a visão dos participantes sobre suas futuras práticas pedagógicas, incentivando-os a adotar um ensino digitalizado em suas atuações profissionais.

Essas observações também revelaram que as contradições, longe de serem meros obstáculos, atuaram como motores de crescimento cognitivo e pedagógico. Em vista disso, o ambiente formativo híbrido, mediado por recursos digitais, possibilitou que os estudantes passassem por um processo de aprendizagem expansiva, no qual as tensões iniciais (contradições primárias) foram mediadas por explicações e apoio coletivo (contradições secundárias), culminando na transformação das práticas pedagógicas e na adoção de novas formas de aprendizado (contradições terciárias). Nesse contexto, a relevância das TDI foi inegável, pois, além de oferecerem suporte virtual, proporcionaram um espaço coletivo de experimentação dentro de uma concepção de aprender a aprender, ampliando significativamente a compreensão dos saberes geométricos dos participantes e promovendo uma aprendizagem-sociotecnológica.

Além disso, as contribuições dos recursos do ggb-CB para a expansão do pensamento geométrico dos participantes do curso de LM nesta proposta intervencionista foram significativas e diversificadas. Esses recursos ofereceram um suporte valioso para a virtualização das figuras geométricas, tanto bidimensionais quanto tridimensionais, ampliando as possibilidades de aplicação prática de seus princípios de maneira exploratória. Assim, a utilização dessa ferramenta em um ambiente de aprendizagem híbrido permitiu aos estudantes experimentar e manipular conceitos de forma prática, promovendo um desenvolvimento mais avançado e reflexivo do saber-fazer.

Um dos impactos mais notáveis foi a transformação dos estudantes de receptores passivos em protagonistas ativos de sua aprendizagem, promovendo um aprender-com-tecnologias-digitais-interativas. Em virtude disso, a exploração autônoma das ferramentas do ggb-CB permitiu que os participantes testassem e ajustassem suas hipóteses, desenvolvendo habilidades de raciocínio lógico-geométrico e resolução de problemas de maneira criativa. Essa autonomia contribuiu para a internalização dos conceitos e incentivou uma construção do conhecimento mais independente, criativa e crítica.

Em acréscimo, o ggb-CB atuou como uma ponte entre a teoria abstrata e a aplicação prática das ideias geométricas abordadas. A interação entre o ensino convencional e o ambiente digital ampliou a experiência formativa: nos laboratórios de informática, o professor formador assumiu a função de orientador, introduzindo conteúdos de maneira estruturada e gradual, enquanto o ambiente digital possibilitou aos estudantes uma atuação independente, permitindo que manipulassem objetos geométricos e interagissem livremente com as ferramentas. Essa dinâmica entre os dois sistemas (contradições quaternárias) contribuiu para o desenvolvimento

de habilidades de visualização, análise, dedução formal e informal, além de rigor, promovendo uma compreensão abrangente do conhecimento curricular explorado.

Assim, com o uso dos recursos do ggb-CB, os estudantes foram capazes de virtualizar relações geométricas. Nesse contexto de exploração virtual, as TDI mostraram-se recursos essenciais para promover uma cognição mais profunda e estruturada das complexidades do ensino da Geometria Plana e da Geometria Espacial. Dessa forma, essa articulação tecnológica disruptiva revelou-se transformadora para a expansão do pensamento geométrico, promovendo uma aprendizagem ativa e autônoma, além de proporcionar uma vivência integrada à cultura digital.

Esse processo também teve um impacto significativo na formação pedagógica dos participantes, uma vez que as experiências vivenciadas durante as aulas refletem diretamente nas habilidades necessárias para sua prática profissional. Nesse sentido, as ações educativas dessa proposta intervencionista mostraram-se cruciais para o desenvolvimento de competências tecnológicas e pedagógicas essenciais para o ensino contemporâneo. É importante ressaltar que, ao interagirem com os artefatos digitais do curso, os futuros professores passaram por uma ruptura com a metodologia tradicional, que se baseia principalmente na instrução expositiva, sendo desafiados a adotar novas abordagens para mediar o saber geométrico.

De forma específica, as ações educativas da Tecformação Digital, implementadas no contexto da formação inicial de professores de Matemática na disciplina FME III, concentraram-se na elevação da cognição geométrica e na promoção de uma aprendizagem plural, que valorizasse a multivocalidade e a autonomia dos participantes. Nesse processo, os estudantes vivenciaram a transição das práticas pedagógicas tradicionais para um ambiente mais interativo e dinâmico. Em razão disso, as TDI proporcionaram um espaço de aprendizagem que estimulou tanto a heteroformação quanto a autoformação, aspectos fundamentais para a formação de futuros educadores.

Nesse cenário, é importante destacar que cada AOEA foi planejada de forma estratégica, permitindo que os estudantes construíssem o conhecimento de maneira articulada, com orientação de ensino aberta (digitalidade), construção e maturação (pensamento geométrico). Essa abordagem não apenas facilitou a internalização dos conceitos curriculares, mas também estimulou uma aprendizagem prática e virtualizada, alinhada às necessidades do ensino contemporâneo.

Além disso, o modelo de ensino adotado criou um espaço formativo interativo e reflexivo, proporcionando condições ideais para que o professor formador atuasse como

orientador e mediador, tanto nas interações presenciais quanto nas virtuais. Assim, durante esse processo, foi possível evidenciar que o professor desempenhou um papel essencial como facilitador da aprendizagem. De modo geral, ele orientou as interações presenciais, guiando os participantes no uso das ferramentas digitais e incentivando o trabalho coletivo interativo.

Adicionalmente, o professor formador forneceu *feedbacks* contínuos e personalizados *online*, promovendo a reflexão crítica dos estudantes sobre os conceitos explorados e auxiliando no aprimoramento de suas estratégias de aprendizagem. Esse acompanhamento individualizado foi essencial não apenas para fortalecer a compreensão dos conceitos, mas também para favorecer a maturação do pensamento geométrico dos futuros educadores. Como consequência, ele não apenas mediou o processo de ensino, mas também se tornou um agente essencial na mobilização do aprendizado. Nesse sentido, as ações educativas desta pesquisa demonstram que, ao promover um espaço de socialização e empoderamento tecnológico, o professor pode transformar as práticas pedagógicas, rompendo com os limites da instrução convencional e ampliando as possibilidades do aprender a aprender e do saber-fazer.

Essas reflexões evidenciam os resultados obtidos a partir dos objetivos específicos desta tese. Agora, para abordar as implicações do objetivo geral, é necessário responder à pergunta central que questiona: **como o uso dos recursos do GeoGebra Classroom Beta (ggb-CB), integrado à abordagem de Tecformação Digital, potencializa as aprendizagens no processo formativo inicial de professores de Matemática em um contexto de ensino híbrido, visando à expansão do pensamento geométrico sob a perspectiva da Teoria da Atividade (TA)?**

Com base nas análises, ficou evidente que o ggb-CB, dentro da proposta de Tecformação Digital, desempenhou um papel fundamental na transformação das práticas pedagógicas e na concepção geométrica dos participantes. Nesse contexto, sob a perspectiva da TA, as ações educativas da proposta estruturam-se em um sistema de atividades sequenciais e interconectadas. Esse sistema coloca o estudante no centro do processo de aprendizagem, permitindo-lhe interagir de maneira prática, virtual e reflexiva com os conceitos geométricos.

Em decorrência disso, as 15 aulas aplicadas foram organizadas de forma deliberada: seis aulas foram dedicadas à primeira unidade, focada no alinhamento; cinco aulas à segunda unidade, enfatizando a exploração das áreas; e quatro aulas à terceira unidade, com uma abordagem específica para o volume. Essa aplicação revelou que o objeto partilhado — a Geometria Dinâmica Interativa — emergiu como o eixo central da construção coletiva do conhecimento, impulsionando a expansão do pensamento geométrico dos estudantes.

Os achados revelaram que a Tecformação Digital potencializou o aprendizado ao oferecer um ambiente híbrido que combinava a aquisição de conhecimento teórico com a aplicação prática em tempo real. Nesse modelo, o professor orientou os estudantes em atividades estruturadas, enquanto o uso do ggb-CB possibilitou a exploração livre dos conceitos geométricos. Essa integração promoveu uma aprendizagem ativa e autônoma, na qual os futuros professores construíram, testaram e refinaram suas hipóteses, resultando em uma compreensão mais profunda do saber-geométrico-com-tecnologias-digitais.

De forma complementar, a exploração prática dos conceitos favoreceu o enriquecimento do raciocínio geométrico, permitindo que os estudantes ajustassem suas ideias de forma cooperativa. O uso contínuo das TDI também facilitou a transição dos estudantes entre a teoria e a prática, possibilitando-lhes explorar e manipular conceitos que, de outra forma, seriam difíceis de internalizar. A adaptação inicial às tecnologias, embora desafiadora, resultou em um domínio crescente das ferramentas digitais, à medida que os participantes ganharam autonomia e confiança. Esse processo de superação das dificuldades, conforme proposto pela TA, foi essencial para consolidar uma prática pedagógica inovadora, na qual os futuros professores passaram a integrar a tecnologia de forma natural em suas estratégias de ensino e aprendizagem.

O uso dos recursos do ggb-CB, nesse contexto, não apenas facilitou o aprendizado dos conceitos geométricos, mas também transformou as práticas pedagógicas, tornando-as mais dinâmicas, interativas e cooperativas. Consequentemente, ao longo do curso, os estudantes desenvolveram uma nova relação com a Geometria, caracterizada pela capacidade de visualizar relações planas e espaciais complexas, analisar propriedades geométricas de maneira estruturada, identificar padrões, construir provas rigorosas e realizar comparações lógicas e sistemáticas — habilidades essenciais para a maturação do pensamento geométrico. Essa abordagem ampliou a capacidade de explorar soluções inovadoras para problemas geométricos, reforçando a autoformação e destacando o papel central das TDI no processo formativo. Em acréscimo, observa-se o surgimento de um Nível Criativo nos resultados, evidenciando como a Tecformação Digital não apenas proporcionou um espaço fértil para consolidar ideias já estabelecidas, mas também abriu novas perspectivas que podem superar os métodos convencionais de aprendizagem.

Portanto, a Tecformação Digital consolidou-se como uma proposta formativa inovadora, integrando ferramentas digitais interativas que potencializam significativamente o aprendizado dos participantes. Este modelo de ensino híbrido, fundamentado na TA, não apenas prepara os estudantes para as exigências da educação contemporânea, mas também os capacita a integrar

de forma indissociável tecnologia e pedagogia em sua prática. De maneira específica, a proposta implementada funcionou como um espaço de construção coletiva do conhecimento, promovendo a qualificação dos futuros professores, tanto para atender às demandas das TDIC na Educação Matemática quanto para expandir seu pensamento geométrico.

Devido a essa complexidade, a redação desta tese se estendeu consideravelmente, pois foi necessário enfatizar que a expansão do pensamento geométrico transcende o mero desenvolvimento de habilidades. Ao aprofundar-se na TAE, percebe-se que o processo expansivo não se restringe a um ciclo rápido ou a movimentos cíclicos limitados, como um mini-círculo ou um ciclone. Pelo contrário, trata-se de um fenômeno dinâmico e prolongado que requer tempo e, principalmente, a consideração da historicidade do processo de aprendizagem.

Em outras palavras, é possível afirmar que a expansão do pensamento geométrico envolve a transição de práticas e formas de entendimento que, ao serem desafiadas, provocam transformações significativas nas maneiras de pensar e abordar problemas matemáticos, exigindo um espaço contínuo para adaptação, reflexão e amadurecimento. Esse movimento expansivo permite a construção de novas conexões entre conceitos prévios e novas formas de interpretar a Geometria, levando os estudantes a um nível mais profundo de compreensão e aplicação do conhecimento, com impactos duradouros na formação de competências críticas, reflexivas e criativas. Assim, a tese propõe que a aprendizagem geométrica não deve ser vista como um processo isolado e imediato, mas como um processo gradual e contínuo que se desenrola ao longo do tempo, refletindo uma evolução constante do pensamento dos estudantes.

Cabe pontuar que a análise dos resultados desta pesquisa também contribui para o debate sobre a formação inicial de professores com competências digitais. Esse enfoque abre caminhos para novas abordagens pedagógicas, mediadas por TDI, alinhadas às necessidades educacionais contemporâneas. Isso ressalta que a proposta intervencionista aplicada oferece um cenário formativo diferenciado em relação ao ensino tradicional, que se restringe ao uso de recursos convencionais.

É importante destacar que, ao longo da pesquisa, os participantes tiveram a oportunidade de interagir com TD, o que possibilitou a criação de representações dinâmicas dos objetos geométricos e aprofundou a compreensão de suas propriedades. Esse processo de imersão não apenas enriqueceu a experiência formativa, mas também abriu novas perspectivas sobre o ensino e a aprendizagem da Geometria. Em vista disso, as reflexões geradas por essa vivência podem facilitar a implementação dessa proposta em diferentes cursos de LM, ao mesmo tempo,

em que oferecem subsídios para adaptações e inovações em outras práticas educacionais, ampliando o alcance e a eficácia do uso de TDI no cenário educacional.

Diante do exposto, esta tese busca preencher uma lacuna significativa na literatura ao abordar a integração de TDI no processo de ensino e aprendizagem da Geometria sob a perspectiva da TA, um tema ainda incipiente nas pesquisas voltadas à formação inicial de professores. De forma adicional, apresenta uma abordagem pedagógica inovadora que articula a autoformação e a construção coletiva do conhecimento, por meio da exploração prática de ferramentas digitais de forma aberta, criando um modelo que transcende o ensino expositivo e estimula a autonomia dos participantes.

Entretanto, este estudo revelou limitações que merecem uma reflexão crítica. A criação da AOEA e dos materiais digitais exigiu um tempo considerável de dedicação, evidenciando a necessidade de um planejamento cuidadoso. A demanda por um ambiente físico adequado, com *Internet* de qualidade e equipamentos em bom estado, representou um desafio significativo, levando à utilização simultânea de dois laboratórios. Contudo, muitos computadores apresentaram falhas antes ou durante o uso, o que pode ter comprometido a experiência de aprendizado de alguns estudantes. Essa situação ressalta a urgência de garantir a infraestrutura necessária para o sucesso de propostas educacionais híbridas, bem como a importância de uma manutenção eficaz dos recursos tecnológicos.

Além disso, embora a geração atual seja considerada nativa digital, muitos estudantes demonstraram dificuldades em manusear computadores, preferindo utilizar dispositivos móveis. Essa realidade é preocupante, pois muitos estudantes não têm acesso a computadores ou *notebooks* em casa, o que sugere que a maioria das atividades deveria ser adaptada para *smartphones*. É importante ressaltar que existem diferenças significativas nas interfaces e ferramentas das versões do GeoGebra para *desktop* e dispositivos móveis, o que requer atenção ao desenvolver atividades adequadas a esses dispositivos digitais.

Não obstante, a versão do ggb-CB utilizada era uma versão de teste, e desde a conclusão da implementação da proposta híbrida de ensino, diversas mudanças ocorreram. Infelizmente, essa transformação resultou na perda de algumas informações que deveriam ter permanecido na plataforma. No entanto, a situação não foi crítica, pois alguns arquivos haviam sido salvos em PDF durante a aplicação. Isso possibilitou a transição das respostas dos participantes e o recorte das representações geométricas. Contudo, não foi possível realizar a análise do protocolo de construção, o que teria sido interessante para comparar as abordagens adotadas por cada participante.

Com base nos resultados do estudo, são sugeridas recomendações práticas para diferentes públicos. Para professores formadores e educadores, recomenda-se fortemente a adoção de metodologias híbridas que integrem TDI, como o ggb-CB, para mediar o ensino da Geometria e de outras áreas da Matemática. A introdução dessas ferramentas torna o aprendizado mais interativo e envolvente, promovendo uma melhor visualização dos conceitos geométricos e facilitando o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Os pesquisadores também podem se beneficiar dos achados deste estudo, que destaca a importância de integrar a TA com a aplicação da TDI no ensino geométrico. Em termos de direções futuras, algumas áreas de investigação são sugeridas. Primeiramente, seria interessante expandir a aplicação da Tecformação Digital para outras disciplinas, como Álgebra Linear, Cálculo ou Estatística, a fim de verificar se as mesmas abordagens geram resultados semelhantes no aprendizado. De outro modo, a realização de um estudo longitudinal pode ser valiosa para avaliar o impacto a longo prazo da integração do GeoGebra *Classroom* e das metodologias híbridas na formação de professores, bem como suas influências nas carreiras docentes e no desempenho dos estudantes ao longo dos anos.

Por fim, as interações coletivas em ambientes híbridos, mediadas por TDI, constituem uma dimensão importante a ser aprofundada em pesquisas futuras. É relevante investigar como essas interações contribuem para o desenvolvimento de habilidades críticas, reflexivas e criativas em estudantes de diferentes níveis educacionais. Ao explorar essas novas direções, a subárea da Educação Matemática poderá avançar ainda mais, aproveitando as potencialidades das TD para transformar a prática pedagógica e melhorar o processo de ensino e a aprendizagem da Matemática em um contexto global e contemporâneo.

REFERÊNCIAS

ABREU, V. A. de. **Inserção curricular de recursos de tecnologias digitais na formação de professores de matemática nas universidades públicas em Mato Grosso**. 126 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado de Mato Grosso, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Barra do Bugres, MT, 2018.

AGUIAR, K. F.; ROCHA, M. L. Práticas universitárias e a formação sócio-política. **Anuário do Laboratório de Subjetividade e Política**, n. 3. v. 4, 1997, p. 87-102.

AQUINO, C. C. F. de; AQUINO, J. C. F. de; CAETANO, L. M. D. Referenciais internacionais de competências digitais para formação docente: desafios ao contexto brasileiro. **Revista Eletrônica Científica Ensino Interdisciplinar**, Mossoró, v. 8, n. 26, 2022.

ARAUJO, W. A. de. **Tecnologias da informação e comunicação no ensino de matemática a partir dos egressos do curso de licenciatura – IFS/Aracaju**. 159 f. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Sergipe, Núcleo de Pós-Graduação em Educação, São Cristóvão, SE, 2020.

BACICH, L.; TANZI NETO, A.; TREVISANI, F. de M. Ensino híbrido: personalização e tecnologia na educação. In: BACICH, L.; TANZI, NETO, A.; TREVISANI, F. M. (Org.). **Ensino híbrido:** personalização e tecnologia na educação. Penso Editora, 2015a.

BATISTA JR., R. I. **Tecnologias digitais na formação de professores de matemática das licenciaturas do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP)**. 241 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática, Campinas, SP, 2023.

BATSON, T.; PAHARIA, N.; KUMAR, M. S. V. Uma colheita muito farta? uma estrutura para a fartura educacional. In: IIYOSHI, T.; KUMAR, M. S. V. **Educação aberta:** o avanço coletivo da Educação pela tecnologia, conteúdo e conhecimento abertos. [Em linha]. [Brasil]: ABED/UNIP, 2014

BICUDO, M. A. V. Pesquisa em educação matemática. **Pro-Posições** (Unicamp), Campinas, v. 4, n.1[10], p. 18-23, 1993.

BORBA, M. C. Coletivos seres-humanos-com-mídias e a produção de matemática. **I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática**. Curitiba: 2002.

BORBA, M. C.; MALHEIROS, A. P. S.; ZULATTO, R. B. A. **Educação a distância online**: sala de aula e internet em movimento. 4. ed. Belo Horizonte. Autêntica, 2021.

BORBA, M. C; SCUCUGLIA, R. R. S.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em educação matemática:** sala de aula e internet em movimento. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2020.

BRANCO, M. Software livre e desenvolvimento social e econômico. In: CASTELLS, M.; CARDOSO, G. **A sociedade em rede: do conhecimento à acção política**. São Paulo: Paz e Terra. 2006, p. 227-236.

BRASIL, Ministério da Educação - **Parecer CNE/CP 9/2001** - Homologado Despacho do Ministro em 17 de janeiro de 2002. Brasília: Diário Oficial da União de 18 de janeiro de 2002, Seção 1, p. 31. 2002a.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parecer CNE/CES 1.302/2001**- Homologado. Despacho do Ministro em 4/3/2002, publicado no Diário Oficial da União de 5/3/2002. 2002b.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular:** educação é a base. Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação, 2018.

BRASIL. **Decreto nº 9.235**, de 15 de dezembro de 2017. Dispõe sobre o exercício das funções de regulação, supervisão e avaliação das instituições de educação superior e dos cursos superiores de graduação e de pós-graduação no sistema federal de ensino. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 15 dez. 2017.

BRASIL. **Lei nº 9.394**, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil, Brasília, 23 dez. 1996.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação a Distância – SEED. **Programa Nacional de Informática na Educação** – PROINFO. Diretrizes. 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Resolução CNE/CP nº 2, de 20 de dezembro de 2019.** Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores para a Educação Básica e institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação). Brasília: MEC/Conselho Nacional da Educação, 2019.

BRAUN, V.; CLARKE, V. Conceptual and Design Thinking for Thematic Analysis. **Qualitative Psychology**, v. 9, n. 1, p. 3-26, 2022.

BRUNER, J. S. **O processo da educação**. São Paulo: Edições 70. 2015.

BUSTAMANTE, J. E. G. **Modelagem matemática na modalidade online:** análise segundo a teoria da atividade. 2016. 213 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – Unesp, Rio Claro – SP, 2016.

CÂMARA DOS SANTOS, M. O Cabri-Géomètre e o desenvolvimento do pensamento geométrico: o caso dos quadriláteros. In: Borba, R.; Guimarães, G. (org.). **A pesquisa em educação matemática:** repercussões na sala de aula. São Paulo: Cortez, 2009. p.177-211.

CARVALHO, J. B. P. O que é educação matemática? **Temas e Debates**, ano IV, n. 3, p. 17-26, 1991.

CASTELLS, M. A sociedade em rede: do conhecimento à política. In: CASTELLS, M.; CARDOSO, G. **A sociedade em rede: do conhecimento à acção política**. São Paulo: Paz e Terra. 2006, p. 17-31.

CHRISTENSEN, C. M.; HORN, M. B.; STAKER, H. **Ensino híbrido:** uma inovação disruptiva? Uma introdução à teoria dos híbridos. Clayton Christensen Institute, 2013.

COSTA, A. P. DA; SANTOS, M. R. DOS. O pensamento geométrico de professores de matemática em formação inicial. **Educação Matemática em Revista** - RS, v. 2, n. 18, 22 fev. 2018..

COSTA, A. P.; SANTOS, M. R. O pensamento geométrico na licenciatura em matemática: uma análise à luz de Duval e Van-Hiele. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 4, n. 10, p. 1–20, 2020.

COSTA, J. L. **Atividades docentes de uma professora de matemática:** artefatos mediadores na EAD. 2016. 214 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG, Belo Horizonte – MG, 2016.

D'AMBRÓSIO, U. Educação matemática: uma visão do estado da arte. **Pro-Posições**, Campinas, v. 4, n. 1, p.7-17, mar. 1993.

DAMIANI, M. F. *et al*. Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. **Cadernos de Educação**, Pelotas, v. 45, n. 1, p. 1-22, 2013.

DAVIDOV, V. V. Análisis de los principios didácticos de la escuela tradicional y posibles principios de enseñanza en el futuro próximo. In: SHUARE, M. **La Psicología evolutiva y pedagogía en la URSS**. Antología. Moscú: Editorial Progreso, p. 143-154. 1987.

DAVIDOV, V. V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico**. Trad. Marta Shuare. Moscú: Editorial Progreso, 1988.

ENGESTRÖM, Y. Activity theory and individual and social transformations. In: ENGESTRÖM, Y.; MIETTINEN, R.; PUNAMÄKI, R. (Orgs.). **Perspectives on activity theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

ENGESTRÖM, Y. **Aprendizagem expansiva**. Trad. Fernanda Liberali. 2. ed. Campinas: Pontes, 2016.

ENGESTRÖM, Y. **From teams to knots: activity-theoretical studies of collaboration and learning at work.** Cambridge, UK: Cambridge University Press. 2008.

ENGESTRÖM, Y. **Learning by expanding. An activity-theoretical approach to developmental research**. Helsinki: Orienta-Konsultit Oy, 1987.

ENGESTRÖM, Y.; SANNINO, A. estudos de aprendizagem expansiva: fundamentos, descobertas e futuros desafios. ENGESTRÖM, Y. **Aprendizagem expansiva**. Trad. Fernanda Liberali. 2. ed. Campinas: Pontes, 2016.

FAINGUELERNT, E. K. **Educação matemática:** representação e construção em geometria. Porto Alegre: Artes Médicas Sul.1999.

FERREIRA, C. A. **A aprendizagem da docência em matemática a partir da elaboração de uma situação desencadeadora da aprendizagem.** 2019. 160 f. Dissertação (Mestrado Educação em Ciências e em Matemática). Universidade Federal de Goiás – UFG, Goiânia – GO, 2019.

FIGUEIREDO, T. D. **Professores formadores e licenciandos em matemática:** o Enatuar sobre o uso pedagógico das tecnologias digitais em uma rede fechada de conversações. 186 f. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pelotas, Programa de Pós-Graduação em Educação, Pelotas, RS, 2019.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S.. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 2. ed. Campinas: Autores Associados. 2007.

FONSECA, D. S. **Formação de professores de matemática e as tecnologias digitais da informação e comunicação no contexto do Pibid**. 209 f. Tese (Doutorado) – Universidade Anhanguera de São Paulo, Programa de Pós-graduação em Educação, São Paulo, 2018.

FREITAS, R. A. M. da M.; LIBÂNEO, J. C. Didática desenvolvimental e políticas educacionais para a escola no Brasil. **Linhas Críticas,** [S. l.], v. 24, p. e21850, 2019. DOI: 10.26512/lc.v24i0.21850.

GALVANI, P. A autoformação, uma perspectiva transpessoal, transdisciplinar e transcultural. In: MELLO, M. F. de; BARROS, V. M. de; SOMMERMAN, A. (Orgs.). **Educação e transdisciplinaridade II**. São Paulo: TRIOM, 2002. p. 93-122.

GATTI, B. A. Formação inicial de professores para a Educação Básica: pesquisas e políticas educacionais. **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, v. 25, n. 57, p. 24–54, 2014.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2019.

HORN, M. B.; STAKER, H. **Blended:** usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

IIYOSHI, T.; KUMAR, M. S. V. (Ord.). **Educação aberta:** o avanço coletivo da Educação pela tecnologia, conteúdo e conhecimento abertos. [Em linha]. [Brasil]: ABED/UNIP, 2014.

IMBERNÓN, F. **Formação docente e profissional:** formar-se a mudança e a incerteza. Trad. Silvana Cobucci Leite. 9. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias:** o novo ritmo da educação. Campinas: Papirus, 2015.

KENSKI, V. M. A urgência de propostas inovadoras para a formação de professores para todos os níveis de ensino. **Revista Diálogo Educacional**, 15(45), 423-441. 2015.

KENSKI, V. M. **Tecnologias e ensino presencial e a distância**. 12. ed. Campinas: Papirus, 2018.

KILPATRICK, J. Fincando estacas: uma tentativa de demarcar a educação matemática como campo profissional científico. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 4, n. 1, p. 99–120, 1996.

LEONTIEV, A. N. **Actividad, conciencia e personalidad.** Havana: Editorial Pueblo y Educación,1983.

LEONTIEV, A. N. **O desenvolvimento do psiquismo.** Trad. Manuel Dias Duarte. Lisboa: Livros Horizonte, 1978.

LEONTIEV, A. N. **O desenvolvimento do psiquismo.** Trad. Rubens Eduardo Farias. 3 ed. São Paulo: Centauros, 2018.

LEONTYEV, A. N. **Problems of the development of the mind. Moscow**: Progress, 1981.

LÉVY, P. **A inteligência coletiva:** por uma antropologia do ciberespaço. 4. ed. São Paulo: Loyola, 2003.

LÉVY, P. **As tecnologias da inteligência:** o futuro do pensamento na era da informática. Trad. Carlos Irineu da Costa. 3. reimp. São Paulo: Editora 34, 2023.

LÉVY, P. **Cibercultura**. Trad. Carlos Irineu da Costa. 4. reimp. São Paulo: Editora 34, 2021.

LÉVY, P. **O que é virtual**. Trad. Paulo Neves. 2. reimp. São Paulo: Editora 34, 2017.

LITTO, F.; FORMIGA, M. (Org.). **Educação a distância:** o estado da arte. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2009.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **Educação Matemática em Revista**. São Paulo, v. 4, p. 3-13. jan./jun. 1995.

MACEDO, R. S. **Compreender/mediar a formação:** o fundante da educação. Brasília: Líber Livro Editora, 2011.

MARCONI, M. de A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MARTENSSON, P. *et al*. Avaliadores de pesquisa: uma abordagem multidisciplinar para avaliar a prática e qualidade da pesquisa. **Pesquisa política**, v. 45, n. 3, p. 593–603, 2016.

MEDEIROS, S. M. de A. A teoria da atividade em Vygotsky, Leontiev e Engeström: os fundamentos da aprendizagem expansiva. **Revista HISTEDBR On-line**, Campinas, SP, v. 21, p. 1-24, 2021.

MEREDYK, F. **A formação de professores de matemática no contexto das tecnologias digitais:** desenvolvendo aplicativos educacionais móveis utilizando o software de programação app inventor 2. 146 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do

Paraná, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática, Curitiba, 2019.

METRING, R. A. **Pesquisas científicas:** planejamento para iniciantes. 3. reimpr. Curitiba: Juruá, 2015.

MIGUEL, A *et al.* A educação matemática: breve histórico, ações implementadas e questões sobre sua disciplinarização. **Revista Brasileira de Educação**, Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, n. 27, São Paulo, p. 71-73, set/dez, 2004.

MILANI, S. M. **Espaço formativo online:** aspectos da prática pedagógica dialogados por uma comunidade de professores de matemática de Rondônia durante a pandemia da Covid-19. 252 f. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Rio Claro, SP, 2024.

MINAYO, M. C. S. **O desafio do conhecimento:** pesquisa qualitativa em saúde. 14. ed. São Paulo: Hucitec, 2014.

MORAN, J. M. Educação híbrida: um conceito chave para a educação. In: BACICH, L.; TANZI, NETO, A.; TREVISANI, F. M. (Org.). **Ensino híbrido:** personalização e tecnologia na educação. Penso Editora, 2015a.

MORÁN, J. M. Mudando a Educação com Metodologias Ativas. In: SOUZA, C. A. de; MORALES, O. E. T. (Orgs.). Coleção Mídias contemporâneas. **Convergências midiáticas, educação e cidadania:** aproximações jovens. v. 2. PG: Foca Foto-PROEX/UEPG, 2015b.

MORAN, J. M. O que é educação a distância. In: **Informe CEAD - Centro de Educação a Distância**. SENAI, Rio de Janeiro, ano 1, n.5, out-dezembro de 1994, páginas 1-3. Atualizado em 2002.

MOURA, M. O. A atividade de ensino como ação formadora. In: CASTRO, A. D.; CARVALHO, A. M. P. de. (Org.). **Ensinar a ensinar: didática para a escola fundamental e média**. São Paulo: Cengage Learning, 2002.

MOURA, M. O. de. A atividade de ensino como unidade formadora. **Bolema** (Rio Claro), UNESP, v. 12, p. 29-43, 1996

MOURA, M. O. *et al.* **Revista Diálogo Educacional** – PUCPR, v. 10, n. 29, p. 205-229, 2010.

MOURA, M. O. **O educador matemático na coletividade de formação:** uma experiência com a escola pública. 2000. 131f. Tese (Livre Docência em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000.

MOURA, M. O. Pesquisa colaborativa: um foco na ação formadora. In: BARBOSA, Raquel L. Leite (Org.). **Trajetórias e perspectivas da formação de educadores**. São Paulo: Unesp, 2004.

MUNHOZ, A. P. G.; MOURA, M. O. de . Atividade de formação de professores de matemática mediada pela Atividade Orientadora de Ensino. **Obutchénie. Revista de Didática e Psicologia Pedagógica**, [S. l.], v. 4, n. 2, p. 355–381, 2020.

NOTARE, M.; BASSO, M. Geometria Dinâmica 3D: novas perspectivas para o pensamento espacial. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v. 14, n. 2, 2016.

NÓVOA, A. Os professores e a sua formação num tempo de metamorfose da escola. Seção Temática: resistências e (re)existências em espaços sociais de formação em tempos de neo-conservadorismo. **Educ. Realidade.** n. 44 (3), 2019.

NUÑEZ, I. B. Sistema de princípios didáticos derivados da teoria de P. Ya. Galperin, do enfoque Histórico Cultural de Vygotsky e da Teoria da Atividade de A. N. Leontiev. In: NUÑES, I. B. Vygotsky, Leontiev e Galperin: **A formação de conceitos e princípios didáticos**. Brasília: Liber Livro, 2009, p. 129-148.

OLIVEIRA, G. P. **A articulação entre história da matemática e tecnologias digitais via objeto de aprendizagem para mobilização e ressignificação de conhecimentos na formação de professores.** 362 f. 2023. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual do Ceará, Programa de Pós-Graduação em Educação, Fortaleza, 2023.

OLIVEIRA, J. K. C. R. **O processo de ensino e aprendizagem dos conceitos de razão e proporção mediado pela atividade orientadora de ensino na Educação Básica.** 2018. 105 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - Profmat). Instituto Federal do Piauí - IFPI, Floriano – PI, 2018.

OLIVEIRA, M. S. de. **Formação continuada com tecnologias digitais:** ensino de funções quadráticas. Curitiba: Appris, 2022.

OLIVEIRA, M. S. de; SILVA, M. D. F da. GeoGebra classroom: possibilidades inovadoras para o ensino de matemática. IN: NASCIMENTO, F. A. *et al.* (Org.). **Ciências, matemática, linguagens e novas tecnologias.** Fortaleza: Imprece, 2023a. p. 124-149.

OLIVEIRA, M. S. de; SILVA, M. D. F da. Um olhar sobre a teoria da atividade no ensino e aprendizagem de matemática com a inclusão de recursos digitais. **Revista Interfaces: Saúde, Humanas e Tecnologia,** [S. l.], v. 11, n. 2, p. 1783–1797, 2023b.

OLIVEIRA, S. L. **Tratado de metodologia científica:** projetos de pesquisas, TGI, TCC, monografias, dissertações e teses. São Paulo: Pioneira, 2007.

PAIS, L. C. Intuição, Experiência e Teoria Geométrica. **Zetetiké**, Campinas, SP, v. 4, n. 6, p. 65-74, jul./dez. 1996.

PAPERT, S. **A máquina das crianças:** repensando a escola na era da informática. Trad. Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

PAPERT, S. **Logo:** computadores e educação. Trad. José Arnaldo Valente; Beatriz Bitelman e Afira Ripper Vianna. São Paulo: Brasiliense, 1985.

PEREIRA, J. R. **Os usos das tecnologias digitais nas licenciaturas em matemática a distância em Minas Gerais**. 168 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Viçosa, Programa de Pós-Graduação em Educação, Viçosa, MG, 2018.

PEREIRA, S. R. **A utilização da plataforma google for education em uma experiência de formação continuada de professores de matemática:** olhares para a formação e para o formador. 133 f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal de Ouro Preto, Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Ouro Preto, MG, 2021.

PINEAU, G. **Genèse de l'écoformation:** du préfixe éco au vert paradigme de formation avec les environnements. Paris, L'Harmattan, 2023.

RODRIGUES, A. M. M. Por uma filosofia da tecnologia. In: GRINSPUN, M. P. S. Z. (org.). **Educação tecnológica**: desafios e perspectivas. São Paulo: Cortez, 2001.

SANNINO, A. Teachers' talk of experiencing: conflict, resistance and agency. **Teaching and Teacher Education**, v. 26, n. 4, p. 838-844, 2010.

SANTOS, C. A. dos; NACARATO, A. M. **Aprendizagem em geometria na Educação Básica:** a fotografia e a escrita na sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2021.

SANTOS, R. C. **Robótica educacional inclusiva:** uma experiência com alunos da rede pública de ensino. 2019. 180 f. Dissertação (Mestrado em Ensino). Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia Universidade do Extremo Sul Catarinense – Uesb, Vitória da Conquista – BA, p. 180. 2019.

SCHÖN, D. A. **Educando o profissional reflexivo:** um novo design para o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

SEBASTIÃO, D. **Teoria da atividade e lousa digital no ensino superior:** perspectivas para aprendizagem dos conceitos matemáticos. 2017. 182 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade do Extremo Sul Catarinense – Unesc, Criciúma – SC, 2017.

SILVA, G. A. da. **O uso de tecnologias digitais de informação e comunicação na formação de professores de matemática:** diálogos entre teoria e prática. 177 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Programa de Pós-Graduação em Educação, Cascavel, PR, 2024.

SILVA, H. M. **Usos/significados de materiais manipuláveis (régua e transferidor) e do software GeoGebra como formas alternativas de ensinar semelhança de triângulos a estudantes do 9º ano de uma escola pública de Rio Branco.** 2018. 170 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Federal do Acre – UFAC, Rio Branco – AC, 2018.

SILVA, I. I. de C. **Concepção de mediação com tecnologias digitais de informação e comunicação na formação de professores de matemática**. 86 f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Escola de Formação de Professores e Humanidades, Goiânia, 2021.

SILVA, J. E. **A formação continuada de professores de matemática no sul da Bahia:** metodologias ativas com uso das tecnologias digitais. 144 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática, Ilhéus, BA, 2023.

SILVA, L. V. Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação na Educação: três perspectivas possíveis. **Journal of Applied and Advanced Research**, v. 6, n. 1, p. 143-159. Sorocaba-SP, 2020.

SILVA, M. Criar e professora em curso online: relato de experiência. SILVA, M. (Org.). **Educação online.** 4. ed. São Paulo: Loyola, 2012.

SOMMERMAN, A. **Formação e transdisciplinaridade:** uma pesquisa sobre as emergências formativas do CETRANS. 2003. Dissertação (Mestrado em Ciências da Educação). Universidade de Lisboa. Portugal. 2003.

SOUZA, F. N. L. de. **Um estudo das relações entre os lados e os ângulos de um triângulo, inseridas em uma carta escrita por Al-Biruni, com direcionamentos à formação do professor de matemática.** 174 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Natal, 2022.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional.** 17. ed. Petrópolis: Vozes, 2014.

THOMPSON, J. B. **Ideologia e cultura moderna Teoria social crítica na era dos meios de comunicação de massa.** Petropólis: Vozes, 2009.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais:** a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Atlas, 1987.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA – Uesb. **Renovação de Reconhecimento do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, campus de Vitória da Conquista – BA**. Vitória da Conquista: Uesb, 2008.

VAGARINHO, J. Como identificar a originalidade num artigo científico ou numa tese de doutoramento? **Educar em Revista**, v. 35, p. 181-207, 2019.

VALENTE, J. A. (Org.). **Formação de educadores para o uso da informática na escola**. Campinas, SP: Unicamp, 2003.

VALENTE, J. A. **Formação de professores para o uso pedagógico das TIC**. Campinas: UNICAMP, 2011.

VALENTE, J. A. **Liberando a mente:** computadores na educação especial. Campinas: Gráfica Central da UNICAMP, 1991.

VALENTE, J. A. **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas: UNICAMP/NIED, 1999.

VALENTE, J. A. Prefácio - In: BACICH, L; TANZI NETO, A.; TREVISANI, F. M. (Org.). **Ensino híbrido:** personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

VAN HIELE, P. M. **Structure and Insight: a theory of mathematics education**. Orlando: Academic Press, 1986.

VERASZTO, E. V., *et al*. Tecnologia: buscando uma definição para o conceito. **Prisma.com (Portugual)**, n. 8, p. 19-46, 2009.

VIGOTSKI, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. São Paulo: Ícone, 2010.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente.** São Paulo: Martins Fontes, 2019.

VYGOTSKY, L.S. **Pensamento e linguagem**. Trad. Jéferson Luiz Camargo; revisão técnica José Cipolla Neto. São Paulo: Martins Fontes, 1993.

VIGOTSKY, L. S. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. Trad. Maria de Pena Villalobos. 14. ed. São Paulo: Ícone, 2016.

VYGOTSKY, L. S. **Mind in society. cambridge**: Harvard University Press, 1978.

VYGOTSKY, L. S. The instrumental method in psychology. In: WERTSCH, J. (Org.). **The concept of activity in Soviet psychology**. Sharpe ed. Armonk, N. Y.: [s.n.], 1981. p. 134–143.

WITT, C. M. **A didática da matemática como disciplina:** um estudo em cursos de licenciatura em matemática a distância. 2019. 167 f. Dissertação (Mestrado Educação em Ciências e em Matemática). Universidade Federal do Paraná – UFPR, Curitiba – PR, 2019.

WITTGENSTEIN, L. **Observaciones sobre los fundamentos de la matemática**. Madri: Alianza Editorial, 1987.