

ESTUDO NUMÉRICO ENTRE AS BUSCAS DE ARMIJO E DE GOLDSTEIN NO MÉTODO DO GRADIENTE

EMANUEL MENDES QUEIROZ¹, MÁRCIO ANTÔNIO DE ANDRADE BORTOLOTI²,
SAMARA VIRIATO VILAR DIAS³

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, BA, Brasil

emanuelmq@uef.edu.br¹, mbortoloti@uesb.edu.br², samaravvilar@gmail.com³

Resumo

Neste trabalho, apresentamos um estudo comparativo entre as buscas de Armijo e de Goldstein, empregadas no Método do Gradiente para a minimização da função Quociente de Rayleigh. Os experimentos numéricos evidenciaram que a busca de Goldstein apresentou melhor desempenho nas matrizes de ordem mais alta, pois a busca de Armijo forneceu comprimentos de passo pequenos, principalmente quando se definiu uma tolerância mais estrita para a norma do gradiente.

Palavras-Chave: Buscas lineares; Método do Gradiente; Quociente de Rayleigh.

Introdução

Na Otimização Contínua, desenvolve-se métodos iterativos que asseguram sequências que convergem para o ponto mínimo de uma função e que têm importantes aplicações práticas que podem ser vistas, por exemplo, na pressão exercida pela mão de um robô ao pegar um objeto, veja [1]. Tais métodos podem ser equipados com estratégias que visam a determinação de um comprimento de passo aceitável que forneça um decrescimento suficiente na função objetivo. Essas estratégias são chamadas de buscas lineares. Neste trabalho, realizamos um estudo numérico para comparar o desempenho entre as buscas de Armijo e de Goldstein quando empregadas no Método do Gradiente. Para o desenvolvimento desse estudo, consideramos o problema de minimizar o Quociente de Rayleigh.

Fundamentação Teórica

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Dados $x \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ uma direção de descida e $\eta \in (0, 1)$, a busca de Armijo, [2, Pág. 67], é uma estratégia que consiste em determinar um comprimento de passo $\alpha > 0$, tal que

$$f(x + \alpha d) \leq f(x) + \eta \alpha \nabla f(x)^T d. \quad (1)$$

Uma característica dessa busca é a possibilidade de admissão de comprimentos de passo muito pequenos. Isso pode aumentar o esforço computacional, tornando assim a resolução do problema mais lenta. Para contornar essa dificuldade, é proposto na literatura uma outra estratégia, que é conhecida como busca de Goldstein, [2, Pág. 72]. Essa busca consiste em obter um comprimento de passo $\alpha > 0$ que satisfaça as seguintes desigualdades:

$$f(x) + \eta_2 \alpha \nabla f(x)^T d \leq f(x + \alpha d) \leq f(x) + \eta_1 \alpha \nabla f(x)^T d, \quad (2)$$

onde $0 < \eta_1 < \eta_2 < 1$. Nas desigualdades acima, gostaríamos de observar que a da direita é a de Armijo, que garante um decrescimento da função objetivo, já a da esquerda busca eliminar a aceitação de comprimentos de passo muito pequenos.

Desenvolvimento e Metodologia

Na realização do estudo numérico nós utilizamos no Método do Gradiente as buscas mencionadas. Esse método visa minimizar uma função utilizando a direção do gradiente, que é a direção de decrescimento mais acentuado da função objetivo. Suas propriedades de convergência podem ser vistas em [2, Capítulo 3, Subseção 3.1.2], para o caso da busca de Armijo, e obtidas a partir de [3, Teorema 3.2], para o caso da busca de Goldstein.

Para este estudo, consideramos o problema de determinar o mínimo da função Quociente de Rayleigh. Essa função é definida por $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^T A x / x^T x$, onde A é uma matriz simétrica de ordem n e $(\cdot)^T$ denota a matriz transposta. O valor mínimo dessa função é o menor autovalor da matriz A .

O Algoritmo 1 a seguir apresenta o Método do Gradiente equipado com a busca de Armijo (MGA) ou com a busca de Goldstein (MGG) aplicado à função Quociente de Rayleigh.

Algoritmo 1: MÉTODO DO GRADIENTE

- 1 Tome um ponto inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$ e faça $k := 0$
- 2 $d_k := -(2(A - f(x_k)I)x_k)/(x_k^T x_k)$
- 3 Se $\|d_k\| > \epsilon$, calcule α_k por (1) ou (2)
- 4 $x_{k+1} := x_k + \alpha_k d_k$
- 5 $k \leftarrow k + 1$ e retorne para o passo 2

Nos testes desenvolvidos, consideramos matrizes simétricas de ordem 5 e 20, onde, para cada ordem, tomamos 10 matrizes geradas aleatoriamente. Além disso, tomamos 10 pontos iniciais para cada matriz, totalizando 100 problemas para cada ordem. Utilizamos como critérios de parada o número máximo de iterações igual a 10000 ou o comprimento de passo computado menor do que $1.E-06$ para algum k ou $\|d_k\| \leq \epsilon$ (os ϵ testados são apresentados na Figura 1). Esses valores de ϵ foram tomados a partir dos testes numéricos onde constatamos que, nesse intervalo, o MGA e o MGG evidenciam suas potencialidades. Os códigos utilizados neste trabalho, implementados na linguagem de programação Julia, estão livremente disponibilizados em <https://github.com/petimatematica/gradientmethod>.

Resultados Numéricos

Nesta seção, apresentamos uma comparação entre o MGA e o MGG na minimização da função Quociente de Rayleigh. Como pode ser visto na Figura 1, considerando as matrizes de ordem 5, o MGA apresentou melhor desempenho para os ϵ testados (o MGG atingiu o número máximo de iterações para alguns casos), com exceção de $\epsilon = 1.E-08$, onde o MGA apresentou comprimentos de passos muito pequenos. Já para as matrizes de ordem 20, o MGG é mais eficiente que o MGA. Isso pode ser explicado, visto que, a partir do $\epsilon = 1.E-08 + r/5$, o MGA apresenta comprimentos de passo muito pequenos devido à natureza intrínseca da busca e, conseqüentemente, resolve menos problemas.

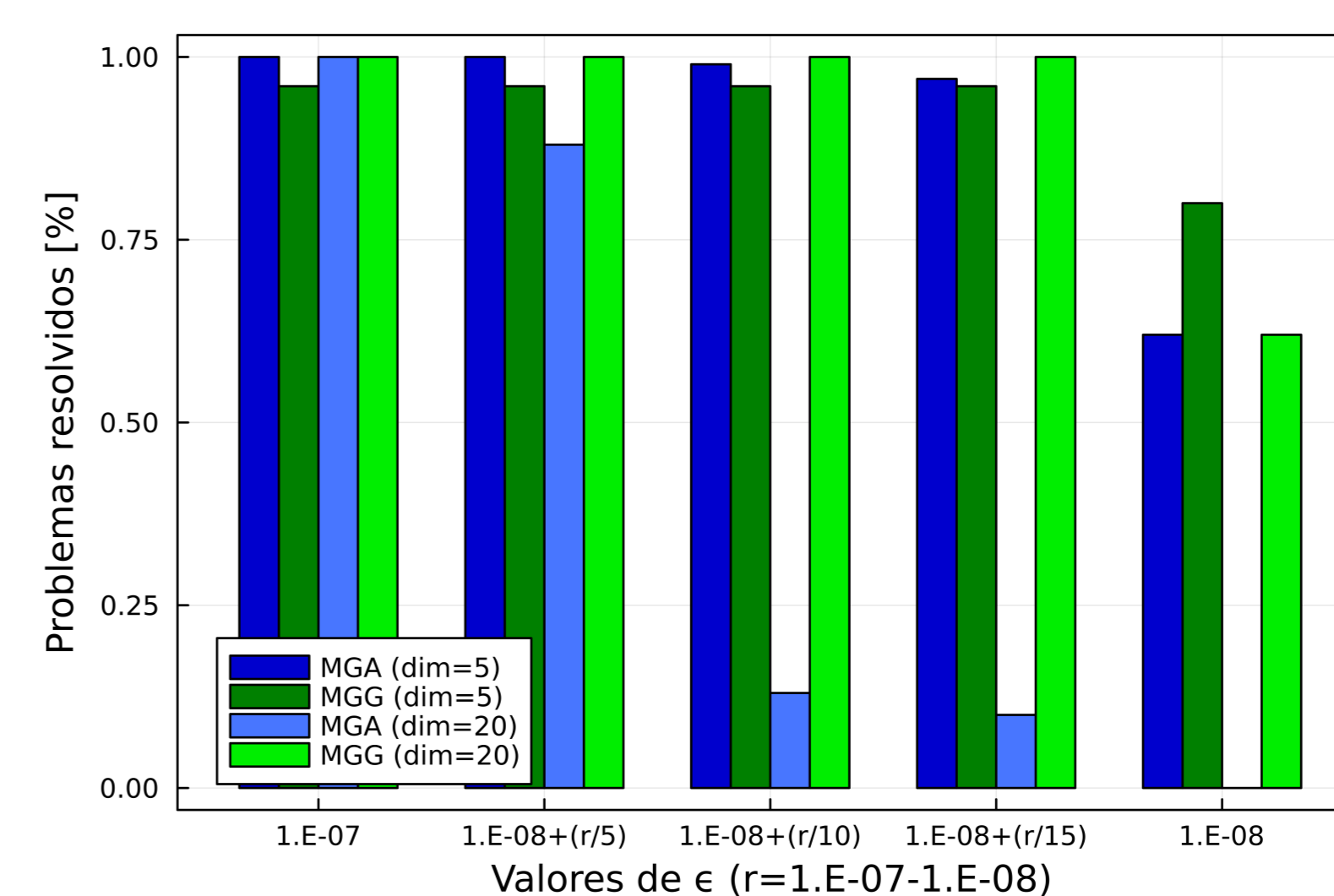


Figura 1: Gráfico comparativo entre o MGA e o MGG considerando as matrizes de ordens 5 e 20 para os valores de ϵ testados.

Referências

- [1] Helmke, U., Ricardo, S. e Yoshizawa, S. (2002). Newton's algorithm in Euclidean Jordan algebras, with applications to robotics. *Communications in Information and Systems*, 2(3), 283-298.
- [2] Izmailov, A. e Solodov, M. (2018). *Otimização, volume 2: métodos computacionais*. IMPA.
- [3] Nocedal, J. e Wright, S. J. (Eds.). (1999). *Numerical optimization*. New York, NY: Springer New York.

Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer ao Programa de Educação Tutorial Institucional da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (PETI/UESB) pelas bolsas de estudo e à UESB pelo apoio financeiro na hospedagem e na alimentação.